MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Abdelwahhab BELARBI

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

soutenu publiquement Juin 2022 devant le jury composé de :

Président	Mohand OULD ALI	Prof	UMAB Mostaganem
Examinatrice	Samira BELARBI HAMANI	Prof	UMAB Mostaganem
Encadrante	Amele TAÏEB	MCA	UMAB Mostaganem

Année Universitaire : 2021 / 2022

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes chèrs parents qui m'ont toujours soutenue

A mes chèrs frères Mouhamed, Faycel et ma soeur Bouchra

Mes amies et à tout ceux qui m'ont encouragée durant ma carrière d'étude.

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Mes premiers remerciements vont à mon encadrante Madame Amele TAÏEB, MCA à l'Université de Mostaganem, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie vivement à Monsieur Mohand OULD ALI, Professeur à l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.

Je remercie également Madame Samira BELARI HAMANI, Professeur à l'université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem, membre de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Enfin, j'exprime mes remerciements aux membres de ma famille et mes amies qui m'ont soutenu durant ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie l'existence et l'unicité des solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires (non linéaires) aux dérivées au sens de Caputo.

Pour cela, ces résultats est basé sur le théorème du point fixe de Banach et Scheafer.

Mots-clés : Dérivée au sens de Caputo, équation différentielle, calcul fractionnaire, théorème de point fixe de Banach et Schaefer, point fixe, existence et unicité.

Abstract

In this memory, we study the existence and uniqueness of solutions for system of fractional (nonlinear) differential equations with derivative in the sense of Caputo.

For this, we used Banach and Scheafer's fixed point theorem.

Keywords : Derivative in Caputo sense, differential equation, fractional calculation, fixed point theorem of Banach and Schaefer, fixed point, existence and uniqueness.

Annexe

Notions

$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensemble des nombres entiers naturels sans 0.
$\mathbb{R}$	: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	: Ensemble des nombres réels positifs non nuls.
$\mathbb{C}$	: Ensemble des nombres complexes.
$\mathrm{Re}(.)$	: Partie réel d'un nombre complexe.
$[a, b]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$C([a, b], \mathbb{R})$	:Espace des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\Vert . \Vert_\infty$	: Norme infinie.
$\Vert . \Vert_X$	:Norme de l'espace X.
$D^n(\text{ou } \frac{d^n}{dx})$	:Dérivée d'ordre n.
$f^{(n)}$	: Dérivée $n^{ième}$ de f.
$\Gamma(.)$	: La fonction Gamma d'Euler.
$\beta(.)$	: La fonction Bêta d'Euler.
I_a^α	: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
D_a^α	: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^C D_a^\alpha$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle,...etc.

L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel amotivé beaucoup de chercheurs a étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatif. La théorie et les applications du calcul fractionnaires sont considérablement développées au cours du $19^{ème}$ et $20^{ème}$ siècles, et de nombreux contributeur sont donné des définitions pour les dérivées fractionnaires et les intégrales.

Les théorèmes des points fixes sont des outils trés utiles dans la résolution des équations différentielles pour montrer l'existence et l'unicité de solutions au divers types d'équations.

Ce mémoire consiste a étudier l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo. Notre approche est basé sur les théories du point fixe (théorème de Banach, Scheafer).

Notre travail est divisé de trois chapitres :

Dans le Premier Chapitre, on donne des notions et des résultats préliminaires sur des fonctions spéciales lesquelles : fonction de Gamma et de Bêta. On donne aussi quelques notions de calcul fractionnaire de type de Riemann-Liouville et de Caputo, et quelques théorèmes du point fixe.

Le Deuxième Chapitre est consacré à l'existence et l'unicité pour les équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo. Notre approche est basé sur les théories du point fixe de Banach. On va présenter ce chapitre par une application, pour illustrer les résultats.

Dans le Troisième Chapitre, on présente un résultat sur l'existence d'une solution au moins du problème considéré. La démonstration des nouveaux résultats sera basées sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, on va donner quelques définition concernant le calcul fractionnaire, les espaces fonctionelle et quelques théorèmes du point fixe.

1.1 Fonction Spécial

Dans cette section, on présente les fonctions Gamma, Bêta et Mitag-Leffter qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces des fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications (Gamma d'Euler, Bêta, Mitag-Leffter).

1.1.1 Fonction Gemma d'Euler

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien Suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entiéres. Plus tard, en raison de sa grand importance, elle a été étudiée par d'autre éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legend (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. La fonction appartient à la catégorie des fonctions transcendantes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célébres se produisent dans son étude. Elle apparait également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction Zéta de Rieman, théorie des nombres...

Définition 1.1.1 *[9] La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement le factoriel aux nombres réels, et même aux nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \notin \mathbb{Z}$. On définit la fonction Gamma par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.1 $\Gamma(x)$ *est une fonction monotone, strictement décroissante pour* $x \in [0,1]$*. Dans notre cas, on va étudier cette fonction uniquement pour des* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.1.1 *Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$.
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\mathrm{Re}(x) > 0$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
4. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)...(x+n)}$, *pour* $-(n+1) < x < -n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = 1.$

2. Par définition on a :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt,$$

on applique une intégration par partie, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \tag{1.2}$$

3. On a :

$$\Gamma(x+1) = x! \tag{1.3}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2; \Gamma(4) = 4\Gamma(3) = 2 * 3 * 1 = 3!$$

Par récurence on a :

$$\Gamma(n+1) = n! \ , (\Gamma(n) = (n-1)!), \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1.4}$$

4.Prolongement de Gamma dans $\mathbb{C}$:

Soit $x \in \mathbb{C}$, on a :

A_1 : Si $-1 < \mathrm{Re}(x) < 0$, alors : $0 < \mathrm{Re}(x+1) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par la forme :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dx}{x}. \tag{1.5}$$

A_2 : Si $-2 < x < -1$, alors : $0 < \mathrm{Re}(x+2) < 1$ et $\Gamma(x)$ est bien définie par la forme :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}. \tag{1.6}$$

A_n : Si $-n < \mathrm{Re}(x) < -n+1$, alors : $0 < \mathrm{Re}(x+n) < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+x)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}. \tag{1.7}$$

Alors on peut pronlonger Γ pour les nombres complexes $x \in \mathbb{C}$ tel que $x \notin \mathbb{Z}$ par :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+x)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)};\ 0 < \mathrm{Re}(x+n) < 1. \tag{1.8}$$

1.1.2 Dérivation de Fonction Gamma

Proposition 1.1.2 *La fonction Gamma est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et ça dérivée d'ordre n est :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n (t^{x-1}) e^{-t} dt.$$

Preuve.

