MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

BENKAHLA chahrazed

Equations Différentielles au Sens de Caputo-Hadamard

Soutenu le:22 juin 2022

devant le jury composé de :

Président :	Hamid BOUZIT	MCA	U.Mostaganem
Examinateur :	Houari FETTOUCH	MCA	U.Mostaganem
Encadreur :	Mohammed KAID	MCB	U.Mostaganem

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à mon directeur de ce travail, , monsieur *Mohammed KAID*, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de master, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche.

Je remercie également monsieur Hamid BOUZIT , qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur *Houari FETTOUCH*, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'évaluer ce travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation ce travail.

Table des matières

0.1 Résumé

L'objectif de ce travail est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les techniques du point fixe.

Mots-clés :
Théorème de O'Regan, Equations Différentielles Fractionnaires.

Abstract :

The objective of this work is to contribute to the development of the theory of existe and uniqueness of solutions of fractional differential equations. The results obtained in this work are based on fixed point techniques.

Key words :
Theorem O'Regan„ Fractional Differential Equations

0.2 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc.. . D'autre part, la théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus important champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire (voir [1]-[25]). D'autre part, les problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionniares se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées. Ainsi que, il est parfois préférable d'imposer des conditions non locales puisque les mesures nécessaires à une condition non locale peuvent être plus précises que la mesure donnée par une condition locale.

Dans l'article [15], les auteurs M. Kaid et al, ont étudies l'équation fractionnaire suivante :

$$D^{\beta_k}(g_k(t)D^{\alpha_k} + h_k(t))u(t) = f(t, u_1(t), u_2(t), D^{\tau_k}u_1(t), D^{\delta_k}u_2(t)), \quad t \in J = [0, 1],$$

Avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x_k(0) = -D^{\alpha}x_k(1), \\ x_k(0) = -x_k(1) \end{cases}$$

Ce mémoire comprend quatre chapitres :

Le premier chapitre :

Contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de ce travail. On rappellera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire. Quelques théorèmes du point fixe seront présentés.

Dans Le **chapitre deux** :

On présentera des résultats sur le problème d'équation différentielle fractionnaire linéaire suivant :

$$D^{\beta}(D^{\alpha} + \gamma)x(t) - f(t, x(t)) = \sum_{j=1}^{m} I^{\delta_j} h_j\,(x, x(t))\,, \quad 0 < t < b,$$

Avec des conditions aux limites sous la forme :

$$\begin{cases} x(0) - x_0 = \sum_{l=1}^{p} x(t_l), \\ I^{\delta}x(b) - \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} I^{\delta}x(\xi_i) = 0, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad 0 < \xi_i < b, \end{cases}$$

où D^{α} et D^{β} sont des dérivées fractionnaires d'ordre αet β tels que :

$$0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad 0 < \alpha + \beta \leq 2,$$

et I^δ représente l'intégrale fractionnaire d'ordre $\delta > 0$. En plus $f, h_j : [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues donnée.le nombre γ est positif et $0 < t_1 < t_2 < ...t_p \leq b$ (voir [12]).

Dans le **troisième chapitre** :

Nous donnons des résultats d'existence de solution intégrale pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha + \gamma)x(t) - f(t, x(t)) = 0, \quad t \in [1, e], \quad \gamma \in \mathbb{R}, \\ x(1) + x(e) = 0, \quad D^\alpha x(1) + D^\beta x(e) = 0, \end{cases}$$

tels que :

(i) D^α et D^β sont des dérivées fractionnaires d'ordre α, β respectevement au sens d'Hadamard tel que : $0 < \alpha, \beta < 1$.

(ii) $f : [1, e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Dans **dernièr chapitre** :
On donne quelques exemples pour illustrer les résultats obtenus.

0.3 Notations :

- $\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$ Ensemble des nombres entiers naturels.
- $\mathbb{C}$ Ensemble des nombres complexes.

- Ω Domaine borné dans $\mathbb{R}$

- $\Gamma(.)$ La fonction Gamma.
- ${}^{C}D_{a}^{\alpha}$ Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^{RL}D_{a}^{\alpha}$ Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
- ${}^{H}D_{a}^{\alpha}$ Dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.

Chapitre 1

Rappels

La première et la deuxième section rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire (voir [12]).

Définition 1.1 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continus sur $[a,b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue sommables ie :*

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]),$$

telle que

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $AC^n([a,b])$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continus sur $[a,b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC([a,b])$, c'est -à-dire :*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \ \mathbb{C} \ et \ f^{\ (n-1)}(x) \in AC[a,b] \right\}.$$

En prticulier on a $AC^n[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.3 *L'espace noté $AC_\delta^n[a,b]$ défini par :*

$$AC_\delta^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \quad et \ \delta^{n-1} f(x) \in AC[a,b], \delta = xd/dx \right\},$$

est appelé espace des fonctions absolument continues avec un point qui égale 1.

1.1 La fonction Gamma

Définition 1.4 *On appelle la fonction Gamma notée Γ, la fonction définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

Remarque 1.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2...\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

1. $$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$
2. $$\Gamma(\alpha+n) = \alpha(\alpha+1)....(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha).$$
3. $$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.2 La fonction Béta

Définition 1.5 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

Proposition 1.1 *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

1.3 Intégration-Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par :

$$I^n[f(t)] = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \; t > 0, \; \alpha > 0, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.6 *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \geq 0$, *pour une fonction continue* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est défini par :*

$$\begin{cases} I_a^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \, t > 0, \, \alpha > 0. \\ I_a^0[f(t)] = f(t). \end{cases}$$

Exemple 1.1 *Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta},\ \beta > 1.$$

On a

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}d\tau.$$

En effctuant le chengement de variable

$$\tau = a + x\left(t-a\right).$$

Avec la fonction Béta, il résulte x en que :

$$\begin{aligned}
&I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(t-a-x\left(t-a\right)\right)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t-a\right)^{\beta+\alpha}\int_0^1 \left(1-x\right)^{\alpha-1}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t-a\right)^{\beta+\alpha}B\left(\alpha,\beta+1\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t-a\right)^{\beta+\alpha}\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta+\alpha}
\end{aligned}$$

Donc

$$I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta+\alpha}.$$

Par exemple pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, il vient

$$\begin{aligned}
I_a^{1}\left[(t-a)\right] &= \frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(3\right)}\left(t-a\right)^{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(t-a\right)^{2}.
\end{aligned}$$

Et pour $\alpha = \frac{1}{2}$,on a

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\left(t-a\right)^{\beta+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.1 *Soit $f[a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$ on a :*

1.

