Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Nour El Houda BOURDJI

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET SOLUTIONS ONDES VOYAGEUSES

soutenu publiquement le 16 Juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Djilali LAID	MCA	UMAB Mostaganem
Examinateur :	Zakaria BEKKOUCHE	MCB	UMAB Mostaganem
Encadreur :	Zoubir DAHMANI	Professeur	UMAB Mostaganem

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Dédicaces

ALHAMDO LI ALLAH le Tout Puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont encouragée à suivre mes études

Qui m'ont aidée à affronter les difficultés

A tous les étudiants et à toutes étudiantes de la promotion **M2 MCO** et particulièrement (H. Hafsa, A. Fatima Zahraa, B. Marwa, S. Amel, B. Nabila, B. Fatima, T. Khadera, M. Touatia, R. Nour El Houda), je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des soeurs et des amies sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble

Je n'oublie pas bien sur de dédier Hada Baara, B. Abdelwahab, B. Mohammed Nadjib, A. Walid pour leur aide, leurs utiles conseils

Je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur...in chaa ALLAH.

Remerciements

ALHAMDO LI ALLAH pour la santé, l'aide et le courage qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études afin que je puisse en arriver là...

Mes sincères remerciements à **Mr. Zoubir Dahmani** pour son aide, son sérieux, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette étude, et sa patience durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail, en l'occurrence :

Mr. Laid Djilali et **Mr. Bekkouche Zakaria.**

J'adresse un grand merci à mes parents, la plus grande bénédiction que **ALLAH** m'a accordée, sans eux, je ne serais jamais là où je suis maintenant.

Je tiens à remercier mes soeurs, mes frères la source de force et de bonheur dans ma vie, qui ont toujours été présents lorsque j'en ai eu besoin.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail et à tout lecteur aussi.

Table des matières

Table des figures

Index des notations

$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des nombres entiers naturels sans 0.
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	: Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
$[a, b]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
(a, b)	: Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$C([a, b], \mathbb{R})$	: Espace des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\|.\|_\infty$	: Norme infinie.
$\|.\|_E$	: Norme de l'espace E.
$\jmath_a^\alpha$	: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
I^α	: Intégrale fractionnaire de Khalil d'ordre $\alpha > 0$.
D^n(ou $\frac{d^n}{dx}$)	: Dérivée d'ordre n.
$f^{(n)}$	: Dérivée $n^{ième}$ de f.
D_a^α	: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^C D_a^\alpha$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
T^α	: Dérivée fractionnaire au sens de Khalil d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

La dérivation fractionnaire est un thème de recherche ancien. Ses origines peuvent remonter à l'époque où Newton et Leibniz ont développé le calcul différentiel et intégral. Dans ce sens, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt}$ pour noter la $n^{ième}$ dérivée. Quand il l'a annoncé dans une lettre à l'Hôpital, ce dernier lui a répondu :

Que signifie $\frac{d^n}{dt}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette fameuse lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui vue comme un indice de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (ou bien nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette théorie mathématique "fractionnaire".

Le calcul fractionnaire a été développé sérieusement pour la première fois dans la conférence de New Havan en 1974. Depuis, il a gagné une considération très importante grâce aux nombreuses applications dans beaucoup de domaines des sciences appliquées.

D'où la néccissité ici d'établir au lecteur une théorie claire pour l'étude des opérateurs fractionnaires en général et aussi pour les systèmes d'ordre fractionnaire.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude d'une classe de problèmes différentiels fractionnaires au sens de Caputo qui généralise un problème inspiré de la physique, et aussi, l'étude des "traveling waves". Le cas d'ordre entier et celui d'ordre fractionnaire sont considérés. L'approche dérivative de Khalil est aussi présente dans cette $2^{ième}$ étude. La méthode numérique "Tanh" de Malfielt et Hereman est appliquée pour déterminer les solutions ondes voyageuses.

Présentation du mémoire :

Ce mémoire de Master se compose d'une Introduction, de trois Chapitres et d'une Conclusion.

Le premier chapitre comporte quelques notions de bases ainsi que des définitions qui nous serons utiles par la suite. Nous introduisons le calcul fractionnaire, la théorie des opérateurs, nous insistons ici en particulier sur les définitions et les différentes propriétés des intégrales et des dérivées fractionnaires au sens de Rieman-Liouville et de Caputo et aussi au sens de Khalil, et aussi la théorie des points fixes sera rappelée dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour le problème différentiel fractionnaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\alpha}u(x) = f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 u(x) - \beta_1 u''(x) \\ D^{\beta}v(x) = f_2(x, u(x), v(x)) + \alpha_2 v(x) - \beta_2 v''(x) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0 \\ x \in [0,1] \ ; \ 3 < \alpha, \beta < 4. \end{array}\right.$$

Nous commençons par présenter la solution intégrale associée à notre problème, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solutions par application du principe de contraction de Banach.

Nous signalons au passage que le problème ci dessus généralise pas mal de cas classiques avec des dérivées d'ordre quatre modélisant un phénomème en Mécanique. Ces cas peuvent être vus comme cas-limites au système ci dessus.
Ceci est notre motivation pour traiter ce problème différentiel couplé avec les dérivées de Caputo ; dérivées qui vont nous permettre d'utiliser des conditions initiales avec des dérivées classiques !

Le troisième chapitre est consacré aux solutions dites : ondes voyageuses ou encore ondes progressives. Après introduction des définitions, nous introduisons les étapes de la méthode "Tanh" (de Malfliet et Hereman). Puis, pour déterminer les solutions ondes voyageuses, nous appliquons cette méthode sur deux exemples, le premier exemple est une équation d'évolution qui a une relation avec les déformations de poutres. Cette équation admet des dérivées d'ordre entier. Quant à l'exemple deux, il traite un problème différentiel au sens des dérivées de Khalil.

Finalement, nous terminons le travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions fondamentales nécessaires qui concernent le calcul fractionnaire, un peux de la la théorie des opérateurs et aussi des petits rappeles sur la théorie des points fixes, et aussi des petits rappels.

2 Un peux du calcul fractionnaire

2.1 Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma, qui permet de prolonger la factorielle aux valeurs non entières.

Définition 1.1 *[7] Pour tout nombre réel α tel que $\alpha > 0$, la fonction Gamma d'Euler Γ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \ \ \alpha > 0.$$

Proposition 1.1 *[7] Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)...(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.
3. $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $n \geq 1$.

Valeurs particulières

Nous avons en particulier :

* $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1-1} du = 1$.
* $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.
* $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$.

Remarque 1.1 **(1)** *La fonction Gamma n'est pas définie pour les valeurs négatives entières. Ces sont des pôles pour cette fonction.*

(2) *Le prolongement de la fonction Gamma pour une valeur négative non entière se fait par la formule $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ telle que α est strictement entre -1 et 0.*

3 Quelques opérateurs fractionnaires

3.1 Opérateurs de Riemann-Liouville

Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville aide à calculer α fois l'intégration de la fonction f.

Définition 1.2 *[1] [11] L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$ pour une fonction $f \in C([a,b])$ est défini par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds, & \alpha > 0 \\ f(x), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque 1.2 *Dans la formule (1.1), en prenant $a = 0$, J_a^α sera donc notée J^α.*

Proposition 1.2 *[9] Soient f et $g \in C([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $A, B \in \mathbb{R}$, nous avons :*

1. $J_a^\alpha (J_a^\beta f) = J_a^\beta (J_a^\alpha f) = J_a^{\alpha+\beta} f$.
2. $J_a^\alpha [Af + Bg] = AJ_a^\alpha f + BJ_a^\alpha g$.

Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *[1] [11] La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de $f \in C([a,b])$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \; n-1 < \alpha < n, \; n \in \mathbb{N}^* \\ &= D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.3 *[9] Soient $\alpha > \beta > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < \alpha < n$ et $f \in C([a,b])$, nous avons :*

1. D_a^α est un opérateur linéaire.
2. $D_a^\beta (J_a^\alpha f)(x) = J_a^{\alpha-\beta} f(x)$.
3. En particulier, si $\alpha = \beta$, alors $D_a^\alpha \, (J_a^\alpha f)(x) = f(x)$.
4. Si $D_a^\alpha f(x) = 0$, alors $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^{\alpha+j-m}$.

3.2 Opérateurs de Caputo

Dérivation fractionnaire de Caputo

Définition 1.4 *[1] [8] Soit $f \in C^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :*

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds \qquad n-1 < \alpha < n, \; n \in \mathbb{N}^* \\ &= J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.4 *[9] Soient $\alpha > \beta > 0$ et $f \in C([a,b])$, alors :*

$${}^c D_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors :

$${}^c D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x).$$

3.3 Dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo

Proposition 1.5 *[9] Soient $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in C^n([a,b])$, $\alpha>0$. La relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\ &= D_a^\alpha f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}. \end{aligned}$$

3.4 Opérateurs de Khalil

Intégration fractionnaire de Khalil

Définition 1.5 *[6] [10] L'intégrale fractionnaire au sens de Khalil d'une fonction continue $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ d'ordre α, où $0<\alpha<1$ est définie par :*

$$(I^\alpha f)(x)=\int_0^x \tau^{\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

Dérivation fractionnaire de Khalil

Définition 1.6 *[6] [10] Soit $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$. La dérivée au sens de Khalil de f d'ordre α, $0<\alpha<1$ est définie par :*

$$(T^\alpha f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(x+\varepsilon x^{1-\alpha})-f(x)}{\varepsilon}\right),\ x>0.$$

Nous nous contentons de la propriété qui dit que lorsque f est C^1, alors nous avons :

$$(T^\alpha f)(x)=x^{1-\alpha}\frac{df(x)}{dx}.$$

4 Quelques concepts de la théorie des points fixes

4.1 Notions nécessaires

Définition 1.7 *[5] [8] (Norme)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Appelons une norme sur l'espace E toute fonction notée $\parallel . \parallel$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ si les propriétes suivantes sont vérifiées :

1. $\parallel x\parallel=0\Longleftrightarrow x=0$ *(Séparation).*
2. $\parallel \lambda x\parallel=|\lambda|\parallel x\parallel$, $\forall x\in E$, $\forall\lambda\in\Bbbk$ *(Homogénéité).*
3. $\parallel x+y\parallel\leq\parallel x\parallel+\parallel y\parallel, \forall x,\ y\in E$ *(Inégalité triangilaire).*

Définition 1.8 *[5] [8] (Espace vectoriel normé)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous disons que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\parallel . \parallel$.

Définition 1.9 *[5] [8] (Suite de Cauchy)*

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E,\parallel . \parallel)$. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si nous avons la relation suivante :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon,\forall p,\ q\geq N_\varepsilon:\ \parallel x_p-x_q\parallel<\varepsilon.$$

Définition 1.10 *[5] [8] (Espace complet)*
Un espace véctoriel normé $(E, \| \, . \, \|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est une suite convergente dans E. Un tel espace est aussi appel espace de Banach.

Définition 1.11 *[8] (Ensemble borné)*
Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset E$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$ nous avons :

$$\| x \| \leq M.$$

Définition 1.12 *[8] (Fonction Lipchitzienne)*
Soient E une partie de $\mathbb{R}$, et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous disons que f est Lipschitzienne si :

$$\exists k > 0, \ \forall (x, y) \in E^2 : | f(x) - f(y) | \leq k \mid x - y \mid .$$

Définition 1.13 *[8] Soit $f : E \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue. f est k-Lipschitzienne par rapport à la deuxiéme variable si :*

$$\exists k > 0, \forall (t, x), (t, y) \in E \times \mathbb{R}^d : \| f(t, x) - f(t, y) \| \leq k \| x - y \| .$$

Définition 1.14 *[8] (Application contractante)*
Soient F_1 et F_2 deux espaces de Banach. L'application $f : F_1 \longrightarrow F_2$ est dite contractante si :

$$\exists k, \ 0 < k < 1, \forall (x, y) \in F_1^2 : \| f(x) - f(y) \|_{F_2} \leq k \| x - y \|_{F_1} .$$

Définition 1.15 *[8] (Point fixe)*
Soit f une application d'un ensemble E dans lui même, Appelons point fixe de f tout point $x \in E$ tel que nous ayons :

$$f(x) = x.$$

4.2 Principe de contraction de Banach

Les théorèmes des points fixes permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné. Dans le cas des EDFs, transformons notre problème en un problème du point fixe, et nous essayons de fournir des conditions pour lesquelles, une application donnée admet un point fixe, ce point fixe "lorsqu'elle est unique" il sera considéré comme la solution unique pour notre problème.

Théorème 1.1 *[8] Soient E un espace de Banach et $H : E \longrightarrow E$ est une applicaion contractante. Alors il existe un unique point $u \in E$ tel que $Hu = u$.*

5 Deux lemmes importants

Les lemmes suivants sont utilisés dans la démonstration de nos résultats sur l'obtension des solutions intégrales.

Lemme 1.1 *[9] [11] Soient $\alpha \geq 0$ et $h \in C^n([0,b])$. L'équation*

$$^{c}D^{\alpha}h(x) = 0$$

possède des solutions de type :

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i,$$

telles que $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2 *[9] [11] Soient $\alpha \geq 0$ et $h \in C^n([0,b])$, alors*

$$J^{\alpha}\, {}^{c}D^{\alpha}h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i + h(x),$$

tels que $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Chapitre 2

Système Différentiel Couplé au Sens de Caputo

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales. Il s'agit d'un systèmes couplé au sens de Caputo. Nous étudions l'existence et l'unicité de solution pour ce systeme après avoir trouvé la solution intégrale associée. Nous montrons à l'aide du principe de contraction de Banach, que sous certaines hypothèses, nous avons l'existence et l'unicité d'une solution pour notre problème. Il est à noter que le cas qu'on considère dans ce chapitre généralise pas mal de problèmes traitant la déformation des "beams" et les cas qui se trouvent dans la litérature sont des cas limites pour le système que nous allons proposer dans ce chapitre.

1 Proposition du système et motivation

Soit le problème différnetiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} D^{\alpha}u(x) = f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 u(x) - \beta_1 u''(x) \\ D^{\beta}v(x) = f_2(x, u(x), v(x)) + \alpha_2 v(x) - \beta_2 v''(x) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0 \\ x \in [0,1] \ ; \ 3 < \alpha, \beta < 4, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

avec $f_i(x,0,0) \neq 0$; $i = 1,2$, $f_i \in C([0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$; α_i, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$; D^{α}, D^{β} sont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Il s'agit bien d'un système différentiel couplé dont les dérivées sont au sens de Caputo.
Ce cas peut se voir comme un cas-limite du système de Wang et Yang ci-dessous ; ceci est donc notre motivation pour traiter ce problème différentiel couplé avec les dérivées de Caputo ; dérivées qui vont nous permettre certainement d'utiliser des conditions initiales avec des dérivées classiques !