Par définition de Gamma la dérivée d'ordre 1 est :

$$\Gamma^{'}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)(t^{x-1}) e^{-t} dt,$$

la dérivée d'ordre 2 est :

$$\Gamma^2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\ln t)(t^{x-1})e^{-t}dt \tag{1.9}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\ln t)(e^{(x-1)\ln t})e^{-t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (\ln t)(\ln t)(e^{(x-1)\ln t})e^{-t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (\ln t)^2(t^{x-1})e^{-t}dt.$$

En générale, la dérivée d'ordre n est :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n(t^{x-1})e^{-t}dt. \tag{1.10}$$

■

1.1.3 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.1.2 *[9] La fonction Bêta est un type d'intégrale Euler définie pour toute couple* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$ *par :*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1}dt. \tag{1.11}$$

La relation entre les fonctions Gamma et Bêta est donnée par l'expression suivante :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \beta(y, x). \tag{1.12}$$

1. $\forall a, b > 0$, on a :

$$a\beta(a, b+1) = b\beta(a+1, b). \tag{1.13}$$

2. $\forall n, a > 0$ on a :

$$\beta(a, n) = \frac{n-1}{a}\beta(a+1, n-1). \tag{1.14}$$

3. $\forall a > 0, \beta(a, 1) = \frac{1}{a}$ on a :

$$\beta(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)...(a+n-1)}. \tag{1.15}$$

1.1.4 Fonction de Mittag-Leffer

Définition 1.1.3 *[9] La fonction de Mittag-Leffter est définie par :*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, (z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0). \tag{1.16}$$

1. Lorsque $\alpha = 1$, on a : $E_1(z) = e^z$.

2. La fonction de Mittag-Leffer à deux paramètre est définie par :

$$E_{a,B}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + B)}, (z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \ \mathrm{Re}(B) > 0). \tag{1.17}$$

1.2 Quelques opérateurs fractionnaires

Dans cette section, on présente une généralisation des opérateurs d'intégration et de dérivation au cas fractionnaire. Elle comporte les définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires et de certaines de ses propriétés.

1.2.1 Intégration Fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 *[14] [11] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, pour une fonction f continue sur $[a, b]$ est donnée par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0 \\ \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

où $t \geq 0$, et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Exemple 1.2.1 *On considère la fonction f définie par : $f : t \to (t-a)^\beta$.*

On a :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds, \tag{1.19}$$

Par le changement de variable $\mu = \dfrac{s-a}{t-a}$, on obtient :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mu^\beta (1-\mu)^{\alpha-1} d\mu, \tag{1.20}$$

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.21}$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{3}{2}$, la relation devient :

$$I_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)} (t-a)^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (t-a)^2. \tag{1.22}$$

Proposition 1.2.1 *[11]Soient α, $\beta > 0$, et $\forall f,\ g \in C([a, b])$, on a :*

1. $I_a^\alpha (f+g)(t) = I_a^\alpha f(t) + I_a^\alpha g(t)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $I_a^\alpha (\lambda f(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t)$.
3. $I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$.

4. $I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t)$.

Lemme 1.2.1 *Soient* $f \in C([a,b])$, *et* $\alpha > 0$. *Alors,*

$$\lim_{t \longrightarrow > a} I_a^{\alpha} f(t) = 0. \tag{1.23}$$

La notion de dérivée d'ordre non entier est une généralisation du concept de la différentiation d'ordre entier. Il existe plusieurs définitions mathématiques concernant la dérivation d'ordre fractionnaire. On va présenter les quatre célèbres approches de la dérivée fractionnaire : dérivée de Riemann-Liouville (1847), de Caputo (1967), de Hadamard(1891) et enfin, celle de Caputo-Hadamard (2012).

1.2.2 Dérivation Fractionnaire de Riemann-Liouville

L'approche de B.Riemann et J.Liouville de dérivation fractionnaire est donnée par l'intégrale suivant :

Définition 1.2.2 *[14] [11] Soit une fonction* $f \in C([a,b))$, *la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *au sens de Riemann-Liouville de* f *est :*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \qquad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ &= D_a^n I_a^{n-\alpha} f(t). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Exemple 1.2.2 *On considère la fonction :*

$$f : t \to (t-a)^{\beta}, \quad t > a. \tag{1.25}$$

Alors :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= D^m I_a^{m-\alpha}(t-a)^{\beta} \\ &= D^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right]. \end{aligned} \tag{1.26}$$

En utilisant l'expression de la dérivation entière suivante :

$$D^m(t-a)^{\delta} = \delta(\delta-1)...(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m}, \tag{1.27}$$

on aura :

$$D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+m-\alpha+1-m)}(t-a)^{\beta+m-\alpha-m}, \tag{1.28}$$

ce qui permet d'avoir :

$$D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.29}$$

Si on pose $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{3}{2}$, *alors :*

$$D_a^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a). \tag{1.30}$$

Et pour $\alpha > 0$, *et* $\beta = 0$, *on aura le résultat suivant :*

$$D_a^{\alpha}(t-a)^{0} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \tag{1.31}$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

La proposition suivante permet d'effectuer une composition entre l'intégrale et la dérivée de Riemann-Liouville.