$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right],$$

2.
$$I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]=I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right].$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} I_a^{\beta}\left[f(\tau)\right]d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\left[(x-\tau)^{\alpha-1}\int_a^{\tau}(\tau-t)^{\beta-1}f(t)dt\right]d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}d\tau\int_a^{\tau}(\tau-t)^{\beta-1}f(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)dt\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-t)^{\beta-1}d\tau
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\tau=t+(x-t)p$ et en utilisant la fonction Béta, on obtient :

$$\begin{aligned}
& I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)dt\int_0^1 (x-t-(x-t)p)^{\alpha-1}\left((x-1)p\right)^{\beta-1}(x-t)\,dp\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)dt\int_0^1 (x-t)^{\alpha+\beta-1}dt\int_0^1(1-p)^{\alpha-1}p^{\beta-1}dp\\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\\
&= I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].
\end{aligned}$$

Exemple 1.2 *Si on prend*
$$f(x)=t-a,\ \ \alpha=\beta=\frac{1}{2}.$$
Il vient
$$I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]=I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[(t-a)\right]\right]=I_a^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1}\right]=\frac{1}{2}\left(t-a\right)^2.$$
D'autre part, on a
$$I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]=I_a^{\alpha}\ \left[I_a^{\beta}\left[(t-a)\right]\right]=\int_a^x (t-a)dt=\frac{1}{2}\left(t-a\right)^2.$$

■

1.4 Dérivation-Riemann-Liouville

Définition 1.7 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \frac{d^n}{dt^n}(I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^{t\prime}(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau, n-1<\alpha<n,\ n\in R^*.
\end{aligned}$$

Exemple 1.3 *Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre au sens de Riemann-Liouville de la fonction*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}\ , \qquad \beta > -1.$$

On a

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{1-\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{(\beta-\alpha+1)\,\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\,(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}\,(t-a)^{\beta-\frac{1}{2}}\ .
\end{aligned}$$

Pour

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 1,$$

Or

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau-a)d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)\right]\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{3}{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Remarque 1.2 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constant au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle. On a*

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}[c] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}d\tau\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(I_a^{1-\alpha}[c]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{1-\alpha}d\tau\right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Pour $c=1$, on a :

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.
$$

Proposition 1.2 *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires existent . Alors pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,on a*

1.
$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t)+\mu g(t)] = \lambda\,{}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\,{}^{RL}D_a^{\alpha}[g(t)].
$$

2.
$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)].
$$

3.
$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}[{}^{RL}D_a^{\beta}[f(t)]] \neq {}^{RL}D_a^{\beta}\left[{}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right].
$$

Lemme 1.2 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifant ${}^{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]=0$, $\alpha\in\left]n-1,n\right[$, $n\in\mathbb{N}^*$.Alors*

$$
f(t)=\sum_{i=0}^{n-1} b_i\frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\alpha-n+i+1)}(t-a)^{\alpha-n+i},\; n=[\alpha]+1,\; b_i\in\mathbb{R}.
$$

1.5 Dérivée-Caputo

Définition 1.8 *Soit $f \in C^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre $\alpha \geqslant 0$ de la fonction f comme suit :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, n-1<\alpha<n,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Soit*

$$f(t) = (t-a)^\beta,\ \beta > -1.$$

Pour $\alpha > 0$, on a :

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Comme

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= I_a^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau. \end{aligned}$$

En effctuant le changement de variable

$$\tau = a + x(t-a),$$

Or

$$\begin{aligned} D_a^\alpha [f(t)] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} (t-a) dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Pour

$$\beta = 1, \qquad \alpha = \frac{1}{2},$$

D'où

$$D_a^\alpha [f(t)] = I_a^{n-\alpha}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dt}(t-a)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.3 *Si $f = c$, alors*

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t ((t-\tau)^{n-\alpha-1} \times 0) d\tau = 0 \\ &= D_a^\alpha [c] = c D_a^\alpha [1]. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 1. *Pour tout $\alpha > 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,on a :*

$$D_a^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_a^\alpha [f(t)] + \mu D_a^\alpha [g(t)].$$

2. *Pour tout $\alpha > 0, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,on a :*

$$D_a^\alpha \ I_a^\alpha \ [f(t)] = f.$$

3.

$$D_a^\alpha [f(t)] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t-a)^i . n-1 < \alpha < n$$

4.

$$I_a^\alpha D_a^\alpha [f(t)] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i .$$

Lemme 1.3 *Soit*

$$\beta > \alpha > 0, \qquad f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors

$$D_a^\alpha I_a^\beta [f(t)] = I^{\beta-\alpha} [f(t)], t \in [a,b].$$

1.6 Intégration fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.9 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < \ a < b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. Alors,l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de f est définie par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt; \qquad a < x < b,$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

1.6.1 Quelques propriétés :

Proposition 1.4 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $\alpha > 0$ on a :*

$$J_a^\alpha(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 J_a^\alpha f(x) + \lambda_2 J_a^\alpha g(x).$$

Proposition 1.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\log \frac{x}{t})$ une fonction continue,$f \in L^P([a,b]).\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$J_a^\alpha J_a^\beta fx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t},$$

telle que $a \leq t \leq x; a \leq s \leq t$.

