MINISTÈRE DE LENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse fonctionnelle"

présenté par :

Abdelhak ZIANE

Modèles linéaires généralisés en dynamique de population dans deux habitats juxtaposés

soutenu publiquement le jour Mois Année devant le jury composé de :
23/06/2022 devant le Jury

Président :	Houari FETTOUCH	MCA	U. Mostaganem
Examinateur :	Laid DJILALI	MCA	U. Mostaganem
Encadreur :	Rabah HAOUA	MCA	U. Mostaganem

Année Universitaire : 2021 / 2022

M
A
S
T
E
R

Remerciement

Tout d'abord je remercie " ALLAH " le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail. Je remercie mon encadreur Mr Rabah HAOUA pour le sujet proposé qui ma permit de découvrir un vaste domaine, pour son encouragement et soutien dans les moments difficiles. Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Ahmed MEDEGHRI, pour sa générosité et sa grande patience . Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, ma famille et mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Introduction :

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle naturel dans la dynamique de population , en particulier dans les modèles de réction-diffusion qui sont dérivés de la loi bien connue de Fick.

Si $u(t; .)$ désigne la densité de population, les équations Fickiennes classiques dans chaque habitat pour ces modèles sont généralement de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l\Delta u + F(u),$$

où F est l'interaction de croissance non linéaire et l est le coefficient positif de diffusion (qui peut être variable).

La variété et la complexité des habitats et des individus ne sont pas bien modélisé par des effets spatiaux pour être simplement une diffusion fickienne (comme, par exemple, les modèles de mouvement cellulaire). Une approche basée sur une fonctionnelle d'énergie libre de Landau-Ginzburg et sur la dérivée variationnelle considérons la diffusion suivante plus généralisée équation de croissance et de dispersion dans une population

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k\Delta^2 u + l\Delta u + F(u),$$

où k est généralement positif et l est un nombre qui peutêtre négatif, voir [2], p. 238.

Dans cette mémoire, on utilise ici les résultats du l'article [8] afin de traiter le cas d'un problème de transmission entre deux habitats juxtaposés avec une interface commune. La motivation ici est l'étude de problèmes ne faisant intervenir que le bilaplacien, cette dernière étant étendue des opérateurs plus généraux.

Plus précisément, on considère l'ouvert cylindrique de $\mathbb{R}^n$ constitué des deux habitats juxtaposés

$$\begin{cases} \Omega_- :=]a, \gamma[\times \omega \\ \Omega_+ :=]\gamma, b[\times \omega, \end{cases}$$

et de leur interface

$$\Gamma = \{\gamma\} \times \omega,$$

où $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $a < \gamma < b$ et ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$. On considère les équations linéaires stationnaires suivantes

$$\begin{cases} k_-\Delta^2 u_- + l_-\Delta u_- = f_- & \text{sur } \Omega_- \\ k_+\Delta^2 u_+ + l_+\Delta u_+ = f_+ & \text{sur } \Omega_+, \end{cases}$$

tel que

$$u = \begin{cases} u_- \text{ sur } \Omega_- \\ u_+ : \text{sur } \Omega_+, \end{cases}$$

et

$$f = \begin{cases} f_- \text{ sur } \Omega_- \\ f_+ : \text{sur } \Omega_+, \end{cases}$$

avec f donnée dans $L^p(a, b; L^p(\omega)) = L^p(\Omega)$, et k_+, k_- des réels non nuls. Le fait de ne considérer que le bilaplacien permet ici de considérer k_+ et k_- de signe quelconque.

On considère le problème

$$\left(P_{edp}\right) \begin{cases} k_-\Delta^2 u_- = f_- \quad \text{sur } \Omega_- \\ k_+\Delta^2 u_+ = f_+ \quad \text{sur } \Omega_+ \\ u_-(x, \xi) = 0, \quad x \in \left]a, \gamma\right[, \xi \in \partial\omega \\ u_+(x, \xi) = 0, \quad x \in \left]\gamma, b\right[, \xi \in \partial\omega \\ \Delta_y u_-(x, \xi) = 0, \quad x \in \left]a, \gamma\right[, \xi \in \partial\omega \\ \Delta_y u_+(x, \xi) = 0, \quad x \in \left]\gamma, b\right[, \xi \in \partial\omega \\ u_-(a, y) = \varphi_1^-(y), \quad y \in \omega \\ u_+(b, y) = \varphi_1^+(y), \quad y \in \omega \\ \dfrac{\partial u_-}{\partial x}(a, y) = \varphi_2^-(y), \quad y \in \omega \\ \dfrac{\partial u_+}{\partial x}(b, y) = \varphi_2^+(y), \quad y \in \omega \\ u_- = u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u_-}{\partial x} = \dfrac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma \\ k_-\Delta u_- = k_+\Delta u_+ \quad \text{sur } \Gamma \\ k_-\dfrac{\partial u_-}{\partial x} = k_+\dfrac{\partial u_+}{\partial x} \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Définissons l'opérateur de Laplace A_0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_0) = \left\{ \psi \in W^{2,p}(\omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\} \\ \forall \psi \in D(A_0),\ A_0 \psi = \Delta_y \psi. \end{array} \right.$$

Ainsi, en utilisant l'opérateur A_0 et les notations usuelles

$$u_\pm(x) = u_\pm(x,.) \text{ et } f_\pm(x) = f_\pm(x,.)/k_\pm,$$

le problème $\left(P_{edp}\right)$ devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u_-^4(x) + \left(2A_0 - \frac{l_-}{k_-} I\right) u_-''(x) + \left(A_0^2 - \frac{l_-}{k_-} A_0\right) u_-(x) = f_-, \quad x \in]a,\gamma[\\ u_+^4(x) + \left(2A_0 - \frac{l_+}{k_+} I\right) u_+''(x) + \left(A_0^2 - \frac{l_+}{k_+} A_0\right) u_+(x) = f_+, \quad x \in]\gamma, b[\\ u_-(a) = \varphi_1^-, \ u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u_-'(a) = \varphi_2^-, \ u_+'(b) = \varphi_2^+ \\ u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u_-'(\gamma) = u_+'(\gamma) \\ k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A_0 u_+(\gamma) = k_- u_-''(\gamma) + k_- A_0 u_-(\gamma) \\ k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A_0 u_+'(\gamma) - l_+ u_+'(\gamma) = k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A_0 u_-'(\gamma) - l_- u_-'(\gamma), \end{array} \right.$$

où

$$f_- \in L^p(a,\gamma; L^p(\omega)),\ f_+ \in L^p(\gamma, b; L^p(\omega)) \text{ avec } 1 < p < +\infty.$$

On considère une généralisation de ce problème en remplaçant $L^p(\omega)$ par X, et $(-A_0, D(-A_0)$ par $(-A, D(-A))$ un opérateur BIP dangle $\theta_A \in [0, \pi[$ sur X. Plus précisément, on étudie le problème de transmission (P) suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} (EQ) \left\{ \begin{array}{l} u_-^4(x) + \left(2A - \frac{l_-}{k_-} I\right) u_-''(x) + \left(A^2 - \frac{l_-}{k_-} A_0\right) u_-(x) = f_-, \quad x \in]a,\gamma[\\ u_+^4(x) + \left(2A - \frac{l_+}{k_+} I\right) u_+''(x) + \left(A^2 - \frac{l_+}{k_+} A_0\right) u_+(x) = f_+, \quad x \in]\gamma, b[\end{array} \right. \\ (CB) \left\{ \begin{array}{l} u_-(a) = \varphi_1^-, \ u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u_-'(a) = \varphi_2^-, \ u_+'(b) = \varphi_2^+ \end{array} \right. \\ (CT) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u_-'(\gamma) = u_+'(\gamma) \\ k_+ u_+''(\gamma) + k_+ A u_+(\gamma) = k_- u_-''(\gamma) + k_- A u_-(\gamma) \\ k_+ u_+^{(3)}(\gamma) + k_+ A u_+'(\gamma) - l_+ u_+'(\gamma) = k_- u_-^{(3)}(\gamma) + k_- A u_-'(\gamma) - l_- u_-'(\gamma), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les conditions de transmission (CT) se divisent en

$$(CT1) \left\{ \begin{array}{l} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u_-'(\gamma) = u_+'(\gamma), \end{array} \right.$$

et

$$(CT2)\begin{cases} k_+u_+''(\gamma) + k_+Au_+(\gamma) = k_-u_-''(\gamma) + k_-Au_-(\gamma) \\ k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+Au_+'(\gamma) - l_+u_+'(\gamma) = k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-Au_-'(\gamma) - l_-u_-'(\gamma). \end{cases}$$

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution classique u d'un problème de diffusion en dynamique de population. La méthode est basée essentiellement sur la construction d'une représentation de la solution à l'aide des puissances fractionnaires d'opérateurs et des semi groupes puis en faisant l'analyse de sa régularité en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs et les espaces d'interpolation. Ce travail est une synthèse de l'article : R. Labbas et al [8]. On cherche une solution classique du problème (P), qui est une solution u telle que

$$\begin{cases} u_- := u_{|(a,\gamma)} \in W^{4,p}(a,\gamma;X) \cap L^p\left(a,\gamma;D\left(A^2\right)\right),\ u_-'' \in L^p(a,\gamma;D(A)) \\ u_+ := u_{|(\gamma,b)} \in W^{4,p}(\gamma,b;X) \cap L^p\left(\gamma,b;D\left(A^2\right)\right),\ u_+'' \in L^p(\gamma,b;D(A)), \end{cases}$$

et qui vérifie $(EQ)-(CB)-(CT)$.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

Ici, on va introduire les notions de base et rappeler certains résultats classiques d.analyse fonctionnelle qui nous serviront pour réaliser ce travail.

1.1 Les opérateurs :

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Soient X , Y et Z des espaces de Banach.

