MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présentée par :

RACHIDA ZBALAH

Etude un système d'équation différentielle fractionnaire avec multi termes non linéaires

soutenu publiquement le 23/06/2022 devant le jury composé de :

Président :	Soumia OULD ALI BELMOUHOUB	*MCB*	UMAB
Examinateur :	Amouria HAMMOU	MCA	UMAB
Encadreur :	*Horiya DIALA*	*MAA*	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Dédicaces

Avec les sentiments d'amour et de gratitude je dédie ce modeste travail :

A mon Père***ABDELKADER***, en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait preuve à mon égard.

A ma Mère***FATIHA*** , ma raison d'être, ma raison de vivre, la lanterne qui éclaire mon chemin.

A tous mes amis sans exception et à tous mes collègues de classe.

Dédicaces

Je dédie ce fruit de mes longues années d'´etudes tout

d'abord :

A mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils, leur affection et leurs en couragements.

Je vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

A tous les membres de ma famille, mes soeurs

A mon frère Mammar, de reconnaissance et de gratitude pour tous les soutiens et les sacrifices dont il a fait

preuve à mon égard.

A tous mes amis et mes collègues avec qui, j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

A tous ma famille ZBALAH, et à tous mes proches.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur Mme " **DIALA HORIYA"** pour tout l'effort qu'il a fourni pour faciliter et aider à accomplir mon travail de fin d'étude.

je remercie profondément Mme **"OULD ALI BELMOUHOUB SOUMIA"** pour avoir accepté de présider notre jury.

je remercie aussi Mme **"HAMMOU AMOURIA"** d'être membre de jury.

Enfin, je dédie ce travail à celle qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affection ma mère, que dieu la bénisse.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un système d'équation différentielle fractionnaire avec multi termes non linéaires.

Nous commençons par introduire un nouvel espace de Banach. Ensuite, nous établissons de nouveaux résultats d'existence et d'unicité en utilisant le principe de contraction de Banach. Nous prouvons également un résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de schaefer. Enfin, nous donnons quelques exemples illustratifs.

Mots-clés :

dérivée de Caputo, point fixe, l'existence, système couplé, unicité.

Abstract

In this paper, we study a coupled system of nonlinear fractional differential equations involving m nonlinear terms, $m \in \mathbb{N}^*$. We begin by introducing a new Banach space. Then, we establish new existence and uniqueness results using the Banach contraction principle. We also prove an existence result using the Schaefer fixed point theorem. Finally, we give some illustrative examples.

Keywords :

Caputo derivative, fixed point, coupled system, existence, uniqueness.

0.1 Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$[a, b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$(a, b]$	Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
(a, b)	Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$C([a, b], \mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a, b]$à valeurs dans $\mathbb{R}$
$\Vert.\Vert_\infty$	Norme infinie.
$\Vert.\Vert_X$	Norme de l'espace X.
$D^n(\text{ou}\frac{d^n}{dt})$	Dérivée d'ordre n.
$f^{(n)}$	Dérivée n-ième de f .
$\jmath_a^\alpha$	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^C D_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{RL} D_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc [10, 11, 13]. Dans ce mémoire, nous allons nous inspirer des articles de [2, 5, 6, 7, 3, 8] pour faire le point sur toutes ces études en donnant plusieurs résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de Caputo.

Les lois physiques de la dynamique ne sont pas toujours décrites par des équations différentielles d'ordre ordinaire. Dans certains cas, leur comportement est gouverné par des équations différentielles d'ordre fractionnaire [19, 22, 25, 28] Récemment, les dérivées fractionnaires ont joué un rôle central en sciences de l'ingénieur et en mathématiques appliquées [13, 23, 26, 28, 29] Plus récemment, de nouvelles théories sur les problémes aux limites des équations différentielles fractionnaires ont attiré l'attention de nombreux auteurs, voir [9, 14, 17, 23, 24]. De plus, l'étude des systèmes couplés d'ordre fractionnaire est egalement importante dans divers problèmes de nature appliquée, voir [1, 4, 30]. Un travail considérable a été fait dans ce domaine, par exemple, voir [9, 15, 16, 20, 30]

Dans ce travail, nous discutons de l'existence et de l'unicité des solution pour le système couplé fractionnaire suivant d'équations différentielles non linéaires :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u\,(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i\,(t,u(t),v(t),D^{\gamma}u(t),D^{\rho}v(t))=0, & t\in \jmath, m\in\mathbb{N}^* \\ D^{\beta}v(t)+\sum_{i=1}^{m}g_i\,(t,u(t),v(t),D^{\gamma}u(t),D^{\rho}v(t))=0, & t\in \jmath, m\in\mathbb{N}^* \\ u(0)=u_0^*, \quad v(0)=v_0^*, & \\ u^{'}(0)=u^{''}=v^{'}(0)=v^{''}(0)=0, & \\ u^{'''}(0)=\jmath^{r}u(\tau), \quad v^{'''}(0)=\jmath^{\phi}v(\varsigma). & r>0,\ \phi>0. \end{cases}$$

$\alpha,\beta\in\left]3,4\right[,\gamma,\rho\in\left]0,3\right[$ et $\tau,\varsigma\in\left]0,1\right[$, $J:=[0,1]$, $u_0^*,v_0^*\in\mathbb{R}$

Ce mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons dans la première section les principales notions de base du calcul fractionnaire. Ensuite, nous consacrons le reste de ce chapitre aux études des différentes définitions mathématiques relatives aux dérivations et intégrations d'ordre fractionnaire ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires de type de Caputo.

Le troisième chapitre, la résolution numérique de ces équations.

Enfin, nous donnons une conclusion générale.

Chapitre 1

Les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire

1.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques concepts de base essentiels à la théorie de calcul fractionnaire puis, nous s'intéressons particulièrement à définir quelques résultats fondamentaux sur le principe de contraction de Banach, ainsi que les théorèmes du point fixe.

1.2 Fonctions Spéciales en calcul Fractionnaire

Dans cette section, nous avons présenté la fonction Gamma et la fonction Beta d'Euler qui sont trés utiles dans la théorie des calcules fractionnaires. Ensuite, nous définissons l'intégrale fractionnaire de Rimann-Liouville et quelques approches de la dérivation fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *soit $x \epsilon \mathbb{C}$ avec $\Re e\,(x) > 0$ la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0 \;\; \forall\, n \in \{-1, -2, ...\}$.

Exemple 1.2.1

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt, \\
&= \int_0^\infty e^{-t} dt, \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-t} dt, \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1

on a $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction monotone est strictement décroissante sur le demi plan complexe, où la partie réelle est strictement positive.

Quelques propriétés :

pour tout $x > 0, n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

1

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

.

2

$$\Gamma(n-1) = n!.$$

3

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\Pi}.$$

4

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\Pi}{\sin(\Pi x)}.$$

1.2.2 fonction Bêta d'Euler

soient $x\ ,y\in\mathbb{R}^{*}$. on définie la fonction Bêta par l'intégrale suivante :

$$\beta(x\ ,y):\ =\int_{0}^{1}\ (1-t)^{y-1}\,t^{x-1}dt. \tag{1.1}$$

Proposition 1.2.1 *pour tout $x\ ,y\in\mathbb{R}_{+}^{*}$, nous avons :*

1

$$\beta(x\ ,y)=\beta(y\ ,x).$$

2

$$\beta(x\ ,y)=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta.$$

3

$$\beta(x+1\ ,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x\ ,y)\quad\Lambda\ \beta(x\ ,y+1)=\frac{y}{x+y}\beta(x\ ,y).$$

4

$$\beta(x\ ,y)=\beta(x,y+1)+\beta(x+1,y).$$

Relation entre la fonction Gamma et la fonction Beta

$$\beta(x\ ,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ , \quad \forall x > 0, y > 0.$$

1.3 Intégration et dérivation fractionnaire

1.3.1 Intégration fractionnaire de Riemann-Liouville

La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville se base sur la formule de Cauchy. Cette dernière aide a calculer n fois l'intégration de la fonction f

$$\jmath^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds\ . \qquad n \in \mathbb{N}^* \qquad (1.2)$$

Selon l'approche de Riemann-Liouville, la notion d'intégrale d'ordre $\alpha > 0$ est une conséquence tout à fait " naturelle " de la formule de Cauchy d'ordre n ci dessus.