2 Historique du problème

En 1986 : Aftabizadah [2] démontre un résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f est bornée pour le problème :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u''(x)) \\ u(0) = u_1, u(1) = u_2 \\ u''(0) = u_3, u''(1) = u_4 \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En 1989 : Agarwal [3] considère le cas général d'EDO d'ordre 4 de type "beam"

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)) \\ u(0) = a, u'(0) = b \\ u(1) = c, u''(1) = d \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En 1991 : Pino [14] traite l'existence des solutions pour le problème posé en 1986 dans le cas où f est continue (avec d'autre conditions).

En 2003 : Li [12] s'intéresse aux solutions positives du problème suivant :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + \beta u''(x) - \alpha u(x) = f(x, u(x)) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nous notons au passage que ce problème est utilisé en mécanique pour modéliser la déformation d'une poutre élastique supportée aux extrémités.

En 2020 : Wang et Yang [15] étendent le travail de Li pour un système couplé de type :

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 u(x) - \beta_1 u''(x) \\ v^{(4)}(x) = f_2(x, u(x), v(x)) + \alpha_2 v(x) - \beta_2 v''(x) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \\ v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0 \\ x \in [0, 1]\ . \end{cases}$$

Ceci étant, mais il reste toujours d'autres problèmes liés à (2.1) et qui n'avons pas cités dans ce chapitre. Nous nous sommes contentés de rappeler l'essentiel de ces problèmes.

3 Représentation intégrale

Nous déterminons la solution intégrale du problème fractionnaire (2.1) dans le but de passer après à étudier l'existence d'une solution unique.

Nous appliquons J^α à l'équation une du problème (2.1), nous trouvons alors :

$$J^\alpha D^\alpha u(x) = J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^\alpha u(x) - \beta_1 J^\alpha u''(x).$$

Donc,

$$u(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i + J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^\alpha u(x) - \beta_1 J^\alpha u''(x).$$

Alors,

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^\alpha u(x) - \beta_1 J^\alpha u''(x)$$
$$c_i \in \mathbb{R} \ , (i = 0, ..., 3).$$

Remplaçons les conditions initiales de notre problème, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow c_0 = 0 \\ u(1) = 0 &\Rightarrow c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) \mid_{x=1} + \alpha_1 J^\alpha u(1) - \beta_1 J^\alpha u''(1) = 0 \\ = 0 &\Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + J^\alpha f_1(1, u(1), v(1)) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$u'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + J^{\alpha-1} f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^{\alpha-1} u(x) - \beta_1 J^{\alpha-1} u''(x) = 0.$$

Donc,

$$u''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + J^{\alpha-2} f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^{\alpha-2} u(x) - \beta_1 J^{\alpha-2} u''(x).$$

Comme $u''(0) = 0$, alors $c_2 = 0$,

et

$$\begin{aligned} u''(1) = 0 &\Rightarrow 2c_2 + 6c_3 + J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) + \alpha_1 J^{\alpha-2} u(1) - \beta_1 J^{\alpha-2} u^{''}(1) = 0 \\ = 0 &\Rightarrow 6c_3 + J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) = 0 \\ = 0 &\Rightarrow c_3 = -\frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$c_1 + c_2 + c_3 + J^\alpha f_1(1, u(1), v(1)) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) - J^\alpha f_1(1, u(1), v(1)).$$

Doù, nous tirons :

$$\begin{aligned} u(x) = &\left[\frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) - J^\alpha f_1(1, u(1), v(1))\right] x - \frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) x^3 \\ &+ J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) + \alpha_1 J^\alpha u(x) - \beta_1 J^\alpha u''(x). \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement que précédement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} v(x) = &\left[\frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1, u(1), v(1)) - J^\beta f_2(1, u(1), v(1))\right] x - \frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1, u(1), v(1)) x^3 \\ &+ J^\beta f_2(x, u(x), v(x)) + \alpha_2 J^\beta u(x) - \beta_2 J^\beta u''(x). \end{aligned}$$

Finalement, le problème (2.1) est équivalent à la formule intégrale suivante qui est donnée par le couple (u, v) tel que :

$$\begin{aligned} u(x) = &[\frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) - J^\alpha f_1(1, u(1), v(1))] x \\ &- \frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1, u(1), v(1)) x^3 + J^\alpha f_1(x, u(x), v(x)) \\ &+ \alpha_1 J^\alpha u(x) - \beta_1 J^\alpha u''(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(x) = &[\frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1, u(1), v(1)) - J^\beta f_2(1, u(1), v(1))] x \\ &- \frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1, u(1), v(1)) x^3 + J^\beta f_2(x, u(x), v(x)) \\ &+ \alpha_2 J^\beta v(x) - \beta_2 J^\beta v''(x). \end{aligned}$$

Nous remarquons, que la deuxième implication est triviale à vérifier !

4 Transformation du système

Nous considérons l'application suivante :
$H : (E \times E, \| \, . \, \|_{E\times E}) \to (E \times E, \| \, . \, \|_{E\times E})$

$$u, v \mapsto H(u,v)(x) = (H_1(u,v)(x), H_2(u,v)(x)),$$

telle que,

$$E = \Big\{ u, \ u \in C^2([0,1]) \Big\}$$

est un espace de Banach muni de la norme

$$\| u \|_E = \| u \|_\infty + \| u'' \|_\infty,$$

avec

$$\| u \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} | u(x) | \, .$$

L'espace produit

$$(E \times E, \| \, . \, \|_{E\times E})$$

est aussi un espace de Banach muni de :

$$\| (u,v) \|_{E\times E} = \| u \|_E + \| v \|_E \, .$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} H(u,v)(x) = (&[\frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1,u(1),v(1)) - J^{\alpha} f_1(1,u(1),v(1))]x \\ &- \frac{1}{6} J^{\alpha-2} f_1(1,u(1),v(1))x^3 + J^{\alpha} f_1(x,u(x),v(x)) + \alpha_1 J^{\alpha} u(x) - \beta_1 J^{\alpha} u''(x); \\ &[\frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1,u(1),v(1)) - J^{\beta} f_2(1,u(1),v(1))]x - \frac{1}{6} J^{\beta-2} f_2(1,u(1),v(1))x^3 \\ &+ J^{\beta} f_2(x,u(x),v(x)) + \alpha_2 J^{\beta} u(x) - \beta_2 J^{\beta} u''(x)), \end{aligned}$$

où $x \in [0,1]$.

Nous sommes maintenant apte à aborder notre étude dans le cadre de la théorie des points fixes.

