MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présentée par :

FATIMA ZAHRA BAHRI

La stabilité de type Ulam-Hyers d'une équation différentielle fractionnaire

soutenu publiquement le 23/06/2022 devant le jury composé de :

Président :	Houari FATOUCHE	*MCA*	UMAB
Examinateur :	Samira BELARBI HAMANI	Pr	UMAB
Encadreur :	*Horiya DIALA*	*MAA*	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Dédicace

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A ma trés chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier

comme il se doit. Ta bienveillance me

guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force

pour affronter les différents obstacles.

A mon trés cher père

Tu as toujours été à mes cotés pour me soutenir et m'encourager.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

A mes très chers frères Abd El Mounîme et Yahya et ma soeur Marwa

A mes trés chères amies Anissa, Rachida, Khadra, Hafssa, Marwa, Nour El houda

et toutes mes amies qui m'aiment.

Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout

réussite.

....

.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, Je tient à remercier **"Mon Dieu"** de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terminer mon travail.

Tout d'abord, je tient à éxprimer mes vifs remerciements à :

Madame DIALA Horiya, Maitre assistante à l'Université Abd El Hamid Ben Badis Mostaghanem, Faculté Des Sciences Exactes et Informatique pour s'aide précieuse dans l'encadrement de mon travail, ses conseils, sa disponibilité, ses encouragements, la confiance qu'elle m'a accordée.

Ms. FATOUCHE Houari, Maitre de conférence au faculté Des Sciences Exactes et Informatique a accepter de présider mon travail

je lui dit merci beaucoup.

Madame BELARBI HAMANI Samira, Professeur à l'Université Abd El Hamid Ben Badis pour avoir accepter d'examiner mon travail, ses critiques et suggestions me seront utiles.

Mes sincères remerciements vont également à ma famille pour le soutien moral et les encouragements.

Enfin, je tient à remercier mes amies pour ses aides et ses conseils scientifiques.

.....

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires EDF_S sont trés importantes dans la résolution des problèmes dans différents domaines scientifiques comme la physique, la chymique,...etc.

Tout d'abord, nous avons présenté quelques résultats qui consiste à étudier l'éxistence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires et l'existence au moins de la solution. Ces résultats est basé sur le théorème de contaction de Banach et le théorème de Schaefer.

Ensuit, nous avons introduit un nouveau type de stabilité qui est la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et stabilité généralisée au sens d'Ulam-Hyers.

Abstract :

fractional differential equation are very important in solving problems in different scientific fields such as physics, chemistry,..

First of all, we presented some results which consist in studying the existence and uniqueness of the solution of a system of fractional differential equation and the existence at least of the solution. These result are based on the contraction theorem of Banach and Schaefer's theorem.

Then, we introduce a new type of stability which is stability in the sense of Ulam-Hyers and generalized stability in the sense of Ulam-Hyers.

Mots clés : Dérivée au sens de Caputo, Dérivée au sens de Riemann-Liouville, équation différentielle, existence et unicité, calcul fractionnaire, point fixe, stabilité au sens d'Ulam-Hyers, théorème de point fixe de schaefer.

Key words :

Caputo derivative, Riemann-Liouville derivative, differential equation, existence and uniquenes, fractional calcul, fixed point, Ulam-Hyers stability, Schaefer fixed point theorem.

Notation

$\mathbb{N}$	: Ensembles des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: Ensembles des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	: Ensembles des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$	: Ensembles des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+$	: Ensembles des nombres réels positifs ou nuls.
$[a, b]$	: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'éxtrémités a et b.
$(a, b]$	: Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'éxtrémités a et b.
(a, b)	: Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'éxtrémités a et b.
$\mathbb{C}\left([a, b], \mathbb{R}\right)$	: Espace des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$L^1\left([a, b]\right)$	: L'ensembles des fonctions intégrables sur $[a, b]$.
$\Vert\ .\ \Vert_\infty$	: Normes infinie.
$\Vert\ .\ \Vert_X$	: Normes de l'espace X.
$D^n\left(ou\ \frac{d^n}{dt}\right)$	: Dérivée d'ordre n.
$f^{(n)}$	: Dérivée $n^{ième}$ de f.
J_a^α	: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^cD_a^\alpha$	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
${}^{RL}D_a^\alpha$	: Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

Table des matières

Introduction général

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différentiation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire, réel ou complexe, ce terme peut être considéré comme mal-approprié, car une meilleure description pourrait être "la différentiation et l'intégration à un ordre arbitraire".

La théorie des équations différentielles fractionnaires (EDF_s) joue un rôle important dans la modélisation de nombreux processus physique, technologiques, biologique, théorie du controle et traitement du signal, voir par exemple [3] ; [7] ; [29]. Depuis quelques années, une attention particulière a été focalisée à l'étude de l'éxistence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires.

Récement, Taieb et Dahmani a étudie l'éxistence et l'unicité des solutions pour certains systèmes fractionnaires [5] ; [6] ; [16]

D'autre part, la stabilité des équations fonctionnelles a été énoncée par Ulam [27] et Hyers [27] Ahmed et al [1] ont déclaré que la stabilité d'Ulam-Hyers est indépendante de la stabilité plus familière de Lyapunov.

Le présent travail est dévoué à la construction de plusieures résultats sur l'éxistence et l'unicité des solutions voir [25], en plus de l'éxistence d'au moins d'une solution [4] et de certains types de stabilité d'Ulam-Hyers pour le système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} D^{\alpha_1}x_1(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t), D^{\delta_1}x_1(t), ..., D^{\delta_n}x_n(t)),\ t \in (0,1) \\ D^{\alpha_2}x_2(t) = f_2(t, x_1(t), ..., x_n(t), D^{\delta_1}x_1(t), ..., D^{\delta_n}x_n(t)),\ t \in (0,1) \\ \vdots \\ D^{\alpha_n}x_n(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t), D^{\delta_1}x_1(t), ..., D^{\delta_n}x_n(t)),\ t \in (0,1) \\ x_i(0) = a_i \quad , x_i^{(j)}(0) = 0 \quad j = 1, 2, ..., m-2, \quad i = 1, ..., n \\ D^{\gamma_i}x_i(0) + D^{\gamma_i}x_i(1) = D^{p_i}x_i(0) + D^{p_i}x_i(1) = 0, \quad i = 1, ..., n \end{array}\right. \tag{1}$$

où $\alpha_i \in (m-1, m)$, $\delta_i \in (m-2, m-1)$, γ_i, $p_i \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$D^{\alpha_i}, D^{\delta_i}$, D^{γ_i} et D^{p_i} sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, les fonctions $(f_i)_{i=1,...,n} : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ sera précisés ultérieurement .

Présentation du mémoire :

Dans ce projet de fin d'étude, nous s'intéressons d'étudier deux sortes du problèmes des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Notre objectif principale de ce mémoire est de trouver des résultats analytiques en calcul fractionnaire.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres suivi d'une conclusion.

Chapitre 1 : Dans le premier chapitre, nous allons rappeler quelques notions de base, définitions et des principaux résultats dans le domaine du calcul fractionnaire pour le but d'avoir une bonne interprétation de la théorie des EDF_s.

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à l'étude d'éxistence et d'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires qui basé sur le théorème de point fixe de Banach, et ensuit l'étude d'existence au moins des solutions, pour cela nous utilisons le théorème du point fixe de Schaefer.

Chapitre 3 : Nous allons étudier la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et stabilité généralisée au sens d'Ulam-Hyers pour notre problème traité.

Chapitre 4 : Dans ce dernier chapitre, nous allons établir des conditions suffisantes et des exemples pour illustrer quelques résultats principales.

Chapitre 1

Notions et préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et lemmes de base sur la théorie du calcul fractionnaire [7] ; [12] ; et [14]. Ensuit, nous prouvons un résultat auxiliaire qui nous permettrons d'obtenir la représentation intégrale du système fractionnaire(1). Puis nous s'intéressons particulièrement à définir quelques résultats fandamentaux sur le principe de contraction de Banach ainsi que les théorème célèbres du point fixe.

