MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

GHERBI Ilham

Problème aux Limites pour des Equations Différentielles Fractionnaires Conformable

Soutenue: 22Juin 2022

Devant le jury composé de :

Président :	*BENDAHMANE Hafida*	*MCB*	*U.Mostaganem*
Examinateur :	*MOHAMMEDI Mustapha*	*MCB*	*U.Mostaganem*
Encadreur :	*KAID Mohammed*	*MCB*	*U.Mostaganem*

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de mon mémoire, monsieur *Mohammed KAID*, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche.

Je remercie également madame BENDAHMANE Hafida , ensiegnante à l'université UMAB, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur MOHAMMEDI Mustapha**,** ensiegnant à l'université UMAB pour d'avoir eu l'amabilité d'examiner et accepté de participer au jury de ce mémoire.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin. Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

0.1 Résumé :

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence et l'unicité des solutions du problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaire, ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe en particulier on a utilisé le théorème de points fixe de Banach.

0.1.1 Mots clés :

EDFs, Points fixe, existence de solution.

Abstract :

In this thesis, we present some results of existence and uniqueness of the solutions of the boundary value problem concerning the fractional differential equations, these results were obtained by the use of the fixed point theorem in particular we used the point theorem Banach fixed.

Key words :

EDFs, Fixed points, existence of solution.

0.2 Introduction :

Le calcul fractionnaire a été développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante due principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. (voir [1]-[14]).

M. Kaid, M. Belhamiti, Z. Dahmani et A.T. Abdulrahman, dans [15], est discuté l'existence de solutions du system aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta_k}(g_k(t)D^{\alpha_k} + h_k(t))u(t) = f(t, u_1(t), u_2(t), D^{\tau_k}u_1(t), D^{\delta_k}u_2(t)), \quad t \in J = [0,1], \\ x_k(0) = -x_k(1), \quad D^{\alpha}x_k 0) = -D^{\alpha}x_k(1). \end{cases}$$

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Le premier chapitre intitulé “Préliminaires”, contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude.

Dans le **chapitre deux**, nous utilisons le type Caputo de la dérivée fractionnaire pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaire suivante :

$${}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(x, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}f(s, x(s))ds, \quad 0 < t < b,$$

avec conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x(0) - x_0 = \sum_{i=1}^{m} x(t_i), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \\ {}^{C}D^{\delta}x(b) - \sum_{k=1}^{n} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k) = 0, \ 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}$ et ${}^{C}D^{\delta}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α et δ tels que $0 < \alpha \leq 2$. ainsi que $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donné. En plus, β est un nombre positif et $0 < t_1 < t_2 < ... \leq b$. voir ([8], [11] et [12]).

Dans le **troisième chapitre,** on étude l'existence analytique de la solution de problème suivant :

$$\begin{cases} D^{2\alpha}x(t) + 2\gamma D^{\alpha}x(t) + \xi x(t) = f(t), \quad t \in [0, +\infty[, \\ x(0) - x_0 = 0, \quad D^{\alpha}x(0) - x_{\alpha} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

où $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\mathcal{D}^{\alpha}$ est la dérivée conformable fractionnaire suivante :

$$\mathcal{D}^{a}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

Dans **dernièr chapitre**,on illustre les résultats obtenus,nottament dans le chapitre 2 par un exemple.

0.3 Notations :

- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

- Ω : Domaine borné dans $\mathbb{R}$

- $\Gamma(.)$: La fonction Gamma.
- $\mathcal{D}_a^\alpha(f)(t)$: La dérivée conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a.

- ${}^c\mathcal{D}^\alpha x(t)$:La dérivée fractionnaire de caputo f d'ordre α.
- ${}^b\mathcal{D}_\alpha(f)(t)$: La dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b.

- $\mathcal{I}_a^\alpha(f)(t)$: L'intégrale conformable fractionnaire gauche de f d'ordre α à partir de a.

- ${}^bI_\alpha(f)(t)$: La dérivée conformable fractionnaire droit de f d'ordre α se terminant en b.

- ${}^{RL}I^\alpha$:L'intégrale de Rimann-Louville.
- $\mathcal{F}^\alpha(s) = \mathcal{L}^\alpha\{f(t)\}(s)$:La transfomation de Laplace conformable fractionnaire de $f(t)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cette mémoire telles que, la fonction spéciale comme fonction Gamma, intégration fractionnaire au sens de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sens de Hadamard. On conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

Définition 1.1 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continus sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables ie :*

$$.f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]),$$

telle que

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continus sur $[a,b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, c'est -à-dire :*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \ \mathbb{C} \ et \ f^{\ (n-1)}(x) \in AC[a,b] \right\}.$$

En prticulier on a $AC^n[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.3 *L'espace noté $AC^n_\delta[a,b]$défini par :*

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ f : [a,b] \rightarrow \mathbb{C} \quad et \ \delta^{n-1} f(x) \in AC[a,b], \delta = xd/dx \right\},$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale1.

1.1 Fonction spéciale pour la dérivation conformable fractionnaire

Dans cette partie,nous présentons la fonction Gamma.Cette fonction joune un rôle trés important dans la théorie du calcule conformable fractionnaire et ses applications

La fonction Gamma

l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Eluler** $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la foctorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties positives).

Définition 1.4 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$.La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-t} dt,$$

avec

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(0^+) = +\infty,$$

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante our $0 < z < 1$.

Quelques propriétés de la fonction Gamma

Définition 1.5 *1. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad Re(z) < 0,$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

en effet $\Gamma(1) = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

2.

$$\Gamma(z) = (z-1).\Gamma(z-1) : z > 0.$$

3.

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} : z > 0, z \neq -1, -2, -3, ...$$

4.
$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} : n \in \mathbb{N}.$$

5.
$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)...5(3)(1).$$

6.
$$\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = \frac{(-2)^n}{(2^n-1)!!}\sqrt{\pi} : n \in \mathbb{N}.$$

7.
$$\Gamma(k) = \pm\infty : k = 0, -1, -2, ...$$

1.2 Dérivées et intégrales conformable fractionnaires :

Définition 1.6 *Etant donné quand fonction $f : [0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1]$. Alors la dérivée conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :*

$$\mathcal{D}_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

tel que cette limite existe et terminée.