5 Existence et unicité

Nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Le problème (2.1) admet une solution unique pourvu que* f_i $(i = 1,2)$ *soient des fonctions* k, k'*-Lipchitziennes et* $0 < M + N < 1$,
où :

$$M := \max \left\{ \frac{2k_1 + | \alpha_1 | + | \beta_1 | + \alpha(\alpha-1)(2k_2 + | \alpha_1 | + | \beta_1 |)}{\Gamma(\alpha+1)} \ ; \ \frac{2k_2 + \alpha^2 - \alpha + 1}{\Gamma(\alpha+1)} \right\},$$

$$N := \max \left\{ \frac{2k'_1 + | \alpha_2 | + | \beta_2 | + \beta(\beta-1)(2k'_2 + | \alpha_2 | + | \beta_2 |)}{\Gamma(\beta+1)} \ ; \ \frac{2k'_2 + \beta^2 - \beta + 1}{\Gamma(\beta+1)} \right\},$$

avec $k := \max \{k_1, k_2\}$ *et* $k' := \max \{k'_1, k'_2\}$, $(k, k' \in \mathbb{R}_+^*)$.

Preuve. Avant de commencer notre preuve, nous signalons que ce probleme est original et à notre connaissance, il n'a pas encore été étudié.
Nous allons essayer donc de chercher des conditions sur les données du problème (2.1) pour qu'il admette une solution unique. Pour cela, nous appliquons le principe de contraction de Banach.

Soient (u,v), $(w,z) \in E \times E$ et $x \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mid H_1(u,v)(x) - H_1(w,z)(x) \mid =& \Big| \left[\frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,u(1),v(1)) - J^{\alpha}f_1(1,u(1),v(1))\right]x \\
&- \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,u(1),v(1))x^3 + J^{\alpha}f_1(x,u(x),v(x)) + \alpha_1 J^{\alpha}u(x) \\
&- \beta_1 J^{\alpha}u''(x) - \left[\frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,w(1),z(1)) - J^{\alpha}f_1(1,w(1),z(1))\right] \\
&x + \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,w(1),z(1))x^3 \\
&-J^{\alpha}f_1(x,w(x),z(x)) - \alpha_1 J^{\alpha}w(x) + \beta_1 J^{\alpha}w''(x) \mid
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq& \Big| \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,u(1),v(1)) - J^{\alpha}f_1(1,u(1),v(1)) \\
&- \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,u(1),v(1)) + J^{\alpha}f_1(x,u(x),v(x)) + \alpha_1 J^{\alpha}u(x) \\
&- \beta_1 J^{\alpha}u''(x) - \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,w(1),z(1)) + J^{\alpha}f_1(1,w(1),z(1)) \\
&+ \frac{1}{6}J^{\alpha-2}f_1(1,w(1),z(1)) - J^{\alpha}f_1(x,w(x),z(x)) \\
&-\alpha_1 J^{\alpha}w(x) + \beta_1 J^{\alpha}w''(x) \mid
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq& \mid J^{\alpha}f_1(1,w(1),z(1)) - J^{\alpha}f_1(1,u(1),v(1)) \mid \\
&+ \mid J^{\alpha}f_1(x,u(x),v(x)) - J^{\alpha}f_1(x,w(x),z(x)) \\
&\mid + \mid \alpha_1 J^{\alpha}(u-w)(x) \mid + \mid \beta_1 J^{\alpha}(w''-u'')(x) \mid
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}(f_1(s,w(s),z(s)) - f_1(s,u(s),v(s)))ds \Big| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(f_1(s,u(s),v(s)) - f_1(s,w(s),z(s)))ds \Big| \\
&+ \frac{\mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(u-w)(s)\,ds \Big| + \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha)} \Big| \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(w''-u'')(s)\,ds \Big| .
\end{aligned}$$

Par passage à la norme sup sur $[0,1]$, nous obtenons :

$$\| H_1(u,v) - H_1(w,z) \|_{\infty} := \sup_{[0,1]} \mid H_1(u,v) - H_1(w,z) \mid$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mid f_1(s,u(s),v(s)) - f_1(s,w(s),z(s)) \mid ds$$
$$+ \frac{\mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (u-w) \parallel_\infty + \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (u-w)'' \parallel_\infty .$$

Supposons que f_1 est k-Liptchizienne par rapport à la deuxième variable,
c'est à dire :

$$\int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mid f_1(s,u(s),v(s)) - f_1(s,w(s),z(s)) \mid ds \leq \int_0^1 \frac{2(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{pmatrix} k_1 \parallel (u-w) \parallel_\infty \\ +k_2 \parallel (v-z) \parallel_\infty \end{pmatrix} ds$$
$$\leq \frac{2k}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (u,v),(w,z) \parallel_\infty .$$

Donc,

$$\parallel H_1(u,v) - H_1(w,z) \parallel_\infty \leq \frac{2k_1 + \mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (u-w) \parallel_\infty + \frac{2k_2}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (v-z) \parallel_\infty$$
$$+ \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel (u-w)'' \parallel_\infty .$$

D'autre part, nous avons :

$$H''(u,v)(x) = J^{\alpha-2} f_1(x,u(x),v(x)) - J^{\alpha-2} f_1(1,u(1),v(1))\, x$$
$$+ \alpha_1 J^{\alpha-2} u(x) + \beta_1 J^{\alpha-2} u''(x).$$

Et donc, pour $(u,v),(w,z) \in E \times E$ et $x \in [0,1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mid H_1''(u,v)(x) - H_1''(w,z)(x) \mid =& \mid J^{\alpha-2} f_1(x,u(x),v(x)) - J^{\alpha-2} f_1(1,u(1),v(1))\, x \\ &+ \alpha_1 J^{\alpha-2} u(x) - \beta_1 J^{\alpha-2} u''(x) - J^{\alpha-2} f_1(x,w(x),z(x)) \\ &+ J^{\alpha-2} f_1(1,w(1),z(1))\, x - \alpha_1 J^{\alpha-2} w(x) + \beta_1 J^{\alpha-2} w''(x) \mid \\ &+ \mid J^{\alpha-2} f_1(1,w(1),z(1)) - J^{\alpha-2} f_1(1,u(1),v(1)) \mid \\ &+ \mid \alpha_1 \mid\mid J^{\alpha-2}(u-w)(x) \mid + \mid \beta_1 \mid\mid J^{\alpha-2}(w''-u'')(x) \mid \\ \leq& \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \mid \int_0^x (x-s)^{\alpha-3} (f_1(s,u(s),v(s)) - f_1(s,w(s),z(s)))ds \mid \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \mid \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} (f_1(s,w(s),z(s)) - f_1(s,u(s),v(s)))ds \mid \\ &+ \frac{\mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha-2)} \mid \int_0^x (x-s)^{\alpha-3} (u-w)(s)\, ds \mid \\ &+ \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha-2)} \mid \int_0^x (x-s)^{\alpha-3} (w''-u'')(s)\, ds \mid . \end{aligned}$$

Par passage à la norme sup sur $[0,1]$, nous trouvons :

$$\parallel H_1''(u,v) - H_1''(w,z) \parallel_\infty := \sup_{[0,1]} \mid H_1''(u,v) - H_1''(w,z) \mid$$

$$\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} \mid f_1(s,u(s),v(s)) - f_1(s,w(s),z(s)) \mid ds$$

$$+\frac{\mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} \parallel (u-w) \parallel_\infty ds + \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} \parallel (u-w)'' \parallel_\infty ds$$

$$\leq \frac{2k_1}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (u-w) \parallel_\infty + \frac{2k_2}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (v-z) \parallel_\infty + \frac{\mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel u-w \parallel_\infty$$

$$+\frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (u-w)'' \parallel_\infty$$

$$\leq \frac{2k_1+ \mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (u-w) \parallel_\infty + \frac{2k_2}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (v-z) \parallel_\infty + \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)} \parallel (u-w)'' \parallel_\infty .$$