1.2 Fonctions spéciales en calcul fractionnaire.

Dans la théorie du calcul fractionnaire, il y a plusièures fonctions qui sont plus utilisées, dans ce travail nous citons deux fonctions principales : la fonction Gamma d'Euler et la fonction Betta d'Euler.

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien Suise Leonhard Euler $(1707-1783)$ dans cet objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières.

Vu que sa importance il fut étudié par d'autre éminents mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss $(1777-1855)$, Charles Hermite $(1822-1901)$, ...ainsi que de nombres autres.

Définition 1.2.1 *la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(0_+) = +\infty,$ *pour* $0 < x \leq 1,\ x \longmapsto \Gamma(x)$ *est une fonction monotone strictement décroissante.*

La fonction Gamma Γ possède des propriétés importantes.

Quelques propriétés :

pour tout $x > 0$, $n \in N^*$, nous avons :

- ► $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- ► $\Gamma(n-1) = n!$
- ► $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$

Exemple 1.2.1 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

nous avons :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2x-1} dy, \quad t = y^2,$$

En particulier,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$

1.2.2 Fonction Betta d'Euler

Définition 1.2.2 *Soient $x, y \in R^*$, la fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(x,y) := \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt. \tag{1.2}$$

Quelques propriétés :

pour tout $x, y \in R_+^*$, on a :

► $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

► $x\beta(x,y+1) = y\beta(x+1,y)$

La relation entre les deux fonctions Gamma et Beta est donnée par l'éxpression :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.3}$$

1.2.3 Intégration fractionnaire de Riemann-Liouville :

Définition 1.2.3 *[14]L'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est basé sur la formule de Cauchy. Cette dernière a aider à calculer n fois l'intégration de la fonction f :*

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.4}$$

La généralisation de la formule de Cauchy à un ordre α réel positif aide à remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma comme suit :

Définition 1.2.4 *[14]l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, pour une fonction continue f sur $[0, \infty[$ est défini par :*

$$J^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, & \alpha > 0, \quad t \geq 0, \\ f(t), \quad \alpha = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 1.2.1 ***(propriété de la linéarité)***

soient $\alpha > 0,\ f,\ g \in \mathbb{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$J_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \lambda_1 J_a^{\alpha} f(t) + \lambda_2 J_a^{\alpha} g(t). \tag{1.6}$$

Preuve. soient $\alpha > 0,\ f,\ g \in \mathbb{C}([a,b], \mathbb{R})$,

soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

nous avons :

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha}(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (\lambda_1 f(s) + \lambda_2 g(s))\, ds \\ &= \frac{\lambda_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds + \frac{\lambda_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \\ &= \lambda_1 J_a^{\alpha} f(t) + \lambda_2 J_a^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.2 ***(propriété de semi groupe)***

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors nous avons :

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) = J_a^{\alpha+\beta} f(t),\ \forall \alpha, \beta > 0. \tag{1.7}$$

Preuve. d'aprés la définition (1.5) nous avons :

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(J_a^{\beta} f(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau ds. \end{aligned}$$

d'aprés le théoème de Fubini nous obtenons :

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau. \tag{1.8}$$

nous appliquons le changement de variable $s = x(t-\tau) + \tau$,

nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

d'ou :

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau \\ &= J_a^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.3 ***(la propriété de commutativité)***

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors nous avons :

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) = J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f(t), \qquad \forall \alpha, \beta > 0. \tag{1.9}$$

Preuve. nous avons $J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) = J_a^{\alpha+\beta} f(t)$ (d'aprés la propriété de semi groupe)

donc

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(t) = J_a^{\alpha+\beta} f(t) = J_a^{\beta+\alpha} f(t) = J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f(t) \tag{1.10}$$

d'ou l'égalité . ■

1.3 Dérivation fractionnaire :

La dérivation d'ordre fractionnaire est une généralisation des concepts de la dérivation d'ordre entière. Dans la littérature, il y a plusieures définitions mathématiques pour la dérivation fractionnaire. Nous citons deux : dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo [14].

1.3.1 Dérivée de Riemann-Liouville :

Définition 1.3.1 *la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est définié par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \tfrac{d^n}{dt^n}\left(J_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right), \qquad n-1 < \alpha < n, \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, & n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n}, & \alpha = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Exemple 1.3.1 *calculons la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens de Riemann-*

Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $t \in [a, b]$ *avec* $\beta > 0$,

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \quad , \alpha > 0, \qquad \beta > 0. \tag{1.12}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= D^n J_a^{n-\alpha}(t-a)^{\beta} \\ &= D^n\left[\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1+n)}(t-a)^{\beta-\alpha+n}\right] \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la dérivation entière suivante :

$$D^n(t-a)^{\delta} = \delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+1)(t-a)^{\delta-n} = \tfrac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-n+1)}(t-a)^{\delta-n}$$

nous avons :

$$D^n(t-a)^{\beta} = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\tfrac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1-n)}(t-a)^{\beta+n-\alpha-n},$$

ce qui permet d'avoir :

$$D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.

En effet dans cette exemple nous voyons que :

$$^{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \quad , \alpha > 0 \tag{1.13}$$

Proposition 1.3.1 *[19] soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f + \mu g]$ existent et nous avons :

$$^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)]$$

En générale, nous avons :

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[^{RL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\neq^{RL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right]$$

nous avons aussi :

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[^{RL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\neq^{RL}D_a^{\beta}\left[^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]$$

Lemme 1.3.1 *[19]soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant $^{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=0$, $\alpha\in\left]n-1,n\right[,\ \ n\in\mathbb{N}^*$,*

Alors :

$$f\left(t\right)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\frac{\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-n+i+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-n+i}\ , \tag{1.14}$$

ou b_i, $i=0,...,n-1$, sont des constantes arbitraires.

1.3.2 Dérivée de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha\in\left]n-1,n\right]$ s'obtient par une application de $J_a^{n-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n. Tandis que la dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 1.3.2 *soit $f\in\mathbb{C}^n\left(\left[a,b\right]\right),\ n\in\mathbb{N}^*$. nous définissons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha\geq0$, de la fonction f par :*

$$\begin{aligned}^{C}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]&=J_a^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}\left[f\left(t\right)\right]\right)\\&=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau & ,\ n-1\prec\alpha\prec n\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\\ \frac{d^nf}{dt^n}, & \alpha=n.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Exemple 1.3.2 *Soit* $f(t) = (t-a)^{\beta}$ *, avec* $\beta = \frac{5}{2}$*, et nous calculons* ${}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}[f(t)]$*.* *Alors :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}} &= \left(J_a^{2-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}(t-a)^{\frac{5}{2}}\right) \\ &= \left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}(t-a)^{\frac{5}{2}}\right). \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation de la dérivation classique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\delta} &= \delta(\delta-1)\ldots(\delta-m+1)(t-a)^{\delta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-m+1)}(t-a)^{\delta-m} \end{aligned} \tag{1.16}$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\frac{3}{2}}(t-a)^{\frac{5}{2}} &= \left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1-2\right)}(t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right) \\ &= \left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{15}{4}\left(J_a^{\frac{1}{2}}\right)(t-a)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{15}{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8}(t-a). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle.*

En effet, si $f = c$, alors :

$$\begin{aligned} {}^{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau \\ &= D_a^{\alpha}\left[c\right] \\ &= cD_a^{\alpha}\left[1\right]. \end{aligned}$$

(i) pour tout $\alpha > 0, \;\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t) + \mu g(t)\right] = \lambda D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] + \mu D_a^{\alpha}\left[g(t)\right].$$