Proposition 1.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $f \in L^p([a,b])$. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= J^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= J_\alpha^\beta J_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Preuve. Nous avons ■

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}.$$

Puisque

$$a \leq t \leq x,$$

et

$$a \leq s \leq t,$$

ce qui implique

$$s \leq t \leq x.$$

Posons

$$y = \frac{\log(t/s)}{\log(x/s)},$$

Il vient qui

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &\int_s^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \\ = &\int_0^1 \left[\log x - y \log \frac{x}{s} - \log s \right]^{\alpha-1} \left[y \log \frac{x}{s} + \log s - \log s \right]^{\beta-1} \log \left(\frac{x}{s} \right) dy \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_s^t (\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{s})^{\beta-1}f(s)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\right)\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}dy\\ &= B(\alpha,\beta)(\log\frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\frac{x}{s})^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (\log(\frac{x}{s}))^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &= J_a^{\alpha+\beta}f(x).\end{aligned}$$

En utilise les memes techniques, on obtient

$$J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

Exemple Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et

$$f(t) = \left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}.$$

Alors

$$J_a^\alpha\left[\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve. On a

$$J_a^\alpha\left(\log(\frac{t}{a})\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\log\frac{s}{a})^{\beta-1}\frac{ds}{s}.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$u = \frac{(\log s/a)}{(\log t/a)},$$

On trouve

$$\begin{aligned}J_a^\alpha(\log(\frac{t}{a}))^{\beta-1} &= \frac{(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\\ &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

■

Remarque 1.4 *En particulier, si* $\beta = 1$ *et* $\alpha > 0$. *Alors , on a*

$$J_a^\alpha(1)(t) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\log(\frac{t}{a})\right)^\alpha.$$

1.7 Dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard

Définition 1.10 *La dérivée fractionnaire au sens Hadamard de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{H}D_a^{\alpha} f(x) &= \delta^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .(x\frac{d}{dx})^n J_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= .\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(x\frac{d}{dx})^n \int_a^x (\log\frac{x}{t})^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

Où $n-1<\alpha<n,\ \ n=[\alpha]+1.$

Proposition 1.7 *Pour* $\alpha>0$ *et* $f\in C[a,b]$,*on a :*

$${}^{H}D_a^{\alpha} J^{\alpha} f(t) = f(t),$$

mais

$$J^{\alpha H}D_a^{\alpha} f(t) \neq f(t).$$

Exemple 1.5 *Soit f une fonction définie comme suite :*

$$f(t) = (\log\frac{t}{a})^{\beta-1} \quad \textit{avec} \ \ \beta>0.$$

Alors

$${}^{H}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ \log\frac{t}{a})^{\beta-\alpha-1} \quad \textit{avec} \ \ \alpha>0 \ \ \textit{et} \ \ \beta>0.$$

On a

$${}^{H}D_a^{\alpha} f(t) = \delta^n (J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1}),$$

on trouve

$$J_a^{n-\alpha}(\log\frac{t}{a})^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(\log\frac{t}{a})^{n-\alpha+\beta-1},$$

D'où le résultat.

Remarque 1.5 *En particulier, si*

$$\beta=1 \quad \textit{et} \ \ \alpha>0.$$

Alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une fonction constante est en général non nulle, c'est-à-dire

$${}^{H}D_a^{\alpha} c = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\log\frac{t}{a})^{-\alpha}.$$

1.8 Lien entre la dérivée fractionnire au sens de Caputo et celle au sens de Hadamard

Pour tout $y \in AC_{\delta}^{n}[a,b]$, Nous avons :

$$^{c}D_{a}^{\alpha}y(x) =^{H} D_{a}^{\alpha}\left\{y(x) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\delta^{i}y(a)}{i!}(\log\frac{x}{a})\right\}.$$

Où $n = [\alpha] + 1$.

1.9 Lemmes auxilliares :

Lemme 1.4 *Soient $f \in AC_{\delta}^{n}([a,b],\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$, on a :*

$$J^{\alpha}D^{\alpha}f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1}c_k(\log x)^k.$$

Où $C_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2.........n-1$ et $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha] + 1$.

1.10 Théorèmes des Points Fixes

Les théorèmes du point fixe sont des outils extremement utiles pour résoudre des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe.

Dans cette section nous allons présenter le théorème l'éxistence au moins d'un point fixe qui est le théorème de point fixe de O'Regan.

Ce théorème sont basés sur les définitions suivantes :

Définition 1.11 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé une application linéaire A de E dans lui-même est appelleé opérateur linéaire dans X. On appelle domaine de A et on désigne par D_A tel que*

$$D_A = \{x \in E : Ax \in E\}.$$

Définition 1.12 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dite borné s'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$ on a :*

$$\|x\| \leq M.$$

Définition 1.13 *soit f un ensemble de fonctions continues définiés sur un intervall I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que l''ensemble f est équicontinue si pout tout $\varepsilon > 0$, il va exister un $\delta > 0$,*

tel que pour toute $f \in F$ et pour tout $t_1, t_2 \in I$
$n \in \mathbb{N}$, $\mid t_{1-t_2} \mid< \delta$, alors

$$\mid f(t_1) - f(t_2) \mid< \delta$$

Définition 1.14 *soit* $(X, \|\|)$ *un espace vectoriel normé .Une application* ϕ *de* X *dans* X *est dite contratante s'il existe un nombre positif* $k \in]0,1[$ *tel que pour tout* $x, y \in X$, *on a*

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq k \| x - y \|$$

Définition 1.15 *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé et* φ *une application d'un élément de* X *dans lui-même. On appelle point fixe de* φ *tout point* $x \in X$ *tel que :*

$$\varphi(x) = x.$$

1.10.1 Principe de Contraction de Banach

Définition 1.16 *Soit* X *un espace de Banach et* $f : X \longrightarrow X$ *une contraction. Alors,* f *admet un point fixe unique.*

Définition 1.17 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach. L'opérateur continue* $\phi : X \longrightarrow Y$ *est complètement continu s'il transforme tout borné de* X *en une partie relativement compacte dans* Y.