Proposition 1.2.2 *[11] Soit $\alpha > \beta > 0$, si $f \in C([a,b])$, alors :*

$$D_a^{\beta}(I_a^{\alpha} f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t). \tag{1.32}$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors :

$$D_a^{\alpha}\ (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t). \tag{1.33}$$

Proposition 1.2.3 *[11] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $m-1 \leq \alpha < m$, $f \in C([a,b])$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville D_a^{α} possède les propriétés suivantes :*

(1) *D_a^{α} est un opérateur linéaire.*

(2) *Si $D_a^{\alpha} f(t) = 0$, alors $f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (t-a)^{\alpha+j-m}$.*

1.2.3 Dérivation Fractionnaire de Caputo

La dérivée de Riemann-Liouville a certains inconvénients qui se reflète dans la modélisation des phénomènes réels. Les problèmes étudiés exigent une définition de dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables. Ces défaillances ont conduit vers la fin des années soixante, à une définition alternative des dérivées fractionnaires qui satisfait ces demandes ; elle a été introduite par Caputo. Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.2.3 *[10], [11] Soit $f \in C^n([a,b))$, $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire* *d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \qquad n-1<\alpha<n,\ n \in \mathbb{N}^* \\
&= I_a^{n-\alpha} D_a^n f(t).
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Exemple 1.2.3 *On reprend la fonction $f : t \to (t-a)^{\frac{3}{2}}$,*

et on calcule ${}^{C}D_a^{\frac{1}{2}} f(t)$:

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} &= \left(I^{1-\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \left(I^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

En tenant compte de la relation (1.27), on aura :

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\frac{1}{2}} (t-a)^{\frac{3}{2}} &= \left(I^{\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1-1)}(t-a)^{\frac{3}{2}-1}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(I^{\frac{1}{2}}\right)(t-a)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2})}(t-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a).
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

Proposition 1.2.4 *[11] Soient $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C^n([a,b])$. La relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$
{}^{C}D_a^{\alpha} f(t) = D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]. \tag{1.37}
$$

Où :

$$
{}^{C}D_a^{\alpha} f(t) = D_a^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \tag{1.38}
$$

Proposition 1.2.5 *Soient $\alpha > \beta > 0$, et $f \in C([a,b])$, alors :*

$$ {}^{c}D_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t). \tag{1.39} $$

En particulier, $\alpha = \beta$ on trouve :

$$ {}^{c}D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(t) = f(t). \tag{1.40} $$

Preuve. La relation de (1.37) permet d'obtenir le résultat suivant :

$$ \begin{aligned} {}^{c}D_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta} f\right)(t) &= D_a^{\alpha}\left[I^{\beta} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\frac{d^j}{dt^j}(I^{\beta} f)(a)}{j!}(t-a)^j\right] \\ &= I^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\frac{d^j}{dt^j} I^{\alpha} f(a)}{j!} D^m I^{n-\alpha}(t-a)^j. \end{aligned} \tag{1.41} $$

Et comme $j \leq m-1 < \alpha$, pour $j = 0, 1, ..., m-1$, alors :

$$ \frac{d^j}{dt^j} I^{\alpha} f(a) = 0, \tag{1.42} $$

ce qui donne :

$$ {}^{c}D^{\alpha}\left(I^{\beta} f\right)(t) = I^{\beta-\alpha} f(t), \tag{1.43} $$

en particulier :

$$ {}^{c}D^{\alpha}\left(I^{\alpha} f\right)(t) = f(t). \tag{1.44} $$

■

1.3 Quelques Théorèmes de Point Fixe

Les théorémes de points fixes sont des outils trés utiles dans la résolution des équations différentielles. En effet, ces théorémes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, aussi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

1.3.1 Notations et Définitions

Dans cette section, on présente les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce travail.

Soient $J = [a, b]$ un intervalle fini et E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$. $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $[a, b]$ dans E, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| \ /t \in [a, b]\}. \tag{1.45}$$

1.3.2 Concepts Essentiels

Le principe de contraction de Banach [15] [19] est le résultat le plus élémentaire qui assure l'unicité d'un point fixe. Ce théorème est essentiellement basé sur les définitions suivantes :

Définition 1.3.1 *Soient X un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_X$ et $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de X. On dit que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \|u_{n+p} - u_n\|_X \leq \epsilon. \tag{1.46}$$

Définition 1.3.2 *On dit que l'espace vectoriel normé X est complet pour la norme*

$\|.\|_X$ *si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.3.3 *Soient X un espace de Banach muni de la norme$\|.\|_X$ et T une application de X dans X. On appelle point fixe de T tout point u tel que :*

$$Tu = u \tag{1.47}$$

Définition 1.3.4 *Soit X un espace vectoriel normé, de norme $\|.\|_X$. Une application f de X dans X est dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifie :*

$$\forall u, v \in X, \|f(u) - f(v)\|_X \leq L \|u - v\|_X . \tag{1.48}$$

Définition 1.3.5 *L'application Lipschitzienne f est dite contractante si $L \in]0;1[$.*

1.3.3 Principe de Contraction de Banach

Théorème 1.3.1 *[15] [19]Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une contraction. Alors,f admet un point fixe unique.*

Définition 1.3.6 *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach. L'opérateur continu $T : X_1 \to X_2$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X_1 en une partie relativement compacte dans X_2.*

1.3.4 Théorème du Point Fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le théoréme du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.3.2 *[15] [19]Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$ un opéra-*

teur complétement continu. Si l'ensemble :

$$\Omega : \quad = \{u \in X : u = \mu T u, \mu \in]0,1[\}, \tag{1.49}$$

est borné, alors T posséde au moins un point fixe

1.3.5 Théorème de Arzela-Ascoli

Théorème 1.3.3 *[14] Soit $F \subseteq C([a,b])$, supposons que l'ensemble F est équipé de norme $\|.\|_\infty$. Alors, F est relativement compact dans $C([a,b])$ si F est équicontinu (c'est-à- dire : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et pour tous $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$ on a :$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$) et uniformément borné (c'est-à-dire : il existe une constante $C > 0$ telle que$\|f\|_\infty < C$, pour tout $f \in F$).*

Chapitre 2

Existence et Unicité de Solution

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un système d'équations différentielles fractionnaires d'ordre multiples non linéaires. On établit de résultats d'existence et d'unicité en utilisant le principe de contraction de Banach. Voir ([1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 21])