Définition 1.3.1 *l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, pour une fonction continue $f \in C([a\ ,b])$ est définie par :*

$$\begin{cases} \jmath_a^\alpha(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \\ \jmath_a^0(f(t)) = f(t). \end{cases} \qquad \alpha > 0. \qquad (1.3)$$

Proposition 1.3.1 *(Semi-Groupe et Commutativité)*

soit $f : [a\ ,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue .Alors, nous avons les deux propositions :

$$\jmath_a^\alpha\left[\jmath_a^\beta(f(t))\right] = \jmath_a^{\alpha+\beta}(f(t))\,. \qquad (1.4)$$

$$\jmath_a^{\alpha}\left[\jmath_a^{\beta}\left(f\left(t\right)\right)\right]=\jmath_a^{\beta}\left[\jmath_a^{\alpha}\left(f\left(t\right)\right)\right]. \tag{1.5}$$

pour tout $\alpha>0,\beta>0.$

Proposition 1.3.2 *(La linéarité)*

Soient $\alpha>0$, f , $g\in C\left(\left[a\ ,b\right]\ ,\mathbb{R}\right),\forall\lambda$, $\mu\in\mathbb{R}$ *nous avons :*

$$\jmath_a^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)=\lambda\jmath_a^{\alpha}f\left(t\right)+\mu\jmath_a^{\alpha}g\left(t\right).$$

On applique la Définition (1.3.1) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\jmath_a^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)&=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}\left(\lambda f\left(s\right)+\mu g(s)\right)ds,\\&=\frac{\lambda}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s\right)ds+\frac{\mu}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}g\left(s\right)ds,\\&=\lambda\jmath_a^{\alpha}f\left(t\right)+\mu\jmath_a^{\alpha}g\left(t\right).\end{aligned}$$

Lemme 1.3.1 *soient* $\alpha>0,f\in C\left(\left[a\ ,b\right]\right)$ *.Alors,*

$$\lim_{t\to a}\ \jmath_a^{\alpha}f\left(t\right)=0,$$

Preuve.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\jmath_a^{\alpha}f\left(t\right)\right|&\leq\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}\left|f\left(s\right)\right|ds\\&\leq\frac{\left\|f\right\|_{\infty}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}ds\\&\leq\frac{\left\|f\right\|_{\infty}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Il est clair que le second membre de l'inégalité précédent tend vers 0 lorsque t tend vers a. Par conséquent $\lim_{t \to a} \jmath_a^\alpha f(t) = 0$. $\blacksquare$

1.3.2 Dérivation Fractionnaire

La dérivation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la dérivation d'orde entiére. Il existe plusieurs définitions mathématiques pour la dérivation d'ordre fractionnaire. nous avons présenté deux théorèmes : Riemann-Liouville et celle de Caputo.

Dérivation de Riemann-Liouville

Définition 1.3.2 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a\ ,b] \to \mathbb{R}$:*

$$^{RL}D_a^\alpha\ f(t) = \begin{cases} D^n \jmath_a^{n-\alpha} f(t), & n-1 < \ \alpha < n \ \ , \ n \in \mathbb{N}^* \\ D^n f(t) \quad , & \alpha = n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Remarque 1.3.1

La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, nous avons :

$$^{RL}D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

Exemple 1.3.1 *calculons la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ avec $\beta > 0$, $t \in [a\ ,b]$*

$$^{RL}D_a^\alpha \left[(t-a)^\beta\right] = D^n \jmath_a^{n-\alpha} (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Proposition 1.3.3

Soient f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$ deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de

Riemann-Liouville existent , $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}^*$. *Alors l'opérateur* ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ *possède les propriétés suivantes :*

(a) *L'opérateur* ${}^{RL}D_a^{\alpha}$ *est linéaire.*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right]=\lambda^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]+\mu^{RL}D_a^{\alpha}\left[g\left(t\right)\right]. $$

En générale, nous avons :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\neq^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right]. $$

Nous avons aussi :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\neq{}^{RL}D_a^{\beta}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]. $$

(b)

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}J_a^{\alpha}f\left(t\right)=f\left(t\right). $$

Preuve.

soient $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$,

(b) En Appliquant la définition (1.3.2) et en se basant sur la propriété classique.

$$ D^nJ^nf(t)=f(t), $$

Nous obtenons :

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}J_a^{\alpha}f\left(t\right) &= D^nJ_a^{n-\alpha}J^{\alpha}f(t), \\ &= D^nJ^nf(t), \\ &= f(t). \end{aligned} $$

■

Lemme 1.3.2 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant ${}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=0, \alpha\in\left]n-1\ ,n\right[\ ,n\in\mathbb{N}^{*}$. Alors*

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-n+i+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-n+i}\ .$$

Où les bi, $i=0,1,......,n-1$ sont des constantes arbitraires.

Preuve.

Appliquant la Définition (1.3.2),nous obtenons :

$${}^{RL}D_a^{\alpha}f(t)=D^n\jmath^{n-\alpha}f(t).$$

si ${}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=0$, alors, $D^n\jmath^{n-\alpha}f(t)=0$

Donc

$$\jmath^{n-\alpha}f(t)=\ \sum_{i=0}^{n-1}bi(t-a)^{i}\ .$$

On applique($\jmath_a^{\alpha}$) aux deux membres sur l'expression précédente nous obtenons :

$$\jmath_a^{n}f(t)=\ \sum_{i=0}^{n-1}b_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+i+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha+i}. \tag{1.7}$$

Donc

$$D^n\jmath_a^{n}f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+i+1\right)}D^n\left(t-a\right)^{\alpha+i}.$$

En utilisant la rélation de dérivation calssique :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\left(t-a\right)^{p}&=p\left(p-1\right)....\left(p-m+1\right)\left(t-a\right)^{p-m}, \\ &=\frac{\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(p-n+1\right)}\left(t-a\right)^{p-n}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

ce qui implique

$$D^n \jmath_a^n f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1)} \frac{\Gamma(i+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+i+1-n)} (t-a)^{\alpha+i-n}.$$

D'ou

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1-n)} (t-a)^{\alpha+i-n}.$$

■

Dérivation de Caputo :

Définition 1.3.3 *Soit $f \in C^n([a\ ,b])\,, n \in \mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ de la fonction f comme suit :*

$$^C\ D_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \jmath_a^{n-\alpha} D^n f(t), & n-1<\alpha<n \\ D^n f(t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Exemple 1.3.2 *soit $f(t) = (t-a)^\beta\,, \beta > -1$. On a le même résultat que l'exemple précedent (la dérivée de Riemann-Liouville).*

La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle. En effet, si $f = C$, alors :

$$\begin{aligned} ^C\ D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \\ ^C\ D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t ((t-s)^{n-\alpha-1} \times 0) ds = 0, \\ &= D_a^\alpha [c] \ = c\ D_a^\alpha [1]\ . \end{aligned}$$

La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$au sens de Caputo **:**

Soient $n-1<\alpha<n$, $\beta>-1$ et $t\in[a\ ,b]$, alors nous avons :

$$^{C}\ D_{a}^{\alpha}f(t)=J_{a}^{n-\alpha}D^{n}(t-a)^{\beta}.$$

On applique la formlue (1.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
^{C}D_{a}^{\alpha}\ f(t) &= J_{a}^{n-\alpha}(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(t-a)^{\beta-n},\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}((t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n}ds.
\end{aligned}$$

On suppose $s=x(t-a)+a$, alors,

$$\begin{aligned}
^{C}\ D_{a}^{\alpha}f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}((1-x)^{n-\alpha-1}x^{\beta-\alpha}dx,\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha},\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

La relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et ladérivée de Caputo

Soit $n-1<\alpha<n$, $(n\in\mathbb{N}^{*})$. Supposons que f est une fonction continue telle que ${}^{C}D_{a}^{\alpha}f\ (t)$et ${}^{RL}D_{a}^{\alpha}f\ (t)$ existent. Alors,

$$^{C}D_{a}^{\alpha}f\ (t)={}^{RL}\ D_{a}^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{i}}{i!}f^{(i)}\ (a)\right). \tag{1.10}$$

Cette dernièr relation peut aussi s'écrire :

$$^{C}D_{a}^{\alpha}f\ (t)={}^{RL}\ D_{a}^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma\left(i-\alpha+1\right)}f^{(i)}\ (a)\right).$$

On déduit que si $f^{(i)}(a) = 0$ pour $i = 0, ..., n-1$, nous aurons

$$^{C}D_{a}^{\alpha} f(t) =^{RL} D_{a}^{\alpha} f(t).$$

Preuve.