Définition 1.7 *Etant donné une fonction $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1]$. Alors l'ntégrale conformable fractionnaire de f d'ordre α pour tout $t > 0$ est définie par :*

$$\mathcal{I}_\alpha(f)(t) = \int_0^t f(x)x^{\alpha-1}dx; \quad t \geq 0,$$

tel que cette limite existe et terminée.

Lemme 1.1 *Etant donné une fonction continue $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1]$. Alors pour tout $t > 0$ on a :*

$$\mathcal{D}_\alpha[\mathcal{I}_\alpha(f)(t)] = f(t).$$

Lemme 1.2 *Etant donné une fonction différentiable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1]$.Alors pour $t > a$ ona :*

$$\mathcal{I}_\alpha\mathcal{D}_\alpha(f)(t) = f(t) - f(a).$$

1.3 Transformation de Laplace

Définition 1.8 *Soit f une fonction réelle ou complexe de la variable (Temps) $t > 0$, et soit s un paramètre réelle ou complexe, alors la transformée de Laplace de $f(t)$ est :*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(s) &= \mathcal{L}(f(t)) \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt.\end{aligned}$$

Définition 1.9 *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle. Alors le Laplace conformable fractionnaire d'ordre α est défini par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) &= \mathcal{F}_\alpha(s) \\ &= \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)t^{\alpha-1}dt \\ &= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)t^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

Théorème 1.1 *[7]Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle différentiable. Alors :*

$$\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_\alpha(f)(t)\}(s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0).$$

Lemme 1.3 *[7]Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \mathcal{F}(s)$ existe. Alors*

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha\}(s)$$

Lemme 1.4 *[7]On a*

1.

$$\mathcal{L}_\alpha(1)(s) = \frac{1}{s}, \qquad \mathcal{L}_\alpha\{t\}(s) = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} : s > 0.$$

2.

$$\mathcal{L}_\alpha\{t^p\}(s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \frac{\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}}, \quad \mathcal{L}_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right)(s) = \frac{1}{s-1} : s > 0.$$

3.

$$\mathcal{L}_\alpha\left[\sin(b\frac{t^\alpha}{\alpha})\right](s) = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad \mathcal{L}_\alpha\left[\cos(b\frac{t^\alpha}{\alpha})\right](s) = \frac{s}{s^2+b^2} : s > 0.$$

4.
$$\mathcal{L}_\alpha\left[\sinh(b\frac{t^\alpha}{\alpha})\right](s)=\frac{b}{s^2-b^2},\ \mathcal{L}_\alpha\left[\cosh(b\frac{t^\alpha}{\alpha})\right](s)=\frac{s}{s^2-b^2}:s>|b|.$$

Proposition 1.1 *On a*

1.
$$\mathcal{L}_\alpha\{\mu f(t)\pm\lambda g(t)\}(s)=\mu\mathcal{L}_\alpha(s)\pm\lambda\mu\mathcal{G}_\alpha(s).$$

2.
$$\mathcal{L}_\alpha\left(e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right)f(t)=\mathcal{L}\left(f\right)(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}|_{s=s+1}:s>-k.$$

Exemple 1.1 *On a*

1.
$$\mathcal{L}_\alpha(e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\cos(\frac{t^\alpha}{\alpha}))(s)=\frac{s+k}{1+(s+k)^2}:s>0.$$

2.
$$\mathcal{L}_\alpha(e^{-k\frac{t^\alpha}{\alpha}}\sin(\frac{t^\alpha}{\alpha}))(s)=\frac{1}{1+(s+k)^2}:s>0.$$

Proposition 1.2 *Nous avons*

- La transformation de Laplace conformable fractionnaire de l'intégrale conformable fractionnaire :
$$\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{I}_\alpha(f)(t))=\frac{\mathcal{F}_\alpha(s)}{s}.$$
- Les dérivées de la transformée de Laplace conformable fractionnaire satisfont :
$$\mathcal{F}_\alpha^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}_\alpha(\frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n}f(t)).$$
- Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions quelconques, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la convolution de $f(t)$ et $g(t)$ est :
$$\mathcal{L}_\alpha(f*g)(t)=\mathcal{F}_\alpha(s).\mathcal{G}_\alpha(s),\quad 0<\alpha\leq 1.$$
- Si $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ la continuellement première diffèrentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du première ordre de f est :
$$\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_\alpha(f)(t)\}(s)=s\mathcal{F}_\alpha(s)-f(0):0<\alpha\leq 1.\tag{1.1}$$
- Si $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ la continuellement deuxième différentiable, alors la transformée de Laplace conformable fractionnaire de la dérivée conformable fractionnaire séquentielle du deuxième ordre de f est :
$$\mathcal{L}_\alpha\{\mathcal{D}_{2\alpha}(f)(t)\}(s)=s^2\mathcal{F}_\alpha(s)-sf(0)-\mathcal{D}_\alpha(f)(0):0<\alpha\leq\frac{1}{2}.\tag{1.2}$$

1.4 Dérivée-Caputo

Définition 1.10 *Soit $f \in C^n([a,b]), n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre $\alpha \geqslant 0$ de la fonction f comme suit :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Soit*

$$f(t) = (t-a)^\beta,\ \beta > -1,$$

pour $\alpha > 0$, on a :

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau,$$

comme

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau. \end{aligned}$$

En effctuant le changement de variable

$$\tau = a + x(t-a),$$

or

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1}(x(\tau-a))^{\beta-n}(t-a)dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1}dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Pour

$$\beta = 1\beta, \qquad \alpha = \frac{1}{2},$$

d'où

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dt}(t-a)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.1 *Si $f = c$, alors*

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t ((t-\tau)^{n-\alpha-1} \times 0) d\tau = 0 \\ &= D_a^\alpha [c] = c D_a^\alpha [1]. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 1. *Pour tout $\alpha > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$D_a^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_a^\alpha [f(t)] + \mu D_a^\alpha [g(t)].$$

2. *Pour tout $\alpha > 0, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :*

$$D_a^\alpha \ I_a^\alpha \ [f(t)] = f.$$

3. $$D_a^\alpha [f(t)] = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i.$$

4. $$I_a^\alpha D_a^\alpha [f(t)] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i.$$

Lemme 1.5 *Soit*

$$\beta > \alpha > 0, \qquad f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors

$$D_a^\alpha I_a^\beta [f(t)] = I^{\beta-\alpha} [f(t)], t \in [a, b].$$

1.5 Théorèmes des Points Fixes

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode de point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section nous rappelons les théorèmes célèbres du oint fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés.