(ii) pour tout $\alpha > 0$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, nous avons :

$$D_a^{\alpha} J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = f(t).$$

Lemme 1.3.2 ***(relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et dérivée au sens de Caputo)***

soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *et* $f \in \mathbb{C}^n([a,\infty))$, *la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville à celle de Caputo donnée par :*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right) f(t) = \left({}^{c}D_a^{\alpha}\right) f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)} f^{(j)}(a) \tag{1.17}$$

cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\left({}^{c}D_a^{\alpha}\right) f(t) = \left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{j}}{j!} f^{(j)}(a)\right) \tag{1.18}$$

Remarque 1.3.2 *A partir de (1.17) et (1.18), nous déduirons que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coincide avec celle de Caputo si a est un point zéro d'ordre n de f.*

Plus précisément, nous avons :

$$\left(f^{(j)}(a)=0,\ j=0,1,...,n-1\right)\Longrightarrow\left(\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t)=\left({}^{c}D_a^{\alpha}\right)f(t)\right)\tag{1.19}$$

Preuve. On part de l'hpothèse que f est de classe $\mathbb{C}^n$, alors nous peuvons écrire :

$$f(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(t-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)+J_a^nD^nf(t)\tag{1.20}$$

Et donc, par application de $J_a^{n-\alpha}$ à cette identité, nous obtenons :

$$J_a^{n-\alpha}f(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{n-\alpha+j}}{\Gamma(n-\alpha+j+1)}f^{(j)}(a)+J_a^{2n-\alpha}D^nf(t)\tag{1.21}$$

En suite nous appliquons D^n à la formule obtenue, nous aurons :

$$\begin{aligned}D^nJ_a^{n-\alpha}f(t)&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+j+1)}D^n(t-a)^{n-\alpha+j}+D^nJ_a^{2n-\alpha}D^nf(t)\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+j+1)}\left(\frac{\Gamma(n-\alpha+j+1)(t-a)^{n-\alpha+j-n}}{\Gamma(n-\alpha+j+1-n)}\right)+D^nJ^nJ_a^{n-\alpha}D^nf(t)\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}f^{(j)}(a)+J_a^{n-\alpha}D^nf(t)\end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)=D^nJ_a^{n-\alpha},\qquad\left({}^{c}D_a^{\alpha}\right)=J_a^{n-\alpha}D^n,\tag{1.22}$$

nous obtenons :

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha}\right)f(t)=\left({}^{C}D_a^{\alpha}\right)f(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a).\tag{1.23}$$

■

1.4 Quelques résultats du point fixe :

Les théorèmes du point fixe sont des outils extremement utiles pour résoudre des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe.

Dans cette section nous allons présenter deux théorèmes du point fixe : le théorème du point fixe de Banach qui assure l'unicité de la solution et le théorème du point fixe de Schaefer, ce dernier peuvent de montrer l'éxistence au moins d'un point fixe.

Ces théorèmes sont basés sur les définitions suivantes :

Définition 1.4.1 (*suite de Cauchy*) : *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans un éspace véctoriel normé* E *muni d'une norme* $\| \, . \, \|_E$*est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \geq 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \| \, x_p - x_q \, \|_E \leq \varepsilon. \tag{1.24}$$

Définition 1.4.2 *On dit que* X *est complet pour la norme* $\|.\|_X$, *si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 1.4.3 *soit* $(X, \|.\|)$ *un espace normé. Un sous-ensemble* $\Omega \subset X$, *est dit borné s'il existe* $M > 0$, *tel que pour tout* $x \in \Omega$ *on a :*

$$\|x\| \leq M. \tag{1.25}$$

Définition 1.4.4 *soit* F *un ensemble de fonctions continues définiés sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *.On dit que l'ensemble* F *est équicontinue si pout tout* $\varepsilon > 0$ *,il va exister un* $\delta > 0$, *tel que pour toute* $f \in F$ *et pour tous* $t_1, t_2 \in I$,

$n \in \mathbb{N}, \mid t_1 - t_2 \mid < \delta$, *alors :*

$$\mid f(t_1) - f(t_2) \mid < \varepsilon. \tag{1.26}$$

Définition 1.4.5 *soit* $(X, \| \,.\, \|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* Φ *de* X *dans* X *est dite contractante s'il existe un nombre positif* $k \in \,]0,1[$ *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on a :*

$$\| \Phi(x) - \Phi(y) \| \leq k \| x - y \| . \tag{1.27}$$

Définition 1.4.6 *soient* X *un espace vectoriel normé, de norme* $\| \,.\, \|$*et* T *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point fixe de* Φ *tout point* $x \in X$ *tel que :*

$$T(x) = x. \tag{1.28}$$

Définition 1.4.7 *soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. L'opérateur continue* Φ *de* X *dans* Y *est complètement continue s'il transforme tout borné de* X *en une partie relativement compact dans* Y.

Introduisons maintenant le principe de contraction de Banach.

1.4.1 Théorème d'Ascoli-Arzila :

Lemme 1.4.1 *Soit* $\Omega \subset X$. *Alors* Ω *est relativement compact dans* X *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Ω est uniformément borné .
2. Ω est équicontinu .

1.4.2 Théorème de point fixe de Banach :

Théorème 1.4.1 *[19] Soient* X *un espace de Banach et* $\Phi : X \longrightarrow X$ *est un opérateur de contractant. Alors, il existe un point fixe unique* $x \in X$ *tel que*

$$\Phi x = x. \tag{1.29}$$

1.4.3 Théorème du point fixe de Schaefer :

Théorème 1.4.2 *[19] Soient X un espace de Banach et $\Phi : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega := \{x \in X : x = \mu \Phi x, \quad 0 < \mu < 1\} \tag{1.30}$$

est borné, alors Φ possède au moins un point fixe .

1.4.4 Lemmes auxiliaires :

Définition 1.4.8 *Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, la solution générale d'équation défférentielle fractionnaire $D^\alpha f(t) = 0$ est donnée par :*

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.. + c_{n-1} t^{n-1} \tag{1.31}$$

ou $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots., n-1,\ \ n = [\alpha] + 1.$

Lemme 1.4.2 *soit $\alpha > 0$, alors*

$$J^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.. + c_{n-1} t^{n-1} \tag{1.32}$$

Lemme 1.4.3 *Pour α, $\beta > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :*

$$D^\alpha t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha-1}, \beta > n,\ \text{et}\ \ D^\alpha t^j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.33}$$

Proposition 1.4.1 *Soit* $q > p > 0,$ *et* $f \in L^1([a,b])$, *alors*

$$D^p J^q f(t) = J^{q-p} f(t), \qquad t \in [a,b] \tag{1.34}$$

Chapitre 2

Existence des solutions :

Dans cette section, nous étudions le système fractionnaire(1), et nous éssayons de trouver la représentation intégrale de la solution. En suite, nous étudions l'éxistence et l'unicité de la solution on utilisant le théorème de point fixe de Banach. Finalement, nous étudions l'existence au moins de la solution qui basé sur le théorème de point fixe de Schaefer [17] ; [22].

2.1 Représentation Intégrale

Lemme 2.1.1 *Supposons que* $-1 < \alpha_i < m, \quad i = 1, 2, ..., n \ ; n \in \mathbb{N} - \{0\}, m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ *et* $G_i \in C([0,1], \mathbb{R})$*. Alors le système suivant*

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1(t) = G_1(t) \ , \quad t \in (0,1) \\ D^{\alpha_n} x_n(t) = G_n(t) \ , \quad t \in (0,1) \\ x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, ..., n \\ x_i^{(j)}(0) = 0, \ i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ...m-2 \\ D^{\alpha_i} x_i(0) + D^{\gamma} x_i(1) = D^{p_i} x_i(0) + D^{p_i} x_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \gamma_i, p_i \in (0,1) \end{cases} \tag{2.1}$$

a une unique solution $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tel que :

$$x_i(t) = a_i + \frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)[\Gamma(m-p_i)-\Gamma(m-\gamma_i)]} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-p_i-1} G_i(s)\,ds \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-\gamma_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-\gamma_i-1} G_i(s)\,ds \end{pmatrix} \times t^{m-1} \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} G_i(s)\,ds.$$

Nous utilisons la relation (1.32), nous obtenons l'équation intégrale suivante :

$$x_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} G_i(s)\,ds - \sum_{k=0}^{m-1} c_k^i t^k \quad , i = 1, 2, ..., n, \ \ ou \ c_k^i \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

de première et deuxième conditions donnée dans (2.1) nous obtenons :

$$c_0^i = -a_i \ , c_k^i = 0, \quad k = 1, 2, ..., m-2 \tag{2.4}$$

nous utilisons la relation (1.34) et (1.33) et la dernière condition donnée en (2.1) nous obtenons :

$$c_{m-1}^i = \frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)(\Gamma(m-p_i)-\Gamma(m-\gamma_i))} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i-\gamma_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-\gamma_i-1} G_i(s)\,ds \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-p_i-1} G_i(s)\,ds \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

substutions l'équation (2.4) et l'équation (2.5) dans l'équation (2.3), nous trouvons (2.2) ceci termine la preuve.