On part de l'hypothèse que f est de classe C^n, alors nous peuvons écrire

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \jmath_a^n D^n f(t).$$

Et donc, par application de $\jmath_a^{n-\alpha}$ à cette identité, nous obtenons :

$$\jmath_a^{n-\alpha} f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{n-\alpha+i}}{\Gamma(n-\alpha+i+1)} f^{(i)}(a) + \jmath_a^{2n-\alpha} D^n f(t).$$

Ensuite on applique D^n à la formule obtenue, nous aurons :

$$\begin{aligned} D^n \jmath_a^{n-\alpha} f(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)} D^n (t-a)^{n-\alpha+i} + D^n \jmath_a^{2n-\alpha} D^n f(t), \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)} \left(\frac{\Gamma(n-\alpha+i+1)(t-a)^{n-\alpha+i-n}}{\Gamma(n-\alpha+i+1-n)} \right) + D^n \jmath^n \jmath^{n-\alpha} D^n f(t), \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} f^{(i)}(a) + \jmath^{n-\alpha} D^n f(t). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$({}^{RL}D_a^{\alpha}) = D^n \jmath^{n-\alpha}, ({}^{C}D_a^{\alpha}) = \jmath^{n-\alpha} D^n.$$

Nous obtennons :

$$({}^{RL}D_a^{\alpha}) f(t) = ({}^{C}D_a^{\alpha}) f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} f^{(i)}(a).$$

■

Le lemme suivant est important pour calculer les solutions intégrales des EDFs.

Lemme 1.3.3

$$J_a^\alpha D_a^\alpha \left[f(t)\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i.$$

tel que c_i *sont des constantes arbitraires dans* $\mathbb{R}$.

Lemme 1.3.4

soit $\beta > \alpha > 0$,$f : [a\ ,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$D_a^\alpha J_a^\beta \left[f(t)\right] = J_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\ ,\ t \in [a\ ,b]$$

Lemme 1.3.5 *soient* $p, q > 0$ *et* $f \in L^1\left([a,b]\right)$ *.Alors,* $J^p J^q f(t) = J^{p+q} f(t)$, $D^P J^P f(t) = f(t), t \in [a,b]$.

Proposition 1.3.4

Soient $0 < \alpha < 1,\ \ 0 < \alpha + \beta < 1$ *et* $f \in C^n\left([a,b], \mathbb{R}\right)$, *Alors*

(i) pour tout $\alpha > 0, \lambda\ , \mu \in \mathbb{R}$,nous avons :

$$D_a^\alpha \left[\lambda f\ (t) + \mu g(t)\right] = \lambda\ D_a^\alpha \left[f(t)\right] + \mu D_a^\alpha \left[g(t)\right].$$

(ii) Pour tout $\alpha > 0,\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, nous avons :

1

$$D_a^\alpha J_a^\alpha \left[f(t)\right]\ = f(t).$$

2

$$si\ \ D_a^\alpha \left[f(t)\right] = 0 \text{ alors } f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i.$$

(iii)

$$^C\ D_a^{\alpha}(\ ^C\ D_a^{\beta} f(t)) = \ ^C\ D_a^{\alpha+\beta} f(t) = \ ^C\ D_a^{\beta}(\ ^C\ D_a^{\alpha} f(t)).$$

Preuve.

a) Il est très facile de démontrer la linéarité de l'opérateur $^C\ D_a^{\alpha}$, il suffit juste d'appliquer directement les règles de linéarité.

b) Maintenant, nous montrons la deuxième assertion. D'après la définition de $^C D_a^{\alpha}$, nous avons :

$$^C\ D_a^{\alpha}(\jmath_a^{\alpha} f(t)) = \jmath_a^{n-\alpha} D^n(\jmath_a^{\alpha} f(t)).$$

La relation (1.10) implique :

$$^C\ D_a^{\alpha}(\jmath_a^{\alpha} f(t)) =^{RL}\ D_a^{\alpha}\left[\left(\jmath_a^{\alpha} f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} D^i(\jmath_a^{\alpha} f(a)\right)\right].$$

D'après la linéarité de $^{RL}D_a^{\alpha}$, nous obtennons :

$$^C\ D_a^{\alpha}(\jmath_a^{\alpha} f(t)) =^{RL} D_a^{\alpha}\left(\jmath_a^{\alpha} f(t)\right) -^{RL}\ D_a^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} D^i(\jmath_a^{\alpha} f(a))\right).$$

nous remarquons que $\forall i = 0, 1....., n-1.$

$$D^i(\jmath_a^{\alpha} f(a)) = \jmath_a^{\alpha-i} f(t) = 0.$$

Donc :

$$^C\ D_a^{\alpha}(\jmath_a^{\alpha} f(t)) = f(t).$$

nous passons maintenant à la troisième assertion. Pour la première égalité, nous cherchons à déterminer.

$$\jmath_a^{1-\alpha} D^1 \jmath^{1-\beta} D^1 f(t) = \quad \jmath_a^{1-(\alpha+\beta)} D^1 f(t).$$

Tout d'abord,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D_a^{\alpha}({}^{C}D_a^{\beta}f(t) &= J_a^{1-\alpha}D^{1}J_a^{1-\beta}D^{1}f(t),\\
&= J_a^{1-(\alpha+\beta)+\beta}D^{1}J^{1-\beta}D^{1}f(t),\\
&= J_a^{1-(\alpha+\beta)}D^{1-\beta}J^{1-\beta}D^{1}f(t),\\
&= J_a^{1-(\alpha+\beta)}f(t).
\end{aligned}
$$

Pour la deuxième égalité, nous avons :

$$
{}^{C}D_a^{\alpha}({}^{C}D_a^{\beta}f(t)) = {}^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(t) = {}^{C}D_a^{\beta+\alpha}f(t) = {}^{C}D_a^{\beta}({}^{C}D_a^{\alpha}f(t)).
$$

par conséquent,

$$
{}^{C}D_a^{\alpha}({}^{C}D_a^{\beta}f(t)) = {}^{C}D_a^{\alpha+\beta}f(t) = {}^{C}D_a^{\beta}({}^{C}D_a^{\alpha}f(t)) .
$$

■

1.4 Quelques Theorémes du Point Fixe

Les théorèmes du point fixe sont des outils extrêmement utiles pour résoudre les équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe. L'idée principale de la méthode du point fixe est de transformer le problème posé à un problème qui admet des points fixes, de plus ces points sont aussi des solutions du problème originale.

Dans cette section nous avons présenté deux théorèmes du point fixe : le théorème du point fixe de Banach qui assure l'unicité de la solution et le théorème du point fixe de Shaefer, qui montre l'existence au moins d'un point fixe.

Définition 1.4.1 *(**Espace vectoriel normé**) Soit $((E\ ,\|.\|_E)$ est un espace vectoriel E sur un corps . K, ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme. C'est-à-dire, une application $N:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfait les hypothèses suivantes :*

1 Séparation :

$$\forall x\in E, N(x)=0 \implies x=0.$$

2 Homogénéité :

$$\forall\,(\lambda,x)\in K\times E\ ,\quad N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x).$$

3 Inégalité triangulaire :

$$\forall\,(x,y)\in E^2, N(x+y)\leq N(x)+N(y).$$

La norme d'un élément x dans E est noté $\|x\|_E$.

Définition 1.4.2 *Soient $(E\ ,\|.\|_E)$ et $(F\ ,\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps K, alors l'espace produit*

$E\times F=\{(x\ ,y:x\in E\ ,y\in F)\}$ est un espace vectoriel normé sur K par l'une des normes suivantes :

1.

$$\|(x,y)\|_1=\|x\|_E+\|y\|_F\ .$$

2.

$$\|(x,y)\|_p=(\|x\|_E^p+\|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}}\ ,\quad 1<p<\infty.$$

3.

$$\|(x,y)\|_\infty=\max\left(\|x\|_E+\|y\|_F\right).$$

.

Définition 1.4.3 ***(Suite de Cauchy)*** *Une suite* $(x_n)_{n\in N}$ *dans un espace vectoriel normé* E *muni d'une norme* $\|.\|_E$ *est dit de Cauchy si,*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists N \geq 0 \ , \ p, q \geq N \quad \forall p \ , q \in \mathbb{N} \ , \qquad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon \ . \tag{1.11}$$

Définition 1.4.4 *On dit qu'un espace vectoriel normé* $(E,\|.\|_E)$ *est complet (espace de Banach) si toute suite de Cauchy de* E *est convergente dans* E*.*

Définition 1.4.5 ***(Point fixe)*** *Soient* E *un espace de Banach et* A *une application de* E *dans* E*, un élément* x *de* E *est dit point fixe de* A *s'il vérifie l'équation*

$$Ax = x.$$

Définition 1.4.6 ***(Application lipschitzienne)*** *Soient* E *un espace vectoriel normé muni d'une norme* $\|.\|_E$ *et une application* f *de* E *dans* E*,* f *est dite lipschitzienne s'il existe une constante* $K > 0$ *tel que :*

$$\forall x \ , y \in E \ , \qquad \|f(x) - f(y)\|_E \leq K \|x - y\|_E \, .$$

Définition 1.4.7 ***(Application contractante)*** *L'application lipschitzienne* f *est dit contractante si* $K \in [0 \ , 1]$*.*

Définition 1.4.8 *Soit* $(X \ , \|.\|)$ *; un espace normé. Un sous-ensemble* $\Omega \subset X$ *est borné s'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in \Omega$ *on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

Définition 1.4.9 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. L'operateur continu :*

$A : X \to Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.