Définition 1.1.1 *On dit qu'un opérateur A, défini de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad et \quad \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty$$

Définition 1.1.2 *On note $\mathcal{L}(X;Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de lespace vectoriel normé X dans lespace vectoriel normé Y, $\mathcal{L}(X;Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y \ , \ \forall A \in \mathcal{L}(X;Y).$$

On note $\mathcal{L}(X;X) := \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.1.1 *$\mathcal{L}(X;Y)$ est un espace de Banach si et seulement si Y est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ alors $(I-A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Définition 1.1.3 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D((A) \subset D(B), \\ \forall x \in D(A)\ ,\ Ax = Bx. \end{cases}$$

Définition 1.1.4 *Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ et $B : D(B) \subset Y \longrightarrow Z$ deux opérateurs linéaires . On peut définir l'opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A)\ :\ Ax \in D(B)\}, \\ (BA)x = B(Ax)\ ,\ x \in D(BA). \end{cases}$$

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n comme la puissance n-ième de A :

$$\begin{cases} D\left(A^0\right) = X \ \text{ et } \ A^0 = I \\ D\left(A^1\right) = D(A) \ \text{ et } \ A^1 = A \\ \forall n \geqslant 2,\ D(A^n) = \left\{\varphi \in D\left(A^{n-1}\right) : A^{n-1}\varphi \in D(A)\right\} X \ \text{ et } \ A^n = AA^{n-1}. \end{cases}$$

Définition 1.1.5 *On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ (A - \lambda I) \text{ est inversible et à inverse borné dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. *Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. *$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.*

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.6 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \ , \ dansX \\ Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \ , \ dansY. \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Alors l'application*

$$R_\lambda \ : \ \lambda \in \rho(A) \longrightarrow R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

est analytique sur $\rho(A)$.

Remarque 1.1.1 *D'après ce qui précède, on a :*

1. *Si $\rho(A) \neq \phi$, alors A est fermé.*
2. $\sigma(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ n'est pas bijectif ou } (\lambda I - A)^{-1} \notin \mathcal{L}(X)\right\}$

Définition 1.1.7 *Si A est un opérateur linéaire borné sur X, alors on définit le rayon spectral $r(A)$ de A de la manière suivante :*

$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| .$$

Si $\sigma(A) = \phi$, par convention, on pose $r(A) = 0$.

Remarque 1.1.2 *Si A est borné, alors*

$$\sigma(A) \subset \overline{B(0, r(A))}.$$

Proposition 1.1.4 *Si A est un opérateur linéaire fermé sur X. Si* $0 \in \rho(A)$*, alors on a*

$$B(0,R) \subset \rho(A),$$

où $1/R := r\left(A^{-1}\right)$ *est le rayon spectral de* A^{-1}.

Proposition 1.1.5 *Soit* $A : D(A) \subset X \to Y$ *un opérateur linéaire.*

1. *Si A est un opérateur fermé , alors pour tout* $B \in \mathcal{L}(X;Y)$ *l'opérateur* $A + B : D(A) \to Y$ *est fermé.*
2. *Si A est un opérateur fermé et injectif alors* A^{-1} *est fermé.*
3. *Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et* $D(A)$ *est fermé dans X alors A est continu de* $D(A)$ *dans X.*
4. *Si A est un opérateur continu sur* $D(A) \subset X$*, alors A est fermé si et seulement si,son domaine est fermé .*
5. *Si* $\rho(A) \neq \emptyset$ *alors A est fermé.*
6. *Si A est inversible, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* A^n *est fermé.*

Proposition 1.1.6 *Soient* $A \in \mathcal{L}(X)$ *et* $B : D(B) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire fermé tels que* $Im(A) \subset D(B)$ *alors* $BA \in \mathcal{L}(X)$.

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.1.8 *Soit* $0 < \omega \leq \pi$ *On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |argz| < \pi - \omega\}.$$

Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω *si* $S_\omega \subset \rho(A)$*, et*

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Proposition 1.1.7 *Si A est un opérateur sectoriel d'angle $\omega \in [0, \pi[$, alors A est fermé.*

Proposition 1.1.8 *Soit $\omega \in [0, \pi[$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :*

1. $A \in Sect(\omega)$ *et A injectif* $\Longleftrightarrow A^{-1} \in Sect(\omega)$.

2. $A \in Sect(\omega)$ *et* $c \geqslant 0 \Longrightarrow cA \in Sect(\omega)$.

3. $A \in Sect(\omega)$ *et* $\varepsilon \geqslant 0 \Longrightarrow A + \varepsilon I \in Sect(\omega)$.

1.2 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X. On dit que cette famille forme un semi-groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I_X$,

2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_t$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifiée pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2.2 *On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \longrightarrow G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t)x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi - groupe.

Définition 1.2.3 *Un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires borné si*

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.2.1 *Si* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$ *un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *telles que*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.4 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$*, l'opérateur* A *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} existe\right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \quad , \quad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ *est non vide* $(0 \in D(A))$ *et est bien un sous espace vectoriel de* X*,*A *est linéaire de* $D(A)$ *dans* X*.*

Proposition 1.2.2 *Soit* $(A, D(A))$ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geqslant 0}$*, alors*

1. *A est linéaire fermé de domaine* $D(A)$ *dense dans* X*.*

2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ *et* $\forall\lambda \in]\omega, +\infty[$*, pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\|(A - \lambda I)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\left(\lambda - \omega\right)^n},$$

où $M \geqslant 1$ *et* $\omega \geqslant 0$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur $\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |argz| < \alpha\}$.

Définition 1.2.5 *Soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$*. Une famille* $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ *déléments de* $\mathcal{L}(X)$ *forme un semi-groupe analytique de type* α *dans* X*, un espace de Banach complexe, si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $G(0) = I$,

2. $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$ *tel que* $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha, G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$,

3. $\forall x \in X, \lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Sigma_\alpha}} G(z)x = x$,

4. *l'application* $z \longrightarrow G(z)$ *est holomorphe sur* Σ_α.

Théorème 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense* $D(A)$ *dans X tel que*

$$]0, +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \exists M > 0 : \forall \lambda > 0, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{\lambda}.$$

Alors,il existe un secteur $\Sigma_\delta, 0 < \delta \leq \dfrac{\pi}{2}$ *, tel que*

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \text{ et } \forall \lambda \in \Sigma_\delta, \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}.$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ *est bien défini et il existe un secteur* $\Sigma_{\alpha+\pi/2}$ *avec* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$*, tel que*

$$\Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho\Big((-A)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

et $(-A)^{\frac{1}{2}}$ *génère un semi-groupe analytique.*

1.3 Les espaces d'interpolation

Définition 1.3.1 *Soit X un espace de Banach. On désigne par* $L^p_*(\mathbb{R}_+; X)$ *avec* $p \in [1; +\infty]$ *,l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X)} < +\infty,$$

avec la modification habituelle pour $p = +\infty$.

Définition 1.3.2 *Soient* $(X_0; \| \,.\, \|_0)$ *et* $(X_1; \| \,.\, \|_1)$ *deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace topologique séparé X.*

Pour $p \in [1;+\infty]$ *et* $\theta \in]0;1[$*,on dit que* $x \in (X_0;X_1)_{\theta,p}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t>0, \exists x_0(t) \in X_0, \exists x_1(t) \in X_1 \ \ tel\ que\ \ x = x_0(t)+x_1(t), \\ ii)\ t^{-\theta}x_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+;X_0), t^{1-\theta}x_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+;X_1). \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *$(X_0 \cap X_1; \| \,.\, \|_{X_0\cap X_1})$,$(X_0 + X_1; \| \,.\, \|_{X_0+X_1})$ et $((X_0, X_1)_{\theta,p}; \| \,.\, \|_{\theta,p})$ sont des espaces de Banach pour les normes respectives*

$$\begin{cases} \| x \|_{X_0\cap X_1} = \| x \|_{X_0} + \| x \|_{X_1} \ \ si\ \ x \in X_0 \cap X_1, \\ \| x \|_{X_0+X_1} = \inf\limits_{x_i \in X_i, x_0+x_1=x} (\ \| x_0 \|_{X_0} + \| x_1 \|_{X_1}\ )\ si\ \ x \in X_0+X_1, \\ \| x \|_{\theta,p} = \inf\limits_{\substack{x_i:\mathbb{R}_+\to X_i, i=0,1 \\ \forall t>0, x=x_0(t)+x_1(t)}} (\ \| t^{-\theta}x_0 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_0)} + \| t^{1-\theta}x_1 \|_{L^p_*(\mathbb{R}_+;X_1)}\ )\ si\ \ x \in (X_0,X_1)_{\theta,p}, \end{cases}$$

de plus

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0,X_1)_{\theta,p} \subset X_0+X_1,$$

avec injections continues .

Notons que $(X_0,X_1)_{\theta,p} = (X_1,X_0)_{1-\theta,p}$.

1.3.1 Quelques espaces d'interpolation particuliers

Définition 1.3.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$, muni de sa norme du graphe :*

$$\forall x \in D(A), \|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

En suivant les notations de Da Prato.Grisvard [5], pour $p \in [1,+\infty]$ *et* $0<\theta<1$*, on pose alors*

$$D_A(\theta,p) = (D(A),X)_{1-\theta,p}.$$

Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothses supplémentaires, il est alors possible de donner des caractérisations explicites de $D_A(\theta,p)$ comme suit :

Proposition 1.3.2 *Soient $p \in [1, +\infty], 0 < \theta < 1$ et A un opérateur linéaire fermé sur X de domaine $D(A)$.*

1. *Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall t > 0, \ \|(A - tI)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{t},$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{\theta} A(A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir G.Da Prato et P.Grisvard [5]).

2. *Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X*

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\},$$

(voir Lions [11]).

3. *Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors*

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

Notons que, d'après G.Da Prato et P.Grisvard (voir [5] ,page 383), on a

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p),$$

avec $m \in \mathbb{N}^*, p \in [1, +\infty]$ et $0 < \theta < 1$.