Introduisons maintenant l'espace :

$$X = \left\{x : x \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R}), D^{m-1}x \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})\right\}, m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

muni de la norme :

$$\|x\|_X = \max\left(\|x\|_\infty, \|D^{m-1}x\|_\infty\right)$$

avec

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in J} \mid x\left(t\right) \mid$$

et

$$\| D^{m-1}x \|_\infty = \max_{t\in J} \mid D^{m-1}x\left(t\right) \mid, \qquad J = [0,1]$$

Il est claire que $(X, \| \,.\, \|_X)$ est un espace de Banach et l'éspace produit $(X^n, \| \,.\, \|_{X^n})$ est aussi un espace de Banach avec la norme $\| \left(x_1, ..., x_n\right) \|_{X^n} = \max\left(\| x_1 \|_X, ..., \| x_n \|_X\right).$ Maintenant nous allons établir l'éxistence et l'unicité de la solution pour le système fractionnaire (1) puis nous allons discuter l'éxistence au moins de la solution .

2.2 Existence et unicité :

Dans le but d'établir des résultats d'éxistence et d'unicité de la solution pour le système (1), nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) : les fonctions $(f_i)_{i=1,\ldots,n} : J \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ sont continues .

(H_2) : Il existe des constantes non négatives $(U_k^i)_{k=1,....,2n}^{i=1,....,n}$

$$\mid f_i\left(t, x_1, ..., x_{2n}\right) - f_i\left(t, y_1, ..., y_{2n}\right) \mid \leq \sum_{k=1}^{2n} U_k^i \mid x_k - y_k \mid \tag{2.6}$$

pour tout $t \in J$ et tout $\left(x_1, x_2, ..., x_{2n}\right), \left(y_1, y_2, ..., y_{2n}\right) \in \mathbb{R}^{2n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

(H_3) : Il existe des constantes non négatives $M_i, \; i = 1, 2, ..., n,$ pour tout

$t \in J, \quad (x_1, x_2, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, nous avons :

$$| f_i(t, x_1, ..., x_{2n}) | \leq M_i \tag{2.7}$$

On considère les quantities suivantes :

$$\gamma_1^i = \frac{\Gamma(m - p_i)\Gamma(m - \gamma_i)}{\Gamma(m) \mid \Gamma(m - p_i) - \Gamma(m - \gamma_i) \mid} \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_i - p_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i - \gamma_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \right) \tag{2.8}$$

$$\gamma_2^i = \frac{\Gamma(m - p_i)\Gamma(m - \gamma_i)}{\mid \Gamma(m - p_i) - \Gamma(m - \gamma_i) \mid} \times \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_i - p_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i - \gamma_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i - m + 2)} \right) \tag{2.9}$$

et :

$$\Sigma_i = \sum_{k=1}^{n} \left(U_k^i + \frac{U_{k+n}^i}{\Gamma(m - \delta_k)} \right) \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.10}$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que l'hypothèse* (H_2) *est satisfait. Si l'inégalité suivante :*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left(\gamma_1^i \Sigma_i, \gamma_2^i \Sigma_i \right) < 1 \tag{2.11}$$

est valide, alors le système (1) a une unique solution en J.

Preuve. nous définissons l'opérateur intégrale fractionnaire $T : X^n \longrightarrow X^n$ par :

$$T(x_1, ..., x_n)(t) := (T_1(x_1, ..., x_n)(t), ..., T_n(x_1, ...x_n)(t)), t \in J$$

comme :

$$
\begin{aligned}
&T_i\left(x_1,...,x_n\right)(t)\\
&= a_i + \frac{\Gamma\left(m-p_i\right)\Gamma\left(m-\gamma_i\right)}{\Gamma\left(m\right)\left(\Gamma\left(m-p_i\right)-\Gamma\left(m-\gamma_i\right)\right)}\\
&\times\left(\begin{array}{c}
\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_i-p_i-1} f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(s\right)\end{array}\right)ds\\
-\frac{1}{\Gamma(\alpha_{i}\_\gamma_i)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha_i-\gamma_i-1} f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1(s),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(s\right)\end{array}\right)ds
\end{array}\right)\\
&+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_i\right)}\int_0^1\left(t-s\right)^{\alpha_i-1} f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(\left(s\right)\right)\end{array}\right)ds.
\end{aligned}
$$

Soit $\left(x_1,...,x_n\right),\left(y_1,...,y_n\right)\in X^n$ alors, pour tout $t\in J$, et pour tout $i=1,...,n$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\mid T_i\left(x_1,...,x_n\right)-T_i\left(y_1,...,y_n\right)\mid\leqslant\frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)|\Gamma(m-p_i)-\Gamma(m-\gamma_i)|}t^{m-1}\\
&\times\left(\begin{array}{c}
\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i+1)}\max_{s\in J}\mid f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(s\right)\end{array}\right)-f_i\left(\begin{array}{c} s,y_1\left(s\right),...,y_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}y_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}y_n\left(s\right)\end{array}\right)\mid\\
+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-\gamma_i+1)}\max_{s\in J}\mid f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(s\right)\end{array}\right)-f_i\left(\begin{array}{c} s,y_1\left(s\right),...,y_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}y_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}y_n\left(s\right)\end{array}\right)\mid
\end{array}\right)\\
&+\frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\max_{s\in J}\mid f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}x_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}x_n\left(s\right)\end{array}\right)-f_i\left(\begin{array}{c} s,x_1\left(s\right),...,x_n\left(s\right)\\ D^{\delta_1}y_1\left(s\right),...,D^{\delta_n}y_n\left(s\right)\end{array}\right)\mid
\end{aligned}
$$

utilisant l'hypothèse $\left(H_2\right)$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\mid T_i\left(x_1,...,x_n\right)-T_i\left(y_1,...,y_n\right)\mid\\
&\leq\frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)|\Gamma(m-p_i)-\Gamma(m-\gamma_i)|}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-\gamma_i+1)}\right)t^{m-1}\\
&\times\sum_{k=1}^n\left(U_k^i+\frac{U_{n+k}^i}{\Gamma(m-\delta_k)}\right)\max\left(\begin{array}{c}\mid x_1-y_1\mid,...,\mid x_n-y_n\mid\\ \mid D^{m-1}\left(x_1-y_1\right)\mid,...,\mid D^{m-1}\left(x_n-y_n\right)\mid\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(U_k^i+\frac{U_{n+k}^i}{\Gamma(m-\delta_k)}\right)\max\begin{pmatrix} \mid x_1-y_1\mid,...,\mid x_n-y_n\mid \\ \mid D^{m-1}(x_1-y_1)\mid,...,\mid D^{m-1}(x_n-y_n)\mid \end{pmatrix}$$

par conséquent :

$$\parallel T_i(x_1,...,x_n)-T_i(y_1,...,y_n)\parallel_\infty\leq \gamma_1^i\sum_i \parallel (x_1-y_1,...,x_n-y_n)\parallel_{X^n} \tag{2.12}$$

d'autre part nous pouvons montrer que :

$$\parallel D^{m-1}(T_i(x_1,...,x_n)-T_i(y_1,...,y_n))\parallel_\infty\leq \gamma_2^i\sum_i \parallel (x_1-y_1,...,x_n-y_n)\parallel_{X^n} \tag{2.13}$$

par combinaisons de(2.12) et(2.13) nous prouvons :

$$\parallel T_i(x_1,...,x_n)-T_i(y_1,...,y_n)\parallel_{X^n}\leq \max\left(\gamma_1^i\sum_i,\gamma_2^i\sum_i\right)\parallel (x_1-y_1,...,x_n-y_n)\parallel_{X^n} \tag{2.14}$$

cette inégalité implique que :

$$\parallel T(x_1,...,x_n)-T(y_1,...,y_n)\parallel_{X^n}\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\gamma_1^i\sum_i,\gamma_2^i\sum_i\right)\parallel (x_1-y_1,...,x_n-y_n)\parallel_{X^n}$$

en utilisant la condition(2.11), nous conclurons que T est un opérateur contractive par conséquent, le théorème du point fixe de Banach garanté que T a un point fixe qui est la solution du système(1) . ■