Et,

$$\begin{aligned}\parallel H_1''(u,v) - H_1''(w,z) \parallel_E = & \parallel H_1(u,v) - H_1(w,z) \parallel_\infty + \parallel H_1''(u,v) - H_1''(w,z) \parallel_\infty \\ & \leq \left(\frac{2k_1+ \mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2k_1+ \mid \alpha_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)}\right) \parallel (u-w) \parallel_\infty \\ & +\left(\frac{2k_2}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2k_2}{\Gamma(\alpha-1)}\right) \parallel (v-z) \parallel_\infty \\ & +\left(\frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mid \beta_1 \mid}{\Gamma(\alpha-1)}\right) \parallel (u-w)'' \parallel_\infty .\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons : $\parallel u \parallel_\infty \leq \parallel u \parallel_E$ et $\parallel u'' \parallel_\infty \leq \parallel u \parallel_E$. Alors,

$$\begin{aligned}\parallel H_1(u,v) - H_1(w,z) \parallel_E \leq & \left(\frac{2k_1+ \mid \alpha_1 \mid + \alpha(\alpha-1)(2k_2+ \mid \alpha_1 \mid + \mid \beta_1 \mid)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \parallel u-w \parallel_E \\ & + \frac{2k_2+\alpha^2-\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel v-z \parallel_E \\ & \leq M \parallel (u,v),(w,z) \parallel_{E\times E} .\end{aligned}$$

Par le même résonnement, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\parallel H_2(u,v) - H_2(w,z) \parallel_E \leq & \left(\frac{2k_1'+ \mid \alpha_2 \mid + \mid \beta_2 \mid + \beta(\beta-1)(2k_2'+ \mid \alpha_2 \mid + \mid \beta_2 \mid)}{\Gamma(\beta+1)}\right) \\ & \times \parallel u-w \parallel_E + \frac{2k_2'+\beta^2-\beta+1}{\Gamma(\beta+1)} \parallel v-z \parallel_E \\ & \leq N \parallel (u,v),(w,z) \parallel_{E\times E} .\end{aligned}$$

Et alors, nous obtenons :

$$\parallel H(u,v) - H(w,z) \parallel_{E\times E} \leq (M+N) \parallel (u,v),(w,z) \parallel_{E\times E},$$

où $M+N \in \left]0,1\right[$, par hypothèse.

D'où H est une application contractante.

Le théorème est ainsi démontré. ■

Nous signalons au passage que pour la stabilité de l'aplication H, nous avions la possibilité de la faire sur la boule B_r de notre espace produit, mais il a fallu ajouter donc une autre condition sur le rayon de la boule pour ne pas sortir de cette dernière ; l'étude sera donc locale. Ceci va être donc une autre méthode.

Chapitre 3

Applications

1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons nous intéresser aux solutions ondes voyageuses pour certaines classes d'équations d'évolution qui ont, plus ou moins, une certaine relation avec notre système du chapitre 2. Nous donnons les étapes de la méthode Tanh. Puis, nous l'apliquons sur deux exemples ; le premier est classique, mais le second, il est avec des dérivées de Khalil. Ces exemples choisis sont liés à la déformation des beams.

2 Ondes voyageuses

Mathematiquement, nous pouvons donner la définition suivante :

Définition 3.1 *Les ondes progressives sont les solutions particulières des équations d'évolution (dépendant de x et de t) qui se détermient par le changement de variable de type $z = x - ct$ et qui admettent des limites finies à l'infini.*

Et physiquement, nous disons que :

Définition 3.2 *Une onde progressive ou voyageuse est une propagation, dans l'espace et au cours du temps, d'une perturbation. Cette propagation s'effectue sans qu'il y ait transport de matière, mais uniquement avec un transport d'énergie.*

Exemple 3.1
1. *Onde électromagnétique : comme la lumière, qui se propage dans le vide.*
2. *Onde mécanique : comme l'ondes sonore, qui nécessite un support matériel pour sa propagation.*
3. *Ola dans les stades : Nous remarquons qu'il n'y a pas de propagation de matière !*

3 Méthode de Tanh

La méthode de la fonction tangente hyperbolique Tanh est une méthode efficace et directe pour déterminer les solutions ondes voyageuses. Elle a été proposée par Malfliet et Hereman dans Physica Scripta en 1996, voir [13].

3.1 Cas standard

Nous considérons l'EDP non linéaire suivante [4] :

$$N\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}...\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $u(x,t)$ est la fonction réelle sur $\mathbb{R}^2$.

1. Tout d'abord, nous posons :

$$u(x,t) = U(\omega) = U(c(x - vt)), \tag{3.2}$$

avec v est la vitesse, c est une constante à déterminer.
Par (3.1) et (3.2), nous trouvons :

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{dU(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial t} = -cvU'(\omega), \\ u_x &= \frac{dU(\omega)}{d\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x} = cU'(\omega), \\ u_{xx} &= c\frac{d^2U(\omega)}{d\omega^2} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x} = c^2U''(\omega), \\ u_{xxx} &= c^3U^{(3)}(\omega), \\ u_{xxxx} &= c^4U^{(4)}(\omega)... \end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons l'équation différentielle ordinaire en fonction de ω suivante :

$$N(U, U', U'', U''', ...) = 0. \tag{3.3}$$

2. Nous supposons que les solutions ondes voyageuses s'écrivent sous la forme suivante :

$$u(x,t) = U(\omega) = H(Y) = \sum_{i=0}^{k} a_i Y^i, \tag{3.4}$$

où $Y = tan(\omega) = \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{e^\omega + e^{-\omega}}$.
Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\omega} &= \frac{(e^\omega + e^{-\omega})^2 - (e^\omega - e^{-\omega})^2}{(e^\omega + e^{-\omega})^2} = 1 - Y^2, \\ \frac{dU}{d\omega} &= \frac{dH(Y)}{dY} \cdot \frac{\partial Y}{\partial\omega} = (1 - Y^2)H', \\ \frac{d^2U}{d\omega^2} &= -2Y \cdot \frac{\partial Y}{\partial\omega} \cdot H' + (1 - Y^2)H'' \cdot \frac{\partial Y}{\partial\omega} = (1 - Y^2)(-2Y \cdot H' + (1 - Y^2)H''), \\ \frac{d^3U}{d\omega^3} &= (1 - Y^2)(6Y^2 - 2)H' - 6Y(1 - Y^2)H'' + (1 - Y^2)^2H^{(3)}, \\ \frac{d^4U}{d\omega^4} &= (1 - Y^2)(Y(2 - 3Y^2)H' - 2(4 - 13Y + 3Y^4)H'' + 3(1 - Y^2)(1 - Y^2 - Y)H''' \\ &\quad + (1 - Y^2)^3H^{(4)}). \end{aligned}$$

3. En remplaçant ces quantités dans (3.4), nous obtenons l'équation suivante :

$$N(Y, H, H', H'', H''', ...) = 0, \tag{3.5}$$

où $H' = \frac{dH}{dY}$.
Pour déterminer le paramètre k, nous comparons le terme linéaire d'ordre supérieur et le degré du terme non linéaire dans (3.5).