1.5.1 Concepts Essentiels

Définition 1.11 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vecroriel normé ; une application linéaire A de E dans lui-même est appellé un opérateur linéaire dans X. On appelle domaine de A et on désigne par D_A tel que*

$$D_A = \{x \in E : Ax \in E\}.$$

Définition 1.12 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vecroriel normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dite borné s'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

Théorème 1.2 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vecroriel normé et φ une application d'un élement de X dans lui même. On appelle point fixe de φ tout point $x \in X$ tel que :*

$$\varphi x = x.$$

1.5.2 Principe de Contraction de Banach

Définition 1.13 *Soit X un espace de Banch et $f : X \longrightarrow X$ une contraction. Alors, f admet un point fixe unique.*

Définition 1.14 *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continue $\phi : X \longrightarrow Y$ est complètement continu s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

1.5.3 Théorème du point fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.3 *Soit X un espace de Banach et $T : X \longrightarrow X$ on opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu T x, \quad 0 < \mu < 1\},$$

est borné, alors T possède au moins un poit fixe.

1.5.4 Théorème du point fixe de Schauder

Notre troixième résultat du poit fixe est le théorème du poit fixe de Schauder :

Théorème 1.4 *Soit X un espace de Banach. U un fermé, convexe et non vide de X tel que l'application $T : U \longrightarrow U$ est relativement compact dans X. Alors, T possède au moins un poit fixe dans U.*

1.5.5 Théorème du point fixe d'Ascolli-Arzzella

Théorème 1.5 *Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Ω uniformément borné.*
2. *Ω est équicontinu.*

1.5.6 Théorème du point fixe Krasnoselskii

Théorème 1.6 *Soient X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X. On suppose que les opérateurs S et T vérifient :*

1. $Tx + Sy \in \Omega, \quad \forall x, y \in \Omega.$
2. *S est continu et compact.*
3. *T est contractant.*

Alors, il exsite au moins un élément $z \in \Omega$ tel que $Sz + Tz = z$.

1.5.7 Théorème d'Oregan

Théorème 1.7 *[19]Soient X un espace de Banach, $C \subset X$ est un convexe fermé, ainsi que soient Ω un ouvert dans C et $\varphi : \overline{\Omega} \to C$ tels que :*

1. *$0 \in \Omega$ et $\varphi(\overline{\Omega})$ est borné tel que : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.*
2. *$\varphi_1 : \overline{\Omega} \to X$ est continu et complètement continu.*
3. *$\varphi_2 : \overline{\Omega} \to X$ est contractant (i. e, il existe une fonction positive croissante $\pi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfaite $\pi(x) < x$, $x > 0$, telle que*

$$\|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)\| \leq \pi \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Alors,

(i) *φ admet un point fixe ; ou bien*

(ii) *Il existe $x \in \partial\Omega$;*

$$x = \mu\varphi(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Chapitre 2

Problème Différentiel à Condition Non Locale au sens de Caputo

2.1 Introduction

Dans cette section on s'intéresse à l'étude de l'existence da la solution pour des classes d'équations différentielles fractionnaires suivante :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = f\left(x, x(t)\right) + \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s, x(s))ds, \quad 0 < t < b, \tag{2.1}$$

avec conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x(0) - x_0 = \sum_{i=1}^{m} x(t_i), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \\ ^{C}D^{\delta}x(b) - \sum_{k=1}^{n} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k) = 0, \ 0 < \delta < 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $^{C}D^{\alpha}$ et $^{C}D^{\delta}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α et δ tels que $0 < \alpha \leq 2$. ainsi que $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donné. En plus, β est un nombre positif et $0 < t_1 < t_2 < ... \leq b$.

2.2 Problème intégrale :

Lemme 2.1 *On suppose que :*

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \neq 0,$$

et soit $\varphi : [0, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, donc la solution intégrale pour l'équation suivante :

$$^{C}D^{\alpha}x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\Gamma\left(\beta\right)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \varphi(s)ds, \quad 0 < t < b,$$

avec conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x(0) - x_0 = \sum_{i=1}^{m} x(t_i), \\ ^{C}D^{\delta}x(b) - \sum_{k=1}^{n} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k) = 0, \end{cases}$$

est donnée par(utilisé Lemme 2.1)

$$
\begin{aligned}
& x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} \varphi(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \varphi(s) ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} \varphi(s) ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \varphi(s) ds. \\
& + \sum_{i=1}^m x(t_i) + x_0.
\end{aligned}
$$

Preuve. On considère l'équation suivante :

$$
{}^C D^\alpha x(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \varphi(s) ds, \tag{2.3}
$$

En appliquant l'opérateur I^α à l'équation (2.3), on trouve

$$
{}^{RL} I^\alpha D^\alpha x(t) = {}^{RL} I^\alpha \varphi(t) + {}^{RL} I^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \varphi(s) ds \right),
$$

donc

$$
x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s) ds - K_0 - K_1\; t, \tag{2.4}
$$

tels que K_0 et K_1 sont des constantes arbitraires. D'après les conditions aux limites, on trouve

$$
x(0) = -K_0 = \sum_{i=1}^m x(t_i) + x_0.
$$

Maintenant , en appliquant l'opérateur D^δ aux membres de formule (2.4), il vient

$$
\begin{aligned}
{}^C D^\delta x(t) \; = \; & {}^C D^\delta \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \right) + {}^C D^\delta \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s) ds \right) \\
& - {}^C D^\delta K_0 - K_1\; {}^C D^\delta (t),
\end{aligned}
$$

on a ${}^C D^\delta K_0 = 0$, alors

$$
\begin{aligned}
{}^C D^\delta x(t) \; = \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\delta-1} \varphi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \varphi(s) ds \\
& - K_1\; {}^C D^\delta (t).
\end{aligned}
$$