Remarque 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. Quand l'opérateur A vérifie certaines hypothèses supplémentaires, il est alors possible de donner, pour $m \geqslant 1$, des caractérisations explicites de $(D(A^m), X)_{1/mp,p}$. On a*

$$(D(A^m), X)_{1/mp,p} = D_{A^m}(1 - 1/mp, p),$$

(voir .P. Grisvard [5]) et grâce à la propriété de réitération (voir Lions -Peetre [10]), il s'ensuit pour $m \geqslant 1$

$$\begin{aligned} D_{A^m}(1 - 1/mp, p) =& D_A(m - 1/p, p) \\ =& D_A(m - 1 + (1 - 1/p), p) \\ =& \left\{\varphi \in D(A^{m-1}) : A^{m-1}\varphi \in (D(A), X)_{1/p,p}\right\} \\ =& (D(A), X)_{(m-1)+1/p,p}. \end{aligned}$$

En particulier, on pose alors $m = 2$*, en suivant les notations de P. Grisvard [5]*

$$\begin{aligned} (D(A^2), X)_{1/2p,p} =& D_{A^2}(1 - 1/2p, p) \\ =& (D(A), X)_{1+1/p,p}) \\ =& \left\{\varphi \in D(A) : A\varphi \in (D(A), X)_{1/p,p}\right\} \subset D(A). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.3.2 Propriété fondamentale d'interpolation

On se donne deux triplet d'espace d'interpolation (X_0, X_1, X) et (Y_0, Y_1, Y) et un opérateur linéaire T de X dans Y. Alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *On suppose que les restrictions de* T *aux espaces* X_i *à valeurs dans* Y_i *sont linéaires continues. Alors, pour tout* $0 < \theta < 1$ *et* $p \in [1, +\infty]$*, l'opérateur* T *est linéaire continu de* $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ *dans* $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ *et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((X_0,X_1)_{\theta,p},(Y_0,Y_1)_{\theta,p})} \leqslant C\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)}.$$

1.4 Les espaces U M D

Définition 1.4.1 *Pour* $\varepsilon \in]0, 1[$ *et* $p \in]1, +\infty[$*, on définit l'opérateur*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}; X)),$$

par

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R};X), (\mathcal{H}_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|<\frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(1-s)}{s}ds, \quad p.p.\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.4.2 *X est appelé espace UMD, s'il existe $p \in]1,+\infty[$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X)), \lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathcal{H}_\varepsilon f, \ \ \textit{existe dans}\ \ \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X)). \tag{1.4.1}$$

dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{H}: & L^p(\mathbb{R};X) & \to & L^p(\mathbb{R};X) \\ & f & \longrightarrow & \mathcal{H}f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\mathcal{H}_\varepsilon f \end{array}$$

est un élément de $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X))$ appelé la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R};X)$. Notons que si X est un espace UMD alors (1.4.1) est vraie pour tout $p \in]1,+\infty[$.

Définition 1.4.3 *On dit que X est ς-convexe s'il existe une fonction $\varsigma : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\varsigma(0,0) > 0$,*
2. *$\forall x, y \in X$, $\varsigma(x,\cdot)$ et $\varsigma(y,\cdot)$ sont convexes sur X,*
3. *$\forall x, y \in X$, $\varsigma(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Théorème 1.4.1 *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est un espace UMD.*
2. *X est un espace ς-convexe.*

Un espace de Banach X est un espace UMD si est seulement si pour tout p $(1 < p < +\infty)$, la transformation de Hilbert est continue de $L^p(\mathbb{R};X)$ dans lui même.

Il est possible de donner de nombreux exemples d'espaces de Banach classiques qui ont la propriété UMD :

1. Tout espace de Hilbert est UMD.

2. Tout espace isomorphe à un espace UMD est UMD.

3. Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est UMD.

4. Si les espaces X et Y sont UMD alors les espace interpolés (cas réel $(X;Y)_{\theta,p}$ ou complexe $[X;Y]_{\theta,p}$) sont des espaces de type UMD avec $1 < p < 1$.

5. Tous les espaces construits sur $L^p(\mathbb{R};X)$, $(1 < p < +\infty)$, telque X est un espace de type UMD sont de type UMD.

1.5 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Les espaces de Sobolev à valeurs vectorielles sont construits à partir des espaces L^p avec $p \in [1,+\infty[$, dont on donne ici la définition.

Définition 1.5.1 *Soit $f : I \longrightarrow X$. Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit*

$$L^p(I;X) := \Big\{f \ \textit{ est Bochner-mesurable telle que } \int_I \| f \|^p \, d\mu < +\infty\Big\},$$

que lon munit de la norme

$$\| f \|_{L^p(I;X)} = \left(\int_I \| f \|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Définition 1.5.2 *Soient $p \in [1,+\infty[$ et A un opérateur linéaire sur X de domaine $D(A)$. On définit*

$$L^p(I, D(A)) := \{\varphi \in L^p(I,X) \ : \ \varphi(x) \in D(A) \ \ p.p. \ \ x \in I \ et \ A\varphi(x) \in L^p(I,X) \ \ p.p. \ \ x \in I\}.$$

Définition 1.5.3 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1,+\infty]$. On définit l'eespace de Sobolev $W^{n,p}$ de la façon suivante :*

$$W^{n,p}(I;X) := \{u \in L^p(I;X), [u]^{(j)} \in L^p(I;X), \ pour \ tout \ j \in \mathbb{N} \ \ tel \ que \ j \leq n\}.$$

Notons que pour $j = 0, 1, ..., k$, $[u]^{(j)}$ *est la dérivée jème au sens des distributions de u et* $[u]^{(j)} \in L^p(I; X)$ *signifie que*

$$\exists g_j \in L^p(I; X) \text{ tel que } [u]^{(j)} = [g_j].$$

Théorème 1.5.1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $p \in [1, +\infty]$, *l'espace de Sobolev* $W^{n,p}(I; X)$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.5.2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et tout* $p \in [1, +\infty]$, *l'espace de Sobolev* $W^{n,p}(I; X)$ *s'injecte continûment dans* $C^{n-1}(I; X)$.

Remarque 1.5.1 $W^{n,p}(I; X)$ *s'injecte continûment dans* $C^{n-1}(I; X)$, *signifie que toute fonction de* $W^{n,p}(I; X)$ *est (presque partout) égale à une fonction de* $C^{n-1}(I; X)$ *et qu'il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* $u \in W^{n,p}(I; X)$, *on a*

$$\| u \|_{C^{n-1}(I;X)} \leqslant \| u \|_{W^{n,p}(I;X)} .$$

Cela signifie que l'identité $I : W^{n,p}(I; X) \longrightarrow C^{n-1}(I; X)$ *est continue. On note alors*

$$W^{n,p}(I; X) \hookrightarrow C^{n-1}(I; X).$$

1.6 Puissances fractionnaires d'opérateurs

On utilisera dans ce travail les puissances fractionnaires d'opérateurs, en particulier la racine carrée d'un opérateur.

Soit A un opérateur linéaire fermé dans X, tel que $\rho(A)$ contient $]0, +\infty[$. S'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C < +\infty,$$

alors, on définit pour $0 < \text{Re}\ \alpha < 1$ et $x \in D(A)$, l'opérateur J^{α} par

$$J^{\alpha}x = \frac{sin\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}(A-\lambda I)^{-1}(-A)xd\lambda,$$

et pour $0 < \text{Re}\ \alpha < 2$ et $x \in D\left(A^{2}\right)$ par

$$J^{\alpha}x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\alpha-1}\left((A-\lambda I)^{-1}-\frac{\lambda}{1+\lambda^{2}}\right)(-A)\,xd\lambda + (-A)\,x\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt.$$

(voir Balakrishnan [1]).

Lemme 1.6.1 *Les opérateurs J^{α} admettent des extensions fermées et $(-A)^{\alpha}$ est la plus petite extension fermée de J^{α}. (voir [1],p.423).*

Lemme 1.6.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tel que*

$$\begin{cases}\exists C>0\ \ \mathbb{R}_{+}\subset\rho(A)\ \text{ et pour } \lambda\geq 0,\\ \left\|(A-\lambda\, I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leq \dfrac{C}{1+\lambda},\end{cases}\tag{1.6.1}$$

alors pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $-(-A)^{a}$ dé fini précédemment génàre un semi-groupe analytique $S_{a}(t)$ défini par

$$S_{\alpha}(t) = \int_{0}^{+\infty}(A-\lambda I)^{-1}g(\lambda,t;\alpha)\,d\lambda \text{ si } 0<\alpha\leq\frac{1}{2},$$

où $g(\lambda,t;\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\sin(t\lambda^{\alpha}\sin\pi\alpha)\exp(-t\lambda^{\alpha}\cos\pi\alpha)$ est analytique pour tout $t > 0$. (voir [1],p.423).

Remarque 1.6.1 *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient $S_{\frac{1}{2}}(t) = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}(A-\lambda I)^{-1}\sin t\sqrt{\lambda}d\lambda$.*

1.7 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition 1.7.1 ***(formule intégrale de Cauchy)*** *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in \mathcal{H}(U)$, et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0}dz.$$

Définition 1.7.2 ***(Intégrale de Dunford)***. *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1}dz.$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas duchoix de γ.

Définition 1.7.3 *Soient A un opérateur linéaire fermé et $\mathcal{H}(A)$ est l'espace des fonctions à variable complexe qui sont holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A . Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\lambda)(A - \lambda I)^{-1}d\lambda,$$

où γ est une courbe sectorielle de Jordan entourant le spectre de l'opérateur A et $f \in \mathcal{H}(A)$.

Chapitre 2

Position du problème et hypothèses

2.1 Position du problème

On considère léquation différentielle opérationnelle du quatrième ordre

$$(P)\left\{\begin{cases} u_-^4(x) + \left(2A - \frac{l_-}{k_-}I\right)u_-''(x) + \left(A^2 - \frac{l_-}{k_-}A_0\right)u_-(x) = f_-, & x \in]a, \gamma[\\ u_+^4(x) + \left(2A - \frac{l_+}{k_+}I\right)u_+''(x) + \left(A^2 - \frac{l_+}{k_+}A_0\right)u_+(x) = f_+, & x \in]\gamma, b[\,, \end{cases}\right.$$

avec les condition aux limites

$$(CB)\begin{cases} u_-(a) = \varphi_1^-, & u_+(b) = \varphi_1^+ \\ u_-'(a) = \varphi_2^-, & u_+'(b) = \varphi_2^+, \end{cases}$$

et les condition de transmition

$$(CT1)\begin{cases} u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \\ u_-'(\gamma) = u_+'(\gamma)\,, \end{cases}$$

et

$$(CT2)\begin{cases} k_+u_+''(\gamma) + k_+A_0u_+(\gamma) = k_-u_-''(\gamma) + k_-A_0u_-(\gamma) \\ k_+u_+^{(3)}(\gamma) + k_+A_0u_+'(\gamma) - l_+u_+'(\gamma) = k_-u_-^{(3)}(\gamma) + k_-A_0u_-'(\gamma) - l_-u_-'(\gamma)\,. \end{cases}$$

2.2 Hypothèses

On considéré $k_+, k_-, l_+, l_+ \in \mathbb{R}^*$, A un opérateur linéaire fermé dans X et suppose

$$r_+ = \frac{l_+}{k_+} \text{ et } r_- = \frac{l_-}{k_-}.$$

On considère les hypothèses suivantes :

$$X \quad \text{est un espace } UMD, \tag{2.2.1}$$

$$0 \in \rho(A), \tag{2.2.2}$$

$$-A \in BIP(X, \theta_A) \ \text{ pour } \ \theta_A \in (0, \pi), \tag{2.2.3}$$

Certains de nos résultats nécessiteront une hypothèse supplémentaire

$$\sigma(A) \subset (-\infty, 0) \ \text{ et } \ \forall \theta \in (0, \pi), \sup_{\lambda \in S_\theta} \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty. \tag{2.2.4}$$

On remarque (2.2.4) signifie que $-A$ est un opérateur sur l'angle $\theta \in (0, \pi)$. On obtient quelques remarques :

Remarque 2.2.1 *1. A_0 vérifie tout les hypothèses précédents pour $X = L^p(\omega)$ et $p \in (1; +\infty)$.*

2. *Lhypothèse (2.2.4) nest pertinente que si $r < 0$, puisque pour $r > 0$, (2.2.2) et (2.2.3) impliquent (2.2.4).*

3. *Pour résoudre chaque équation de (EQ) dans le cas scalaire , il faut introduire la racine $\pm\sqrt{-A + r_\pm}$, $\pm\sqrt{-A}$ de l' équation caractéristique*

$$x^4 + (2A - r\pm)x^2 + (A^2 - r \pm A) = 0,$$

on considèr les opérateurs

$$L_- : + - \sqrt{-A + r_- I} \ \ , \ \ L_+ := -\sqrt{-A + r\pm I} \quad et \quad M := -\sqrt{-A}.$$

Grâce (2.2.3) et (2.2.4), on a $-A, -A + r_- I$ et $-A + r_+ I$ sont des opérateur sectoriels, ainsi lexistence de L_+, L_- et M est assurée (voir M. Haase [6],p.25).