Une partie de X est dite relativement compacte si son adherence est compacte. La défnition suivante va être utlisée dans le théorème de Schaefer pour les EDFs.

Principe de contraction de Banach.

Théorème 1.4.1 *Soit X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur contractant . Alors, A admet un point fixe unique.*

Théorème de point fixe de Shaefer

Théorème 1.4.2 *Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble :*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu Ax \quad 0 < \mu < 1\}.$$

est borné, alors A admet au moins un point fixe.

Lemme 1.4.1 *Soit $F \subset C[(a,b)]$, supposons que l'ensemble F est équipé de norme $\|.\|_\infty$. Alors, F est relativement compacte dans $C[(a\ ,b)]$ si F est équicontinue (c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et pour tout $x_1, x_2 \in [a\ ,b]$ avec $|x_1 - x_2| < \delta$ on a : $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ et uniformément borné(c'est-à-dire il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty < C$, pour tout $f \in F$)*

Chapitre 2

L'Existence et Unicité de la solution

Dans ce chapitre, nous avons étudier un système d'équations différentielles fractionnaires avec multi termes non linéaires. Nous avons des résultats sur l'existence d'une solution au moins et l'unicite de la solution utilisant le théorème du point fixe de Schaefer et le théorème du point fixe de Banach.

Nous discutons de l'existence et de l'unicité des solution pour le système couplé fractionnaire suivant d'équations différentielles non linéaires.

$$\begin{cases} D^{\alpha}u\,(t) + \sum_{i=1}^{m} f_i\,(t, u(t), v(t), D^{\gamma}u(t), D^{\rho}v(t)) = 0, \quad t \in \jmath, m \in \mathbb{N}^* \\ D^{\beta}v(t) + \sum_{i=1}^{m} g_i\,(t, u(t), v(t), D^{\gamma}u(t), D^{\rho}v(t)) = 0, \quad t \in \jmath, m \in \mathbb{N}^* \\ u(0) = u_0^*, \quad v(0) = v_0^*, \\ u^{'}(0) = u^{''} = v^{'}(0) = v^{''}(0) = 0, \\ u^{'''}(0) = \jmath^{r}u(\tau), \quad v^{'''}(0) = \jmath^{\phi}v(\varsigma). \qquad r > 0,\ \phi > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

$\alpha, \beta \in \,]3,4[\,, \gamma, \rho \in \,]0,3[\,$ et $\tau, \varsigma \in \,]0,1[\,$, $J := [0,1]\,$, $u_0^*, v_0^* \in \mathbb{R}$

2.1 Propriétés Auxiliaires et Représentation Intégrale

Lemme 2.1.1 *pour $\alpha > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire $D^{\alpha}u(t) = 0$ est donnée par :*

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}.$$

Où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, ..., n-1$, *et* $n = [\alpha] + 1$,

Lemme 2.1.2 *on suppose que* $(H_i)_{i=1,\ldots,m} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ *et on considère le problème :*

$$D^{\alpha}u(t) + \sum_{i=1}^{m} H_i(t) = 0, \ t \in \jmath, \quad 3 < \alpha < 4, m \in \mathbb{N}^*.$$

Avec les conditions

$$u(0) = u_0^* \in \mathbb{R}. \ u'(0) = u''(0) = 0, \ u'''(0) = \jmath^r u(\tau), r > 0, \tau \in]0,1[\,. \tag{2.2}$$

Alors

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i(s, u(s), v(s), D^{\gamma}u(s), D^{\rho}v(s))\, ds + u_0^* \tag{2.3}$$
$$+ \frac{\Gamma(r+4)\, t^3}{6(\tau^{r+3} - \Gamma(r+4))} \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)} f_i(s, u(s), v(s), D^{\gamma}u(s), D^{\rho}v(s))\, ds - \frac{u_0^* \tau^r}{\Gamma(r+1)} \right),$$

$\tau^{r+3} \neq \Gamma(r+4)$.

Nous avons

$$u\left((t\right)=-\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}H_{i}(s)ds-c_{0}-c_{1}t-c_{2}t^{2}-c_{3}t^{3}.$$

Où $c_t \in \mathbb{R}, i=0,1,2,3.$

En utilisant le lemme (2.1.3) nous obtenons :

$$\jmath^{r}u(\tau)=-\sum_{i=1}^{m}\jmath^{\alpha+r}H_{i}\left(\tau\right)-\quad\jmath^{r}c_{0}-c_{1}\jmath^{r}\tau-c_{2}\jmath^{r}\tau^{2}-c_{3}\jmath^{r}\tau^{3}.$$

grâce à (2.2), nous obtenons $c_0=-u_0^*$ et $c_1=c_2=0$. Par conséquent,

$$\jmath^{r}u(\tau)=-\sum_{i=1}^{m}\jmath^{\alpha+r}H_{i}\left(\tau\right)+\ \jmath^{r}u_{0}^{*}-c_{3}\jmath^{r}\tau^{3}.$$

Pour la constante c_3 nous obtenons :

$$c_{3}=\frac{\Gamma\left(r+4\right)}{6\left(\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right)}\left(\frac{x_{0}^{*}\tau^{r}}{\Gamma\left(r+1\right)}-\sum_{i=1}^{m}\int_{0}^{\tau}\frac{\left(\tau-s\right)^{\alpha+r-1}}{\Gamma\left(\alpha+r\right)}H_{i}\left(s\right)ds\right).$$

nous obtenons donc (2.3)

Nous définissons L'espace de Banach comme suit :

$$B:=\left\{(u,v):u,v\in C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right),D^{\gamma}u\in C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right),D^{\rho}v\in C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)\right\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\left\Vert (u,v)\right\Vert_{B}=\max\left(\left\Vert u\right\Vert_{\infty},\left\Vert v\right\Vert_{\infty},\left\Vert D^{\gamma}u\right\Vert_{\infty},\left\Vert D^{\rho}v\right\Vert_{\infty}\right),$$

tel que

$$\left\Vert u\right\Vert_{\infty}=\sup_{t\in J}\left|u\left(t\right)\right|,\quad\left\Vert v\right\Vert_{\infty}=\sup_{t\in J}\left|v\left(t\right)\right|,\quad\left\Vert D^{\gamma}u\right\Vert_{\infty}=\sup_{t\in J}\left|D^{\gamma}u(t)\right|,\ \left\Vert D^{\rho}v\right\Vert_{\infty}=$$

$\sup\limits_{t\in J} |D^{\rho} v(t)|$.

2.1.1 Existence et Unicité de la Solution

Dans le but d'établir des résultats d'existence et l'unicité de la solution pour le problème (2.1) ; nous imposons les hypothèses suivantes :

(H_1) f_i et $g_i : [0,1] \times \mathbb{R}^4$ des fonctions continues.

(H_2)Il existe des fonctions non négatives $w_j^i,\ n_j^i \in C([0,1]), \quad j = 1,2,3,4,5, \quad$ et $i = 1, ..., m,$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, (u_1,u_2,u_3,u_4), $(v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$|f_i(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - f_i(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \leq \sum_{j=1}^{4} w_j^i(t)\,|u_j - v_j|.$$

$$|g_i(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - g_i(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \leq \sum_{j=1}^{4} n_j^i(t)\,|u_j - v_j|.$$

Nous avons : $\quad \theta_j^i = \sup\limits_{i\in J} w_j^i(t), \quad$ et $\quad \lambda_j^i = \sup\limits_{i\in J} n_j^i(t), \quad i = 1, ..., m,\ j = 1,2,3,4.$

(H_3) Il existe des fonctions continues non négatives $l_i(t)$, $k_i(t)$, $i = 1, ..., m$.

$$|f_i(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| \leq \ l_i(t), \quad \text{et} \quad |g_i(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| \leq k_i(t).$$

$t \in J\ et\ \ (u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4$

$$L_i = \sup_{t\in J} l_i(t)\ et\ K_i = \sup_{t\in J} k_i(t), \qquad i = 1,2,...,m.$$

On pose

$$A_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{6\,|\tau^{3+r} - \Gamma(r+4)|\,\Gamma(r+1+\alpha)}.$$

$$A_2 := \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}}{6\left|\varsigma^{3+\varphi} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(1+\beta+\varphi)}.$$

$$A_3 := \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{3+r} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1+\alpha)\,\Gamma(4-\gamma)}.$$

$$A_4 := \frac{1}{\Gamma(\beta-\rho+1)} + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\beta+\varphi}}{\left|\varsigma^{3+\varphi} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(1+\beta+\varphi)\,\Gamma(4-\rho)}$$

$$S_1 := \sum_{i=1}^{m}\left(\theta_1^i + \theta_2^i + \theta_3^i + \theta_4^i\right), \quad S_2 := \sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i\right).$$

$$W_1 := |u_0^*| + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|}{\Gamma(4)\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.$$

$$W_2 := |v_0^*| + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\varphi}\,|v_0^*|}{\Gamma(4)\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+1)}.$$

$$W_3 := \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|}{\left|\tau^{r+3} - \Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.$$

$$W_4 := \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\varphi}\,|v_0^*|}{\left|\varsigma^{\varphi+3} - \Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+1)\,\Gamma(4-\rho)}.$$

Notre résultat est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.1.1 *supposons que* (H_1) *est vérifiée et* $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$ *et* $\varsigma^{3+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$. *Si l'inégalité*

$$\max(A_1S_1, A_2S_2, A_3S_1, A_4S_2) < 1. \tag{2.4}$$

est valide alors le problème (2.1) admet une unique solution.