2.3 Existence au moins d'une solution :

Dans le but d'établir la notion d'éxistence au moins de la solution, nous considèrons le théorème suivant. Ce résultat d'éxistence est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 2.3.1 *les conditions* (H_1) *et* (H_3) *sont satisfaites, alors le système admet au moins une solution* $(x_1, ..., x_n)(t)$, $t \in J$.

Preuve. nous définissons l'opérateur $T : X^n \longrightarrow X^n$ par :

$$T(x_1, ..., x_n)(t) := (T_1(x_1, ..., x_n)(t), ..., T_n(x_1, ...x_n)(t)), \ t \in J$$

avec :

$$\begin{aligned} T_i(x_1, ..., x_n)(t) &= a_i + \frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)(\Gamma(m-p_i) - \Gamma(m-\gamma_i))} \\ &\times \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i - p_i)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_i - p_i - 1} \\ \times f_i \left(\begin{array}{c} s, x_1(s), ..., x_n(s) \\ D^{\delta_1} x_1(s), ..., D^{\delta_n} x_n(s) \end{array} \right) ds \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha_i - \gamma_i)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha_i - \gamma_i - 1} \\ \times f_i \left(\begin{array}{c} s, x_1(s), ..., x_n(s) \\ D^{\delta_1} x_1(s), ..., D^{\delta_n} x_n(s) \end{array} \right) ds \end{array} \right) t^{m-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i \left(\begin{array}{c} s, x_1(s), ..., x_n(s) \\ D^{\delta_1} x_1(s), ..., D^{\delta_n} x_n(s) \end{array} \right) ds. \end{aligned}$$

La continuité des fonctions $(f_i)_{i=1,...,n}$, implique que T est continue sur X^n (Hypothèse (H_1))

.

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur T est complètement continu.

Etape (A) : D'abord, nous montrons que l'opérateur T envoie tout ensemble borné dans X^n en un ensemble uniformément borné dans X^n :

Soit $R > 0$, et $(x_1, ..., x_n) \in B_R := \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : \| (x_1, ..., x_n) \|_{X^n} \leq R\}$,et pour tout $t \in J$ nous allons :

$$| T_i (x_1, ..., x_n) | \leq | a_i | + \frac{\Gamma (m - p_i) \Gamma (m - \gamma_i)}{\Gamma (m) | \Gamma (m - p_i) - \Gamma (m - \gamma_i) |} \times t^{m-1}$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma (\alpha_i - p_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma (\alpha_i - \gamma_i + 1)} \right) \max_{s \in J} | f_i \begin{pmatrix} s, x_1 (s), ..., x_n (s), \\ D^{\delta_1} x_1 (s), ..., D^{\delta_n} x_n (s) \end{pmatrix} |$$

$$+ \frac{t^{\alpha_i}}{\Gamma (\alpha_i + 1)} \max_{s \in J} | f_i \begin{pmatrix} s, x_1 (s), ..., x_n (s), \\ D^{\delta_1} x_1 (s), ..., D^{\delta_n} x_n (s) \end{pmatrix} |, i = 1, ..., n$$

en tenant compte de (H_3), nous pouvons écrire :

$$\| T_i (x_1, ..., x_n) \|_\infty \leq | a_i | + \frac{\Gamma (m - p_i) \Gamma (m - \delta_i) M_i}{\Gamma (m) | \Gamma (m - p_i) - \Gamma (m - \gamma_i) |}$$
$$\times \left(\frac{1}{\Gamma (\alpha_i - p_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma (\alpha_i - \gamma_i + 1)} \right) + \frac{M_i}{\Gamma (\alpha_i + 1)}$$

Donc :

$$\| T_i (x_1, ..., x_n) \|_\infty \leq | a_i | + \gamma_1^i M_i \quad , i = 1, ..., n. \tag{2.15}$$

Par simularité, nous pouvons obtenir :

$$\| D^{m-1} T_i (x_1, ..., x_n) \|_\infty \leq \gamma_2^i M_i \quad , i = 1, ..., n \tag{2.16}$$

Par utilisation de (2.15) et (2.16) , nous déduirons que :

$$\| T (x_1, ..., x_n) \|_{X^n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(| a_i | + \gamma_1^i M_i, \gamma_2^i M_i \right) < \infty \tag{2.17}$$

D'ou T est unifomément borné.

Etape (B) : nous allons établir l'équicontinuité de B_R :

soient $(x_1, ..., x_n) \in B_R$ et $t_1, t_2 \in J$; $t_1 < t_2$, nous avons :

$$| T_i (x_1, ..., x_n) (t_2) - T_i (x_1, ..., x_n) (t_1) | \leq \frac{\Gamma (m - p_i) \Gamma (m - \gamma_i)}{\Gamma (m) | \Gamma (m - p_i) - \Gamma (m - \gamma_i) |} M_i \left(t_2^{m-1} - t_1^{m-1} \right) \tag{2.18}$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma (\alpha_i - p_i + 1)} + \frac{1}{\Gamma (\alpha_i - \gamma_i + 1)} \right) + M_i \left(\frac{(t_2^{\alpha_i} - t_1^{\alpha_i})}{\Gamma (\alpha_i + 1)} + \frac{2 (t_2 - t_1)^{\alpha_i}}{\Gamma (\alpha_i + 1)} \right)$$

D'autre part, nous avons :

$$| D^{m-1} (T_i (x_1, ..., x_n) (t_2) - T_i (x_1, ..., x_n) (t_1)) | \leq M_i \left(\frac{\left(t_2^{\alpha_i - m+1} - t_1^{\alpha_i - m+1} \right)}{\Gamma (\alpha_i - m + 2)} + \frac{2 (t_2 - t_1)^{\alpha_i - m+1}}{\Gamma (\alpha_i - m + 2)} \right). \tag{2.19}$$

Grace à(2.18)et(2.19), nous peuvons affirmer que :

$\| T (x_1, ..., x_n) (t_2) - T (x_1, ..., x_n) (t_1) \|_{X^n} \longrightarrow 0$ quand $t_2 \longrightarrow t_1$.

avec (A) et (B) et le théorème d'Ascoli-Arzila, nous conclurons que T est complètement continu.