4. Ensuite, nous remplaçons le k déterminé dans (3.5), nous obtenons ainsi l'équation polynomiale avec Y.
   Nous comparons les coefficients de la même puissance de Y, nous trouvons donc tous les coefficients $a_0, ..., a_k$.
5. D'après (3.4), nous pouvons obtenir les solutions ondes progressives de (3.1).

3.2 Cas fractionnaire

Passons maintenant à exposer les choses dans le cadre fractionnaire. Nous présentons les étapes principales de la méthode Tanh pour le cas-Khalil [6].

Commençons par considérer l'équation non linéaire suivante :

$$F(u, T_t^{\alpha}u, T_x^{\beta}u, T_t^{2\alpha}u, T_x^{2\beta}u, T_x^{3\beta}u\,, T_x^{4\beta}u) = 0,\ \ 0 < \alpha, \beta < 1, \tag{3.6}$$

avec, $T^{\alpha}u$ sont des dérivées partielles fractionnaires au sens de Khalil d'ordre α de u et $T^{2\alpha}u := T^{\alpha}(T^{\alpha}u)$.

1. L'équation peut être convertie en l'EDO non linéaire suivante :
$$G(U, U', U'', U''', U'''', ...) = 0. \tag{3.7}$$
2. Cherchons les solutions sous la forme :
$$u(x,t) = U(\xi) = S(Y) = \sum_{h=0}^{m} a_h Y^h + \sum_{h=0}^{m} b_h Y^{-h}, \xi = k\frac{x^{\beta}}{\beta} - \frac{ct^{\alpha}}{\alpha},$$
   où, $Y = tanh(\mu\xi)$, $\mu \in \mathbb{R}$,

   telles que a_h, b_h, c et m sont des constantes à déterminer.
3. Déterminons m par "comparaison" comme précédement.
4. Déterminons les constantes μ, a_h et b_h en résolvant le système algébrique associé.
5. Construisons les solutions ondes progressives de problème (3.6).
   Nous somme donc arrivés à exposer la méthode Tanh dans le cas "entier" et dans le cadre des dérivées de Khalil.
   Nous passons à donner des exemples.

4 Applications

4.1 Tanh pour cas classique

Exemple 3.2 *[4] Nous considérons l'EDP non linéaire suivante :*

$$u_{tt} = u_{xxxx} + u(1-u^2).$$

*Nous appliquons les étapes **2** et **3**, nous obtenons l'équation suivante :*

$$c^2v^2(1-Y^2)(-2YH' + (1-Y^2)H'') = c^4(1-Y^2)(8Y(2-3Y^2)H'$$
$$-2(4-13Y+3Y^4)H'' + 3(1-Y^2)(1-Y^2-2Y)H^{(3)} +$$
$$(1-Y^2)^3H^{(4)}) + H(1-H^2).$$

Avec des petits calculs, nous pouvons obtenir $k = 2$. Donc, nous avons :

$$c^2v^2(1-Y^2)(-2Y(a_1+2a_2Y)+2(1-Y^2)a_2) = c^4(1-Y^2)(8Y(2-3Y^2)$$
$$(a_1+2a_2Y)-4a_2(4-13Y+3Y^4))+$$
$$(a_0+a_1Y+a_2Y^2)(1-(a_0+a_1Y+a_2Y^2)^2).$$

Nous comparons les coefficients de la même puissance de Y, nous trouvons le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} a_0 - a_0^3 - 16c^4a_2 - 2c^2v^2a_2 = 0 \\ a_1 + 16c^4a_1 + 2c^2v^2a_1 - 3a_0^2a_1 = 0 \\ a_2 - 3a_0a_1^2 + 100c^4a_2 + 8c^2v^2a_2a_1 + 16c^4a_1 + 2c^2v^2a_1 - 3a_0^2a_2 = 0 \\ -a_1^3 - 6a_0a_1a_2 - 40c^2a_2 - 2c^2v^2a_1 = 0 \\ -144c^4a_2 - 6c^2v^2a_2 - 3a_1^2a_2 - 3a_0a_2^2 = 0 \\ 24c^4a_1 - 3a_1a_2^2 = 0 \\ 60c^4a_2 - a_2^3 = 0 \end{cases}$$

Nous passons à déterminer les constantes a_i, c, v. Nous obtenons les familles des solutions :

$$a_1 = 0, a_1 = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, a_2 = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, c = -\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}, v = -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}$$

$$a_1 = 0, a_1 = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, a_2 = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, c = -\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}, v = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}$$

$$a_1 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, a_2 = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, c = -\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}, v = -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}$$

$$a_1 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, a_2 = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}, c = -\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}, v = \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}.$$

D'où les solutions ondes voyageuses suivantes :

$$u_1(x,t) = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}\tanh^2[\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}(x + \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}t)]$$

$$u_2(x,t) = -\frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} + \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}\tanh^2[\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}t)]$$

$$u_3(x,t) = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}\tanh^2[\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}(x + \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}t)]$$

$$u_4(x,t) = \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}\tanh^2[\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{4}}}t)]$$

La propriété de solution $u_1(x,t)$ est illustrée dans la Fig 3.1.

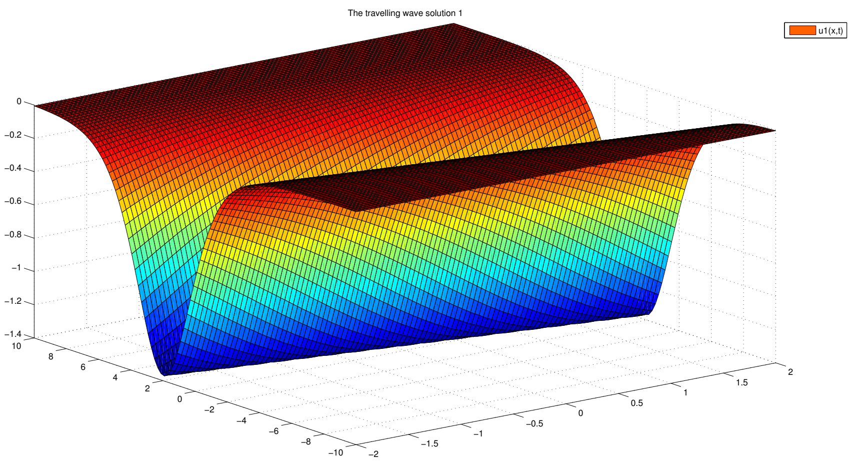

FIGURE 3.1 – La solution onde progressive $u_1(x,t)$ $(x \in [-2,2], t \in [-10,10])$

4.2 Tanh pour cas fractionnaire

Exemple 3.3 *Nous considérons l'équation suivante avec des dérivées de Khalil :*

$$T_t^{2\alpha}(u(x,t)) + u_{xxxx}(x,t) = u(x,t)(1-u(x,t)), \; 0<\alpha<1. \tag{3.8}$$