Preuve. On définit l'opérateur $\Psi : B \to B$ comme suit :

$$\Psi\left(u,v\right)\left(t\right) := \left(\ \Psi_1\left(u,v\right)\left(t\right),\ \Psi_2\left(u,v\right)\left(t\right)\right),\quad t\in \jmath.$$

tel que

$$\begin{aligned}\Psi_1\left(u,v\right)\left(t\right) &= -\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{\left(t-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} f_i\left(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s)\right)ds + u_0^* \\ &+ \frac{\Gamma\left(r+4\right)t^3}{6(\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right))}(\sum_{i=1}^{m}\int_0^\tau \frac{\left(\tau-s\right)^{\alpha+r-1}}{\Gamma\left(\alpha+r\right)} f_i\left(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s)\right)ds\end{aligned}$$
$$-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma\left(r+1\right)}),\ t\in J.$$

$$\begin{aligned}\Psi_2\left(u,v\right)\left(t\right) &= -\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{\left(t-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} g_i\left(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s)\right)ds + v_0^* \\ &+ \frac{\Gamma\left(\varphi+4\right)t^3}{6(\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma\left(\varphi+4\right))}(\sum_{i=1}^{m}\int_0^\varsigma \frac{\left(\varsigma-s\right)^{\beta+\varphi-1}}{\Gamma\left(\beta+\varphi\right)} g_i\left(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s)\right)ds\end{aligned}$$
$$-\frac{v_0^*\varsigma^\varphi}{\Gamma\left(\varphi+1\right)}),\ t\in J.$$

Maintenant, nous montrerons que l'opérateur Ψ possède un point fixe unique. Pour cela, nous prouvons que Ψ est un opérateur contractif sur B :

Soient$\left(u_1,v_1\right),\left(u_2,v_2\right)\in B$. Alors, pour tous $t\in\jmath$, nous avons :

$$\begin{aligned}&\left|\Psi_1\left(u_1,v_1\right)-\ \Psi_1\left(u_2,v_2\right)\left(t\right)\right| \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D^\gamma u_1(s),D^\rho v_1(s)\right)-f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D^\gamma u_2(s),D^\rho v_2(s)\right)\right| \\ &+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^3\tau^{\alpha+r}}{\Gamma\left(4\right)\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(\alpha+r+1\right)} \\ &\times\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i\left(s,u_1(s),v_1(s),D^\gamma u_1(s),D^\rho v_1(s)\right)-f_i\left(s,u_2(s),v_2(s),D^\gamma u_2(s),D^\rho v_2(s)\right)\right|.\end{aligned}$$

Qui peut être récrite en utilisant(H_2), comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi_1\left(u_1, v_1\right)-\ \Psi_1\left(u_2, v_2\right)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^m\left(\theta_1^i+\theta_2^i+\theta_3^i+\theta_4^i\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(r+4) \tau^{\alpha+r}}{\Gamma(4)\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right| \Gamma(\alpha+r+1)}\right) \\
&\times \max \left(\left(\left\|u_1-u_2\right\|,\left\|v_1-v_2\right\|,\left\|D^\gamma u_1-D^\gamma u_2\right\|,\left\|D^\rho v_1-D^\rho v_2\right\|\right)\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left\|\Psi_1\left(u_1, v_1\right)-\ \Psi_1\left(u_2, v_2\right)\right\| \leq A_1 S_1\left\|\left(u_1-u_2, v_1-v_2\right)\right\|_B \tag{2.5}$$

De même, nous peuvons montrer que

$$\left\|\Psi_2\left(u_1, v_1\right)-\ \Psi_2\left(u_2, v_2\right)\right\| \leq A_2 S_2\left\|\left(u_1-u_2, v_1-v_2\right)\right\|_B . \tag{2.6}$$

D'autre part, pour chacun $t \in J$, nous avons,

$$\begin{aligned}
&\left|D^\gamma \Psi_1\left(u_1, v_1\right)-D^\gamma\ \Psi_1\left(u_2, v_2\right)(t)\right| \leq \\
&\frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \sup_{s \in J} \sum_{i=1}^m\left|f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D^\gamma u_1(s), D^\rho v_1(s)\right)-f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D^\gamma u_2(s), D^\rho v_2(s)\right)\right| \\
&+\frac{\Gamma(r+4) t^{3-\gamma} \tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right| \Gamma(\alpha+r+1) \Gamma(4-\gamma)} \\
&\sup_{s \in J} \sum_{i=1}^m\left|f_i\left(s, u_1(s), v_1(s), D^\gamma u_1(s), D^\rho v_1(s)\right)-f_i\left(s, u_2(s), v_2(s), D^\gamma u_2(s), D^\rho v_2(s)\right)\right| .
\end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned}
&\left\|D^\gamma \Psi_1\left(u_1, v_1\right)-D^\gamma\ \Psi_1\left(u_2, v_2\right)\right\| \leq\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{\Gamma(r+4) \tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right| \Gamma(\alpha+r+1) \Gamma(4-\gamma)}\right) \\
&\times \sum_{i=1}^m\left(\theta_1^i+\theta_2^i+\theta_3^i+\theta_4^i\right) \max \left(\left(\left\|u_1-u_2\right\|,\left\|v_1-v_2\right\|,\left\|D^\gamma u_1-D^\gamma u_2\right\|,\left\|D^\rho v_1-D^\rho v_2\right\|\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\| D^{\gamma}\Psi_1\left(u_1,v_1\right)-D^{\gamma}\ \Psi_1\left(u_2,v_2\right)\right\| \leq A_3S_1\left\|\left(u_1-u_2,v_1-v_2\right)\right\|_B. \tag{2.7}$$

En utilisant les mêmes arguments, nous peuvons écrire,

$$\left\| D^{\rho}\Psi_2\left(u_1,v_1\right)-D^{\rho}\ \Psi_2\left(u_2,v_2\right)\right\| \leq A_4S_2\left\|\left(u_1-u_2,v_1-v_2\right)\right\|_B. \tag{2.8}$$

D'aprés la définition de $\|.\|_B$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|\Psi\left(u_1,v_1\right)-\ \Psi\left(u_2,v_2\right)\right\|_B &= \max(\left\|\Psi_1\left(u_1,v_1\right)-\ \Psi_1\left(u_2,v_2\right)\right\|, \left\|D^{\gamma}\Psi_1\left(u_1,v_1\right)-\ \Psi_1^{\gamma}\left(u_2,v_2\right)\right\|,\\ &\qquad \left\|\Psi_2\left(u_1,v_1\right)-\ \Psi_2\left(u_2,v_2\right)\right\|, \left\|D^{\rho}\Psi_2\left(u_1,v_1\right)-\ D^{\rho}\Psi_2\left(u_2,v_2\right)\right\|).\end{aligned}$$

Alors, grâce(2.5-2.8) ,nous concluons que

$$\left\|\Psi\left(u_1,v_1\right),\ \Psi\left(u_2,v_2\right)\right\|_B \leq \max\left(A_1S_1,A_2S_2,A_3S_1,A_4S_2\right)\left\|\left(u_1-u_2,v_1-v_2\right)\right\|_B.$$

D'après la condition (2.4), nous peuvons conclure que l'opérateur Ψ est contractif. Donc Ψ possède un point fixe unique qui est une solution unique du problème (2.1). Ceci complète ainsi la preuve du Théorème (2.1.1) . ■

2.1.2 Existence d'une solution au moins

Nous avons la solution intégrale

$$\begin{aligned}u(t) &= -\sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f_i\left(s,u(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s)\right)ds+u_0^*\\ &+\frac{\Gamma(r+4)\,t^3}{6(\tau^{r+3}-\Gamma(r+4))}\left(\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\tau}\frac{(\tau-s)^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)}f_i\left(s,u(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s)\right)ds-\frac{u_0^*\tau^r}{\Gamma(r+1)}\right),\end{aligned}$$

$\tau^{r+3}\neq\Gamma(r+4)$.