4. *On applique le proposition 3.1.9,p 65 dans [6], on a* $D(L_-) = D(L_+) = D(M)$. *Ces pour* $n, m \in \mathbb{N}$ *et* $m \leq n$

$$D(L_\pm^n) = D(M^n) = D(L_\pm^m M^{n-m}) = D(M^m L^{n-m})$$

5. *Grâce (2.2.3),*$-A + r_- I \in BIP(X, \theta_A)$ *et* $-A + r_+ I \in BIP(X, \theta_A)$ *[14] Théorème 3, p.437. de plus, d'ailleurs de [14], Théorème 2, p.441, on a* $-(L_- + M), -(L_+ + M) \in BIP(X, \theta_A/2 + \varepsilon)$, *pour* $\varepsilon \in (0, \pi/2 - \theta_A/2)$.*Donc de [14], Théorè me 2, p.437,* $L_- + M$ *et* $L_+ + M$ *génère semi groupes analytique borné* $(e^{x(L_- + M)})_{x \geq 0}$ *et* $(e^{x(L_+ + M)})_{x \geq 0}$.

6. *Depuis(2.2.2)et(2.2.3), on conclu* $0 \in \rho(M) \cap \rho(L_-) \cap \rho(L_+)$. *Donc les hypothèse (2.2.1)* ∼ *(2.2.3) on applique le théorème Dore-Venn, [4], on obtient* $0 \in \rho(L_+ + M)$ *et* $0 \in \rho(L_- + M)$.

7. *Il découle de*

$$\forall \psi \in D(M^2), \begin{cases} (L_+^2 - M^2)\psi = r_+ \psi \\ (L_-^2 - M^2)\psi = r_- \psi, \end{cases}$$

et

$$\forall \psi \in D(M), \begin{cases} (L_+ - M)\psi = r_+ (L_+ - M)^{-1} \psi \\ (L_-^2 - M)\psi = r_- (L_-^2 - M)^{-1} \psi \end{cases}$$

2.3 Representation de la solution

On considère léquation différentielle opérationnelle du quatrième ordre

$$u^4(x) + 2(A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) = f(x), x \in \,]a, b[\,, \tag{2.3.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(a) = \varphi_1, u(b) = \varphi_2 \\ u''(a) = \varphi_3, u''(b) = \varphi_4 \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Théorème 2.3.1 *Soit $f \in L^p(a,b;X)$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, et $p \in (1,\infty)$. On suppose que (2.2.1)~(2.2.3) sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution classique u (2.3.1)-(2.3.2) si et seulement si*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \ \ et \ \ \varphi_3, \varphi_4 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$$

Cette solution classique unique est noté par $F_{\Phi,f}$ $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ et est explicitement décrite par

$$\begin{array}{rcl} F_{\Phi,f}(x) & = & e^{(x-a)M}Z\varphi_1 + e^{(b-x)M}Z\varphi_2 \\ & & -\frac{1}{2}e^{(x-a)M}ZM^{-1}\int_a^b e^{(s-a)M}v_0(s)ds - \frac{1}{2}e^{(b-x)M}ZM^{-1}\int_a^b e^{(b-s)M}v_0(s)ds \\ & & +\frac{1}{2}M^{-1}\int_a^x e^{(x-s)T}v_0(s)ds + \frac{1}{2}M^{-1}\int_x^b e^{(s-x)M}v_0(s)ds \\ & & -e^{(b-x)M}e^{(b-a)T}\varphi_1 - e^{(x-a)M}e^{(b-a)M}\varphi_2 \\ & & +\frac{1}{2}e^{(x-a)M}Ze^{(b-a)M}M^{-1}\int_a^b e^{(b-s)M}v_0(s)ds \\ & & +\frac{1}{2}e^{(b-x)M}Ze^{(b-a)M}M^{-1}\int_a^b e^{(s-a)M}v_0(s)ds, \quad x \in [a,b], \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} v_0(x) & = & 1e^{(x-a)L}W(\varphi_3 + A\varphi_1) + e^{(b-x)L}W\varphi_4 + A\varphi_2 \\ & & -\frac{1}{2}e^{(x-a)L}WL^{-1}\int_a^b e^{(s-a)L}f(s)ds - \frac{1}{2}e^{(b-x)L}WL^{-1}\int_a^b e^{(b-s)L}f(s)ds \\ & & +\frac{1}{2}L^{-1}\int_a^x e^{(x-s)L}f(s)ds + \frac{1}{2}L^{-1}\int_x^b e^{(s-x)L}f(s)ds \\ & & -e^{(b-x)L}e^{(b-a)L}(\varphi_3 + A\varphi_1) - e^{(x-a)L}e^{(b-a)L}(\varphi_4 + A\varphi_2) \\ & & +\frac{1}{2}e^{(x-a)L}We^{(b-a)L}L^{-1}\int_a^b e^{(b-s)L}f(s)ds \\ & & +\frac{1}{2}e^{(b-x)L}We^{(b-a)L}L^{-1}\int_a^b e^{(s-a)L}f(s)ds, \quad x \in [a,b], \end{array}$$

avec $W := (I - e^{2(b-a)L})^{-1}$ et $Z := (I - e^{2(b-a)N})^{-1}$.

L'existence de Z et W est prouvée en vertu de

$$\exists\delta > 0, \exists M > 1 :\| e^{n(b-a)T} \|_{\mathcal{L}(x)} \leq Me^{-n(b-a)\delta}.$$

Preuve: Il est plus facile de traiter les deux problèmes de second ordre suivants :

$$\begin{cases} v''(x) + (A - kI)v(x) = f(x) \\ v(a) = \varphi_3 + A\varphi_1 \\ v(b) = \varphi_4 + A\varphi_2 \end{cases}$$

avec v_0 comme solution et

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = v_0(x) \\ u(a) = \varphi_1 \\ u(b) = \varphi_2, \end{cases}$$

avec u_0 comme solution. Un calcul simple montre que u_0 satisfait (2.3.1)-(2.3.2). En fait :

$$v_0(x) = u''(x) + Au(x),$$

alors

$$\begin{aligned} v''(x) + (A - kI)v_0(x) &= (u''(x) + Au(x))'' + (A - kI)(u''(x) + Au(x)) \\ &= u^4 + Au''(x) + Au''(x) + A^2u(x) - ku''(x) - kAu(x) \\ &= u^4 + (2A - kI)u''(x) + (A^2 - kA)u(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Pour les conditions aux limites, on a

$$\begin{aligned} v_0(a) &= \varphi_3 + A\varphi_1 \\ &= u''(a) + Au(a) \\ &= u''(a) + A\varphi_1, \end{aligned}$$

donc

$$u''(a) = \varphi_3,$$

et

$$
\begin{aligned}
v_0(b) &= \varphi_4 + A\varphi_2 \\
&= u^{''}(b) + Au(b) \\
&= u^{''}(b) + A\varphi_2,
\end{aligned}
$$

donc

$$u^{''}(b) = \varphi_4,$$

donc u est une solution de (2.3.1)-(2.3.2).

Maintenant, on utilisons la méthode Krein à pour la repré sentation de v_0.

On considère le problème

$$(p_1)\begin{cases} v^{''}(x) + (A - kI)v(x) = f(x) \\ v(x) = \varphi_3 + A\varphi_1 \\ v(x) = \varphi_4 + A\varphi_2, \end{cases}$$

on pouvons l'écrire

$$(p^{'})\begin{cases} v^{''}(x) + T^2 v(x) = f(x) \\ v(x) = \varphi_3 + A\varphi_1 \\ v(x) = \varphi_4 + A\varphi_2, \end{cases}$$

avec $T := -\sqrt{-A + kI}$ posons

$$\begin{cases} v(x) = T^{-1}u^{'}(x) \\ y(x) = (u(x) - m(x))/2 \\ y(x) = (u(x) + (x))/2, \end{cases}$$

donc :

$$
\begin{aligned}
y^{'}(x) &= \frac{1}{2}u^{'}(x) - \frac{1}{2}m^{'}(x) \\
&= \frac{1}{2}Tv(x) - \frac{1}{2}T^{-1}u^{''}(x) \\
&= -Ty(x) + \frac{1}{2}T^{-1}f,
\end{aligned}
$$

et

$$y(a) = \psi = (u(a) - T^{-1}u^{'}(a))/2.$$

Alors

$$(Pa)\begin{cases} y^{'}(x) + Ty(x) = \frac{1}{2}T^{-1}f \\ y(b) = \psi = (u(b) - T^{-1}u^{'}(b))/2, \end{cases}$$

le même technique pour $z^{'}(x)$ donne :

$$(Pb)\begin{cases} z^{'}(x) + Ty(x) = \frac{1}{2}T^{-1}f \\ z(b) = \phi = (u(0) - T^{-1}u^{'}(x))/2 \end{cases}$$

la solution de (P) est la somme de ceux de (P_a) et (P_b). On a :

$$y(x) = \frac{1}{2}T^{-1}\int_x^a e^{(x-s)T}f(s)ds + e^{(x-a)T}\psi,$$

et

$$z(x) = \frac{1}{2}T^{-1}\int_b^x e^{(s-x)T}f(s)ds + e^{(b-x)T}\phi,$$

alors

$$\begin{aligned} v_0(x) &= e^{(x-a)T}\psi + e^{(x-a)T}\phi \\ &+ \frac{1}{2}T^{-1}\int_x^a e^{(x-s)T}f(s)ds + \frac{1}{2}T^{-1}\int_b^x e^{(s-x)T}f(s)ds \\ &= e^{(x-a)T}\psi + e^{(x-a)T}\phi + I_x + J_x. \end{aligned}$$