1.10.2 Théorème du point fixe de Schaefer

Notre deuxième résultat du point fixe est le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 1.1 *Soit* X *un espace de Banach et* $T : X \longrightarrow X$ *on opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu T x, \quad 0 < \mu < 1\},$$

est borné, alors T *possède au moins un point fixe.*

1.10.3 Théorème du point fixe de Schauder

Notre troisième résultat du point fixe est le théorème du point fixe de Schauder :

Théorème 1.2 *Soit* X *un espace de Banach.* U *un fermé, convexe et non vide de* X *tel que l'application* $T : U \longrightarrow U$ *est relativement compact dans* X. *Alors,* T *possède au moins un point fixe dans* U.

1.10.4 Théorème du point fixe d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.3 *Soit* $\Omega \subset X$. *Alors* Ω *est relativement compact dans* X *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Ω *uniformément borné.*
2. Ω *est équicontinu.*

1.10.5 Théorème du point fixe Krasnoselskii

Théorème 1.4 *Soient X un espace de Banach, Ω un sous-ensemble fermé, borné et convexe de X. On suppose que les opérateurs S et T vérifient :*

1. $Tx + Sy \in \Omega, \quad \forall x,\, y \in \Omega.$
2. *S est continu et compact.*
3. *T est contractant.*

Alors, il existe au moins un élément $z \in \Omega$ tel que $Sz + Tz = z$.

1.10.6 Théorème d'Oregan

Théorème 1.5 *Soient X un espace de Banach, $C \subset X$ est un convexe fermé, soient Ω un ouvert dans C et $\varphi : \overline{\Omega} \to C$ tels que :*

1. *$0 \in \Omega$ et $\varphi(\overline{\Omega})$ est borné tel que : $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.*
2. *$\varphi_1 : \overline{\Omega} \to X$ est continu et complètement continu.*
3. *$\varphi_2 : \overline{\Omega} \to X$ est contractant (i. e, il existe une fonction positive croissante π : $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ satisfaite $\pi(x) < x$, $x > 0$, telle que*

$$\|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)\| \leq \pi \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Alors, des proposition suivants et vérifieé

(i) *φ admet un point fixe*

(ii) *Il existe $x \in \partial\Omega$;*

$$x = \mu\varphi(x), \quad 0 < \mu < 1.$$

Chapitre 2

Problème aux Limites pour des Equations Différentielles Fractionnaires

2.1 Introduction

Durant les dernières années, parmi les problèmes aux limites non classiques pour les équations différentielles aux dérivées fractionnaires une place importante est occupée par les problèmes avec des conditions non locales. Alors, on considère le problème suivant :

$$D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)-f(t,x(t))=\sum_{j=1}^{m} I^{\delta_j}h_j\left(t,x(t)\right), \quad 0<t<b, \tag{2.1}$$

Avec conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x(0)-x_0=\sum_{l=1}^{p} x(t_l), \\ I^{\delta}x(b)-\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} I^{\delta}x(\xi_i)=0, \ \lambda_i\in\mathbb{R}, \quad 0<\xi_i<b, \end{cases} \tag{2.2}$$

Où D^{α} et D^{β} sont des dérivées fractionnaires d'ordre α,β tel que :

$$0<\alpha,\beta\leq 1, \quad 0<\alpha+\beta\leq 2,$$

Et I^{δ_j} représente l'intégrale fractionnaire d'ordre δ_j $(j=1,...,m)$ avec $0<\delta_j$, $\delta<1$. En plus $f,h_j:[0,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(j=1,...,m)$ sont des fonction continues donnée. et γ est un nombre positif et $0<t_1<t_2<...t_p\leq b$.

2.2 Problème intégrale

Lemme 2.1 *Soient* $0<\alpha,\beta\leq 1$. *On suppose que*

$$\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\neq 0.$$

Alors, la représentation intégrale d'équation suivantes :

$$D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)=\varphi(t), \quad t\in[0,b],$$

Avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} x(0)-x_0=\sum_{l=1}^{p}x(t_l), \\ I^{\delta}x(b)-\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}I^{\delta}x(\xi_i)=0, \ \lambda_i\in\mathbb{R}, \quad 0<\xi_i<b, \end{cases}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
&x(t)\\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy-\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\\
&-\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\int_0^{\xi_k}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\right.\\
&\left.-\frac{\gamma}{\Gamma(\delta+\alpha)}\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\int_0^{\xi_k}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy-\frac{b^{\delta+\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\delta+\alpha+\beta)}+\frac{b^{\delta+\alpha}\ \gamma}{\Gamma(1+\delta+\alpha)}\right)\\
&+\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_k}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\delta)}t^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_k}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p}x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)=\varphi(t), \tag{2.3}$$

En appliquant l'opérateur I^{β} à l'équation (2.3), on trouve

$$I^{\beta}\left[D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)\right]=I^{\beta}\varphi(t),$$

Ce qui implique

$$(D^{\alpha}+\gamma)x(t)=I^{\beta}\varphi(t)-k_0, \quad k_0\in\mathbb{R},$$

il vient

$$D^{\alpha}x(t)=I^{\beta}\varphi(t)-\gamma x(t)-k_0,$$

encore une fois, on a

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha}x(t)\right]=I^{\alpha+\beta}\varphi(t)-\gamma I^{\alpha}x(t)-I^{\alpha}k_0-k_1, \quad k_1\in\mathbb{R},$$

Alors

$$x(t)=I^{\alpha+\beta}\varphi(t)-\gamma I^{\alpha}x(t)-I^{\alpha}k_0-k_1,$$

C'est-dire

$$x(t)=I^{\alpha+\beta}\varphi(t)-\gamma I^{\alpha}x(t)-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}k_0-k_1.$$

Alors, pour $t = 0$ on trouve

$$\begin{aligned} x(0) &= I^{\alpha+\beta}\varphi(0) - \gamma I^{\alpha}x(0) - \frac{0^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}k_0 - k_1 \\ &= \sum_{l=1}^{p} x(t_l) + x_0, \end{aligned}$$

Or

$$k_1 = -\left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l) + x_0\right).$$

Maintenant, pour $t = \xi_i$, $k = \overline{1,n}$

$$x(\xi_i) = I^{\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma I^{\alpha}x(\xi_i) - I^{\alpha}k_0 - k_1,$$