On sait que

$$D^{\delta}t=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(2-\delta\right)}t^{1-\delta}=Const\ \frac{t^{1-\delta}}{\Gamma\left(2-\delta\right)},$$

donc

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\delta}x(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\ &\quad -\frac{t^{1-\delta}}{\Gamma\left(2-\delta\right)}K_1. \end{aligned}$$

Pour $t=b$, on trouve

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\delta}x(b) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\ &\quad -\frac{b^{1-\delta}}{\Gamma\left(2-\delta\right)}K_1. \end{aligned}$$

En plus, pour $t=\xi_k$, $(k=1,...,n)$, il vient

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_0^{\xi_k} (t-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\ &\quad -\frac{\xi_k^{1-\delta}}{\Gamma\left(2-\delta\right)}K_1, \quad k=1,...,n, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\ &\quad -\frac{K_1}{\Gamma\left(2-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}. \end{aligned}$$

Puisque

$${}^{C}D^{\delta}x(b)-\sum_{k=1}^{n} {}^{C}D^{\delta}x(\xi_k)=0,$$

il vient

$$\begin{aligned} &\frac{b^{1-\delta}}{\Gamma\left(2-\delta\right)}K_1-\frac{K_1}{\Gamma\left(2-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (t-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (t-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\left(b^{1-\delta}- \sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}\right)K_1 \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\
& -\frac{1}{\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds,
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& K_1 \\
= & -\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds \\
& -\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds \\
& +\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}\varphi(s)ds \\
& +\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}\varphi(s)ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant K_0 et K_1 par leurs expressions dans l'équation (2.4), d'où le résultat. ■

2.3 Problème de point fixe :

2.3.1 Solution unique :

On introduit l'espace de Banach $X = C([0,b],\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,b]$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|x\|_\infty = \sup_{x\in[0,b]} |x(t)| .$$

Ainsi que, on considère l'opérateur $\mathcal{H}$ défini par :

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{H}: & X & \to & X \\
 & x & \to & \mathcal{H}x,
\end{array}$$

tel que, pour tout $t \in [0, b]$ et $1 < \alpha \leq 2$, aussi $\beta > 0$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}x(t) \\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds. \\
&+ \sum_{i=1}^m x(t_i) + x_0.
\end{aligned}$$

Ainsi que , on considère les hypothèses suivantes :

- (A_1) : La fonction $f : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continues.
- (A_2) : Pour tout $t \in [0, b]$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\exists \mu > 0, \ \ |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2| .$$

- (A_3) : Il existe une fonction continue $\pi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ telle que :

$$\exists \overline{\mu} : \ 0 < \overline{\mu} < 1, \ \ \pi(x) \leq \overline{\mu} x, \quad \forall x \in X,$$

 et

$$\left| \sum_{i=1}^m x(t_i) + x_0 - \sum_{j=1}^{m'} y(t_j) - y_0 \right| \leq \pi \|x - y\|, \ \ x_0, \ y_0 \in \mathbb{R},$$

- (A_4) : Il existe une fonction positive $W \in ([0, b], \mathbb{R})$ et une fonction croissante ϕ : $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, telles que :

$$|f(t, x)| \leq W(t) \phi(|x|), \ \forall t \in [0, b], \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (A_5) : On suppose que

$$\left(\sum_{i=1}^m x(t_i) \right)_{x=0} = 0.$$

- Aussi, soit $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, telque :

$$(1 - \overline{\mu}) r_0 - W^* \ \phi(r_0) > \ \ |x_0| , \tag{2.5}$$

où

$$\begin{aligned}
W^* &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (t-s)^{\alpha+\beta-1}W(s)ds \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}W(s)ds \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}W(s)ds \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}W(s)ds \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}W(s)ds.
\end{aligned}$$

Théorème 2.1 *On suppose que les hypothèse $(A_1)-(A_3)$ sont vérifiées et*

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \neq 0.$$

Alors, si

$$\Pi\mu + \overline{\mu} < 1,$$

où

$$\begin{aligned}
\Pi &= b^\alpha\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{b^\beta}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\right) \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\left(b^{\alpha+\beta-\delta} + \sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha+\beta-\delta}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\delta)}\left(b^{\alpha-\delta} + \sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha-\delta}\right)\right],
\end{aligned}$$

donc notre problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique sur $[0,b]$.

Preuve. En utilisant le théorème de point fixe de Banach pour montrer que l'opérateur $\mathcal{H}$ admet un point fixe. Soient $x, y \in X$ on a :

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t) - \mathcal{H}y(t)| \\
= & \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \right. \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left[f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right] ds. \\
& \left. + \sum_{i=1}^m x(t_i) - \sum_{j=1}^{m'} y(t_j) + (x_0 - y_0) \right|.
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{H}x(t) - \mathcal{H}y(t)| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^b (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right| \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right| \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right| \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right| \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left\| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \right\| ds \\
& + \left| \sum_{i=1}^m x(t_i) - \sum_{j=1}^{m'} y(t_j) + (x_0 - y_0) \right|,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \frac{\mu\left\|x-y\right\|}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{b}(t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{\mu\left\|x-y\right\|}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\int_{0}^{b}(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_{0}^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}ds \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_{0}^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\xi_{k}}(\xi_{k}-s)^{\alpha-\delta-1}ds \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\xi_{k}}(\xi_{k}-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds. \\
& +\pi\left\|x-y\right\|.
\end{aligned}$$