On devons trouver et utiliser les conditions (2.3.2), donc nous utilisons l'existence de l'inverse $W := (I - e^{2(b-a)L})^{-1}$ voir [12]

$$\begin{aligned} &\begin{cases} v(a) = \psi + e^{(b-a)T}\phi + J_a = \varphi_3 + A\varphi_1 \\ v(b) = e^{(b-a)T}\psi + \phi + I_b = \varphi_4 + A\varphi_2 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} \psi + e^{(b-a)T}\phi = \varphi_3 + A\varphi_1 - J_a \\ e^{(b-a)T}\psi + \phi = \varphi_4 + A\varphi_2 - I_b \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} e^{(b-a)T}\psi + e^{2(b-a)T}\phi = e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1 - J_a) \\ e^{(b-a)T}\psi + \phi = \varphi_4 + A\varphi_2 - I_b \end{cases} \\ \Longrightarrow &\left\{(I - e^{2(b-a)T})\phi = \varphi_4 + A\varphi_2 - I_b - e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1 - J_a),\right. \end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
\phi &= (I - e^{2(b-a)T})^{-1}(\varphi_4 + A\varphi_2 - I_b - e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1 - J_a)) \\
&= (I - e^{2(b-a)T})^{-1}(\varphi_4 + A\varphi_2 - \frac{1}{2}T^{-1}\int_b^a e^{(b-s)T} f(s)ds \\
&- e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1 - \frac{1}{2}T^{-1}\int_b^a e^{(s-a)T} f(s)ds));
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\psi &= \varphi_3 + A\varphi_1 - J_a - e^{(b-a)T}\phi \\
&= \varphi_3 + A\varphi_1 - \frac{1}{2}T^{-1}\int_a^b e^{(s-a)T} f(s)ds \\
&- e^{(b-a)T}((I - e^{2(b-a)T})^{-1}(\varphi_4 + A\varphi_2 - \frac{1}{2}T^{-1}\int_a^b e^{(b-a)T} f(s)ds) \\
&- e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1 - \frac{1}{2}T^{-1}\int_a^b e^{(s-a)T} f(s)ds)).
\end{aligned}
$$

En remplaçant dans l'expression de $v_0(x)$ on obtient pour $x \in]a; b[$:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= e^{(x-a)T}W(\varphi_3 + A\varphi_1) + e^{(b-x)T}W\varphi_4 + A\varphi_2 \\
&- \frac{1}{2}e^{(x-a)T}WT^{-1}\int_a^b e^{(s-a)T} f(s)ds - \frac{1}{2}e^{(b-x)T}WT^{-1}\int_a^b e^{(b-s)T} f(s)ds \\
&+ \frac{1}{2}T^{-1}\int_a^x e^{(x-s)T} f(s)ds + \frac{1}{2}T^{-1}\int_x^b e^{(s-x)T} f(s)ds \\
&- e^{(b-x)T}e^{(b-a)T}(\varphi_3 + A\varphi_1) - e^{(x-a)T}e^{(b-a)T}(\varphi_4 + A\varphi_2) \\
&+ \frac{1}{2}e^{(x-a)T}We^{(b-a)T}T^{-1}\int_a^b e^{(b-s)T} f(s)ds \\
&+ \frac{1}{2}e^{(b-x)T}We^{(b-a)T}T^{-1}\int_a^b e^{(s-a)T} f(s)ds,
\end{aligned}
$$

avec $W := (I - e^{2(b-a)L})^{-1}$ On utilise la même méthode de Krein pour obtenir pour $x \in]a; b[$:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(x-a)N} Z\varphi_1 + e^{(b-x)N} Z\varphi_2 \\ &- \frac{1}{2} e^{(x-a)N} Z N^{-1} \int_a^b e^{(s-a)N} v_0(s)ds - \frac{1}{2} e^{(b-x)N} Z N^{-1} \int_a^b e^{(b-s)N} v_0(s)ds \\ &+ \frac{1}{2} N^{-1} \int_a^x e^{(x-s)T} v_0(s)ds + \frac{1}{2} N^{-1} \int_x^b e^{(s-x)N} v_0(s)ds \\ &- e^{(b-x)N} e^{(b-a)T} \varphi_1 - e^{(x-a)N} e^{(b-a)N} \varphi_2 \\ &+ \frac{1}{2} e^{(x-a)N} Z e^{(b-a)N} n^{-1} \int_a^b e^{(b-s)N} v_0(s)ds \\ &+ \frac{1}{2} e^{(b-x)N} Z e^{(b-a)N} N^{-1} \int_a^b e^{(s-a)N} v_0(s)ds, \end{aligned}$$

avec $Z := (I - e^{2(b-a)N})^{-1}$. □

2.4 Résultats préliminaires

Afin de résoudre le problème (P), on introduit deux problèmes

$$(p_-) \begin{cases} u_-^{(4)}(x) + (2A - r_- I)u_-^{''}(x) + (A^2 - r_- A)u_-(x) = f_-(x), x \in (a, \gamma) \\ u_-(a) = \varphi_1^-, \quad u_-(\gamma) = \psi_1 \\ u_-^{'}(a) = \varphi_2^-, \quad u_-^{'}(\gamma) = \psi_2 \end{cases}$$

$$(p_+) \begin{cases} u_+^{(4)}(x) + (2A - r_+ I)u_+^{''}(x) + (A^2 - r_+ A)u_+(x) = f_+(x), x \in (a, \gamma) \\ u_+(\gamma) = \psi_1 \quad , \\ u_+(b) = \varphi_1^+ u_+^{'}(\gamma) = \psi_2 \quad , \quad u_+^{'}(a) = \varphi_2^+ \end{cases}$$

Remarque 2.4.1 *On obtient que u est une solution classique de (P) si et seulement s'il existe $\psi_1, \psi_2 \in X$ telles que :*

i) *u_- est une solution classique de (P_-).*

ii) *u_+ est une solution classique de (P_+).*

iii) *u_- et u_+ vérifient $(CT2)$.*

Remarque 2.4.2 *Notre but est donc de montrer qu'il existe un unique couple* (ψ_1, ψ_2) *qui vérifie* (i) *,*(ii) *et* (iii)*.*

D'aprés la remarque précédente, pour résoudre le problème (P)*, il nous faut tout d'abord résoudre les probèmes* $(P_{\_})$ *et* $(P_{_+})$*. Afin de simplifier les notations, on pose*

$$c = \gamma - a > 0 \ \ \textbf{et} \quad d = b - \gamma > 0.$$

On a le résultat suivante

Lemme 2.4.1 *Les opérateurs* U_-*,* U_+*,* V_-*,* $V_+ \in \mathcal{L}(X)$ *définis par*

$$\begin{cases} U_- := I - e^{2cM} + 2cMe^{cM}, & U_+ := I - e^{2dM} + 2dMe^{dM}, \\ V_- := I - e^{2cM} + 2cMe^{cM}, & V_+ := I - e^{2dM} + 2dMe^{dM}, \end{cases}$$

sont inversibles avec inverse borné.

Toutes ces exponentielles sont bien définies grâce a la Proposition précédente avec $b - a = c$ ou $b - a = d$.

2.4.1 Le problem P_-

Proposition 2.4.1 *Soit* $f_- \in L^P(a, \gamma; X)$*. On supposons que (2.2.1)~(2.2.4) sont vraies. Alors il existe une unique solution classique* u_- *au problème* (P_-) *si et seulement si*

$$\varphi_1^-, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \quad et \quad \varphi_2^-, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \tag{2.4.1}$$

de plus

$$\begin{aligned} u_-(x) \; &= \; (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M})\alpha_1 + ((x-a)e^{(x-a)M} - (\gamma - x)e^{(\gamma-x)M})\alpha_2 \qquad (2.4.2) \\ &\quad +(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M})\alpha_3 + ((x-a)e^{(x-a)L} + (\gamma - x)e^{(\gamma-x)M})\alpha_4 \\ &\quad +F(x)_-, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases}\alpha_1^- := -\frac{1}{2}U_-^{-1}((I+(I+cM)e^{cM})\psi_1 + ce^{cM}\psi_2) + \tilde{\varphi}_1^- \\ \alpha_2^- := \quad \frac{1}{2}U_-^{-1}((I+e^{cM})M\psi_1 + (I-e^{cM})\psi_2) + \tilde{\varphi}_2^- \\ \alpha_3^- := \frac{1}{2}V_-^{-1}((I-(I+cM)e^{cM})\psi_1 + ce^{cM}\psi_2) + \tilde{\varphi}_3^- \\ \alpha_4^- := -\frac{1}{2}V_-^{-1}((I-e^{cM})M\psi_1 + (I+e^{cM})\psi_2) + \tilde{\varphi}_4^-,\end{cases} \tag{2.4.3}$$

avec

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}_1^- := \frac{1}{2}U_-^{-1}(\varphi_1^- + e^{cM}(\varphi_1^- + c(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F_-^{'}(a) - F_-^{'}(\gamma)))) \\ \tilde{\varphi}_2^- := -\frac{1}{2}U_-^{-1}(M\varphi_1^- + \varphi_2^- + F_-^{'}(a) + F_-^{'}(\gamma)) \\ \qquad -\frac{1}{2}U_-^{-1}e^{cM}(M\varphi_1^- - \varphi_2^- - F_-^{'}(a) - F_-^{'}(\gamma)) \\ \tilde{\varphi}_3^- := \frac{1}{2}V_-^{-1}(\varphi_1^- - e^{cM}(\varphi_1^- + c(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F_-^{'}(a) + F_-^{'}(\gamma)))) \\ \tilde{\varphi}_4^- := -\frac{1}{2}V_-^{-1}(M\varphi_1^- - \varphi_2^- + F_-^{'}(a) - F_-^{'}(\gamma)) \\ \qquad +\frac{1}{2}V_-^{-1}e^{cM}(M\varphi_1^- + \varphi_2^- - F_-^{'}(a) + F_-^{'}(\gamma)),\end{cases} \tag{2.4.4}$$

et F_- est la solution classique unique du problème

$$\begin{cases}u_-^{(4)}(x) + (2A - r_-I)u_-^{''}(x) + (A^2 - r_-A)u_-(x) = f_-(x), x \in (a,\gamma) \\ u_-(a) = u_-(\gamma) = u^{''}(a) = u^{''}(\gamma) = 0.\end{cases} \tag{2.4.5}$$