Donc

$$I^{\delta}x(\xi_i) = I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma I^{\delta+\alpha}x(\xi_i) - I^{\delta+\alpha}k_0 - I^{\delta}k_1,$$

Alors

$$I^{\delta}x(\xi_i) = I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma I^{\delta+\alpha}x(\xi_i) - \frac{\xi_i^{\alpha+\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}k_0 - \frac{\xi_i^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1,$$

C'est-à-dire

$$e^{\lambda_i}I^{\delta}x(\xi_i) = e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i) - \frac{e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}k_0 - \frac{e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1,$$

Ou bien

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}I^{\delta}x(\xi_i) \qquad (2.4)\\ =\; &\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i) - \frac{k_0}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta} \\ &-\frac{k_1}{\Gamma(1+\delta)}\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$x(b) = I^{\alpha+\beta}\varphi(b) - \gamma I^{\alpha}x(b) - I^{\alpha}k_0 - k_1,$$

Donc

$$I^{\delta}x(b) = I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(b) - \gamma I^{\delta+\alpha}x(b) - I^{\delta+\alpha}k_0 - I^{\delta}k_1,$$

Alors

$$I^{\delta}x(b) = I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(b) - \gamma I^{\delta+\alpha}x(b) - \frac{b^{\alpha+\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}k_0 - \frac{b^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1. \qquad (2.5)$$

De (2.4) et (2.5), il vient

$$\begin{aligned} &I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(b) - \gamma I^{\delta+\alpha}x(b) - \frac{b^{\alpha+\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}k_0 - \frac{b^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1 \\ =\; &\sum_{k=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i) - \gamma\sum_{k=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i) \\ &-\frac{k_0}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta} - \frac{k_1}{\Gamma(1+\delta)}\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-\frac{b^{\alpha+\delta}}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}k_0\\
=&\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i)-\gamma\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i)-\frac{k_1}{\Gamma(1+\delta)}\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}\\
&-I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(b)+\gamma I^{\delta+\alpha}x(b)+\frac{b^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1,
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+\delta)}\left(\sum_{k=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\right)k_0\\
=&\sum_{k=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i)-\gamma\sum_{k=1}^{k} e^{\lambda i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i)-\frac{k_1}{\Gamma(1+\delta)}\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}\\
&-\frac{b^{\delta+\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\delta+\alpha+\beta)}+\frac{b^{\delta+\alpha}\gamma}{\Gamma(1+\delta+\alpha)}+\frac{b^{\delta}}{\Gamma(1+\delta)}k_1,
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
k_0 =& \frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)}\left[\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha+\beta}\varphi(\xi_i)\right.\\
&\left.-\gamma\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}I^{\delta+\alpha}x(\xi_i)-\frac{b^{\delta+\alpha+\beta}}{\Gamma(1+\delta+\alpha+\beta)}+\frac{b^{\delta+\alpha}\ \gamma}{\Gamma(1+\delta+\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}\right)k_1\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&x(t)\\
=&\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy-\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\\
&-\left(\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\right.\\
&-\frac{\gamma}{\Gamma(\delta+\alpha)}\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy-\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\\
&\left.+\frac{\gamma}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)\\
&+\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\delta)}t^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}$$

Ou bien

$$
\begin{aligned}
&x(t)\\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy-\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\right)\\
&-\left(\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\right)\\
&\times\left[\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\right)\right.\\
&-\gamma\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)-\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\\
&\left.+\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)\right]\\
&+\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)}\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}\right)+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p}x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}
$$

■

Remarque 2.1 *Posons*

$$
\Pi=\frac{\Gamma(1+\alpha+\delta)}{\sum_{i=1}^{k}\left(e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\delta}-b^{\alpha+\delta}\right)},
$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
&x(t)\\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy-\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\right)\\
&-\left(\Pi\;\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\right)\\
&\times\left[\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\right)\right.\\
&-\gamma\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)-\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\varphi(y)dy\\
&\left.+\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)\right]\\
&+\Pi\;\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}\right)+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p}x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}
$$

2.3 Problème du point fixe

On notera l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,b]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$X = C([0,b],\mathbb{R}).$$

On transforme notre problème à un problème du point fixe, alors on considère l'opérateur $\psi : X \to X$ par :

$$\begin{aligned}
&\psi x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\left[f(y,x(y))+\sum_{j=1}^m I^{\delta_j}h_j(y,x(y))\right]dy-\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\right) \\
& -\left(\Pi\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\right) \\
& \times\left[\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\left[f(y,x(y))+\sum_{j=1}^m I^{\delta_j}h_j(y,x(y))\right]dy\right)\right. \\
& -\gamma\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right) \\
& -\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\left[f(y,x(y))+\sum_{j=1}^m I^{\delta_j}h_j(y,x(y))\right]dy \\
& \left.+\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)\right] \\
& +\Pi\,\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^k e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}\right)+1\right)\left(\sum_{l=1}^p x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& \psi x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\left[f(y,x(y))\right]dy \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1}\left[\sum_{j=1}^{m} I^{\delta_j}h_j\left(y,x(y)\right)\right]dy \\
& -\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}x(y)dy\right) \\
& -\left(\Pi\ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\right) \\
& \times\left[\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}f(y,x(y))dy\right)\right. \\
& +\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\left[\sum_{j=1}^{m} I^{\delta_j}h_j\left(y,x(y)\right)\right]dy\right) \\
& -\gamma\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{\xi_i}(\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right) \\
& -\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}f(y,x(y))dy \\
& -\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1}\left[\sum_{j=1}^{m} I^{\delta_j}h_j\left(y,x(y)\right)\right]dy \\
& \left.+\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{b}(b-y)^{\delta+\alpha-1}x(y)dy\right)\right] \\
& +\Pi\ \frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}t^{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta}-b^{\delta}\right)+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l)+x_0\right).
\end{aligned}
$$