Etape (C) : nous montrons que l'ensemble définie par :

$$\Omega := \{ (x_1, ..., x_n) \in X^n : (x_1, ..., x_n) = \lambda T (x_1, ..., x_n) , \ 0 < \lambda < 1 \} . \tag{2.20}$$

est borné.

soit $(x_1, ..., x_n) \in \Omega$, alors nous avons :

$$(x_1, ..., x_n) = \lambda T (x_1, ..., x_n) \ , \quad 0 < \lambda < 1 \tag{2.21}$$

ainsi, pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$x_i(t) = \lambda T_i(x_1, ..., x_n)(t) \tag{2.22}$$

grace à (H_3) et par utilsation de(2.17), nous déduirons que :

$$\| (x_1, ..., x_n) \|_{X^n} \leq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} \left(| a_i | + \gamma_1^i M_i \gamma_2^i M_i \right) < \infty \tag{2.23}$$

Ceci montre que l'ensemble Ω est borné. Grace à (A) et (B) et (C) et d'aprés le théorème de point fixe de Schaefer, nous affirmons que T admet au moin un point fixe qui est la solution de notre système. ■

Chapitre 3

La stabilité d'Ulam-Hyers et la stabilité d'Ulam-Hyers généralisée

3.1 Introduction :

Au cours des dernières années. la stabilité au sens d'Ulam-Hyers a été abordée par certain nombre de mathématiciens et l'étude de ce domaine a été développée pour devenir l'un des sujets centraux dans le domain d'analyse mathématique [10] ; [11]. La stabilité d'Ulam-Hyers est l'un des problèmes importants de la théorie des équations différentielles et de leurs applications [23].

Dans cette section, nous avons étudié la notion du stabilité d'Ulam-Hyers et stabilité d'Ulam-Hyers généralisée pour le système fractionnaire (1) .

soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ avec :

$$x_i(t) = a_i + \frac{\Gamma(m-p_i)\Gamma(m-\gamma_i)}{\Gamma(m)\left[\Gamma(m-p_i)-\Gamma(m-\gamma_i)\right]} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i-p_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-p_i-1} G_i(s)\,ds \\ -\frac{1}{\Gamma(\alpha_i-\gamma_i)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha_i-\gamma_i-1} G_i(s)\,ds \end{pmatrix} \times t^{m-1}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} G_i(s)\,ds.$$

solution de système(1) que nous avons trouver dans chapitre 2.

3.2 La stabilité d'Ulam-Hyers généralisée :

Définition 3.2.1 *[22]; [26] Le système (1)est stable au sens d'Ulam-Hyers, s'il existe une constante $A_{f_i} > 0$, tel que pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) > 0$ et pour tout solution $(y_1, ..., y_n) \in X^n$ de :*

$$\begin{cases} \mid D^{\alpha_i} y_i(t) - f_i\left(t, y_1(t), ..., y_n(t), D^{\delta_1} y_1(t), ..., D^{\delta_n} y_n(t)\right) \mid \leq \varepsilon_i \quad , t \in J \\ y_i(0) = a_i \qquad y_i^{(j)}(0) = 0 \qquad , \ i = 1, ..., n \ \ , \ j = 1, ..., m-2 \ , \\ D^{\gamma_i} y_i(0) + D^{\gamma} y_i(1) = D^{p_i} y_i(0) + D^{p_i} y_i(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il existe $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ la solution de(1), avec

$$\| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \leq A_{f_i} \varepsilon \ , \ \varepsilon > 0. \tag{3.2}$$

Définition 3.2.2 *[22]; [26] Le système(1)est généralisée stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe $\Psi_{f_i} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \Psi f_i(0) = 0$ tel que :*

pour tout $\varepsilon > 0$, et pour chaque solution $(y_1, ..., y_n) \in X^n$du système (3.1), il existe une solution$(x_1, ..., x_n) \in X^n$ de(1), avec :

$$\| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \leq \Psi f_i(\varepsilon) \ , \ \varepsilon > 0. \tag{3.3}$$

Théorème 3.2.1 *Supposons que l'hypothèse(H_3), et l'inégalité (2.11) et les inégalitées suivantes :*

$$\| D^{\alpha_i} x_i \|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\mid a_i \mid + \gamma_1^i M_i \gamma_2^i M_i \right) \tag{3.4}$$

$$\Sigma_i < 0, \ i = 1, ..., n \tag{3.5}$$

sont satisfaits. Alors, le système(1) est généralisé stable au sens Ulam-Hyers en X.

Preuve. supposons que(3.4)est valide, sous l'inégalité(2.11) , le système(1) a une solution $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ utilisant(H_3), nous obtenons :

$$\| (x_1, ..., x_n) \|_{X^n} \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(| a_i | + \gamma_1^i M_i, \gamma_2^i M_i \right) \tag{3.6}$$

combine(3.4)avec(3.6)rendant que :

$$\| (x_1, ..., x_n) \|_{X^n} \leq \| D^{\alpha_i} x_i \|_{\infty}, \ i = 1, ..., n. \tag{3.7}$$

Maintenant, soit $(y_1, ..., y_n) \in X^n$ solution de (3.1) utilisant(3.7), nous trouvons :

$$\| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \leq \| D^{\alpha_i} (x_i - y_i) \|_{\infty}$$

$$\leq | \left(D^{\alpha_i} x_i - f_i \left(t, x_1(t), ..., x_n(t), D^{\delta_1} x_1(t), ..., D^{\delta_n} x_n(t) \right) \right)$$

$$- \left(D^{\alpha_i} y_i - f_i \left(t, y_1(t), ..., y_n(t), D^{\delta_1} y_1(t), ..., D^{\delta_n} y_n(t) \right) \right) |$$

$$+ f_i \left(t, x_1(t), ..., x_n(t), D^{\delta_1} x_1(t), ..., D^{\delta_n} x_n(t) \right) - f_i \left(t, y_1(t), ..., y_n(t), D^{\delta_n} y_1(t), ..., D^{\delta_n} y_n(t) \right) | .$$

De (1)et(3.1)et l'hypothèse (H_2) du théorème (2.2.1) nous obtenons :

$$\| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \leq \max \varepsilon_i + \Sigma_i \| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \tag{3.8}$$

Ainsi :

$$\| (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n) \|_{X^n} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \Sigma_i} := A_{f_i} \varepsilon, \qquad \varepsilon = \max_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i \tag{3.9}$$

nous remarquons d'aprés(3.5) que $A_{f_i} > 0$. Par conséquent le système (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers, prenant $\Psi_{f_i}(\varepsilon) = Af_i\varepsilon$, nous avons que le système(1)est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée. Ceci complète la preuve de ce théorème. ■

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, nous présentons qu'elleques exemples pour illustrer des résultats principales :

Exemple 4.0.1 *: considérons le système fractionnaire suivant :*

$$
\begin{cases}
D^{\frac{9}{4}}x_1(t)=\frac{|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)+D^{\frac{5}{4}}x_1(t)+D^{\frac{4}{3}}x_2(t)+D^{\frac{3}{2}}x_3(t)+D^{\frac{5}{3}}x_4(t)|}{9\pi^3\left(1+|x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)+D^{\frac{5}{4}}x_1(t)+D^{\frac{4}{3}}x_2(t)+D^{\frac{3}{2}}x_3(t)+D^{\frac{5}{3}}x_4(t)|\right)}\\
D^{\frac{7}{3}}x_2(t)=\frac{1}{24\pi^3e^{2t+1}}\left(\begin{array}{l} |\, x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)\,|+|\,\sin\left(D^{\frac{5}{4}}x_1(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{4}{3}}x_2(t)\right)\\ +\sin\left(D^{\frac{3}{2}}\sin x_3(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{5}{3}}x_4(t)\right)\end{array}\right)\\
D^{\frac{5}{2}}x_3(t)=\frac{1}{16\pi^3e}\left(\begin{array}{l} \frac{\sin x_1(t)+\sin x_2(t)+\sin x_3(t)+\sin x_4(t)}{e^{t+1}}+\cos\left(D^{\frac{5}{4}}x_1(t)\right)+\cos D^{\frac{4}{3}}x_2(t)\\ +\sin\left(D^{\frac{3}{2}}x_3(t)\right)+\sin\left(D^{\frac{5}{4}}x_3(t)\right)\,|\end{array}\right)\\
D^{\frac{2}{3}}x_4(t)=\frac{\left(\cos x_1(t)+\sin x_2(t)+\sin x_3(t)-\sin x_4(t)+\cos\left(D^{\frac{5}{4}}x_1(t)\right)+\cos\left(D^{\frac{4}{3}}x_2(t)-\sin\left(D^{\frac{3}{2}}x_3(t)\right)+\cos\left(D^{\frac{5}{4}}x_4(t)\right)\right)\right)}{32\pi^2\left(e+\cos x_1(t)+\sin x_2(t)+\sin x_3(t)-\sin x_4(t)+\cos\left(D^{\frac{5}{4}}x_1(t)\right)+\cos\left(D^{\frac{4}{3}}x_2(t)\right)-\sin\left(D^{\frac{3}{2}}x_3(t)\right)+\cos\left(D^{\frac{5}{3}}x_4(t)\right)\right)}\\
t\in(0,1)\,,\quad |\,x_1(0)\,|=\frac{1}{4},\quad |\,x_2(0)\,|=\frac{\pi}{24},\quad |\,x_3(0)\,|=\frac{3e}{26},\quad |\,x_4(0)\,|=\frac{\pi}{8}\\
|\,x_1'(0)\,|=|\,x_2'(0)\,|=|\,x_3'(0)\,|=|\,x_4'(0)\,|=0\\
D^{\frac{1}{2}}x_1(0)+D^{\frac{1}{2}}x_1(1)=D^{\frac{1}{4}}x_1(0)+D^{\frac{1}{4}}x_1(1)=0\\
D^{\frac{2}{3}}x_2(0)+D^{\frac{2}{3}}x_2(1)=D^{\frac{1}{5}}x_3(0)+D^{\frac{1}{5}}x_3(1)=0\\
D^{\frac{5}{4}}x_4(0)+D^{\frac{5}{4}}x_4(1)=D^{\frac{1}{3}}x_4(0)+D^{\frac{1}{3}}x_4(1)=0
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