On considére le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} D^{\alpha_1} x_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_i^1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} I^{\delta_1} g_i^1(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \\ D^{\alpha_2} x_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_i^2(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} I^{\delta_2} g_i^2(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \\ \vdots \\ D^{\alpha_n} x_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} g_i^n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + \sum\limits_{i=1}^{m} I^{\delta_n} g_i^n(t, x_1(t), ..., x_n(t)), \\ \\ \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k(0)| = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k^{'}(0)\right| = ... = \sum\limits_{k=1}^{n} \left|x_k^{(l-2)}(0)\right| = 0, \\ x_k^{(l-1)}(1) = 0,\ k = 1, 2, ..., n,\ l \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Où, $t \in J = [0, 1]$, $l \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, et pour $k = 1, ..., n$, $l - 1 < \alpha_k < l$,

$\delta_k \in \mathbb{R}^+$. L'opérateur I^α est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par :

$$I^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds, \ \alpha > 0, \ t \geq 0. \tag{2.2}$$

L'opérateur D^α est la dérivée au sens de Caputo définie par la relation suivante :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{l-\alpha-1} x^{(l)}(s)\, ds = J^{l-\alpha} x^{(l)}(t), \ l-1 < \alpha < l. \tag{2.3}$$

Les fonctions $g_i^k : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour $k = 1, ..., n$, et $i = 1, ..., m$, sont données.

On rappelle maintenant quelques lemmes, qu'on a besoin pour prouver le résultat principale.

2.2 Lemmes Auxiliaires

Lemme 2.2.1 *[15] [16] [18] Pour $l \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, et $l-1 < \alpha < l$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire $D^\alpha x(t) = 0$, est donné par :*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j\, t^j, \tag{2.4}$$

avec $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, ..., l-1$.

Lemme 2.2.2 *[15] [16] [18] Si $l \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, et $l-1 < \alpha < l$, alors :*

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + \sum_{j=0}^{l-1} c_j\, t^j, \tag{2.5}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, ..., l-1$.

Lemme 2.2.3 *[15] [16] [18]Soient $q > p > 0$, et $g \in L^1([a,b])$. alors,*

$$D^p I^q g(t) = I^{q-p} g(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{2.6}$$

2.3 Solution Intégrale

Lemme 2.3.1 *Soient $l \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(G_i^k\right) \in C(J, \mathbb{R})$ pour $i = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$, le problème :*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^1(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta_1 - 1}}{\Gamma(\delta_1)} G_i^1(s) ds, \ t \in J, \\ D^{\alpha_2} x_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^2(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta_2 - 1}}{\Gamma(\delta_2)} G_i^2(s) ds, \ t \in J, \\ \vdots \\ D^{\alpha_n} x_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} G_i^n(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\delta_n - 1}}{\Gamma(\delta_n)} G_i^n(s) ds, \ t \in J, \end{cases} \tag{2.7}$$

avec $\delta_k \in \mathbb{R}^+$, $l - 1 < \alpha_k < l$, et les conditions :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k(0)| = \sum_{k=1}^{n} \left| x_k'(0) \right| = ... = \sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(l-2)}(0) \right| = 0, \tag{2.8}$$

$$x_k^{(l-1)}(1) = 0, \ k = 1, 2, ..., n. \tag{2.9}$$

Alors, la solution $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pour (2.7)-(2.8) est donnée par :

$$\begin{aligned} x_k(t) = & \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} G_i^k(s) \, ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k + \delta_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k + \delta_k)} G_i^k(s) \, ds \\ & - \tfrac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k - l + 1)} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k - l} G_i^k(s) \, ds \\ & - \tfrac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k + \delta_k - l + 1)} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k + \delta_k - l} G_i^k(s) \, ds, \ k = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. A l'aide des Lemmes 2.2.1, 2.2.2 et (2.7), on obtient :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} G_i^k(s)\, ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_k + \delta_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k + \delta_k)} G_i^k(s)\, ds - \sum_{j=0}^{l-1} c_j^k\, t^j, \tag{2.11}$$

avec $c_j^k \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, ..., l-1$ et $l-1 < \alpha_k < l$, $k = 1, 2, ..., n$.

Pour tout $k = 1, 2, ..., n$, $j = 0, 1, ..., l-2$, on peut écrire :

$$x_k^{(j)}(0) = -j! c_j^k. \tag{2.12}$$

Utilisation du lemme et application des conditions aux limites (2.8), on obtient :

$$c_j^k = 0, \qquad j = 0, 1, ..., l-2, \tag{2.13}$$

et,

$$c_{l-1}^k = \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k - l}}{(l-1)!\, \Gamma(\alpha_k - l + 1)} G_i^k(s)\, ds \tag{2.14}$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha_k + \delta_k - l}}{(l-1)!\, \Gamma(\alpha_k + \delta_k - l + 1)} G_i^k(s)\, ds. \tag{2.15}$$

En remplaçant les valeurs de c_j^k en (2.11), on termine la preuve du lemme 2.3.1.

■

Maintenant, pour étudier le problème (2.1), on introduit l'espace de Banach :

$$S := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_k \in C([0,1], \mathbb{R}),\ k = 1, 2, ..., n\}, \tag{2.16}$$

Muni de la norme

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_S = \max\left(\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty, ..., \|x_n\|_\infty\right). \tag{2.17}$$

2.4 Existence et unicité de Solution

Dans cette section, on va formuler et prouver les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions pour le système 2.1.

On considère les hypothèses suivantes :

(H_1) : Il existe des constantes non négatives $\left(\omega_{i,\ i=1,\dots,m}^{k,\ k=1,2,\dots,n}\right)_j$, $j = 1,2,\dots,n$, tels que $\forall t \in [0,1]$ et $\forall \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right), \left(y_1, y_2, \dots, y_n\right) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| g_i^k \left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right) - g_i^k \left(t, y_1, y_2, \dots, y_n\right) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\omega_i^k\right)_j \left|x_j - y_j\right|, \ k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m. \tag{2.18}$$

(H_2) : Les fonctions $g_i^k : [0,1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour chaque $i = 1,2,\dots,m$ et $k = 1,2,\dots,n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(H_3) : Il existe des constantes non négatives $\left(L_i^k\right)_{i=1,\dots,m}^{k=1,2\dots,n}$, tels que pour chaque $t \in J$ et tout $\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| g_i^k \left(t, x_1, x_2, \dots, x_n\right) \right| \leq L_i^k, \ i = 1, \dots, m, \ k = 1,2,\dots,n. \tag{2.19}$$