C'es- tà-dire

$$
\begin{aligned}
& \psi x(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy \\
& + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j)} \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy \right) \\
& - \gamma \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} x(y)dy \right) \\
& - \left(\Pi \, \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \right) \\
& \times \left[\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - y)^{\delta+\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta+\delta_j)} \int_0^{\xi_i} (\xi_i - y)^{\delta+\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy \right) \\
& - \gamma \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)} \int_0^{\xi_k} (\xi_i - y)^{\delta+\alpha-1} x(y)dy \right) \\
& - \frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)} \int_0^{b} (b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy \\
& - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta+\delta_j)} \int_0^{b} (b-y)^{\delta+\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy \right) \\
& \left. + \gamma \left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)} \int_0^{b} (b-y)^{\delta+\alpha-1} x(y)dy \right) \right] \\
& + \Pi \, \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \xi_i^{\delta} - b^{\delta} \right) + 1 \right) \left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l) + x_0 \right).
\end{aligned}
$$

Remarque 2.2 *Nous décomposons l'opérateur ψ comme suit :*

$$\psi x(t) = \psi_1 x(t) + \psi_2 x(t),$$

Où

$$
\begin{aligned}
&\psi_1 x(t) \\
= \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j)}\int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy\right) \\
& -\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1} x(y)dy\right) - \left(\Pi\ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha}\right) \\
& \times\left[\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^{\xi_i} (\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy\right)\right. \\
& +\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta+\delta_j)}\int_0^{\xi_i} (\xi_i-y)^{\delta+\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy\right) \\
& -\gamma\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^{\xi_i} (\xi_i-y)^{\delta+\alpha-1} x(y)dy\right) \\
& -\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha+\beta-1} f(y,x(y))dy \\
& -\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha+\beta+\delta_j)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha+\beta+\delta_j-1} h_j(y,x(y))\,dy\right) \\
& \left.+\gamma\left(\frac{1}{\Gamma(\delta+\alpha)}\int_0^b (b-y)^{\delta+\alpha-1} x(y)dy\right)\right],
\end{aligned}
$$

et

$$
\psi_2 x(t) = \Pi\ \frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i}\xi_i^{\delta} - b^{\delta}\right)+1\right)\left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l)+x_0\right).
$$

Notation 2.1 *Notons que*

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 \;=\;& \frac{b^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{b^{\alpha+\beta+\delta_j}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+1)} \\
& +\frac{|\Delta|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}\right. \\
& +\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\beta+\delta+\delta_j}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+\delta_j+1)} + \frac{b^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} \\
& \left.+\sum_{j=1}^{m}\frac{e^{\lambda_i}\xi_i^{\alpha+\beta+\delta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+\delta+\delta_j+1)}\right),
\end{aligned}
$$

Et

$$\Pi_2 = |\gamma| \left(\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|\Delta| b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} + \frac{b^{\alpha+\delta\beta}}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} \right] \right),$$

Ainsi que

$$\Pi_3 = \frac{|\Delta| b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\delta+1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i} \xi_i^\delta - b^\delta \right) \right) + 1,$$

Avec

$$\Delta = \frac{\Gamma(\alpha+\delta+1)}{\sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\delta} - b^{\alpha+\delta} \right)}.$$

2.4 Les hypothèses

On suppose que :

- (H_1) : Les fonctions $f, h_j : [0,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(j = 1, ..., m)$ sont continues.
- (H_2) : Soient $x, y \in \mathbb{R}$,tels que

$$\exists N_0 > 0, \ \ |f(t,x) - f(t,x)| \le N_0 |x-y|, \ \ t \in [0,b].$$

- (H_3) : Soient $x, y \in \mathbb{R}$,tels que

$$\exists N_j > 0, \ \ |h_j(t,x) - h_j(t,x)| \le N_j |x-y|, \ \ j = 1, ..., m,$$

- (H_4) : Il existe une fonction continue $\theta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ telle que :

$$\theta(v) \le Mv,$$

tel que

$$M\Pi_3 + \Pi_2 < 1,$$

Aussi

$$\left| \sum_{l=1}^{p} x(t_l) - \sum_{l=1}^{p} y(t_l) \right| \le \theta \|x-y\|, \ x, y \in C([0,b], \mathbb{R}).$$

- (H_5) : Il existe une fonction continue $\varphi, \varphi_j : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ et des fonctions croissante Φ, Φ_j sont continués sur $[a,b]$ telles que :

$$|f(t, x(t))| \le \Phi(t) \varphi(|x|),$$

Aussi

$$|h_j(t, x(t))| \le \Phi_j(t) \varphi_j(|x|).$$

- (H_6) : Soit δ_0 un nombre réel tel que :

$$\frac{\delta_0}{\Lambda \|\Phi\| + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0) + \Pi_3 |x_0|} > \frac{1}{1 - (\Pi_2 + \Pi_3 M)},$$

tel que

$$\Lambda = \frac{b^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\Delta| b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} + \frac{b^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} \right],$$

Et pour $j = \overline{1, m}$, on a

$$\Lambda_j = \frac{b^{\alpha+\beta+\delta_j}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+1)} + \frac{|\Delta| b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\beta+\delta_j+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+\delta+1)} + \frac{b^{\alpha+\beta+\delta_j+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+\delta+1)} \right]. \blacksquare$$

2.5 Quelques résultas

Théorème 2.1 *On suppose que*

$$\sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\delta} - b^{\alpha+\delta} \right) \neq 0.$$

Alors, notre problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution.

Preuve. **Etape 1 :** On montre que $\psi_1 : \overline{\Omega}_{\delta_0} \to X$ est continue avec

$$\overline{\Omega}_{\delta_0} = \{ x \in C([0, b], \mathbb{R}) : \quad \|x\| \leq \delta_0 \}.$$

Soit $x_n \subset \overline{\Omega}_{\delta_0}$, tel que

$$\|x_n(t) - x(t)\| \to 0, \; n \to +\infty.$$

On a

$$\|f(x, x_n(t)) - f(x, x(t))\| \to 0, \; n \to +\infty,$$

Aussi, nous avons

$$\|h_j(x, x_n(t)) - h_j(x, x(t))\| \to 0, \; n \to +\infty.$$

Il vient

$$\|\psi_1(x, x_n(t)) - \psi_1(x, x(t))\| \to 0, \; n \to +\infty.$$

Etape 2 : On montre que $\psi_1(\overline{\Omega}_{\delta_0})$ est borné. Pour tout $x \in \overline{\Omega}_{\delta_0}$, nous avons

$$\|\psi_1 x\| \leq \Lambda \|\Phi\| \varphi(\delta_0) + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0) + \Pi_3 \delta_0,$$

Ce qui implique que $\psi_1 \left(\overline{\Omega}_{\delta_0} \right)$ est borné.