Théorème 2.1.2 *Si les hypothèses* (H_1) *et* (H_3) *sont satisfaites et* $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$ *et* $\varsigma^{3+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$. *Alors le problème (2.1) admet au moins une solution.*

Preuve. L'opérateur Ψ est continu quand f_i et g_i sont continues (hypothèse(H_1)). Montrons maintenant que l'opérateurΨ est complètement continu.

(A) D'abord, Nous montre que l'opérateur Ψ envoie tout ensemble borné dans B en un ensemble uniformément borné dans B, pour $\delta > 0$ et

$$B_\delta := \left\{(u,v) \in B : \|(u,v)\|_B \leq \delta\right\}.$$

pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(u,v)(t)| &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} |f_i(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s))| + u_0^* \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\, t^3 \tau^{\alpha+r}}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)} \sup_{s\in J} \sum_{i=1}^{m} |f_i(s,u(s),v(s),D^\gamma u(s),D^\rho v(s))| \\
&\frac{\Gamma(r+4)\, t^3 \tau^{r}\, |u_0^*|}{6\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)}.
\end{aligned}$$

Grâce à(H_3), nous peuvons écrire

$$\begin{aligned}
\|\Psi_1(u,v)\| &\leq \sum_{i=1}^{m} L_i \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{\Gamma(4)\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)} \right) \\
&+ |u_0^*| + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|}{\Gamma(4)\,|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\Psi_1(u,v)\| \leq A_1 \sum_{i=1}^{m} L_i + W_1. \tag{2.9}$$

Comme précédemment, nous peuvons montrer que,

$$\|\Psi_2(u,v)\| \leq A_2 \sum_{i=1}^{m} K_i + W_2. \tag{2.10}$$

D'autre part, pour chacun, nous avons.

$$\begin{aligned}
|D^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t)| &\leq \frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}|f_i(s,u_1(s),v_1(s),D^{\gamma}u_1(s),D^{\rho}v_1(s))| \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,t^{3-\gamma}\tau^{\alpha+r}}{|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)\,\Gamma(4-\gamma)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}|f_i s,u(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s))| \\
&+ \sup_{s\in J}\frac{\Gamma(r+4)\,t^{3-\gamma}\tau^{r}\,|u_0^*|}{|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\|D^{\gamma}\Psi_1(u,v)\| &\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}}{|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(\alpha+r+1)\,\Gamma(4-\gamma)}\right)\sum_{i=1}^{m}L_i \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\,|u_0^*|}{|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)|\,\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|D^{\gamma}\Psi_1(u,v)\| \leq A_3\sum_{i=1}^{m}L_i + W_{3.} \tag{2.11}$$

De même, nous peuvons montrer que

$$\|D^{\rho}\Psi_2(u,v)\| \leq A_4\sum_{i=1}^{m}K_i + W_{4.} \tag{2.12}$$

Il résulte de (2.9-2.12) que,

$$\|\Psi(u,v)\|_B \leq \max\left(A_1\sum_{i=1}^{m}L_i+W_1,\, A_2\sum_{i=1}^{m}K_i+W_2,\, A_3\sum_{i=1}^{m}L_i+W,\, A_4\sum_{i=1}^{m}K_i+W_4\right).$$

Donc,

$$\|\Psi(u,v)\|_B < \infty.$$

(B) deuxièmement, nous montrons que Ψ est équi-continue. Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\left|\Psi_1(u,v)(t_2) - \Psi_1(u,v)(t_1)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left((t_2-t_1)^{\alpha} + (t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha})\right)\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i s, u_1(s), v_1(s), D^{\gamma}u_1(s), D^{\rho}v_1(s))\right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i s, u_1(s), v_1(s), D^{\gamma}u_1(s), D^{\rho}v_1(s))\right| \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}(t_2^3-t_1^3)}{\Gamma(4)\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)} \\
&\times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i(s, u_1(s), v_1(s), D^{\gamma}u_1(s), D^{\rho}v_1(s)) - f_i(s, u_2(s), v_2(s), D^{\gamma}u_2(s), D^{\rho}v_2(s))\right| \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\left|\Psi_1(u,v)(t_2) - \Psi_1(u,v)(t_1)\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left((t_2-t_1)^{\alpha} + (t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha})\right)\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m} l_i(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m} l_i(t) \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}(t_2^3-t_1^3)}{\Gamma(4)\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m} l_i(t) \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Psi_1(u,v)(t_2) - \Psi_1(u,v)(t_1)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} l_i\left(\frac{(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha})}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2(t_2-t_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r+\alpha}(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1+\alpha)}\right) \\
&+ \frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Nous peuvons aussi montrer que

$$\begin{aligned}
&\left\|\Psi_2(u,v)(t_2)-\ \Psi_2(u,v)(t_1)\right\| \qquad (2.14)\\
&\leq \sum_{i=1}^{m} k_i \left(\frac{\left(t_2^{\beta}-t_1^{\beta}\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{2(t_2-t_1)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\varphi+\beta}(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+\beta+1)} \right)\\
&+\frac{\Gamma(\varphi+4)\,\varsigma^{\varphi}\left|v_0^*\right|(t_2^3-t_1^3)}{6\left|\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma(\varphi+4)\right|\Gamma(\varphi+1)}.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|D^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_2)-D^{\gamma}\ \Psi_1(u,v)(t_1)\right|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\left(\left(t_2^{\alpha-\gamma}-t_1^{\alpha-\gamma}\right)+(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}\right)\right)\\
&\times \sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i(s,u_1(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s))\right|\\
&+\frac{(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i(s,u(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s))\right|\\
&+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{\alpha+r}(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma})}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)\,\Gamma(4-\gamma)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_i(s,u(s),v(s),D^{\gamma}u(s),D^{\rho}v(s))\right|\\
&+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma})}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.
\end{aligned}$$

En conséquence

$$\begin{aligned}
&\left\|D^{\gamma}\Psi_1(u,v)(t_2)-D^{\gamma}\ \Psi_1(u,v)(t_1)\right\| \qquad (2.15)\\
&\leq \left(\frac{(t_2^{\alpha-\gamma}-t_1^{\alpha-\gamma})}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{2(t_2-t_1)^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)}+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r+\alpha}(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma})}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1+\alpha)\Gamma(4-\gamma)}\right)\sum_{i=1}^{m}L_i\\
&+\frac{\Gamma(r+4)\,\tau^{r}\left|u_0^*\right|(t_2^{3-\gamma}-t_1^{3-\gamma})}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.
\end{aligned}$$

de même, on peut écrire

$$\left\|D^{\rho}\Psi_{2}\left(u,v\right)\left(t_{2}\right)-D^{\rho}\ \Psi_{2}\left(u,v\right)\left(t_{1}\right)\right\| \leq \left(\frac{(t_{2}^{\beta-\rho}-t_{1}^{\beta-\rho})}{\Gamma\left(\beta-\rho+1\right)}+\frac{2(t_{2}-t_{1})^{\beta-\rho}}{\Gamma\left(\beta\rho+1\right)}\right. \tag{2.16}$$
$$\left.+\frac{\Gamma\left(\varphi+4\right)\varsigma^{\beta+\varphi}(t_{2}^{3-\rho}-t_{1}^{3-\rho})}{\left|\varsigma^{r+3}-\Gamma\left(\varphi+4\right)\right|\Gamma(\beta+1+\varphi)\Gamma\left(4-\rho\right)}\right)\sum_{i=1}^{m}K_{i}$$
$$+\frac{\Gamma\left(\varphi+4\right)\varsigma^{\varphi}\left|v_{0}^{*}\right|\left(t_{2}^{3-\rho}-t_{1}^{3-\rho}\right)}{\left|\varsigma^{\varphi+3}-\Gamma\left(\varphi+4\right)\right|\Gamma(\varphi+1)\Gamma\left(4-\rho\right)}.$$

Grace à(2.13-2.16), nous pouvons affirmer que $\left\|\Psi\left(u,v\right)\left(t_{2}\right)-\ \Psi\left(u,v\right)\left(t_{1}\right)\right\|_{B}\to 0$ quand $t_2 \to t_1$.

En combinant (A), (B) ; et en vertu du Théorème de Arzela-Ascoli, nous concluons que Ψ est un opérateur complètement continu.

(C) : Finalement, nous montrons que l'ensemble défini par :

$$\Omega := \left\{(u,v)\in B : (u,v)=\mu\Psi\left(u,v\right), 0<\mu<1\right\}.$$

est borné.

En effet, soit $(u,v)\in\Omega$, alors$(u,v)=\Psi\left(u,v\right), 0<\mu<1$.