On devient également définir les quantités suivantes :

$$\Delta_k = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k + 1\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_k + \delta_k + 1\right)}, \ k = 1,2,\dots,n, \tag{2.20}$$

$$\Sigma_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(\omega_i^k\right)_1 + \left(\omega_i^k\right)_2 + \dots + \left(\omega_i^k\right)_n \right), \ k = 1,2,\dots,n, \tag{2.21}$$

et,

$$\theta_k = \frac{1}{(l-1)!\Gamma\left(\alpha_k + 2 - l\right)} + \frac{1}{(l-1)!\Gamma\left(\alpha_k + \delta_k + 2 - l\right)}, \; k = 1, 2, ..., n. \tag{2.22}$$

On définit l'opérateur non linéaire suivant $T : X \to X$, par :

$$T\left(x_1, ..., x_n\right)(t) := \left(T_1\left(x_1, ..., x_n\right)(t), T_2\left(x_1, ..., x_n\right)(t), ..., T_n\left(x_1, ..., x_n\right)(t)\right), \tag{2.23}$$

Telle que,

$$\begin{aligned} T_k\left(x_1, .., x_n\right)(t) = & \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} G_i^k(s)\, ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_k + \delta_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k + \delta_k)} G_i^k(s)\, ds \\ & - \tfrac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k - l + 1)} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k - l}\, G_i^k(s)\, ds \qquad (2.24) \\ & - \tfrac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k + \delta_k - l + 1)} \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_k + \delta_k - l}\, G_i^k(s)\, ds, \end{aligned}$$

avec,

$$G_i^k(s) = g_i^k\left(s, x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s)\right), \; k = 1, 2, ..., n, i = 1, 2, ..., m. \tag{2.25}$$

Le premier résultat est basé sur le principe de contraction de Banach, on a le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Suppose que* (H_1) *satisfait :*

$$\max\left(\Sigma_1\Delta_1+\theta_1,\Sigma_2\Delta_2+\theta_2,...,\Sigma_n\Delta_n+\theta_n\right)<1. \tag{2.26}$$

Ensuite, le système (2.1) a une solution unique sur J.

Preuve.

On transforme le problème au probléme2.1 du point fixe et on montre que T est un opérateur contractif.

Soit $(x_1,...,x_n)$, $(y_1,...,y_n)\in X$. Ensuite, pour chaque $k=1,2,...,n$ et $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|T_k(x_1,...,x_n)(t)-T_k(y_1,...,y_n)(t)\right| \qquad (2.27)\\
&\leq\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|g_i^k(s,x_1(s),...,x_n(s))-g_i^k(s,y_1(s),...,y_n(s))\right|\\
&+\frac{t^{\alpha_k+\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k+\delta_k+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|g_i^k(s,x_1(s),...,x_n(s))-g_i^k(s,y_1(s),...,y_n(s))\right|\\
&+\frac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k+2-l)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|g_i^k(s,x_1(s),...,x_n(s))-g_i^k(s,y_1(s),...,y_n(s))\right|\\
&+\frac{t^{l-1}}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k+\delta_k+2-l)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|g_i^k(s,x_1(s),...,x_n(s))-g_i^k(s,y_1(s),...,y_n(s))\right|.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (H_1), pour chaque $k=1,2,...,n$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\left\|T_k(x_1,...,x_n)-T_k(y_1,...,y_n)\right\| \qquad (2.28)\\
&\leq\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\delta_k+1)}+\frac{1}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k-l+2)}\right.\\
&\left.+\frac{1}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k+\delta_k-l+2)}\right)\times\max\left(\|x_1-y_1\|,...,\|x_n-y_n\|\right)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\omega_i^k\right)_j.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\|T_k(x_1,...,x_n) - T_k(y_1,...,y_n)\| \leq \max_{1\leq k\leq n}(\Delta_k\Sigma_k + \theta_k)\,\|(x_1 - y_1,...,x_n - y_n)\|_X\,. \tag{2.29}$$

Par conséquent,

$$\|T(x_1,...,x_n) - T(y_1,...,y_n)\|_X \leq \tag{2.30}$$

$$\max(\Delta_1\Sigma_1 + \theta_1,...,\Delta_n\Sigma_n + \theta_n)\,\|(x_1 - y_1,...,x_n - y_n)\|_X\,. \tag{2.31}$$

En utilisant (2.26), on déduit que T est un opérateur contractif. Par conséquent, par le théorème du point fixe de Banach, T a un point fixe qui est une solution du système (2.1). ■

2.5 Application

Exemple 2.5.1 *Dans cette section, on présente l'exemple pour illustrer l'application de notre résultat principal. On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{5}{2}}x_1(t) = \frac{|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|}{8\pi^2(1+|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|)} \\ +\frac{1}{32\pi^2 e}\left(\frac{\sin(x_1(t))+\sin(x_2(t))}{2e^{t+1}}+\sin(x_3(t))\right) \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\begin{pmatrix} \frac{|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|}{8\pi^2(1+|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|)} \\ +\frac{1}{32\pi^2 e}\left(\frac{\sin(x_1(t))+\sin(x_2(t))}{2e^{t+1}}+\sin(x_3(t))\right)\end{pmatrix} ds,\ t\in[0,1], \\ D^{\frac{7}{3}}x_2(t) = \frac{|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|}{8\pi^3 e^2(1+|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|)} \\ +\frac{t^2}{16\pi^2 e^{t^2+1}}\left(\frac{\sin(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))}{1+|\sin(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))|}\right) \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\begin{pmatrix} \frac{|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|}{8\pi^3 e^2(1+|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)|)} \\ +\frac{t^2}{16\pi^2 e^{t^2+1}}\left(\frac{\sin(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))}{1+|\sin(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))|}\right)\end{pmatrix} ds,\ t\in[0,1], \\ D^{\frac{9}{4}}x_3(t) = \frac{\cos(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))}{4\pi e^2} \\ +\frac{1}{16\pi(t^2+1)}\left(\sin x_1(t)+\frac{|x_2(t)+x_3(t)|}{3\pi^3(1+|x_2(t)+x_3(t)|)}\right) \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\begin{pmatrix} \frac{\cos(x_1(t))+\cos(x_2(t))+\cos(x_3(t))}{4\pi e^2} \\ +\frac{1}{16\pi(t^2+1)}\left(\sin x_1(t)+\frac{|x_2(t)+x_3(t)|}{3\pi^3(1+|x_2(t)+x_3(t)|)}\right)\end{pmatrix} ds,\ t\in[0,1], \\ |x_1(0)|+|x_2(0)|+|x_3(0)| = \left|x_1'(0)\right|+\left|x_2'(0)\right|+\left|x_3'(0)\right| = 0, \\ x_1''(1)=x_2''(1)=x_3''(1)=0. \end{cases}$$