Etape 3 : On montre que ψ_1 est équicontinu. Donc, soit $t_1, t_2 \in [0, b]$ tels que $t_1 > t_2$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \psi_1 x(t_1) - \psi_1 x(t_2) \right\| \\
\leq\ & \frac{\|\Phi\| \varphi(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left[t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta} \right] + \sum_{j=1}^{m} \frac{\|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0)}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+1)} \left[t_2^{\alpha+\beta+\delta_j} - t_1^{\alpha+\beta+\delta_j} \right] \\
& + \frac{|\gamma| \delta_0}{\Gamma(\alpha+1)} \left[t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \right] + \frac{|\Delta|}{\Gamma(\alpha+1)} \left[t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \right] \Bigg[\|\Phi\| \varphi(\delta_0) \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} \\
& + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\beta+\delta_j+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+\delta_j+1)} \|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0) + |\gamma| \delta_0 \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\lambda_i} \xi_i^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} \\
& + \frac{b^{\alpha+\beta+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)} \|\Phi\| \varphi(\delta_0) + \frac{b^{\alpha+\beta+\delta_j+\delta}}{\Gamma(\alpha+\beta+\delta_j+\delta+1)} \|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0) + \frac{|\gamma| \delta_0 b^{\alpha+\delta}}{\Gamma(\alpha+\delta+1)} \Bigg],
\end{aligned}$$

On obtient

$$\left\| \psi_1 x(t_1) - \psi_1 x(t_2) \right\| \to 0, \quad t_1 \to t_2,$$

C'est-à-dire ψ_1 est équicontinu.

Etape 4 : On montre que ψ_2 est contractant. D'après l'hypothèse (H_4), il est clair que :

$$\begin{aligned}
|\psi_2 x(t) - \psi_2 y(t)| &= \Bigg| \Pi \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \xi_i^{\delta} - b^{\delta} \right) + 1 \right) \left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l) + x_0 \right) \\
&\quad - \Pi \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^{\alpha} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \xi_i^{\delta} - b^{\delta} \right) + 1 \right) \left(\sum_{l=1}^{p} x(t_l) + x_0 \right) \Bigg| \\
&\leq \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Etape 5 : On montre que ψ_2 est borné. On a

$$\|\psi_2 x\| \leq \Pi_3 \ |x_0| + M\delta_0.$$

Etape 6 : On montre que le cas (ii) du théorème 1.5, n'est pas vérifier, tel que en utilisant le raisonnement par l'absurde. Alors, soit (ii) est satisfaite, c'est-à-dire Il existe $x \in \partial\Omega$;

$$\exists \mu : \ 0 < \mu < 1; \ \ x \in \partial\Omega_{\delta_0} : \ \ x = \mu\varphi(x),$$

Donc

$$\|x\| = \delta_0,$$

On obtient

$$\frac{\delta_0}{\Lambda \|\Phi\| + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \|\Phi_j\| \varphi_j(\delta_0) + \Pi_3 |x_0|} \leq \frac{1}{1 - (\Pi_2 + \Pi_3 M)},$$

C'est une contradiction de hypothèse (H_6). ■

Chapitre 3

EDFs au sens Hadamard

3.1 Introduction

Cette section est consacrée à l'étude existence la solution intégrale d'un éqaution différentiel fractionnaire suivante :

$$D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)-f(t,x(t))=0, \quad t\in[1,e], \quad \gamma\in\mathbb{R}, \tag{3.1}$$

Avec conditions suivante :

$$\begin{cases} x(1)+x(e)=0, \\ D^{\alpha}x(1)+D^{\beta}x(e)=0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Où :

(a) D^{α} et D^{β} sont des dérivées fractionnaires d'ordre α,β respectevement au sens d'Hadamard tel que : $0<\alpha,\beta<1$.

1. $f:[1,e]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

3.2 Solution intégrale

Lemme 3.1 *La représentation intégrale du problème au limite fractionnaire (3.1)-(3.2) est donnée par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &-\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}x(s)\frac{ds}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha+\beta-1}f(s,x(s))\frac{ds}{s} \\ &+\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e(\log\frac{e}{s})^{\alpha-1}x(s)\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Preuve. On considère l'équation suivante :

$$D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)-f(t,x(t))=0,$$

maintenant, on applique l'opérateur I^{β} (intégrale au sens Hadamard), il vient

$$I^{\beta}\left[D^{\beta}(D^{\alpha}+\gamma)x(t)\right]=I^{\beta}\left[f(t,x(t))\right],$$

D'où

$$D^\alpha x(t) = I^\beta f(t, x(t)) - \gamma x(t) + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

Pour déterminer la constante c_0, on utilise les conditions aux limites on trouve :

$$D^\alpha x(1) = I^\beta f(1, x(1)) - \gamma x(1) + c_0,$$

Ainsi que

$$D^\alpha x(e) = I^\beta f(e, x(e)) - \gamma x(e) + c_0,$$

Et puisque $x(1) + x(e) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & I^\beta f(1, x(1)) - \gamma x(1) + c_0 \\ = & - \ I^\beta f(e, x(e)) + \gamma x(e) - c_0, \end{aligned}$$

Donc

$$c_0 = -\frac{1}{2} I^\beta f(e, x(e)).$$

Alors, il vient

$$D^\alpha x(t) = I^\beta f(t, x(t)) - \gamma x(t) - \frac{1}{2} I^\beta f(e, x(e)).$$