Ainsi, pour tout $t\in J$, nous avons :

$$u\left(t\right)=\mu\Psi_{1}\left(u,v\right)\left(t\right) \text{ et } v(t)=\mu\Psi_{2}\left(u,v\right)\left(t\right).$$

Alors

$$\frac{1}{\mu}\left|u(t)\right| \leq \frac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_{i}\left(s,u_{1}(s),v_{1}(s),D^{\gamma}u_{1}(s),D^{\rho}v_{1}(s)\right)\right|+\left|u_{0}^{*}\right|$$
$$+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^{3}\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(\alpha+r+1\right)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}\left|f_{i}\left(s,u_{1}(s),v_{1}(s),D^{\gamma}u_{1}(s),D^{\rho}v_{1}(s)\right)\right|$$
$$+\frac{\Gamma\left(r+4\right)t^{3}\tau^{r}\left|u_{0}^{*}\right|}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma\left(r+4\right)\right|\Gamma\left(\alpha+r+1\right)}.$$

Grace à(H_3) , nous peuvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}|u(t)| &\leq \sum_{i=1}^{m} L_i\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\Gamma(r+4)\tau^{\alpha+r}}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}\right)+|u_0^*| \\ &+\frac{\Gamma(r+4)\tau^{r}|u_0^*|}{6\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|u\| \leq \mu\left(A_1\sum_{i=1}^{m} L_i+W_1\right). \tag{2.17}$$

nous avons aussi

$$\|v\| \leq \mu\left(A_2\sum_{i=1}^{m} K_i+W_2\right). \tag{2.18}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}|D^{\gamma}u(t)| &\leq \frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}|f_i(s,u_1(s),v_1(s),D^{\gamma}u_1(s),D^{\rho}v_1(s))| \\ &+\frac{\Gamma(r+4)t^{3-\gamma}\tau^{\alpha+r}}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(4-\gamma)}\sup_{s\in J}\sum_{i=1}^{m}|f_i(s,u_1(s),v_1(s),D^{\gamma}u_1(s),D^{\rho}v_1(s))| \\ &+\frac{\Gamma(r+4)t^{3-\gamma}\tau^{r}|u_0^*|}{\left|\tau^{r+3}-\Gamma(r+4)\right|\Gamma(r+1)\Gamma(4-\gamma)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|D^{\gamma}u\| \leq \mu\left(A_3\sum_{i=1}^{m} L_i+W_3\right). \tag{2.19}$$

$$\|D^{\rho}v\| \leq \mu\left(A_4\sum_{i=1}^{m} K_i+W_4\right). \tag{2.20}$$

Il résulte de(2.17)-(2.20) que,

$$\|(u,v)\|_B \leq \mu\max\left(A_1\sum_{i=1}^{m} L_i+W_1, A_2\sum_{i=1}^{m} K_i+W_2, A_3\sum_{i=1}^{m} L_i+W, A_4\sum_{i=1}^{m} K_i+W_4\right).$$

En conséquence

$$\|(u,v)\|_B < \infty.$$

Ce qui prouve que Ω est borné.

Grâces aux (A), (B), (C) et d'après le théorème du point fixe de Scheafer, nous concluons que l'opérateur Ψ admet au moins un point fixe qui est la solution de problème(2.1). ∎

Corollaire 2.1.1 *sopposons que*(H_3) *est valide,*$\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$ *et* $\varsigma^{3+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$ *.si les fonctions* f_i, g_i*sont bornés sur* $\jmath \times \mathbb{R}^4, i = 1, 2, ...m,$ *alors le problème couplé (2.1) admet au moins une solution sur* $\jmath$.

Chapitre 3

Application

nous présentons deux exemples pour illustrer les principaux résultats.

Exemple 3.0.1 *pour* $t \in J = [0,1]$ *,On considère le problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{10}{3}}u(t) = \frac{|u(t)|+|v(t)|+\left|D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|+\left|D^{\frac{3}{2}}v(t)\right|}{(4t^2+25)\left(e^{-2t}+|u(t)|+|v(t)|+\left|D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|+\left|D^{\frac{3}{2}}v(t)\right|\right)} \\ +\frac{1}{5\pi+t}\left(\sin u(t)+\sin D^{\frac{5}{2}}u(t)+\cos v(t)+\cos D^{\frac{3}{2}}v(t)+\ln(1+t)\right), \\ D^{\frac{15}{4}}v(t) = \frac{1}{32(t^2+1)}\left(\frac{|u(t)|}{1+|u(t)|}+\frac{|v(t)|}{1+|v(t)|}+\frac{t^2\left|D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|}{\pi^2\left(1+\left|D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|\right)}+\frac{t\left(\left|D^{\frac{3}{2}}v(t)\right|\right)}{\pi\left(1+\left|D^{\frac{3}{2}}v(t)\right|\right)}\right) \\ +\frac{1}{16\exp(-t^2)}\left(\sin u(t)+\sin v(t)+\frac{t^2}{8\pi^2}\sin\left(2\pi D^{\frac{5}{2}}u(t)\right)+\frac{t}{\pi}\sin\left(2\pi D^{\frac{3}{2}}v(t)\right)\right), \\ u(0)=\sqrt{7}, \qquad v(0)=\sqrt{2}, \\ u'(0)=u''(0)=v'(0)=v''(0)=0, \\ u'''(0)=J^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}\right), \quad v'''(0)=J^{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{7}\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour cet exemple, nous avons : $\alpha = \frac{10}{3}, \beta = \frac{15}{4}, \gamma = \frac{5}{2}, \rho = \frac{3}{2}, r = \frac{4}{3}, \varphi = \frac{1}{4}, \tau = \frac{1}{2}$, *et* $\varsigma = \frac{5}{7}$. *Donc, il est facile de voir que* $\tau^{\alpha+r} \neq \Gamma(r+4)$ *et* $\varsigma^{3+\varphi} \neq \Gamma(\varphi+4)$.

D'autre part,

$$f_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) = \frac{|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|}{(4t^2+25)(e^{-2t}+|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|)},$$

$$f_2\left(t,u_1,u_2,u_3,u_4\right)=\frac{1}{5\pi+t}\left(\sin u_1+\sin u_2+\cos u_3+\cos u_4\right),$$

Alors, pour $t\in[0,1]$ *et* $\left(u_1,u_2,u_3,u_4\right),\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)\in\mathbb{R}^4$, *nous avons :*

$$\begin{aligned}&\left|f_1\left(t,u_1,u_2,u_3,u_4\right)-f_1\left(t,v_1,v_2,v_3,v_4\right)\right|\\&\leq\frac{1}{(4t^2+25)}\left|u_1-v_1\right|+\frac{1}{(4t^2+25)}\left|u_2-v_2\right|+\frac{1}{(4t^2+25)}\left|u_3-v_3\right|+\frac{1}{(4t^2+25)}\left|u_4-v_4\right|.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\left|f_2\left(t,u_1,u_2,u_3,u_4\right)-f_2\left(t,v_1,v_2,v_3,v_4\right)\right|\\&\leq\frac{1}{5\pi^2+t}\left|u_1-v_1\right|+\frac{1}{5\pi^2+t}\left|u_2-v_2\right|+\frac{1}{5\pi^2+t}\left|u_3-v_3\right|+\frac{1}{5\pi^2+t}\left|u_4-v_4\right|.\end{aligned}$$

nous pouvons prendre

$$w_1^1(t)=w_2^1(t)=w_3^1(t)=w_4^1(t)=\frac{1}{(4t^2+25)}.$$

$$w_1^2(t)=w_2^2(t)=w_3^2(t)=w_4^2(t)=\frac{1}{5\pi^2+t}.$$

$$\theta_1^1=\theta_2^1=\theta_3^1=\theta_4^1=\frac{1}{25}.$$

$$\theta_1^2=\theta_2^2=\theta_3^2=\theta_4^2=\frac{1}{5\pi^2}.$$

Nous avons egalment

$$g_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{1}{32(t^2+1)}\left(\frac{|u_1|}{1+|u_1|}+\frac{|u_2|}{1+|u_2|}+\frac{t^2\left|u_3\right|}{\pi^2(1+|u_3|)}+\frac{t\left|u_4\right|}{\pi(1+|u4|)}\right).$$

et

$$g_2(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{1}{16e^{-t^2}}\left(\sin u_1+\sin u_2+\frac{t^2}{8\pi^2}\sin(2\pi u_3+\frac{t}{\pi}\sin(2\pi u_4)\right).$$