On a :

$n=3$, $m=2$, $l=3$, $\alpha_1=\frac{5}{2}$, $\alpha_2=\frac{7}{3}$, $\alpha_3=\frac{9}{4}$, $\delta_1=\frac{7}{2}$, $\delta_2=\frac{5}{2}$, $\delta_3=\frac{4}{3}$, $J=[0,1]$,

$$g_1^1(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{|x_1+x_2+x_3|}{8\pi^2(1+|x_1+x_2+x_3|)}, \tag{2.33}$$

$$g_2^1(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{32\pi^2 e}\left(\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2e^{t+1}}+\sin x_3\right), \tag{2.34}$$

$$g_1^2(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{|x_1+x_2+x_3|}{8\pi^3 e^2(1+|x_1+x_2+x_3|)}, \tag{2.35}$$

$$g_2^2(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{t^2}{16\pi^2 e^{t^2+1}}\left(\frac{\sin x_1+\cos x_2+\cos x_3}{1+|\sin x_1+\cos x_2+\cos x_3|}\right), \tag{2.36}$$

$$g_1^3(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{\cos x_1+\cos x_2+\cos x_3}{4\pi e^2}, \tag{2.37}$$

$$g_2^3(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{16\pi(t^2+1)}\left(\sin x_1+\frac{|x_2+x_3|}{3\pi^3(1+|x_2+x_3|)}\right). \tag{2.38}$$

Ainsi, pour $t\in[0,1]$ et $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\left|g_1^1(t,x_1,x_2,x_3)-g_1^1(t,y_1,y_2,y_3)\right|\leq \tag{2.39}$$

$$\frac{1}{8\pi^2}|x_1-y_1|+\frac{1}{8\pi^2}|x_2-y_2|+\frac{1}{8\pi^2}|x_3-y_3|,$$

$$\left|g_2^1(t,x_1,x_2,x_3)-g_2^1(t,y_1,y_2,y_3)\right|\leq \tag{2.40}$$

$$\frac{1}{64\pi^2e^2}|x_1-y_1|+\frac{1}{64\pi^2e^2}|x_2-y_2|+\frac{1}{32\pi^2e}|x_3-y_3|,$$

$$\left|g_1^2(t,x_1,x_2,x_3)-g_1^2(t,y_1,y_2,y_3)\right|\leq \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{8\pi^3e^2}|x_1-y_1|+\frac{1}{8\pi^3e^2}|x_2-y_2|+\frac{1}{8\pi^3e^2}|x_3-y_3|,$$

$$\left|g_2^2\left(t,x_1,x_2,x_3\right)-g_2^2\left(t,y_1,y_2,y_3\right)\right| \leq \tag{2.42}$$

$$\frac{1}{16\pi^2 e}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{16\pi^2 e}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{16\pi^2 e}\left|x_3-y_3\right|,$$

$$\left|g_1^3\left(t,x_1,x_2,x_3\right)-g_1^3\left(t,y_1,y_2,y_3\right)\right| \leq \tag{2.43}$$

$$\frac{1}{4\pi e^2}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{4\pi e^2}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{4\pi e^2}\left|x_3-y_3\right|,$$

$$\left|g_2^3\left(t,x_1,x_2,x_3\right)-g_2^3\left(t,y_1,y_2,y_3\right)\right| \leq \tag{2.44}$$

$$\frac{1}{16\pi}\left|x_1-y_1\right|+\frac{1}{48\pi^4}\left|x_2-y_2\right|+\frac{1}{48\pi^4}\left|x_3-y_3\right|. \tag{2.45}$$

On peut prendre :

$$\left(\omega_1^1\right)_1=\left(\omega_1^1\right)_2=\left(\omega_1^1\right)_3=\frac{1}{8\pi^2},\ \left(\omega_2^1\right)_1=\left(\omega_2^1\right)_2=\frac{1}{64\pi^2 e^2},\ \left(\omega_2^1\right)_3=\frac{1}{32\pi^2 e}, \tag{2.46}$$

$$\left(\omega_1^2\right)_1=\left(\omega_1^2\right)_2=\left(\omega_1^2\right)_3=\frac{1}{8\pi^3 e^2},\ \left(\omega_2^2\right)_1=\left(\omega_2^2\right)_2=\left(\omega_2^2\right)_3=\frac{1}{16\pi^2 e}, \tag{2.47}$$

$$\left(\omega_1^3\right)_1=\left(\omega_1^3\right)_2=\left(\omega_1^3\right)_3=\frac{1}{4\pi e^2},\ \left(\omega_2^3\right)_1=\frac{1}{16\pi},\ \left(\omega_2^3\right)_2=\left(\omega_2^3\right)_3=\frac{1}{48\pi^4}. \tag{2.48}$$

Il s'ensuit que :

$$\Sigma_1=0.039589,\ \Sigma_2=0.008626,\ \Sigma_3=0.052631, \tag{2.49}$$

$$\Delta_1=0.302290,\ \Delta_2=0.370998,\ \Delta_3=0.468782, \tag{2.50}$$

$$\theta_1 = 0.585, \ \theta_2 = 0.419\,96, \ \theta_3 = 0.795\,44. \tag{2.51}$$

Ce qui implique que la condition (2.26) tient :

$$\max\left(\Sigma_1\Delta_1 + \theta_1, \Sigma_2\Delta_2 + \theta_2, \Sigma_3\Delta_3 + \theta_3\right) < 1. \tag{2.52}$$

Puis par le théorème , on en déduit que le système couplé fractionnaire (2.32) a une solution unique sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Existence des solutions

3.1 Introduction

Dans cette section, on présente un résultat sur l'existence des solutions du problème considéré.