On applique l'opérateur I^α, on a

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = I^\alpha I^\beta f(t, x(t)) - \gamma I^\alpha x(t) - \frac{1}{2} I^\alpha I^\beta f(e, x(e)),$$

Ou bien

$$x(t) = I^{\alpha+\beta} f(t, x(t)) - \gamma I^\alpha x(t) - \frac{1}{2} I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Encore une fois, en utilisant les conditions aux limites, ona

$$x(1) = I^{\alpha+\beta} f(1, x(1)) - \gamma I^\alpha x(1) - \frac{1}{2} I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) + c_1,$$

Et

$$x(e) = I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) - \gamma I^\alpha x(e) - \frac{1}{2} I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) + c_1,$$

Donc

$$c_1 = \frac{\gamma}{2} I^\alpha x(e).$$

Enfin

$$x(t) = I^{\alpha+\beta} f(t, x(t)) - \gamma I^\alpha x(t) - \frac{1}{2} I^{\alpha+\beta} f(e, x(e)) + \frac{\gamma}{2} I^\alpha x(e),$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 4

Exemple

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{2}{5}}(D^{\frac{5}{8}}+\dfrac{1}{15})x(t)=f(t,x(t)+\sum_{j=1}^{2}I^{\delta_j}h_j\left(t,x(t)\right), \quad t\in[0,1], \\ x(0)-\dfrac{1}{20}=\sum_{l=1}^{2}x(t_l)\ , \\ I^{\frac{1}{2}}x(1)-\sum_{i=1}^{2}e^{\lambda_i}I^{\frac{1}{2}}x(\xi_i)=0,\ \lambda_i\in\mathbb{R}, \quad 0<\xi_i<1. \end{cases}$$

On a

$$\beta=\frac{2}{5}, \qquad \alpha=\frac{5}{8}, \qquad \gamma=\frac{1}{15}, \quad x_0 \ =\frac{1}{20}.$$

Ainsi que

$$f(t,x)=\frac{\exp(-t)x}{(10+\exp(t))(1+x)},$$

D'autre part, pour tout $t\in[0,1]$ et $x,y\in\mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} |f(t,x)-f(t,y)| &\leq \frac{\exp(-t)}{(10+\exp(t))}\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right| \\ &\leq \frac{1}{11}|x-y|. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] B. Ahmad and S.K Ntouyas :On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems , Appl. Math. Comput., PIER 47, pp 119–131, (2015). 14

[2] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo : Fractional Calculus Models and Numerical Methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. World Scientific,PIER 33, Boston (2012). 14

[3] M. Benchohra, S. Hamani, S.K Ntouyas : Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear. Anal. tma, PIER 71, pp 2391–2396, (2009). 14

[4] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt. Math. , (2012). 8

[5] H. Beddani, and M. Beddani, *Solvability for a differential systems via Phi-Caputo approach.* Journal of Science and Arts. No. 3(56), pp. 749-762, (2021)

[6] H. Beddani and Z. Dahmani, Solvability for a nonlinear diffrential problem of Langevin type via Phi-Caputo approach. Eur. J. Math. Appl. 1 :11. (2021)

[7] H. Beddani, M. Beddani and Z. Dahmani, *Nonlinear Differential Problem with p-Laplacian and via Phi-Hilfer Approach : Solvability and Stability Analysis.* Eur. J. Math. Anal. 1 164-181. (2021)

[8] H. Beddani, *$(n+1)$-Parameter singular fractional differential equation.* Asia Mathematika. Volume : 5 Issue : 1 , Pages : 11-18. (2021).

[9] J. Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor , Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892). 8

[10] S. Hamani, M. Benchohra and John R. Graef, Existence results for boundary-value problems with nonlinear fractional differential inclusions and integral conditions,Electron. J. Diff . Equ., Vol. 10(2010), 20, p. 1-16.

[11] M. Houas and Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions. Lobachevskii Journal of Math- ematics. 37, (2016), no. 2, 120-127.

[12] M. Houas, Existence results for fractional diffrential equations involving two Caputo derivatives with nonlocal conditions. Canad. J. Appl. Math. 3 (2021), no. 1, 46-60. Prior Science Publishing.

[13] A.A. Kilbas : Hadamard-type fractional calculus, Korean Math. Soc, PIER 38, pp 1191–1204, (2001). 11

[14] C. KIATARAMKUL, SK. NTOUYAS, J. TARIBOON AND A. KIJJATHANAKORN : Generalized Sturm-Liouville and Langevin equations via Hadamard fractional derivatives with anti-periodic boundary conditions. BOUNDARY VALUE PROBLEMS. DOI 10.1186/S13661-016-0725-1

[15] M. Kaid, M. Belhamiti, Z. Dahmani and A. T. Abdulrahman, Solvability for a system of fractional Sturm-Liouville Langevin equations. Sci.Int.(Lahore),33(1),75-89, (2021).

[16] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* ; World Scientific : Singapore, 2000.

[17] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,John Wiley, New York, 1993.

[18] T. MUENSAWAT, SK. NTOUYAS AND J. TRIBOON : Systems of Generalized Sturm-Liouville and Langevin Fractional differential Equations. Adv. Differ. Equ. 2017, 63.

[19] M. HOUAS et Z. DAHMANI : New resultats for a system of two fractional differential equations involving n Caputo derivatives. Kragujevac Journal of Mathematics. Pages 283-301.

[20] D. O'Regan and R. Precup, Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions, J. Math. AnaL. Appl. 245 (2000), 594-612.

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[23] M. Sowmya and A.S. Vatsala, Generalized Iterative Methods for Caputo Fractional Differential Equations via Coupled Lower and Upper Solutions with Superlinear Convergence, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 15 (2) (2015) 198208.

[24] S. Szufla, On the application of measure of noncompactness to existence theorems, Rendiconti del Seminaro Mathematico Della Universita di Padova 75 (1986), 1-14.

[25] A. Oualid, Z. Dahmani : Differential Equation Via Hadamard Approach , Some Existence Uniqueness Results, Int. J. Open Prob. Compt. Math., Accepted paper, (2018). 5, 16, 21