Pour $t\in[0,1]$ *et* $(u_1,u_2,u_3,u_4),(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$, *nous peuvons ecrire*

$$\begin{aligned}&|g_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)-g_1(t,v_1,v_2,v_3,v_4)|\\&\leq\frac{1}{32(t^2+1)}|u_1-v_1|+\frac{1}{32(t^2+1)}|u_2-v_2|+\frac{t^2}{32\pi^2(t^2+1)}|u_3-v_3|+\frac{t}{32\pi(t^2+1)}|u_4-v_4|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|g_2(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)-g_2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)|\\&\leq\frac{1}{16e^{-t^2}}|u_1-v_1|+\frac{1}{16e^{-t^2}}|u_2-v_2|+\frac{t^2}{128\pi^2e^{-t^2}}|u_3-v_3|+\frac{t}{16\pi e^{-t^2}}|u_4-v_4|.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\eta_1^1(t)=\eta_2^1(t)=\frac{1}{32(t^2+1)},\ \eta_3^1(t)=\frac{t^2}{32\pi^2(t^2+1)},\quad \eta_4^1(t)=\frac{t}{32\pi(t^2+1)}.$$

$$\eta_1^2(t)=\eta_2^2(t)=\frac{1}{16e^{-t^2}},\ \eta_3^2(t)=\frac{t^2}{128\pi^2e^{-t^2}},\ \eta_4^2(t)=\frac{t}{16\pi e^{-t^2}}.$$

et alors

$$\lambda_1^1=\lambda_2^1=\frac{1}{32},\ \lambda_3^1=\frac{1}{32\pi^2},\ \lambda_4^1=\frac{1}{32\pi}.$$

$$\lambda_1^2=\lambda_2^2=\frac{e}{16},\ \lambda_3^2=\frac{e}{128\pi^2},\ \lambda_4^2=\frac{e}{16\pi}.$$

aussi,

$$\max(A_1S_1,A_2S_2,A_3S_1,A_4S_2)<1.$$

par le théorème(2.1.1) nous concluons que le systéme couplé fractionnaire (3.1)a une unique solution sur $[0,1]$

Exemple 3.0.2 *Pour illustrer le deuxième résultat principal, on considère le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{2}}u(t)+\frac{e^{t}}{16+\sin\left(u(t)+v(t)+\cos(D^{\frac{7}{4}}u(t)+D^{\frac{3}{4}}v(t)\right)}+\frac{e^{-2t}\sin(u(t)+v(t))}{16+\cos(D^{\frac{7}{4}}u(t)+D^{\frac{3}{4}}v(t))}=0, \\ D^{\frac{7}{2}}v(t)+\frac{\sin\left(u(t)+v(t)+D^{\frac{7}{4}}u(t)+D^{\frac{3}{4}}v(t)\right)}{18+t+t^{2}}+\frac{\cos\left(u(t)+v(t)+D^{\frac{7}{4}}u(t)+D^{\frac{3}{4}}v(t)\right)}{16+t+t^{2}}=0, \\ u(0)=\sqrt[3]{2}, \quad v(0)=\sqrt{5}, \\ u'(0)=u''(0)=v'(0)=v''(0)=0, \\ u'''(0)=\jmath^{\frac{2}{5}}(\frac{1}{3}), \quad v'''(0)=\jmath^{\frac{3}{2}}(\frac{2}{7}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour cet exemple, nous avons : $\alpha=\beta=\frac{7}{2},\gamma=\frac{7}{4},\rho=\frac{3}{4},r=\frac{2}{5},\varphi=\frac{3}{2},\tau=\frac{1}{3}$,*et* $\varsigma=\frac{2}{7}$ *et* $\jmath=[0,1]$, *il est facile de voir que* $\tau^{\alpha+r}\neq\Gamma(r+4)$ *et* $\varsigma^{3+\varphi}\neq\Gamma(\varphi+4)$.

D'autre part,

$$f_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{e^{t}}{16+\sin(u_1+u_2)+\cos(u_3+u_4)}.$$

$$f_2(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{e^{-2t}\sin((u_1+u_2)}{16+\cos(u_3+u_4)}.$$

$$g_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{\sin(u_1+u_2+u_3+u_4)}{18+t+t^{2}}.$$

$$g_2(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{\cos(u_1+u_2+u_3+u_4)}{16+t+t^{2}}.$$

Nous remarquons que

$$|f_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)|\leq\frac{e^{t}}{14}.$$

$$|f_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)|\leq\frac{e^{-2t}}{15}.$$

$$|g_1(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)|\leq\frac{1}{18+t+t^{2}}.$$

$$|g_2(t,,u_1,u_2,u_3,u_4)|\leq\frac{1}{16+t+t^{2}}.$$

Donc, d'aprés le théoème(2.0.5), le système(3.2)a au moins une solution sur $[0, 1]$.

Conclusion

Notre but principal, dans ce mémoire, est la présentation des résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions initiciles dans des espaces de Banach. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe.

Nous prévoyons dans le futur l'étude la stabilité des équations fractionnaire.

Bibliographie

[1] A. Anber, S. Belarbi and Z. Dahmani, New existence and uniqueness results for fractional differential equations, An. Ştiint,.
Univ. "Ovidius" Constant,a Ser. Mat. 21 (2013), no. 3, 33–41

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra and D. Seba, On the application of measure of noncompactness to the existence of solutions for fractional differential equations. Results Math. 55 (2009), no. 3-4, 221–230.

[3] S. Abbas, Contribution à l'étude de quelques classes d'équations et inclusions différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire, thèse de doctorat, université deSidi.BelAbbès, 2011

[4] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 7–8, 2391–2396

[5] M. Benchohra, J. Henderson and D. Seba, Boundary value problems for fractional differential inclusions in Banach spaces, Frac. Differ. Calc. (to appear).

[6] M. Benchohra, and D. Seba, Impulsive partial hyperbolic fractional order differential equations in Banach spaces.Vol. 1. July 2011, No.4, pp. 1-12.

[7] M. Benchohra and D. Seba, Impulsive fractional differential equations in Banach spaces. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2009, Special Edition I, No. 8, 14 pp.

[8] M. Benchohra, A. Cabada, and D. Seba, An existence result for nonlinear fractional differential equations on Banach spaces. Bound. Value Probl. 2009, Art. ID 628916, 11 pp.

[9] M. E. Bengrine and Z. Dahmani, Boundary value problem for fractional differential equations, Int. J. Open Problems Compt. Math. 5 (2012), no. 4, 7–15.

[10] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.

[11] V. Gafiychuk, B. Datsun, V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reactiondiffusion systems. J. Comp. Appl. Math. 220 (2008), 215-225.

[12] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order, in : Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics Udine 1996, CISM Courses Lectures 378, Springer, Vienna (1997), 223–276.

[13] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.

[14] M. Houas and Z. Dahmani, New fractional results for a boundary value problem with Caputo derivative, Int. J. Open Problems Comput. Math. 6 (2013), no. 2, 30–42.

[15] M. Houas and Z. Dahmani, New results for a Caputo boundary value problem, Amer. J. Comput. Appl. Math. 3 (2013), no. 3,143–161.

[16] M. Houas and Z. Dahmani, New results for a coupled system of fractional differential equations, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 133–150.

[17] M. Houas, Z. Dahmani and M. Benbachir, New results for a boundary value problem for differential equations of arbitraryorder, Internat. J. Modern Math. Sci. 7 (2013), no. 2, 195–211.

[18] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions (in Russian), Differ. Uravn. 41 (2005), no. 1, 82–86 ; translation in Differ. Equ. 41(2005), no. 1, 84–89.

[19] J. Klafter, S. C. Lim and R. Metzler, Fractional Dynamics. Recent Advances, World Scientific, Hackensack, 2012.

[20] M. Li and Y. Liu, Existence and uniqueness of positive solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations, Open J. Appl. Sci. 3 (2013), 53–61.

[21] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in : Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics Udine 1996, CISM Courses Lectures 378, Springer, Vienna (1997), 291–348.

[22] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[23] J. J. Nieto and J. Pimente, Positive solutions of a fractional thermostat model, Bound. Value Probl. 2013 (2013), Article ID 5.

[24] S. K. Ntouyas, Existence Results for first order boundary value problems for fractional differential equations and inclusions with fractional integral boundary conditions, J. Fract. Calc. Appl. 3 (2012), no. 9, 1–14.

[25] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, Math. Sci. Eng. 111, Academic Press, New York, 1974

[26] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu and F. M. Nanot, Frequency-band complex noninteger differentiator : Characterization and synthesis, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl. 47 (2000), no. 1, 25–39.

[27] L. Podlubny, Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, Math. Sci. Eng. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[28] Y. A. Rossikhin and M. V. Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, Appl. Mech. Rev. 50 (1997), no. 1, 15–67.

[29] L. Sommacal, P. Melchior, A. Oustaloup, J. M. Cabelguen and A. J. Ijspeert, Fractional multi-models of the frog gastrocnemius muscle, J. Vib. Control 14 (2008), no. 9–10, 1415–1430.

[30] W. Yang, Positive solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Comput. Math. Appl. 63 (2012), no. 1, 288–297.