A partir de l'hypothèse (A_3), il vient

$$\pi\left\|x-y\right\|\leq\overline{\mu}\left\|x-y\right\|,\quad 0<\overline{\mu}<1.$$

donc

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \mu\left\|x-y\right\|\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{b}(t-s)^{\alpha-1}ds\right)+\mu\left\|x-y\right\|\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\int_{0}^{b}(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_{0}^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_{0}^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha-\delta\right)}\int_{0}^{\xi_{k}}(\xi_{k}-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\delta\right)}\int_{0}^{\xi_{k}}(\xi_{k}-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right) \\
& +\overline{\mu}\left\|x-y\right\|.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\ & \mu\left\|x-y\right\|I^{\alpha}(1)(b)+\mu\left\|x-y\right\|I^{\alpha+\beta}(1)(b) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}I^{\alpha-\delta}(1)(b)+\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}I^{\alpha+\beta-\delta}(1)(b) \\
& +\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\sum_{k=1}^{n}I^{\alpha-\delta}(1)(\xi_{k})+\frac{\Gamma\left(2-\delta\right)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\sum_{k=1}^{n}I^{\alpha+\beta-\delta}(1)(\xi_{k}) \\
& +\overline{\mu}\left\|x-y\right\|.
\end{aligned}$$

En plus, nous avons

$$I^{\tau}(1)(t)=\frac{t^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\; & \frac{\mu\left\|x-y\right\|b^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{\mu\left\|x-y\right\|b^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)} \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha-\delta)}b^{\alpha-\delta}+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}b^{\alpha+\beta-\delta} \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha-\delta}+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b\ \mu\left\|x-y\right\|}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha+\beta-\delta} \\
&+\overline{\mu}\left\|x-y\right\|.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} b.b^{\alpha-\delta}=b^{1+\alpha-\delta}, \\ b.b^{\alpha+\beta-\delta}=b^{1+\alpha+\beta-\delta}, \end{cases}$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\; & \left(\frac{b^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\right)\mu\left\|x-y\right\| \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\left(b^{1+\alpha+\beta-\delta}+b\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha+\beta-\delta}\right)\mu\left\|x-y\right\| \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha-\delta)}\left(b^{1+\alpha-\delta}+b\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha-\delta}\right)\mu\left\|x-y\right\| \\
&+\overline{\mu}\left\|x-y\right\|,
\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right| \\
\leq\; & \left(\frac{b^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\right)\mu\left\|x-y\right\| \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\left(b^{\alpha+\beta-\delta}+\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha+\beta-\delta}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\delta)}\left(b^{\alpha-\delta}+\sum_{k=1}^{n}\xi_{k}^{\alpha-\delta}\right)\right]\mu\left\|x-y\right\|+\overline{\mu}\left\|x-y\right\| \\
\leq\; & (\Pi\mu+\overline{\mu})\left\|x-y\right\|,
\end{aligned}$$

on trouve

$$\left|\mathcal{H}x(t)-\mathcal{H}y(t)\right|\leq(\Pi\mu+\overline{\mu})\left\|x-y\right\|,$$

car $\Pi\mu+\overline{\mu}<1$, c'est-à-dire l'opérateur $\mathcal{H}$ est contractant, alors cet opérateur admet un point fixe unique qui est la solution de notre problème. ■

2.3.2 Au moins une solution (theorème d'O'Regan) :

Théorème 2.2 *On supoose que les hypothèses* (A_1) , $(A_3)-(A_5)$ *sont vérifiées, ainsi que :*

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\neq 0,$$

Alors, notre problème (2.1)-(2.2) admet au mois une solution sur $[0,b]$.

Preuve. On considère l'opérateur $\varphi : X\rightarrow X$ défini par :

$$\varphi x(t)=\varphi_1 x(t)+\varphi_2 x(t),\quad t\in[0,b],$$

avec

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 x(t)\\
=\;&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))ds\\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}f(s,x(s))ds\\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}f(s,x(s))ds\\
&-\frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}f(s,x(s))ds\\
&-\frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}f(s,x(s))ds,\ t\in[0,b],
\end{aligned}$$

et

$$\varphi_2 x(t)=\sum_{i=1}^{m}x(t_i)+x_0,\ t\in[0,b].$$

1) On montre que l'opérateur $\varphi_1:\overline{\Omega}_{r_0}\rightarrow X$ est continu, tel que :

$$\overline{\Omega}_{r_0}=\{x\in X,\quad \|x\|\leq r_0\},\quad r_0>0.$$

On considère une suite $x_n\subset\overline{\Omega}_{r_0}$ tel que :

$$x_n(t)\rightarrow x(t),\quad n\rightarrow+\infty,$$

ou bien

$$\|x_n\rightarrow x\|\rightarrow 0,\quad n\rightarrow+\infty. \tag{2.6}$$

Pour tout $t \in [0, b]$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \varphi_1 x_n(t) - \varphi_1 x(t) \right\| \\
= & \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \right. \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \\
& \left. - \frac{\Gamma(2-\delta)\ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} \left[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right] ds \right\|,
\end{aligned}$$

et par la suite, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\| \varphi_1 x_n(t) - \varphi_1 x(t) \right\| \\
\leq & \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-1} ds \right) \\
& + \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-1} ds \right) \\
& + \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} ds \right) \\
& + \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} ds \right) \\
& + \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} ds \right) \\
& + \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\| \left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} ds \right),
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
& \left\| \varphi_1 x_n(t) - \varphi_1 x(t) \right\| \\
\leq & \ b^{\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{b^{\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)} \right) \mu \left\| x - y \right\| \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left| \sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right|} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)} \left(b^{\alpha+\beta-\delta} + \sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha+\beta-\delta} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\delta)} \left(b^{\alpha-\delta} + \sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha-\delta} \right) \right] \left\| f(s, x_n(s)) - f(s, x(s)) \right\|,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|\varphi_1 x_n(t) - \varphi_1 x(t)\| \leq \Pi \ \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\|.$$

La fonction f est continu grace à l'hypothèse (A_1) et d'aprés (2.6), on trouve

$$\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Il vient

$$\|\varphi_1(x_n) - \varphi_1(x)\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

2) On montre que l'opérateur $\varphi_1\left(\overline{\Omega}_{r_0}\right)$ est uniformement borné :
Soit $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$, alors