Pour cette exemple, nous avons $n=4,\ \ m=3,\ \ J=[0,1]$

$\alpha_1=\frac{9}{4},\ \ \alpha_2=\frac{7}{3},\ \ \alpha_3=\frac{5}{2},\ \ \alpha_4=\frac{8}{3},\ \ \delta_1=\frac{5}{4},\ \ \ \delta_2=\frac{4}{3},\ \ \delta_3=\frac{3}{2},\ \ \delta_4=\frac{5}{3}$

$\gamma_1=\frac{1}{2},\ \ \gamma_2=\frac{2}{3},\ \ \gamma_3=\frac{3}{4},\ \ \gamma_4=\frac{4}{5},\ \ p_1=\frac{1}{4},\ \ p_2=\frac{1}{2},\ \ p_3=\frac{1}{5},\ \ p_4=\frac{1}{3}$

D'autre part, nous avons :

$f_1(t,u_1,...,u_8)=\frac{|\sum_{i=1}^{8}u_i|}{9\pi^3\left(1+|\sum_{i=1}^{8}u_i|\right)}$

$f_2(t,u_1,...,u_8)=\frac{1}{24\pi^3e^{2t+1}}\left(|\sum_{i=1}^{4}u_i\,|+|\,\sum_{i=5}^{8}\sin u_i\,|\right)$

$f_3(t,u_1,...,u_8)=\frac{1}{16\pi^3e}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}\sin u_i}{e^{t+1}}+\sum_{i=5}^{6}\cos u_i-\sum_{i=7}^{8}\sin u_i\right)$

$f_4(t,u_1,...,u_8)=\frac{(\cos u_1+\sin u_2+\sin u_3-\sin u_4+\cos u_5+\cos u_6-\sin u_7+\cos u_8)}{32\pi^2(e+\cos u_1+\sin u_2+\sin u_3-\sin u_4+\cos u_5+\cos u_6-\sin u_7+\cos u_8)}$

Il est clair que, pour tout $t\in[0,1]$ et $(u_1,...,u_8)\,,(v_1,...,v_8)\in\mathbb{R}^8$

$|\,f_1(t,u_1,...,u_8)-f_1(v_1,...,v_8)\,|\leq\frac{1}{9\pi^3}\sum_{i=1}^{8}|\,u_i-v_i\,|$

$|\,f_2(t,u_1,...,u_8)-f_2(v_1,...,v_8)\,|\leq\frac{1}{24\pi^3e}\sum_{i=1}^{8}|\,u_i-v_i\,|$

$|\,f_2(t,u_1,...,u_8)-f_2(v_1,...,v_8)\,|\leq\frac{1}{16\pi^3e^2}\sum_{i=1}^{4}|\,u_i-v_i\,|+\frac{1}{16\pi^3e}\sum_{i=1}^{8}|\,x_i-y_i\,|$

$| f_2(t, u_1, ..., u_8) - f_2(v_1, ..., v_8) | \leq \frac{1}{32\pi^2} \sum_{i=1}^{8} | u_i - v_i |$

Nous peuvons prendre :

$\mu_k^1 = \frac{1}{9\pi^3}, \quad \mu_k^2 = \frac{1}{24\pi^3 e}, \quad \mu_k^4 = \frac{1}{32\pi^2}, \quad k = 1, ..., 8,$

$\mu_k^3 = \frac{1}{16\pi^3 e^2}, \quad k = 1, ..., 4, \quad \mu_k^3 = \frac{1}{16\pi^3 e}, \quad k = 5, ..., 8$

On vient que :

$\Sigma_1 = 0,0294, \quad ,\Sigma_2 = 0,0041, \quad \Sigma_3 = 0,0042, \quad \Sigma_4 = 0,0259,$

On a auusi :

$\gamma_1^1 = 4,6886, \ \gamma_2^1 = 9,6958, \ \gamma_1^2 = 7,4605, \ \gamma_2^2 = 15,3208,$

$\gamma_1^3 = 2,0386, \ \gamma_2^3 = 4,6037, \ \gamma_1^4 = 2,1494, \ \gamma_2^4 = 4,9081,$

Ainsi :

$\gamma_1^1\Sigma_1 = 0,1378, \ \gamma_2^1\Sigma_1 = 0,2851, \ \gamma_1^2\Sigma_2 = 0,0306, \ \gamma_2^2\Sigma_2 = 0,0628,$

$\gamma_1^3\Sigma_3 = 0,0086, \ \gamma_2^3\Sigma_3 = 0,0193 \quad \gamma_1^4\Sigma_4 = 0,0557 \quad \gamma_2^4\Sigma_4 = 0,1271.$

La condition(2.11)est satisfait, par utilisation du théorème(2.2.1) , nous déduirons que le système(4.1) a une unique solution en J.

Exemple 4.0.2 *: considérons le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\frac{7}{2}} x_1(t) = \frac{\cos\left(x_1(t)+D^{\frac{9}{4}}x_1(t)\right)+\left|\sin\left(x_2(t)+D^{\frac{5}{2}}x_2(t)\right)\right|}{e^t+\left|\sin\left(x_3(t)+D^{\frac{11}{4}}x_3(t)\right)\right|} \\ D^{\frac{11}{3}} x_2(t) = \frac{|\cos(x_1(t)x_3(t))|+\left|\sin\left(x_2(t)D^{\frac{9}{4}}x_1(t)\right)\right|}{e^{t(t^2+5)}} + \sin\left(D^{\frac{5}{2}}x_2(t) + D^{\frac{11}{4}}x_3(t)\right) \\ D^{\frac{23}{6}} x_3(t) = 4\pi\frac{\left|\cos\left(x_1(t)+x_3(t)+2D^{\frac{5}{2}}x_2(t)\right)\right|+\left|\sin\left(D^{\frac{9}{4}}x_1(t)+D^{\frac{11}{4}}x_3(t)\right)\right|}{3e+|\cos(x_1(t)+x_3(t))|} \\ t \in (0,1), \quad x_1(0) = \frac{\pi}{3}, \quad x_2(0) = \frac{\pi}{4}, \quad x_3(0) = \frac{\pi}{2} \\ D^{\frac{1}{10}}x_1(0) + D^{\frac{1}{10}}x_1(1) = D^{\frac{1}{5}}x_1(1) + D^{\frac{1}{5}}x_1(0) = 0 \\ D^{\frac{3}{10}}x_2(0) + D^{\frac{3}{10}}x_2(1) = D^{\frac{2}{5}}x_2(1) + D^{\frac{2}{5}}x_2(0) = 0 \\ D^{\frac{1}{2}}x_3(0) + D^{\frac{1}{2}}x_3(1) = D^{\frac{3}{5}}x_3(1) + D^{\frac{3}{5}}x_3(0) = 0 \\ x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = x_1''(0) = x_2''(0) = x_3''(0) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour cet exemple : on a $n = 3,\ \ m = 4,\ \ J = [0,1]$