Elle est basé sur le théoréme du point fixe de Schaefer. Voir[2, 5, 8, 13, 17, 18, 23]

On va :

Théorème 3.1.1 *Supposons que les hypothèses* (H_2) *et* (H_3) *sont satisfaites. Alors, le système* (1) *a au moins une solution sur J.*

On transforme le problème2.1 au problème du point fixe et on considére l'opérateur définit.

Preuve. *Pour montrer ce théorème on passe par quatre étapes :*

Étape 1 : *L'opérateur* T *est continue sur* X*, en vue de la continuité de* g_i^k *donnée dans l'hypothèse* (H_2)*.*

Étape 2: *Image d'un s'ensemble borné par l'opérateur T est un borné.*

Prenons pour $\mu > 0$, l'ensemble $B_\mu := \{(x_1, ..., x_n) \in X, \ \ \|(x_1, ..., x_n)\|_X \leq \mu\}$. Alors, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in B_\mu$ et pour chaque $k = 1, 2, ..., n,$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\|T_k (x_1, ..., x_n)\| \\ &\leq \left(\frac{t^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} + \frac{t^{\alpha_k+\delta_k}}{\Gamma(\alpha_k + \delta_k + 1)}\right) \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left|g_i^k (s, x_1(s), ..., x_n(s))\right| \\ &+ \theta_k \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left|g_i^k (s, x_1(s), ..., x_n(s))\right| \\ &\leq (\Delta_k + \theta_k) \sum_{i=1}^{m} L_i^k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donc,

$$\|T (x_1, x_2, ..., x_n)\|_X \leq \max \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^1 (\Delta_1 + \theta_1), ..., \sum_{i=1}^{m} L_i^n (\Delta_n + \theta_n)\right) < \infty. \tag{3.2}$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus (3.2), on déduit que T fait correspondre des ensembles bornés à des ensembles bornés dans X.

Étape 3 : *Image d'un s'ensemble borné par l'opèrateur T est un équicontinue*

On montre que T est complètement continue. ■

Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B_\mu$ et $k = 1, ..., n$, on a :

$$|T_k (x_1, ..., x_n) (t_2) - T_k (x_1, ..., x_n) (t_1)| \leq M_k \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} \left|g_i^k (s, x_1 (s), ..., x_n (s))\right|, \tag{3.3}$$

avec,

$$
\begin{aligned}
M_k = & \frac{1}{\Gamma(\alpha_k+1)}\left(2\left(t_2-t_1\right)^{\alpha_k}+\left(t_2^{\alpha_k}-t_1^{\alpha_k}\right)\right) \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha_k+\delta_k+1)}\left(2\left(t_2-t_1\right)^{\alpha_k+\delta_k}+\left(t_2^{\alpha_k+\delta_k}-t_1^{\alpha_k+\delta_k}\right)\right) \\
& +\left(\frac{1}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k+2-l)}+\frac{1}{(l-1)!\Gamma(\alpha_k+\delta_k+2-l)}\right)\left(t_2^{l-1}-t_1^{l-1}\right).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Donc,

$$
\left|T_k\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_2\right)-T_k\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_1\right)\right| \leq M_k \sum_{i=1}^{m} L_i^k, \tag{3.5}
$$

tel que,

$$
\left\|T\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_2\right)-T\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_1\right)\right\|_S=\max_{1\leq k\leq n}\left|T_k\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_2\right)-T_k\left(x_1,...,x_n\right)\left(t_1\right)\right|. \tag{3.6}
$$

La partie droite de l'équation (2.24) est indépendant de $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B_\mu$ et tend vers zéro lorsque $t_2 - t_1 \to 0$. Par conséquent, T est un opérateur équicontinu. On conclue que T est un opérateur complètement continue.

Étape 4: On montre que l'ensemble Ω définie par :

$$
\Omega := \left\{\left(x_1,...,x_n\right) \in X,\ \ \left(x_1,...,x_n\right)=\lambda T\left(x_1,...,x_n\right),\ 0<\lambda<1\ \right\}, \tag{3.7}
$$

est borné.

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$, ensuite $(x_1, ..., x_n) = \lambda T(x_1, ..., x_n)$, pour certains $0 < \lambda < 1$. On a :

$$
x_k(t)=\lambda T_k\left(x_1,...,x_n\right)(t),\ \ k=1,2,...,n. \tag{3.8}
$$

Correspondant de (2.26), on obtient :

$$\|x_k\| \leq \lambda \left(\Delta_k + \theta_k\right) \sum_{i=1}^{m} L_i^k, \ k = 1, ..., n. \tag{3.9}$$

Ainsi,

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_X \leq \lambda \max \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^1 \left(\Delta_1 + \theta_1\right), ..., \sum_{i=1}^{m} L_i^n \left(\Delta_n + \theta_n\right) \right) < \infty. \tag{3.10}$$

Par conséquent, l'ensemble Ω est borné. Donc par le théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que l'opérateur T a au moins un point fixe, qui est une solution du système (2.1).

3.2 Application

Exemple 3.2.1 *Pour illustrer le second résultat principal, nous considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}x_1(t) = \frac{\pi e^t}{(t+2)+\sin(x_1(t)+x_2(t)+x_3(t))} + \frac{e^t\cos(x_2(t))}{2\pi+\sin(x_1(t))\sin(x_3(t))} \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\left(\frac{\pi e^t}{(t+2)+\sin(x_1(t)+x_2(t)+x_3(t))} + \frac{e^t\cos(x_2(t))}{2\pi+\sin(x_1(t))\sin(x_3(t))}\right)ds,\ t\in[0,1], \\ D^{\frac{5}{3}}x_2(t) = \frac{\cos(x_1(t)+x_3(t))}{2\pi e+\cos(x_2(t)+x_3(t))} + \frac{(t+1)\sin(x_2(t)+x_3(t))}{e^{t^2+1}-\cos(x_1(t))} \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{\cos(x_1(t)+x_3(t))}{2\pi e+\cos(x_2(t)+x_3(t))} + \frac{(t+1)\sin(x_2(t)+x_3(t))}{e^{t^2+1}-\cos(x_1(t))}\right)ds,\ t\in[0,1], \\ D^{\frac{9}{5}}x_3(t) = \frac{\cos(x_3(t))}{\pi+t\sin(x_1(t)+x_2(t))} + \sin(x_1(t))\sin(x_2(t)+x_3(t)) \\ +\int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{\cos(x_3(t))}{\pi+t\sin(x_1(t)+x_2(t))} + \sin(x_1(t))\sin(x_2(t)+x_3(t))\right)ds,\ t\in[0,1], \\ |x_1(0)|+|x_2(0)|+|x_3(0)| = x_1'(1) = x_2'(1) = x_3'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