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_1 x(t)\| \\
= &\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{\Gamma(2-\delta) \ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&\left. - \frac{\Gamma(2-\delta) \ t}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \right\|,
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_1 x(t)\| \\
\leq &\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s))| \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))| \, ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} |f(s, x(s))| \, ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} |f(s, x(s))| \, ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} |f(s, x(s))| \, ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta) \ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} |f(s, x(s))| \, ds,
\end{aligned}$$

et d'après l'hypohèse (A_4), on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi_1 x(t)\right\| \\
\leq\ & \|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}ds\right) \\
&+\|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-1}ds\right) \\
&+\|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right) \\
&+\|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right) \\
&+\|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right) \\
&+\|W\|\,\phi(r_0)\left(\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi_1 x(t)\right\| \\
\leq\ & b^{\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{b^{\beta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\right)\mu\,\|x-y\| \\
&+\frac{\Gamma(2-\delta)\ b}{\left|\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\left(b^{\alpha+\beta-\delta}+\sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha+\beta-\delta}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\delta)}\left(b^{\alpha-\delta}+\ \sum_{k=1}^n \xi_k^{\alpha-\delta}\right)\right]\|W\|\,\phi(r_0),
\end{aligned}$$

on obtient

$$\left\|\varphi_1 x(t)\right\| \leq \|W\|\,\phi(r_0)\ \Pi,$$

on déduit que $\varphi_1\left(\overline{\Omega}_{r_0}\right)$ est uniformément borné.

3) On établit l'équicontinuité de φ_1.

Soit $x\in\overline{\Omega}_{r_0}$ et

$$t_2<t_1:\qquad t_1,t_2\in[0,b]\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)| \\
= \ & \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_1 - t_2)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_1 - t_2)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_2 - t_1)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_2 - t_1)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \Bigg|,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)| \\
\leq \ & \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_2}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_1 - t_2)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_1 - t_2)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_2 - t_1)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{\Gamma(2-\delta)\ \ (t_2 - t_1)}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \Bigg|,
\end{aligned}$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi_1 x(t_1)-\varphi_1 x(t_2)\right| \\
\leq\ & \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}\left|(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right|ds+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}ds \\
&+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{t_1}\left|(t_1-s)^{\alpha+\beta-1}-(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}\right|ds+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{t_2}^{t_1}(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right)|t_1-t_2| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right)|t_1-t_2| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right)|t_2-t_1| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right)|t_2-t_1|,
\end{aligned}
$$

il ient

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi_1 x(t_1)-\varphi_1 x(t_2)\right| \\
\leq\ & \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}\right)+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha)}(t_1-t_2)^{\alpha} \\
&+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\left(t_1^{\alpha+\beta}-t_2^{\alpha+\beta}\right)+\frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(t_1-t_2)^{\alpha+\beta} \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right)|t_1-t_2| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^{b}(b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right)|t_1-t_2| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}ds\right)|t_2-t_1| \\
&+\left(\frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right|\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\xi_k}(\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}ds\right)|t_2-t_1|,
\end{aligned}
$$

on trouve

$$\begin{aligned}
|\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)| \leq\ & \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} + (t_1 - t_2)^{\alpha}\right] \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\left[t_1^{\alpha+\beta} - t_2^{\alpha+\beta} + (t_1 - t_2)^{\alpha+\beta}\right] \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)\ b^{\alpha-\delta}}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha-\delta)}\,|t_1 - t_2| \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)\ b^{\alpha+\beta-\delta}}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\,|t_1 - t_2| \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha-\delta}}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha-\delta)}\,|t_2 - t_1| \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha+\beta-\delta}}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\,|t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& |\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)| \\
\leq\ & \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} + (t_1 - t_2)^{\alpha}\right] \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\left[t_1^{\alpha+\beta} - t_2^{\alpha+\beta} + (t_1 - t_2)^{\alpha+\beta}\right] \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|}\left(\frac{b^{\alpha-\delta}}{\Gamma(1+\alpha-\delta)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha+\beta-\delta}\right)|t_2 - t_1| \\
& + \frac{\|W\|\,\phi(r_0)\ \Gamma(2-\delta)}{\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right|}\left(\frac{b^{\alpha+\beta-\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\beta-\delta)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{\alpha-\delta}\right)|t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

Pour $t_1 \to t_2$, on trouve :

$$|\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)| \to 0,$$

ce qui implique

$$\|\varphi_1 x(t_1) - \varphi_1 x(t_2)\| \to 0,$$

alors, $\varphi_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est équicontinu. D'après le théorème d'Ascolli-Arzella, φ_1 est l'opérateur complètement continu.

4) On montre que l'opéraetur $\varphi_2 : \overline{\Omega}_r \to X$ est contractant : Soit $x, y \in \overline{\Omega}_r$, on a

$$\|\varphi_2 x(t) - \varphi_2 y(t)\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} x(t_i) + x_0 - \sum_{i=1}^{m} y(t_i) - y_0\right\|,\ t \in [0, b].$$

En utilisant l'hypothèse (A_3), il vient

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2 x(t) - \varphi_2 y(t)\| &\leq \pi(\|x - y\|) \\
&\leq \overline{\mu}\,\|x - y\|,
\end{aligned}$$

et puisque $0 < \overline{\mu} < 1$, on déduit que l'opérateur φ_2 est contractant.

5) On montre que l'opéraetur $\varphi_2 : \overline{\Omega}_{r_0} \to X$ **est borné :** Soit $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2 x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} x(t_i) + x_0 \right\| \\
&\leq |x_0| + \left\| \sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right\| \\
&\leq |x_0| + \left\| \sum_{i=1}^{m} x(t_i) - \left(\sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right)_{x=0} + \left(\sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right)_{x=0} \right\| \\
&\leq |x_0| + \left\| \sum_{i=1}^{m} x(t_i) - \left(\sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right)_{x=0} \right\| + \left\| \left(\sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right)_{x=0} \right\|,
\end{aligned}$$

vue l'hypothèse (A_3), il vient

$$\begin{aligned}
\|\varphi_2 x\| &\leq |x_0| + \pi \|x\| + \left\| \left(\sum_{i=1}^{m} x(t_i) \right)_{x=0} \right\| \\
&\leq |x_0| + \overline{\mu} \|x\| \\
&\leq |x_0| + \overline{\mu} r_0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'opérateur $\varphi_2 \left(\overline{\Omega}_{r_0} \right)$, et puisque

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

on déduit que l'opérateur φ est borné.