Preuve: D'après (2.3.1), il existe une unique solution classique u- au probl ème (P_-) si et seulement si (2.4.1) est vérifi ée. De plus où $u, L, f, b, F_{0,f}, k, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, , \varphi_4$ sont respectivement remplacées par $u_-, L_-, f_-, \gamma, F_-, r_-, \varphi_1^-, \psi_1, \varphi_2^-, \psi_2$. Cela prouve que la formule de représentation de u_- est donnée par (2.4.2), (2.4.3) et (2.4.4). □

Remarque 2.4.3 *Dans la proposition précédente, en raison (2.4.1), (2.4.3) et (2.4.4), on a*

$$\alpha_1^-,\ \alpha_3^- \in D(M^3) \ \text{ et } \ \alpha_2^-,\ \alpha_4^- \in D(M^2).$$

De plus,puisque de F_- est une solution classique de (2.4.5), on a pour $j = 0, 1, 2, 3$

$$F_-^{(j)}(s) = (D(M), X)_{3-j+1/P,P}, \quad s = a \ \text{ ou } \gamma.$$

2.4.2 Le problem P_+

Proposition 2.4.2 *Soit $f_+ \in L^P(\gamma, b; X)$. On supposons que (2.2.1)~(2.2.4) sont vraies. Alors il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si*

$$\varphi_1^+, \psi_1 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \quad et \quad \varphi_2^+, \psi_2 \in (D(A), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \tag{2.4.6}$$

de plus

$$\begin{aligned} u_+(x) &= (e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M})\alpha_1 + ((x-\gamma)e^{(x-\gamma)M} - (b-x)e^{(b-x)M})\alpha_2 \\ &\quad +(e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M})\alpha_3 + ((x-\gamma)e^{(x-\gamma)L} + (b-x)e^{(b-x)M})\alpha_4 \\ &\quad +F(x)_+, \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

où

$$\begin{cases} \alpha_1^+ := \dfrac{1}{2}U_+^{-1}((I + (I + dM)e^{dM})\psi_1 + de^{dM}\psi_2) + \tilde{\varphi}_1^+ \\ \alpha_2^+ := \dfrac{-1}{2}U_+^{-1}((I + e^{dM})M\psi_1 + (I - e^{dM})\psi_2) + \tilde{\varphi}_2^+ \\ \alpha_3^+ := \frac{1}{2}V_+^{-1}((I - (I + dM)e^{dM})\psi_1 + de^{dM}\psi_2) + \tilde{\varphi}_3^+ \\ \alpha_4^+ := -\frac{1}{2}V_+^{-1}((I - e^{dM})M\psi_1 + (I + e^{dM})\psi_2) + \tilde{\varphi}_4^+, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1^+ := \dfrac{-1}{2}U_+^{-1}(\varphi_1^+ + e^{dM}(\varphi_1^+ + d(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ - F_+'(a) - F_+'(\gamma)))) \\ \tilde{\varphi}_2^+ := \dfrac{1}{2}U_+^{-1}(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ + F_+'(a) + F_+'(\gamma)) \\ \qquad\quad +\dfrac{1}{2}U_+^{-1}e^{dM}(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ - F_+'(a) - F_+'(\gamma)) \\ \tilde{\varphi}_3^+ := \dfrac{1}{2}V_+^{-1}(\varphi_1^+ - e^{dM}(\varphi_1^+ + d(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ - F_+'(a) + F_+'(\gamma)))) \\ \tilde{\varphi}_4^+ := -\dfrac{1}{2}V_+^{-1}(M\varphi_1^+ - \varphi_2^+ + F_+'(a) - F_+'(\gamma)) \\ \qquad\quad +\dfrac{1}{2}V_+^{-1}e^{dM}(M\varphi_1^+ + \varphi_2^+ - F_+'(a) + F_+'(\gamma)), \end{cases} \tag{2.4.9}$$

et F_+ est la solution classique unique du problème

$$\begin{cases} u_+^{(4)}(x) + (2A - r_+I)u_+''(x) + (A^2 - r_+A)u_+(x) = f_+(x), \quad x \in (\gamma, b) \\ u_-(a) = u_-(\gamma) = u''(a) = u''(\gamma) = 0. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

Preuve: D'après (2.3.1), il existe une unique solution classique u_+ au problème (P_+) si et seulement si (2.4.6) est vérifiée. De plus où u, $L, f, a, F_{0,f}, k, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont respectivement remplacées par $u_+, L_+, f_+, \gamma, F_+, r_+, \varphi_1^+, \psi_1, \varphi_2^+, \psi_2$. Cela prouve que la formule de représentation de u_- est donnée par (2.4.7), (2.4.8) et (2.4.9). □

Remarque 2.4.4 *Dans la proposition précédente, en raison (2.4.6), (2.4.8) et (2.4.9), on a*

$$\alpha_1^+,\ \alpha_3^+ \in D(M^3)\ \ et\ \ \alpha_2^+,\ \alpha_4^+ \in D(M^2).$$

De plus,puisque de F_+ est une solution classique de (2.4.10), on a pour $j = 0, 1, 2, 3$

$$F_+^{(j)}(s) = (D(M), X)_{3-j+1/P,P}, \quad s = \gamma \ \ ou\ b.$$

2.5 Le système de transmission

On considère le lien entre le problème (P) et le système suivant

$$\begin{cases} (P_1^+ + P_1^-)\psi_1 + (P_2^- - P_2^+)\psi_2 = S_1 \\ M(P_2^- - P_2^+)\psi_1 + (P_3^+ - P_3^-)\psi_2 = S_2, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

les coefficients du système précédent sont donnés par :

$$\begin{cases} P_1^+ = k_+(L_+ + M)L_+(U_+^{-1}(I + e^{dM})(I + e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I - e^{dM})(I - e^{dL_+})) \\ P_2^+ = k_+(L_+ + M)(U_+^{-1}(I + e^{dM})(I - e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I - e^{dM})(I + e^{dL_+})) \\ P_3^+ = k_+(L_+ + M)(U_+^{-1}(I - e^{dM})(I - e^{dL_+}) + V_+^{-1}(I + e^{dM})(I + e^{dL_+})), \end{cases} \tag{2.5.2}$$

et

$$\begin{cases} P_1^- = k_-(L_- + M)L_-(U_-^{-1}(I + e^{cM})(I + e^{cL_-}) + V_-^{-1}(I - e^{cM})(I - e^{cL_-})) \\ P_2^- = k_-(L_- + M)(U_-^{-1}(I + e^{cM})(I - e^{cL_-}) + V_-^{-1}(I - e^{cM})(I + e^{cL_-})) \\ P_3^- = k_-(L_- + M)(U_-^{-1}(I - e^{cM})(I - e^{cL_+}) + V_-^{-1}(I + e^{cM})(I + e^{cL_-})). \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Les seconds membres sont donnés par

$$\begin{aligned} S_1 \ &= \ -k_+(L_+ + M)(U_+^{-1}(I + e^{dM})\tilde{\varphi}_1^+ + V_+^{-1}(I - e^{dM})\tilde{\varphi}_3^+) \\ &\quad -k_-(L_- + M)(U_-^{-1}(I + e^{cM})\tilde{\varphi}_1^- + V_-^{-1}(I - e^{cM})\tilde{\varphi}_3^-) \\ &\quad -2M^{-1}R_1, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &= -k_+F_+^{'''}(\gamma) + k_+M^2F_+^{'}(\gamma) + l_+F_+^{'}(\gamma) \\ &\quad +k_-F_-^{'''}(\gamma) - k_-M^2F_-^{'}(\gamma) - l_-F_-^{'}(\gamma), \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

et

$$\begin{aligned} S_2 &= k_+(L_+ + M)(U_+^{-1}(I - e^{dL_+})\tilde{\varphi}_2^+ + V_+^{-1}(I + e^{dL_+})\tilde{\varphi}_4^+) \\ &\quad -k_-(L_- + M)(U_-^{-1}(I - e^{cL_-})\tilde{\varphi}_2^- + V_-^{-1}(I + e^{cL_-})\tilde{\varphi}_4^-). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

On a le resultat suivante

Théorème 2.5.1 *Soientt $f_- \in L^p(a,\gamma,X)$ et $f_+ \in L^p(\gamma,b,X)$. On suppose que (2.2.1) $\sim$ (2.2.4) sont vérifiées. Alors le problème (P) a une unique solution classique si et seulement si les données $\varphi_1^+, \varphi_1^-, \varphi_2^+, \varphi_2^-$ vérifient*

$$\varphi_1^+, \varphi_1^- \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \ \ et \ \ \varphi_2^+, \varphi_2^- \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}, \tag{2.5.7}$$

et le système (2.5.1) a une unique solution

$$(\psi_1, \psi_2) \in (D(M), X)_{1+\frac{1}{2p},p} \times (D(M), X)_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}. \tag{2.5.8}$$

Preuve: Nous supposons que (P) admet une solution classique unique u. On pose

$$\psi_1 = u_-(\gamma) = u_+(\gamma) \ \text{ et } \ \psi_2 = u_-^{'} = (\gamma) = u_+^{'}(\gamma),$$

on obtient que u_- (resp u_+) est la solution classique de (P_-) (resp (P_+)). Ainsi, en appliquant la Proposition (2.4.1) (resp la Proposition (2.4.2), nous obtenons (2.5.7) et aussi (2.5.8). Il reste à prouver que (ψ_1, ψ_2) satisfait (2.5.1). Pour cela, on utilise le fait que u vérifie les conditions de transmission

$(CT2)$. On a alors le système suivant

$$\begin{cases} k_+(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+^{'}(\gamma)) - l_+ u_{+'}(\gamma) - k_-(u^{(3)}(\gamma) - M^2 u_-^{'}(\gamma)) + l_- u_-^{'}(\gamma) = 0 \\ k_+(u_+^{('')}(\gamma) - M^2 u_+(\gamma)) - k_-(u^{('')}(\gamma) - M^2 u_-(\gamma)) = 0. \end{cases}$$