On a :

$n=3,\ m=2,\ l=2,\ \alpha_1=\frac{3}{2},\ \alpha_2=\frac{5}{3},\ \alpha_3=\frac{9}{5},\ \delta_1=\frac{7}{2},\ \delta_2=\frac{5}{2},\ \delta_3=\frac{4}{3},\ J=[0,1]$. Et pour $i=1,2,\ k=1,2,3$, les fonctions g_i^k sont continues.

Il est clair que :

$$\left|g_1^1(t,x_1,x_2,x_3)\right| \leq \pi e,\quad \left|\ g_2^1(t,x_1,x_2,x_3)\right| \leq \frac{e}{2\pi-1}, \tag{3.12}$$

$$\left|g_1^2(t,x_1,x_2,x_3)\right| \leq \frac{1}{2\pi e-1},\quad \left|\ g_2^2(t,x_1,x_2,x_3)\right| \leq \frac{1}{e-1}, \tag{3.13}$$

$$\left|g_1^3\left(t, x_1, x_2, x_3\right)\right| \leq \frac{1}{\pi-1}, \quad \left|g_2^3\left(t, x_1, x_2, x_3\right)\right| \leq 1. \tag{3.14}$$

De plus, les fonctions g_i^k sont également bornées sur $[0,1] \times \mathbb{R}^3$. Donc, par le théorème point fixe de schaefer, le système (3.11) a au moins une solution sur $[0,1]$.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudier l'existence des solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo. Pour cela, on a utuliser les théoremes du point fixe du Banach et Scheafer et on a terminé ce travail par des exemple.

Dans le futur, on va étudier l'existence des solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires avec la dérivée du Caputo-Hadamard.

Bibliographie

[1] A.P. Agrawal, M. Benchora and B.A. Slimani : Existence results for differential equations with fractional order and impulses. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 44, (2008), pp. 1-21.

[2] D. Baleanu, S.Z. Nazemi and S. Rezapour : The existence of solution for a k dimensional system of multiterm fractional integrodifferential equations with antiperiodic boundary value problems. *Abstract And Applied Analysis.* Vol. 2014, Article ID 896871, (2014), pp. 1-13.

[3] Y.Cao and C.Bai :Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations in Banach spaces. Journal of Applied Mathematics.Vol.2014 , Article ID. 463148, (2014), pp.1-9.

[4] Z. Dahmani and A. Taïeb : The hight order Lane-Emden fractional differential system : Existence, uniqueness and Ulam stabilities, *Kragujevac Journal of Mathematics.*, To Appear In 2015.

[5] Z. Dahmani and A. Taïeb : Solvability of a coupled system of fractional differential equations with periodic and antiperiodic boundary conditions, *PALM Letters.*, To Appear In 2015.

[6] Z. Dahmani and A. Taïeb : A coupled system of fractional differential equations involing two fractional orders, *ROMAI Journal.*, To Appear in 2015.

[7] Z. Dahmani and A. Taïeb : New Existence And Uniqueness Results For High Dimensional Fractional Dierential Systems, Ser. Math. Inform., Vol. 30, No 3,

(2015), pp. 281–293.

[8] Z. Dahmani, A. Taïeb and N.Bedjaoui ; Solvability And Stability for nonlineair Fractional Integro-Differential Systems Of Hight Fractional Orders, *Facta Universitatis*, Ser.Math.In For.Vol(31)No 3_629_645.

[9] K. Diethelm and A. D. Freed,On the solution of nonlinear fractional order di erential equations used in the modeling of viscoplasticity, Scienti ce Computing in Chemical Engineering II. Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss and J. Werther, eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-224.

[10] A. Granas and J. Dugundji : Fixed Point Theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[11] J. Hadamard, Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur development de Taylor,J. Mat. Pure Appl. Ser. 8 (1892),101-186.

[12] R. Hilfer : Applications of fractional calculus in physics. *World Scientific. River Edge. NJ. USA*. (2000).

[13] M. Houas, Z. Dahmani : New results for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives. *Kragujevac Journal of Mathematics.* Vol. 38(2), (2014), pp. 283-301.

[14] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear di erential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously di erentiable functions,Differ. Equ.Vol. 41. (2005) 84-89.

[15] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : Theory And Applications Of Fractional Differential Equations, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, (2006).

[16] K. S. Miller and B. Ross : An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons. New York. NY. USA*. (1993).

[17] I. Podlubny : Fractional differential equations. *Academic Press. New York.* (1999).

[18] S. Samko, A. Kilbas, and O.Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers., Switzerland, (1993).

[19] D.R. Smart : Fixed point Theorems, Cambridge University Press.31, (1980).

[20] A. Taïeb and Z. Dahmani : A coupled system of nonlinear differential equations involing m nonlinear terms. *Georgian Mathematical Journal.* 23 (3) (2016),pp. 447-458.

[21] A. Taïeb and Z. Dahmani : A new problem of singular fractional differential equations, *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories.* 14 (2), (2016), pp. 165-187.

[22] A. Taïeb,Several Results for High Dimensional Singular Fractional Systems Involving n^2-Caputo Derivatives, Malaya Journal of Matematik, Vol.6,No.3,(2018),pp.569-581.

[23] A. Taïeb, S. Salmi and S. Boumessaud, Ulam-Hyers tabilitys for high domensional fractional system, Canad. J. Appl. Math. Vol. 2, No. 1, (2020), 95-110