5) On montre que le cas (ii) **du théorème 1.7, n'est pas vérifie :**

En utilisant le raisonnement par l'absurde. soit (ii) est satisfaite, c'est-à-dire Il existe $x \in \partial\Omega$;

$$\exists \mu : \; 0 < \mu < 1; \;\; x \in \partial\Omega_{r_0} : \;\; x = \mu\varphi(x),$$

donc

$$\|x\| = r_0, \tag{2.7}$$

ainsi que, on a

$$\begin{aligned}
x(t) = \; & \mu \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta)\; t}{\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta} \right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\xi_k} (\xi_k - s)^{\alpha+\beta-\delta-1} f(s, x(s)) ds \\
& \left. + \sum_{i=1}^{m} x(t_i) + x_0 \right],
\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|x\| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))| \, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\
& - \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} |f(s,x(s))| \, ds \\
& + \|\varphi_2 x\|,
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\|x\| \leq & \phi(\|x\|) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (t-s)^{\alpha+\beta-1} W(s) ds \right. \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} W(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} W(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} W(s) ds \\
& \left. + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} W(s) ds \right] \\
& + |x_0| + \overline{\mu} r_0,
\end{aligned}$$

vue (2.7), il vient

$$\begin{aligned}
r_0 \leq & \phi(r_0) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^T (t-s)^{\alpha+\beta-1} W(s) ds \right. \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1} W(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} W(s) ds \\
& + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1} W(s) ds \\
& \left. + \frac{\Gamma(2-\delta) \ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta} - b^{1-\delta}\right) \Gamma(\alpha+\beta-\delta)} \sum_{k=1}^n \int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1} W(s) ds \right] \\
& + |x_0| + \overline{\mu} r_0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
r_0 \quad \leq \quad & \phi(r_0)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^T (t-s)^{\alpha+\beta-1}W(s)ds\right. \\
& +\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha-\delta-1}W(s)ds \\
& +\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\int_0^b (b-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}W(s)ds \\
& +\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha-\delta-1}W(s)ds \\
& \left.+\frac{\Gamma(2-\delta)\ T}{\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{1-\delta}-b^{1-\delta}\right)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}\sum_{k=1}^n\int_0^{\xi_k} (\xi_k-s)^{\alpha+\beta-\delta-1}W(s)ds\right] \\
& +|x_0|+\overline{\mu}r_0,
\end{aligned}
$$

donc

$$r_0 \leq \phi(r_0)\ W^* + |x_0| + \overline{\mu}r_0,$$

on trouve

$$(1-\overline{\mu})\,r_0 - W^*\ \phi(r_0) \leq \ |x_0|$$

ce qui une contracdiction avec hypothèse (2.5), on peut déduire que l'opérateur φ admet au mois un point fixe $x \in \partial\overline{\Omega}_{r_0}$ qui est la solution du notre probblème. ■

Chapitre 3

Solution analytique de l'équation différentielles fractionnaires conformable

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'équation différentielles fractionnaires suivant :

$$D^{2\alpha}x(t) + 2\gamma D^{\alpha}x(t) + \xi x(t) = f(t), \quad t \in [0, +\infty[\,, \tag{3.1}$$

avec conditions :

$$\begin{cases} x(0) - x_0 = 0, \\ D^{\alpha}x(0) - x_{\alpha} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},$$

est une fonction continue et γ et ξ des constantes positives :

Lemme 3.1 *On suppose que*

$$\xi - \gamma^2 > 0.$$

Alors, le problème (3.1)-(3.2) admet une solution unique donnée sous la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 Cos\left(\frac{\sqrt{\xi-\gamma^2}}{\alpha}t^{\alpha}\right)\exp(-\frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}) \\ &+\frac{(\gamma x_0 + x_{\alpha})}{\sqrt{\xi-\gamma^2}}\,\mathrm{Si}\,n\left(\frac{\sqrt{\xi-\gamma^2}}{\alpha}t^{\alpha}\right)\exp(-\frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha}) \\ &+\frac{1}{\sqrt{\xi-\gamma^2}}\int_0^t \exp(-\frac{\gamma}{\alpha}t^{\alpha})\,\mathrm{Si}\,n\left(\frac{\sqrt{\xi-\gamma^2}}{\alpha}t^{\alpha}\right)f(t-s)ds. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant la défintion 1.9, on a

$$\mathcal{L}_{\alpha}[x(t)] = X_{\alpha}(s), \qquad \mathcal{L}_{\alpha}[f(t)] = F_{\alpha}(s),$$

ainsi que, d'après la relation (1.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\alpha}[D^{\alpha}x(t)] &= sX_{\alpha}(s) - x(0) \\ &= sX_{\alpha}(s) - x_0, \end{aligned}$$

aussi, vue la relation (1.2) il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\left[D^{2\alpha}x(t)\right] &= s^2X_\alpha(s)-x(0)-D^\alpha x(0)\\ &= s^2X_\alpha(s)-x_0-x_\alpha.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}_\alpha\left[D^{2\alpha}x(t)+2\gamma D^\alpha x(t)+\xi x(t)\right]=\mathcal{L}_\alpha\left[f(t)\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_\alpha\left[D^{2\alpha}x(t)\right]+2\gamma\mathcal{L}_\alpha\left[D^\alpha x(t)\right]+\xi\mathcal{L}_\alpha\left[x(t)\right]=F_\alpha(s),$$

ou bien

$$\left\{s^2X_\alpha(s)-x_0-x_\alpha\right\}+2\gamma\left[sX_\alpha(s)-x_0\right]+\xi X(s)=F_\alpha(s),$$

on trouve

$$\begin{aligned}X_\alpha(t) &= \frac{x_0}{s^2+2\gamma s+\xi}(s+\gamma)+\frac{1}{s^2+2\gamma s+\xi}(x_\alpha+x_0\gamma)\\ &\quad+\frac{F_\alpha(t)}{s^2+2\gamma s+\xi},\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}X_\alpha(t) &= \frac{x_0}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}(s+\gamma)+\frac{1}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}(x_\alpha+x_0\gamma)\\ &\quad+\frac{F_\alpha(t)}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}.\end{aligned}$$