Pour rendre explicite ce système, nous utilisons l'expression de u_+. Il s'ensuit, pour $x \in (\gamma, b)$

$$\begin{aligned} u_+(x) = {} & (e^{(x-\gamma)M} - e^{(b-x)M})\alpha_1^+ + (e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+})\alpha_2^+ \\ & + (e^{(x-\gamma)M} - e^{(x-b)M})\alpha_3^+ + (e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+})\alpha_4^+ \\ & + F_+(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+^{'}(x) = {} & M(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M})\alpha_1^+ + L_+(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+})\alpha_2^+ \\ & + M(e^{(x-\gamma)M} - e^{(x-b)M})\alpha_3^+ + L_+(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+})\alpha_4^+ \\ & + F_+^{'}(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_+^{''}(x) = {} & M^2(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M})\alpha_1^+ + L_+^2(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+})\alpha_2^+ \\ & + M^2(e^{(x-\gamma)M} - e^{(x-b)M})\alpha_3^+ + L_+^2(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+})\alpha_4^+ \\ & + F_+^{''}(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_+^{(3)}(x) = {} & M^3(e^{(x-\gamma)M} + e^{(b-x)M})\alpha_1^+ + L_+^3(e^{(x-\gamma)L_+} + e^{(b-x)L_+})\alpha_2^+ \\ & + M^3(e^{(x-\gamma)M} - e^{(x-b)M})\alpha_3^+ + L_+^3(e^{(x-\gamma)L_+} - e^{(b-x)L_+})\alpha_4^+ \\ & + F_+^{'''}(x). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} M^{-2}(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+^{'}(\gamma)) = {} & L_+(L_+^2 - M^2)M^{-2}(I + e^{dL_+})\alpha_2^+ \\ & + L_+(L_+^2 - M^2)M^{-2}(I - e^{dL_+})\alpha_4^+ \\ & + M^{-2}F_+^{'''}(\gamma) - F_+^{'}(\gamma). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\forall \psi \in D(M^2), \begin{cases} (L_+^2 - M^2)\psi = r_+\psi \\ (L_-^2 - M^2)\psi = r_-\psi. \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} M^{-2}(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+^{'}(\gamma)) \quad = \quad & \frac{l_+}{k_+} L_+ M^{-2}(I + e^{dL_+})\alpha_2^+ \\ & + \frac{l_+}{k_+} L_+ M^{-2}(I - e^{dL_+})\alpha_4^+ \\ & + M^{-2}F_+^{'''}(\gamma) - F_+^{'}(\gamma), \end{aligned}$$

donc

$$u_+^{(3)}(\gamma) - M^{-2}u_+^{'}(\gamma) = \frac{l_+}{k_+} L_+(I + e^{dL_+})\alpha_2^+ + \frac{l_+}{k_+} L_+(I - e^{dL_+})\alpha_4^+ + F_+^{'''}(\gamma) - M^2 F_+^{'}(\gamma),$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} k_+(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+^{'}(\gamma)) - l_+ u_+^{'} = {} & - l_+ M(I + e^{dM})\alpha_1^+ - l_+ M(I - e^{dM})\alpha_3^+ + k_+ F_+^{'''}(\gamma) \\ & - k_+ M^2 F_+^{'}(\gamma) - l_+ F_+^{'}(\gamma). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} M^{-1}(u_+^{''}(\gamma) - M^2 u_+(\gamma)) = {} & (L_+^2 - M^2)M^{-1}(I - e^{dL_+})\alpha_2^+ + (L_+^2 - M^2)M^{-1}(I + e^{dL_+})\alpha_4^+ \\ = {} & \frac{l_+}{k_+} M^{-1}(I - e^{dL_+})\alpha_2^+ + \frac{l_+}{k_+} M^{-1}(I + e^{dL_+})\alpha_4^+, \end{aligned}$$

donc, nous obtenons

$$k_+(u_+^{(3)}(\gamma) - M^2 u_+'(\gamma)) = l_+(I - e^{dL_+})\alpha_2^+ + l_+(I + e^{dL_+})\alpha_4^+. \tag{2.5.9}$$

Comme précédemment, pour u_-, nous utilisons

$$\begin{aligned} u_-(x) =& (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M})\alpha_1^- + (e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_2^- \\ &+ (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)M})\alpha_3^- + (e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_4^- \\ &+ F_-(x), \end{aligned}$$

et obtenons, pour $x \in (a, \gamma)$

$$\begin{aligned} u_-(x) = \quad & (e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)}M)\alpha_1^- + (e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_2^- \\ &+ (e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M})\alpha_3^- + (e^{(x-a)L_-} + e^{\gamma-x}L_-)\alpha_4^- \\ &+ F_-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_-'(x) = \quad & M(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)}M)\alpha_1^- + L_-(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_2^- \\ &+ M(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M})\alpha_3^- + L_-(e^{(x-a)L_-} + e^{\gamma-x}L_-)\alpha_4^- \\ &+ F_-'(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_-''(x) = \quad & M^2(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)}M)\alpha_1^- + L_-^2(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_2^- \\ &+ M^2(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M})\alpha_3^- + L_-^2(e^{(x-a)L_-} + e^{\gamma-x}L_-)\alpha_4^- \\ &+ F_-''(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_-^{(3)}(x) = \quad & M^3(e^{(x-a)M} - e^{(\gamma-x)}M)\alpha_1^- + L_-^3(e^{(x-a)L_-} - e^{(\gamma-x)L_-})\alpha_2^- \\
& + M^3(e^{(x-a)M} + e^{(\gamma-x)M})\alpha_3^- + L_-^3(e^{(x-a)L_-} + e^{\gamma-x}L_-)\alpha_4^- \\
& + F_-^{'''}(x).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_-^{(3)}(\gamma) - M^2u_-^{'}(\gamma) = & L_-(L_-^2 - M^2)(e^{cL_-} + I)\alpha_2^- \\
& + L_-(L^2 - M^2)(e^{cL_-} - I)\alpha_4^- \\
& + F_-^{'''}(\gamma) - M^2F_-^{'}(\gamma),
\end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
M^{-2}(u_-^{(3)}(\gamma) - M^2u_-^{'}(\gamma)) = & L_-(L_-^2 - M^2)M^{-2}(e^{cL_-} + I)\alpha_2^- + M^{-2}F_-^{'''}(\gamma) \\
& + L_-(L^2 - M^2)M^{-2}(e^{cL_-} - I)\alpha_4^- - F_-^{'}(\gamma) \\
& = L_-\frac{l_-}{k_-}M^{-2}(e^{cL_-} + I)\alpha_2^- + M^{-2}F_-^{'''}(\gamma) \\
& + L_-\frac{l_{l_-}}{k_-}M^{-2}(e^{cL_-} - I)\alpha_4^- - F_-^{'}(\gamma).
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
k_-(u^{(3)}(\gamma) - M^2u_-^{'}(\gamma)) - l_-u_-^{'}(\gamma) = & l_-L_-(e^{cL_-} + I)\alpha_2^- + l_-L_-(e^{cL_-} - I)\alpha_4^- \\
& + l_-M(e^{cM} + I)\alpha_1^- - l_-L_-(e^{cL_-} + I)\alpha_2^- \\
& + l_-M(e^{cM} - I)\alpha_3^- - l_-L_-(e^{cL_-} - I)\alpha_4^- \\
& + k_-F_-^{'''}(\gamma) - k_-M^2F_-^{'}(\gamma) - l_-F_-^{'}(\gamma) \\
& = -l_-M(e^{cM} + I)\alpha_1^- - l_-M(e^{cM} - I)\alpha_3^- \\
& + k_-F_-^{'''}(\gamma) - k_-M^2F_-^{'}(\gamma) - l_-F_-^{'}(\gamma).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}M^{-1}(u_-''(\gamma)-M^2u_-(\gamma)) =&(L_-^2-M^2)M^{-1}(e^{cL_-}-I)\alpha_2^-\\&+(L_-^2-M^2)M^{-1}(I+e^{cL_-})\alpha_4^-\\&=\frac{l_-}{k_-}M^{-1}(e^{cL_-}-I)\alpha_2^-+\frac{l_-}{k_-}M^{-1}(e^{cL_-}+I)\alpha_4^-,\end{aligned}$$

alors en déduisons l'égalité suivante :

$$k^{-1}(u_-''(\gamma)-M^2u_-(\gamma))=l_-(e^{cL_-}-I)\alpha_2^-+l_-(e^{cL_-}+I)\alpha_4^-.$$

De plus le système $(TC2)$ devient

$$\begin{cases}-l_+M(I+e^{dM})\alpha_1^+ \quad l_+M(I-e^{dM})\alpha_3^+ &= -l_-M(I+e^{cM})\alpha_1^-\\ & \quad +l_-M(I-e^{cM})\alpha_3^-\\ & \quad +R_1\\ l_+(I-e^{dL_+})\alpha_2^+ \quad l_+(I+e^{dL_+})\alpha_4^+ &= -l_-(I-e^{cL_-})\alpha_2^-\\ & \quad +l_-(I+e^{cL_-})\alpha_4^-.\end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases}-l_+((\alpha_1^++\alpha_3^+)-e^{dM}(\alpha_3^++\alpha_1^+))=l_-((\alpha_3^-+\alpha_1^-)-e^{cM}(\alpha_1^-+\alpha_3^-))+M^{-1}R_1\\ l_+((\alpha_2^++\alpha_4^+)+e^{dL_+}(\alpha_4^+-\alpha_2^+))=l_-((\alpha_4^--\alpha_2^-)+e^{cL_-}(\alpha_2^-+\alpha_4^-)).\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\alpha_1^++\alpha_3^+ =&\frac{1}{2r_+}(L_++M)U_+^{-1}(L_+(I+e^{dL_+})\psi_1-(I-e^{dL_+})\psi_2+\tilde{\varphi}_1{}^+)\\&+\frac{1}{2r_+}(L_++M)V_+^{-1}(L_+(I-e^{dL_+})\psi_1-(I+e^{dL_+})\psi_2+\tilde{\varphi}_3{}^+),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3^+-\alpha_1^+ =&-\frac{1}{2r_+}(L_++M)U_+^{-1}(L_+(I+e^{dL_+})\psi_1-(I-e^{dL_+})\psi_2+\tilde{\varphi}_1{}^+)\\&+\frac{1}{2r_+}(L_++M)V_+^{-1}(L_+(I-e^{dL_+})\psi_1-(I+e^{dL_+})\psi_2+\tilde{\varphi}_3{}^+),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^-+\alpha_3^- =&-\frac{1}{2r_-}(L_-+M)U_-^{-1}(L_-(I+e^{cL_-})\psi_1+(I-e^{cL_-})\psi_2+\tilde{\varphi}_1{}^+)\\&+\frac{1}{2r_-}(L_-+M)V_-^{-1}(L_-(I-e^{cL_-})\psi_1+(I+e^{cL_-})\psi_2+\tilde{\varphi}_3{}^+),\end{aligned}$$

et

$$\alpha_3^- - \alpha_1^- = \frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1}(L_-(I + e^{cL_-})\psi_1 + (I - e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_1{}^+) + \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1}(L_-(I - e^{cL_-})\psi_1 + (I + e^{cL_-})\psi_2 + \tilde{\varphi}_3{}^+).$$

Afin de résoudre le système (2.5), on doit calculer le déterminant de la matrice associée à ce système. Pour cela, il faut séparer les coefficients de la matrice des termes sources. On regroupe alors tous les termes sources dans deux opérateurs S1 et S2, définis par (2.5.4) et (2.5.6), que lon isole du reste du système. Ainsi, on en déduit que le système (2.5).