$\alpha_1 = \frac{7}{2},\ \ \alpha_2 = \frac{11}{3},\ \ \alpha_3 = \frac{23}{6},\ \ \ \delta_1 = \frac{9}{4},\ \ \ \delta_2 = \frac{5}{2},\ \ \delta_3 = \frac{11}{4},$

$\gamma_1 = \frac{1}{10},\ \ \gamma_2 = \frac{3}{10},\ \ \gamma_3 = \frac{1}{2},\ \ \ \ p_1 = \frac{1}{5},\ \ p_2 = \frac{2}{5},\ \ p_3 = \frac{3}{5},$

$f_1\left(t, y_1, ..., y_6\right) = \frac{\cos x_1(t) + D^{\frac{9}{4}} x_1(t) + \left|\sin\left(x_2(t) + D^{\frac{5}{2}} x_2(t)\right)\right|}{e^t + \left|\sin\left(x_3(t) + D^{\frac{11}{4}} x_3(t)\right)\right.}$

$f_2\left(t, y_1, ..., y_6\right) = \frac{\left|\cos(x_1(t) x_3(t))\right| + \left|\sin\left(x_2(t) D^{\frac{9}{4}} x_1(t)\right)\right|}{e^t(t^2+5) + \sin\left(D^{\frac{5}{2}} x_2(t) + D^{\frac{11}{4}}\right)}$

et

$f_3\left(t, y_1, ..., y_6\right) = 4\pi \frac{\left|\cos\left(x_1(t) + x_3(t) + 2D^{\frac{5}{2}} x_2(t)\right)\right| + \left|\sin\left(D^{\frac{9}{4}} x_1(t) + D^{\frac{11}{4}} x_3(t)\right)\right|}{3e + \left|\cos(x_1(t) + x_3(t))\right|}$

Pour $t \in [0,1]$ et $i = 1,2,3,$ il est clair que f_i sont des fonctions continues bornées, utilisant le théorème $(2.3.1)$, le système(4.2) a au moin une solution en J.

4.1 Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous apprécions que les résultats présentés participeront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires. En premier lieu, on présente quelques définitions et lemmes de base utiles pour une bonne compréhension de ce mémoire. Aprés avoir rappelé quelques fonctions spéciales en calcul fractionnaire, et quelques dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo. Ensuit, on a établit un résultat d'éxistence et d'unicité et d'éxistence au moins de la solution qui sont basée sur deux théorème principales : théorème de point fixe de Banach pour l'éxistence et l'unicité et théorème de point fixe de Schaefer pour l'étude d'éxistence au moins de la solution d'un système non linéaire fractionnaire. En fin, dans le troisième chapitre on étudie la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et stabilité généralisée au sens d'Ulam-Hyers.

Bibliographie

[1] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed, H.A.A. El-Saka, G.A. Ashry, On Applications of Ulam-Hyers Stability in Biology and Economics.

[2] S. Abbas, M. Benchohra, J.R. Graef and J. Henderson, Implicit fractional differential and integral equations : existence and stability, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018.

[3] A. Blumen, J. Klafter, R. Hilfer and R. Metzler, Strange kinetics, Chemical Physics, 284(1) (2002), 104-301.

[4] Z. Dahmani and A. Taïeb, Solvability of a coupled system of fractional differential equations with periodic and antiperiodic boundary conditions, PAML Letters., (5) (2015), 29-36.

[5] Z. Dahmani and A. Taïeb, New existence and uniqueness results for high dimensional fractional differential systems, Facta Nis Ser. Math. Inform., 30 (3) (2015), 281-293.

[6] Z. Dahmani and A. Taïeb, A coupled system of fractional differential equations involing two fractional orders, ROMAI Journal, 11 (2) (2015), 141-177.

[7] R. Gorenflflo and F. Mainardi, Fractional calculus : Integral and differential equations of fractional order in fractals and fractional calculus in continuum mechanics Udine, 1996,CISM Courses Lectures 378, Springer, Vienna, (1997), 223-276.

[8] S. Harikrishnan, R.W. Ibrahim and K. Kanagarajan, On the generalized Ulam-Hyers-Rassias stability for coupled fractional differential equations, Communications in Optimization Theory, 2018 (2018), 1-13.

[9] R. Hilfer, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.

[10] D.H. Hyers, On the Stability of the Linear Functional Equation, Proc. Nat. Acad. Sci.,U.S.A., 27 (1941), 222-224.

[11] R.W. Ibrahim, Ulam stability of boundary value problem, Kragujevac Journal Of Mathematics, 37 (2013), 287–297.

[12] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[13] F. Mainardi, Fractional calculus, Some basic problems in continuum and statistical mechanics, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Vienna, 1997.

[14] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, New York, 1993.

[15] E.C. de Oliveira and J.V.C. Sousa, Ulam–Hyers–Rassias stability for a class of fractional integro-differential equations,
Results in Mathematics, 73 (3) (2018).

[16] A. Taïeb and Z. Dahmani, A coupled system of nonlinear differential equations involving m nonlinear terms, Georjian Math. Journal. 23 (3) (2016), 447–458.

[17] A. Taïeb and Z. Dahmani, The High Order Lane-Emden Fractional Differential System : Existence, Uniqueness and Ulam stabilities, Kragujevac Journal of Mathematics. 40 (2) (2016), 238-259.

[18] A. Taïeb and Z. Dahmani, On Singular Fractional Differential Systems and Ulam-Hyers Stabilities, International Journal of

Mathematics and Mathematical Sciences. 14 (3) (2016), 262-282.

[19] A. Taïeb and Z. Dahmani, Fractional system of nonlinear integro-differential equations,Journal of Fractional Calculus and Applications, 10 (1) (2019), 55-67.

[20] A. Taïeb and Z. Dahmani, Ulam-Hyers-Rassias Stability of Fractional Lane-Emden Equations, ROMAI Journal, 15 (1) (2019), 133-153.

[21] A. Taïeb, Several results for high dimensional singular fractional systems involving n 2-Caputo derivatives, Malaya Journal of Matematik. 6 (3) (2018), 569-581.

[22] A. Taïeb, Existence of solutions and the Ulam stability for a class of singular nonlinea fractional integro-differential equations,
Communications in Optimization Theory, 2019(2019), 1-22.

[23] A. Taïeb, Generalized Ulam-Hyers stability of fractional system of nonlinear integro-differential equations, Int. J. Open Problems Compt. Math. , 12 (1) (2019), 1-26.

[24] A. Taïeb, Stability of singular fractional systems of nonlinear integro-differential equations, Lobachevskii Journal of Mathematics,
40 (2) (2019), 219-229.

[25] A. Taïeb, Ulam stability for a singular fractionnal 2D nonlinear system, Konurlap Journal of Mathematics, 7 (2) (2019), 300-311.

[26] A. Taïeb, On singular systems of nonlinear equations involving 3n-Caputo derivatives, Acta Et Commentationes Universitatis
Tartuensis De Mathematica, 23 (2) (2019), 179-192.

[27] S.M. Ulam, Problems in Modern Mathematics, Rend. Chap.VI,Wiley, New York, 1960.

[28] J. Wang, L. Lv and Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative,

Electronic J Quali TH Diff Equat. (63) (2011), 1-10.

[29] G.M. Zaslavsky, Chaos, Fractional Kinetics, and Anomalous Transport, Physics Reports, 371 (2002), 461-580.