On sait que :

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{x_0}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}(s+\gamma)\right]=x_0\exp\left[\left(\frac{-\gamma}{\alpha}t^\alpha\right)\cos(\sqrt{\xi-\gamma^2}\frac{t^\alpha}{\alpha})\right],$$

aussi

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{1}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}(x_\alpha+x_0\gamma)\right]=\frac{1}{\sqrt{\xi-\gamma^2}}(x_\alpha+x_0\gamma)\exp\left[\left(\frac{-\gamma}{\alpha}t^\alpha\right)\sin(\sqrt{\xi-\gamma^2}\frac{t^\alpha}{\alpha})\right],$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\frac{F_\alpha(t)}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{\xi-\gamma^2}}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[\left(\frac{\sqrt{\xi-\gamma^2}}{(s+\gamma)^2+\xi-\gamma^2}\right)(t)\right]*\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left[F_\alpha(t)\right](t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\xi-\gamma^2}}\int_0^t\exp\left[\left(\frac{-\gamma}{\alpha}t^\alpha\right)\sin(\sqrt{\xi-\gamma^2}\frac{t^\alpha}{\alpha})\right]f(t-z)dz,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Chapitre 4

Exemple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{2}{3}}x(t) = f\left(x, x(t)\right) + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} f(s, x(s))ds, \quad t \in [0,1], \\ x(0) - \frac{1}{13} = \sum_{i=1}^2 x(t_i), \\ D^{\frac{2}{5}}x(1) - \sum_{k=1}^2 D^{\frac{2}{5}}x(\xi_k) = 0, \quad 0 < \xi_k < 1, \end{cases}$$

tels que :

$$x_0 = \frac{1}{13}, \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \delta = \frac{2}{5},$$

aussi, ona

$$f(t,x) = \frac{1}{(6\sqrt{\pi}+t)^2}\tan^{-1} x + \frac{1}{2}t^2.$$

On peut écrire, pour $t \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq \frac{1}{(6\sqrt{\pi}+t)^2}|\tan^{-1} x - \tan^{-1} y| \\ &\leq \frac{1}{36\pi}|x-y|, \end{aligned}$$

d'où $\mu = \frac{1}{36\pi}$. Ainsi que

$$\left\{ |H(x) - H(y)| \leq |\sum_{i=1}^2 x(t_i) - \sum_{i=1}^2 y(t_i)| \leq \sum_{i=1}^2 |x(t_i) - y(t_i)|. \right.$$

Alors,d'aprés (A_5) ona :

$$(1-\overline{\mu})\, r_0 - W^*\phi(r_0) > \left|\frac{1}{13}\right|.$$

Donc,d'aprés le Théoreme 2.1 le problème admet une solution unique sur $[0,1]$.

Bibliographie

[1] B. Ahmad and S.K Ntouyas :On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14

[2] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. World Scientific,PIER 33, Boston (2012). 14

[3] M. Benchohra, S. Hamani, S.K Ntouyas : Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear. Anal. tma, PIER 71, pp 2391–2396, (2009). 14

[4] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8

[5] H. Beddani, and M. Beddani, *Solvability for a differential systems via Phi-Caputo approach.* Journal of Science and Arts. No. 3(56), pp. 749-762, (2021)

[6] H. Beddani and Z. Dahmani, Solvability for a nonlinear diffrential problem of Langevin type via Phi-Caputo approach. Eur. J. Math. Appl. 1 :11. (2021)

[7] H. Beddani, M. Beddani and Z. Dahmani, *Nonlinear Differential Problem with p-Laplacian and via Phi-Hilfer Approach : Solvability and Stability Analysis.* Eur. J. Math. Anal. 1 164-181. (2021)

[8] H. Beddani, *(n + 1)-Parameter singular fractional differential equation.* Asia Mathematika. Volume : 5 Issue : 1 , Pages : 11-18. (2021).

[9] J. Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor , Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[10] S. Hamani, M. Benchohra and John R. Graef, Existence results for boundary-value problems with nonlinear fractional differential inclusions and integral conditions,Electron. J. Diff . Equ., Vol. 10(2010), 20, p. 1-16.

[11] M. Houas and Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions. Lobachevskii Journal of Math- ematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[12] M. Houas, Existence results for fractional diffrential equations involving two Caputo derivatives with nonlocal conditions. Canad. J. Appl. Math. 3 (2021), no. 1, 46-60. Prior Science Publishing.

[13] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[14] C. KIATARAMKUL, SK. NTOUYAS, J. TARIBOON AND A. KIJJATHANAKORN : Generalized Sturm-Liouville and Langevin equations via Hadamard fractional derivatives with anti-periodic boundary conditions. BOUNDARY VALUE PROBLEMS. DOI 10.1186/S13661-016-0725-1

[15] M. Kaid, M. Belhamiti, Z. Dahmani and A. T. Abdulrahman, Solvability for a system of fractional Sturm-Liouville Langevin equations. Sci.Int.(Lahore),33(1),75-89, (2021).

[16] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* ; World Scientific : Singapore, 2000.

[17] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,John Wiley, New York, 1993.

[18] T. MUENSAWAT, SK. NTOUYAS AND J. TRIBOON : Systems of Generalized Sturm-Liouville and Langevin Fractional differential Equations. Adv. Differ. Equ. 2017, 63.

[19] M. HOUAS et Z. DAHMANI : New resultats for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives. Kragujevac Journal of Mathematics. Pages 283-301.

[20] D. O'Regan and R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. AnaL. Appl. 245 (2000), 594-612.

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[23] M. Sowmya and A.S. Vatsala, Generalized Iterative Methods for Caputo Fractional Differential Equations via Coupled Lower and Upper Solutions with Superlinear Convergence, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 15 (2) (2015) 198208.

[24] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems, Rendiconti del Seminaro Mathematico Della Universita di Padova 75 (1986), 1-14.

[25] A. Oualid, Z. Dahmani : Differential Equation Via Hadamard Approach , Some Existence Uniqueness Results, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 5, 16, 21