En utilisant (2.5.2) et (2.5.3), la première ligne du système (2.5.1) s'écrit

$$(p_1^+ + p_1^-)\psi_1 + (p_2^- - p_2^+)\psi_2 = S_1, \tag{2.5.10}$$

où S_1 est donné par (2.5.4). De la même manière, nous avons

$$\alpha_2^+ + \alpha_4^+ = -\frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1}(M(I + e^{dM})\psi_1 - (I - e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2{}^+) - \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1}(M(I - e^{dM})\psi_1 - (I + e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4{}^+)$$

$$\alpha_4^+ - \alpha_2^+ = \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)U_+^{-1}(M(I + e^{dM})\psi_1 - (I - e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2{}^+) - \frac{1}{2r_+}(L_+ + M)V_+^{-1}(M(I - e^{dM})\psi_1 - (I + e^{dM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4{}^+)$$

$$\alpha_2^- + \alpha_4^- = \frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1}(M(I + e^{cM})\psi_1 + (I - e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2{}^-) - \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1}(M(I - e^{cM})\psi_1 + (I + e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4{}^-)$$

$$\alpha_4^- - \alpha_2^- = -\frac{1}{2r_-}(L_- + M)U_-^{-1}(M(I + e^{cM})\psi_1 + (I - e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_2{}^-) - \frac{1}{2r_-}(L_- + M)V_-^{-1}(M(I - e^{cM})\psi_1 + (I + e^{cM})\psi_2 + \tilde{\varphi}_4{}^-)$$

Donc, en utilisant (2.5.2) et (2.5.3) la deuxième ligne du système (2.5.1) écrire

$$(p_2^- - p_2^+)\psi_1 + (p_3^+ + p_3^-)\psi_2 = S_2, \tag{2.5.11}$$

où S_2 est donné par (2.5.6). Ensuite, en raison de (2.5.10) et (2.5.11), (ψ_1, ψ_2) est la solution classique du systeme (2.5.1). $\square$

Chapitre 3

Régularité de la solution

Pour étudier la régularité de la solution nous avons besoin de quelques lemmes techniques, voir Dore-Venni [4]

Lemme 3.0.1 *Soit* $f \in L^p(a,b;X) : 1 < p < \infty$, *sous (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3), nous avons :*

Lemme 3.0.2

1. $x \mapsto F(x,f) = T\int_0^x e^{(x-s)T} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$
2. $x \mapsto H(x,f) = T\int_x^1 e^{(s-x)T} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$
3. $x \mapsto F(x,f) = T\int_0^1 e^{(x+s)T} f(s)ds \in L^p(0,1;X)$.

Preuve:

1. X étant UMD et T un opérateur linéaire fermé dans X vérifiant les hypothèses de Dore-Venni, alors :

$$b(x) = \int_0^x e^{(x-s)T} f(s)ds,$$

est la solution stricte et unique au problème de Cauchys :

$$\begin{cases} b'(x) + Tb(x) = f(x) \\ b(0) = 0, \end{cases}$$

puis, en appliquant le théorème de Dore-Venni à ce problème on obtient :

$$b \in W^{1;p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(B)),$$

ainsi :

$$F(.,f) \in L^p(0,1;X).$$

2. Si $t = 1 - s$, on obtient :

$$\begin{aligned} H(x,f) &= T\int_x^1 e^{(s-x)T} f(s)ds \\ &= T\int_x^1 e^{(s-1+1-x)T} f(s)ds \\ &= T\int_x^1 e^{((1-x)-(1-s))T} f(s)ds \\ &= T\int_x^1 e^{((1-x)-t)T} f(1-t)ds \\ &= F(1-x, f(1-.)), \end{aligned}$$

ainsi

$$H(.,f) = x \to F(1-x, f(1-.)) \in L^p(0,1;X).$$

3. On écrivons :$\forall x \in (a;b)$:

$$\begin{aligned} G(x,f) &= T\int_0^1 e^{(x+s)T} f(s) \\ &= T\int_0^x e^{(x+s)T} f(s) + T\int_x^1 e^{(x+s)T} f(s) \\ &= T\int_0^1 e^{(x+s)T} e^{2sT} f(s) + e^{2xT} T\int_0^1 e^{(x+s)T} f(s) \\ &= F(x, e^{2st} f(s)) + e^{2xt} H(x,f); \end{aligned}$$

ainsi :

$$G(.,f) = x \to F(x, e^{2xt} f(s)) + e^{2xt} H(x,f) \in L^p(0,1;X).$$

$\square$

Lemme 3.0.3 *Soit $p \in]1;\infty[$, supposons (2.2.2), (2.2.3) alors :*

1. *$Ae^{T}\phi \in L^{p}(a,b;X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A);X)_{\frac{1}{2p};p}$.*

2. *$Te^{T} \in L^{p}(a,b;X)$ si et seulement si $\varphi \in (D(A);X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2};p}$.*

Preuve:

1. Rappelons que si $m \in \mathbb{N}$et C générent un demi-groupe analytique alors :

$$\phi \in (D(C^{m}),X)_{\frac{1}{mp};p},$$

si et seulement si

$$C^{m}e^{\cdot C}\phi \in L^{P}(0,1;X),$$

en fait

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \| C^{m}e^{xC}\phi \|^{p}\, dx &= \int_{0}^{1} x^{m\frac{1}{mp}p} \| C^{m}e^{xC}\phi \|^{p} \frac{dx}{x}\\ &\leq \int_{0}^{+\infty} \| x^{m.(1-(1-\frac{1}{mp}))}C^{m}e^{xC}\phi \|^{p} \frac{dx}{x}\\ &\leq K \| \phi \|_{(D(C^{m}),X)_{\frac{1}{mp},p}},\end{aligned}$$

(voir H. Triebel [13]). Donc $Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^{p}(0,1;X)$ si et seulement si :

$$\varphi \in (D(Q^{2}),X)_{\frac{1}{2p},p} = (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

2. De même manière $Te^{\cdot T}\varphi \in L^{p}(0,1;X)$ si et seulement si

$$\varphi \in (D(T),X)_{\frac{1}{p},p}.$$

On concluons en utilisant la propriété de réitération due à Lions-Peetre [10] :

$$\begin{aligned}(D(T), X)_{\frac{1}{p},p} &= (X, D(T))_{1-\frac{1}{p},p}\\ &= (X, D(T^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}\\ &= (D(A), X)_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p},p}.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.0.4 *Soit $f \in L^p(a, b; X)$, $1 < p < \infty$ supposons (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3), on a :*

$$\int_a^b e^{sT} f(s)ds \in (D(T); X)_{\frac{1}{p};p} = (D(T); X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2};p}.$$

Preuve: A partir des lemmes précédents implique que nous obtenons

$$Te^{\cdot T} \int_a^b e^{sT} f(s)ds \in L^p(a, b; X),$$

ensuite, on aurons :

$$\int_a^b e^{sT} f(s)ds \in (D(A); X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2};p}.$$

□

Lemme 3.0.5 *On a :*

$$(D(T); X)_{\frac{1}{2};p} = (D(A); X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2};p}.$$

Preuve: On a

$$D(T) \in K_{\frac{1}{2}}(D(A); X)\mathbf{et}X \in K_1(D(A); X),$$

(voir Lions-Peetre [10]) puis pour :

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \in]\alpha_0, \alpha_1[= \left]\frac{1}{2}, 1\right[; (\text{comme } 1 < p < \infty);$$

on a

$$\begin{aligned}(D(A);X)_{\frac{1}{p}+\frac{1}{2};p} &= (D(T);X)_{\frac{(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}};p}\\ &= (D(T);X)_{\frac{1}{p};p}.\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] A. V. Balakrishnan. : *Fractional Powers of Closed Operators and theSemi-groups Generated by them*, Pacif.J.Math.10(1960), 419-437. Proc . Symp . Pure Math. 45(1)(1986),p.359-370.

[2] D. S. Cohen and J. D. Murray. : *A generalized diffusion model for growth and dispersal in po-pulation*, Journal of Mathematical Biology, 12 (1981), 237-249.

[3] G. Da Prato, P. Grisvard : *Sommes d'Opérateurs Linéaires et Equations Différentielles Opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. IX Ser.54, 305-387 (1975).

[4] G. Dore, A. Venni. : *On the closedness of the sum of two closed operators*. Math. Z. 196, 124–136 (1987).

[5] P. Grisvard. : *Spazi di trace applicazioni (Italian)*,Rend. Mat.(6),5(1972),657-729.

[6] M. Hasse. : *The functional calculus for sectorial operators, operator theory : Advances and Applications*, vol. 169. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (2006).

[7] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau and A. Thorel. : *On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 450 (2017), 351-376.

[8] R. Labbas, K. Lemrabet S. Maingot, and A. Thorel. : *Generalized linear models for population dynamics in two juxtaposed habitats, Discrete and continuous dynamical systems*, Volume 39, Number 5, May 2019

[9] R. Labbas and M. Moussaoui. :*On there solution of the heat equation with discontinuous coefficients*, Semi-group Forum, vol.60(2000),187-201.

[10] J.-L. Lions, J. Peetre. : *Sur une classe d'espaces d'interpolation* .Publ.Math.,Inst. Hautes Etud.Sci. 19(1964),p.5-68.

[11] J. L. Lions. : *Théorèmes de trace et d'interpolation*, I et II . Annali S.N.S.di Pisa,13, (1959),389-403et14,(1960),317-331.

[12] A. Lunardi. : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhauser, Basel, Boston, Berlin, 1995.

[13] H. Triebel. : *Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.

[14] J. Pruuuuss and H. Sohr, *On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces*, Mathematische Zeitschrift, 203 (1990), 429-452.