Avec le changement de variable :

$$u(x,t) = U(\xi), \xi = kx - \frac{ct^\alpha}{\alpha}, \tag{3.9}$$

nous avons donc :

$$u_{xxxx}(x,t) = k^4U^{(4)}(\xi) = k^4U_{\xi\xi\xi\xi} \tag{3.10}$$

$$T_t^\alpha(u(x,t)) = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = t^{1-\alpha}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = t^{1-\alpha}\frac{dU(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -cU_\xi, \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned} T_t^{2\alpha}(u(x,t)) &= \frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = T_t^\alpha(-c\frac{dU(\xi)}{d\xi}) = -ct^{1-\alpha}\frac{d^2U(\xi)}{dt^2} \\ &= -ct^{1-\alpha}\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{dt} = c^2U_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

$$T_t^{2\alpha}(u(x,t)) = c^2U_{\xi\xi}. \tag{3.12}$$

En substituant (3.12) et (3.10) dans (3.8), nous obtenons :

$$c^2U_{\xi\xi} + k^4U_{\xi\xi\xi\xi} + U(U-1) = 0. \tag{3.13}$$

Les solutions ondes voyageuses vont être écrites sous la forme :

$$u(x,t) = U(\xi) = H(Y) = \sum_{i=0}^{m}(a_iY^i + b_iY^{-i}), \tag{3.14}$$

avec $Y = tanh(\mu\xi)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Nous avons alors :

$$\frac{dY}{d\xi} = \mu(1-Y^2)$$

$$U_\xi = \frac{dH(Y)}{dY}\frac{dY}{d\xi} = \mu(1-Y^2)H'(Y)$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= -2\mu Y\frac{dY}{d\xi}H'(Y) + \mu(1-Y^2)\frac{d^2H(Y)}{dY^2}\frac{dY}{d\xi} \\ &= \mu^2(1-Y^2)(-2YH'(Y) + (1-Y^2)H''(Y)) \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi\xi} &= \mu^2(-2\mu Y(1-Y^2))(-2YH'(Y)+(1-Y^2)H''(Y)) + \mu^2(1-Y^2) \\ &\times[-2\mu(1-Y^2)H'(Y) - 2\mu Y(1-Y^2)H''(Y) - 2\mu Y(1-Y^2)H''(Y) \\ &+ \mu(1-Y^2)(1-Y^2)H'''(Y)] \\ &= \mu^3(1-Y^2)[2(3Y^2-1)H'(Y) - 6Y(1-Y^2)H''(Y) + (1-Y^2)^2H'''(Y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi\xi\xi} &= (-2\mu^4Y(1-Y^2))[(6Y^2-2)H'(Y) + (6Y^3-6Y)H''(Y) + (1-Y^2)^2H'''(Y)] \\ &+ \mu^3(1-Y^2)[12\mu Y(1-Y^2)H'(Y) + \mu(1-Y^2)(6Y^2-2)H''(Y) \\ &+ (18\mu Y^2(1-Y^2) - 6\mu(1-Y^2))H''(Y) + \mu(1-Y^2)(6Y^3-6Y)H'''(Y) \\ &+ 2(-2\mu Y)(1-Y^2)^2H'''(Y) + \mu(1-Y^2)^3H^{(4)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi\xi\xi} &= \mu^4(1-Y^2)[-2Y(6Y^2-2)H'(Y) - 2Y(6Y^3-6Y)H''(Y) - 2Y(1-Y^2)^2H'''(Y)] \\ &+ \mu^4(1-Y^2)[12Y(1-Y^2)H'(Y) + (1-Y^2)(6Y^2-2)H''(Y) \\ &+ (18Y^2(1-Y^2) - 6(1-Y^2))H''(Y) + (1-Y^2)(6Y^3-6Y)H'''(Y) \\ &- 4Y(1-Y^2)^2H'''(Y) + (1-Y^2)^3H^{(4)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi\xi\xi} &= \mu^4(1-Y^2)[(16Y-24Y^3)H'(Y) + (-8+44Y^2-36Y^4)H''(Y) \\ &+ (-12Y+24Y^3-12Y^5)H'''(Y) + (1-Y^2)^3H^{(4)}]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Remplaçons (3.15) et (3.16) dans (3.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &c^2\mu^2(1-Y^2)(-2YH'(Y)+(1-Y^2)H''(Y))+k^4\mu^4(1-Y^2)[(16Y-24Y^3)H'(Y)+(-8+44Y^2-36Y^4)H''(Y) \\ &+(-12Y+24Y^3-12Y^5)H'''(Y) + (1-Y^2)^3H^{(4)}] + H(H-1) = 0. \end{aligned}$$

Avec des calculs, nous pouvons obtenir $m = 4$.
Donc, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &c^2\mu^2(1-Y^2)[-2Y(a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+4a_4Y^3-b_1Y^{-2}-2b_2Y^{-3}-3b_3Y^{-4}-4b_4Y^{-5}) \\ &+(1-Y^2)(2a_2+6a_3Y+12a_4Y^2+2b_1Y^{-3}+6b_2Y^{-4}+12b_3Y^{-5}+20b_4Y^{-6})] \\ &+k^4\mu^4(1-Y^2)[(16Y-24Y^3)(a_1+2a_2Y+3a_3Y^2+4a_4Y^3-b_1Y^{-2}-2b_2Y^{-3}-3b_3Y^{-4}-4b_4Y^{-5}) \\ &+(-8+44Y^2-36Y^4)(2a_2+6a_3Y+12a_4Y^2+2b_1Y^{-3}+6b_2Y^{-4}+12b_3Y^{-5}+20b_4Y^{-6}) \\ &+(-12Y+24Y^3-12Y^5)(6a_3+24a_4Y-6b_1Y^{-4}-24b_2Y^{-5}-60b_3Y^{-6}-120b_4Y^{-7}) \\ &+(1-Y^2)^3(24a_4+24b_1Y^{-5}+120b_2Y^{-6}+360b_3Y^{-7}+840b_4Y^{-8}) \\ &+(a_0+a_1Y+a_2Y^2+a_3Y^3+a_4Y^4+b_1Y^{-1}+b_2Y^{-2}+b_3Y^{-3}+b_4Y^{-4}) \end{aligned}$$

$$\times(a_0 + a_1Y + a_2Y^2 + a_3Y^3 + a_4Y^4 + b_1Y^{-1} + b_2Y^{-2} + b_3Y^{-3} + b_4Y^{-4} - 1)] = 0.$$

Par comparaison, nous obtenons le système algébrique suivant :

$$\left\{\begin{array}{c}
72k^4\mu^4a_3 + 2a_3a_4 = 0\\
96k^4\mu^4a_4 + a_4^2 = 0\\
360b_3 + 2b_3b_4 = 0\\
840b_4 + b_4^2 = 0\\
-4c^2\mu^2b_2 - 14a_2 + 80k^4\mu^4b_2 - 96k^4\mu^4b_4 - 48b_2 + 24a_4 - a_0 + a_0^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3\\
+2a_4b_4 = 0\\
-2c^2\mu^2a_1 - 2c^2\mu^2b_1 - 114a_3 + 16k^4\mu^4a_1 + 40k^4\mu^4b_1 - 72k^4\mu^4b_3 - 24b_1 - a_1 + 2a_0a_1\\
+2a_2b_1 + 2a_3b_2 + 2a_4b_3 = 0\\
-4c^2\mu^2a_2 + 86a_2 - 444a_4 + 32k^4\mu^4a_2 - 48k^4\mu^4b_2 + a_1^2 - a_2 + 2a_0a_2 + 2a_3b_1 + 2a_4b_2 = 0\\
2c^2\mu^2a_1 - 6c^2\mu^2a_3 + 401a_3 - 40k^4\mu^4a_1 + 48k^4\mu^4a_3 - 24k^4\mu^4b_1 + 2a_0a_3 + 2a_1a_2 + 2b_1a_4 = 0\\
4c^2\mu^2a_2 - 84c^2\mu^2a_4 + 1163a_4 - 80k^4\mu^4a_2 + 64k^4\mu^4a_4 - 72a_2 + a_2^2 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3 = 0\\
6c^2\mu^2a_3 + 24k^4\mu^4a_1 - 120k^4\mu^4a_3 - 288a_3 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0\\
8c^2\mu^2a_4 + 48k^4\mu^4a_2 - 160k^4\mu^4a_4 - 744a_4 + a_3^2 + 2a_2a_4 = 0\\
2c^2\mu^2b_1 - 6c^2\mu^2b_3 - 16k^4\mu^4b_1 + 120k^4\mu^4b_3 - 72b_3 + 301b_1 + 2a_0b_1 + 2a_2b_3 + 2a_3b_4 = 0\\
4c^2\mu^2b_2 - 8c^2\mu^2b_4 + 41b_2 - 120b_4 - 32k^4\mu^4b_2 + 160k^4\mu^4b_4 + b_1^2 + 2a_0b_2 + 2a_1b_3 + 2a_2b_4 = 0\\
6c^2\mu^2b_3 - 48k^4\mu^4b_3 - 14b_1 + 155b_3 + 2a_0b_3 + 2a_1b_4 + 2b_1b_2 = 0\\
8c^2\mu^2b_4 - 64k^4\mu^4b_4 - 114b_2 + 499b_4 + 2a_0b_4 + b_2^2 + 2b_1b_3 = 0\\
-444b_3 + 24b_1 + 2b_1b_4 + 2b_2b_3 = 0\\
-1220b_4 + 120b_2 + b_3^2 + 2b_2b_4 = 0.
\end{array}\right.$$

Ce système admet une infinité de solutions !

Donc, notre exemple n'admet malheureusement pas d'onde progressive.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons démontré un premier résultat d'existence et d'unicité des solutions pour un système difféntiel avec dérivées de Caputo. Le système traité généralise certains problèmes classiques de modélisation des déformations des "beams" et en particulier celui de Wang et Yang, 2020.

Notre étude a été basée sur l'obtention, d'abord, de la solution intégrale équivalente à (2.1), puis l'application du principe de contraction Banach. Une deuxième étude numérique a été présentée dans le cas des dérivées classiques. Il s'agit là de comprendre et de développer davantage le travail de Chang *et al.* 2014, nous appliquons la méthode de Tanh. Un autre travail a été présenté dans ce mémoire ; il concerne le cas d'une équation d'évolution liée à l'équation de la poutre mais avec des dérivées au sens de R. Khalil. en particulier .donc, nous avons revérifie le travail de Chang, puis détaillé ce travail dans la construction d'une série de solutions ondes progressives. Mais, nous revanchons, nous avons de la non existence des traveling waves pour le cas fractionnaire au sens de Khalil à cause de nombre infini de solutions de notre système algebrique associé.

Comme perspective, nous proposons de poursuivre la partie des ondes voyageuses avec l'approche de Khalil dans le but d'en trouver quelques-unes en essayant de modifier, légèrement, la non linéarité du problème. Nous essayerons aussi de changer l'ordre des dérivées de Khalil utilisées dans l'exemple 2. Pouvons-nous donc espérer chasser des ondes voyageuses dans les larges de cet océan des dérivées fractionnaires ?

Le contenu des deux derniers chapitres de ce mémoire avec les perspectives proposées seront révisés, puis soumis pour evaluation dans un journal de Mathématiques.

Bibliographie

[1] M. A. Abdellaoui, Z. Dahmani, N. Bedjaoui : New Existence Results For A Coupled System Of Nonlinear Differential Equations Of Arbitrary Order, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 6 (2015) No. 2, 65-75. 4

[2] A. R. Aftabizadeh : Existence And Uniqueness Theorems For Fourth-Order Boundary Value Problems, J. Math. Anal. Appl, 116 (1986), 415-426. 9

[3] R. Agarwal : On Fourth-Order Boundary Value Problems Arising In Beam Analysis, Differential Integral Equations, 2 (1989), 91-110. 9

[4] J. Chang, X. Zhao, L. Lihuan, X. Liang : The Traveling Wave Solutions Of Nonlinear Beam Equations By Tanh-Function Method. Advanced Materials Research Vols. 889-890 (2014) pp 628-632. 16, 17

[5] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queffélec : Analyse Fonctionnelle Et Théorie Des Opérateurs : Exercices Corrigés, Dunod, Paris, (2010). 5, 6

[6] Z. Dahmani, A. Anber, I. Jebril : Solving Conformable Evolution Equations By An Extended Numerical Method, Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS), 2022. 5, 17

[7] K. Diethelm, A. D. Freed : On The Solution Of Nonlinear Fractional Order Differential Equations Used In The Modeling Of Viscoplasticity, Scientifice Computing in Chemical Engineering II. Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss and J. Werther, eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-224. 3

[8] A. Granas, J. Dugundji : Fixed Point Theory, Springer-Verlas, New York. 2003. 4, 5, 6

[9] J. Hadamard : Essai Sur L'Etude Des Fonctions Données Par Leur Development De Taylor, J. Mat. Pure Appl. Ser. 8 (1892),101-186. 4, 5, 7

[10] R. Khalil : A New Definition Of Fractional Derivative R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh JCAM Journal. 5

[11] A. A. Kilbas, S. A. Marzan : Nonlinear Differential Equations With The Caputo Fractional Derivative In The Space Of Continuously Differentiable Functions, Di er. Equ. 41 (2005) 84-89. 4, 7

[12] Y. Li : Positive Solutions Of Fourth-Order Boundary Value Problems With Two Parameters, J. Math. Anal. Appl., 281 (2003), 477-484. 9

[13] W. Malfliet : The Tanh Method : I. Exact Solutions Of Nonlinear Evolution And Wave Equations, Physica Scripta, 54 (1996), 563-568. 15

[14] M. A. D. Pino, R. F. Manasevich : Existence For A Fourth-Order Boundary Value Problem Under A Two-Parameter Nonresonance Condition, Proc. Amer. Math. Soc, 112 (1991), 81-86. 9

[15] Q. Wang, L. Yang : Positive Solution For A Nonlinear System Of Fourth-Order Ordinary Differential Equations, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2020 (2020), No. 45, pp. 1-15. 9

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET SOLUTIONS ONDES VOYAGEUSES

Résumé : Dans ce mémoire, une classe des problèmes différentiels fractionnaires au sens de Caputo généralisant un problème physique est considérée. Puis, une étude sur les traveling waves est présentée ; le cas d'ordre un et celui d'ordre quelconque sont considérés. L'approche dérivative de Khalil est aussi présente dans cette étude. Plus précisement, l'existence et l'unicité d'une solution de notre problème est traité. Puis la méthode numérique Tanh est appliquée pour déterminer les solutions ondes voyageuses.

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND TRAVELING WAVES SOLUTIONS

Abstract : In this projet, a class of differential problems in Caputo sense is studied. The considered problem generalizes a physical problem that has relation with the beam equation. Another problem that is considered in this project is the traveling waves. The classical and the fractional cases are considered. We present an existence and uniqueness result for the first introduced problem. Then, we apply the "Tanh" method to find (or not) traveling wave solutions for an evolution equation that involves Khalil derivatives. We also present an example for traveling waves for an evolution problem with standard derivatives.