

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Amira CHERGUI

La méthode des ondelettes de Jacobi et application à la résolution des équations différentielles partielles et des problèmes variationnels

soutenu publiquement le 23 Juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Naima LAHMAR ABLAOUI	MCA	Université de Mostaganem, Algérie
Examineur :	Nadira ABBASSA	MCB	ENS de Mostaganem
Encadreur :	Sidi Mohamed BAHRI	Professeur	Université de Mostaganem, Algérie
Co-encadreur :	Nadjib Mohamed BAHRI	MAA	ENS de Mostaganem

Année Universitaire : 2021 / 2022

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon père TAZGHATT, l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et bonheur, celui qu'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde dans son vaste paradis.

A ma mère AICHA, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager, que Dieu te préserve pour nous.

A mon cher frère et fils MOHAMED Je ne saurais exprimer mon amour seulement par des mots. Que Dieu te protégé et te garde pour nous.

A mes précieuses sœurs AHLEM & NADJET a votre aide, générosité ont été pour moi une source d'encouragement et de confiance. Qu'il me soit permis aujourd'hui de l'assurer mon profond amour et ma grande reconnaissance. J'implore Dieu qu'il vous apporte bonheur, et vous aide à réaliser tous vos vœux.

A ma chère sœur SARRA, je ne peux pas exprimer à travers ses lignes tous mes sentiments d'amour et tendresse envers toi, tu es ma meilleure amie, je te souhaite la réussite dans ta vie personnelle et professionnelle.

A mes sœurs et mes fillettes CHAIMA & MARIA que j'aime, je vous souhaite un avenir plein de joie, réussite et de sérénité. Je vous exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour.

A mon chère Mari FETHI Ton amour ne m'a procuré que confiance et stabilité. Tu as partagé avec moi les meilleurs moments, aux moments les plus difficiles de ma vie, tu étais toujours à mes côtés, tu es mon ange gardien, Je te remercie de ne m'avoir jamais déçu. Aucun mot ne pourrait exprimer ma gratitude, mon amour et mon respect. J'espère te combler et te rendre toujours heureux.

A mes chères amies NADJWA, MARIA, CHAIMAA, AICHA vous êtes des sœurs pour moi, vous êtes toujours là pour me soutenir, m'aider et m'écouter. Merci pour vos amours et vos amitiés, que Dieu vous protège et vous procure joie et bonheur et que notre amitié dure à jamais.

À tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

Amira

Remerciements

Avec l'aide de Dieu clément et miséricordieux, j'ai pu achever ce travail, je le remercie m'avoir donné la force, le courage et la patience pour finaliser ce projet.

Je exprime ma sincère gratitude et remerciements à mon encadreur Mr. BAHRI Sidi Mohamed, Professeur à l'université de Mostaganem.

Je exprime mon reconnaissance à mon Co- encadreur Mr. BAHRI MOHAMED NADJIB pour la grande qualité scientifique de son encadrement, sa disponibilité, ses précieux conseils et son encouragement qui ont contribué efficacement à l'avancement de travail et pour le temps qu'il a consacré à m'apporter des divers aspects de ce sujet, ce qui a enrichi ma compréhension. Particulièrement pour ses qualités humaines.

Mes remerciements les plus respectueux s'adressent au Dr. Naima LAHMAR-ABLAOUI, pour son enseignement et son soutien tout au long de l'année. Elle était une enseignante exceptionnelle. Un grand merci à l'honneur qu'elle m'a fait d'accepter d'être le président de mon jury. Je tiens à remercier également Mme. Nadira ABBASSA d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je présente mes remerciements à Mr. Houari FETTOUCH, Mme. Zineb KAISSERLI, Mme. Soumia OULD ALI, Mme. Rabab BOUABDELLI. Professeurs à l'université de Mostaganem, pour l'aide qu'ils ont apporté durant toutes les années universitaires.

Je remercie au fond du cœur la doctorante Nadjat HAMIDAT pour son soutien inconditionnel et son encouragement durant la période de travail.

Tous mes respects et mes remerciements adressent à tous les enseignants qui m'ont formée depuis le cycle primaire.

Table des matières

Liste des tableaux	iv
Table des figures	v
Liste des abréviations	vi
Index des notations	vii
1 Préliminaires	2
1 Généralités	2
2 Les ondelettes	5
3 Problème de calcul variationnel	13
2 Les ondelettes de Jacobi bidimensionnelles	17
1 Les ondelettes de Jacobi bidimensionnelles	17
2 Approximation d'une fonction de $L^2_w([0, 1[\times [0, 1])$	17
3 Le Produit de Kronecker	18
4 Les matrices opérationnelles de dérivation	19
5 Description de la méthode (JWM2D)	20
Bibliographie	24

Liste des tableaux

1.1	Les erreurs absolues pour $k = 2$ et différentes valeurs de M	16
2.1	Les erreurs euclidienne de l'exemple 2.2.	22

Table des figures

1.1	Les ondelettes de Jacobi $J^{(0,0)}$ (Legendre) : (a) et (b) sont les ondelettes à l'échelle 1	7
1.2	Les ondelettes de Jacobi $J^{(0,0)}$ (Legendre) : l'ondelette à l'échelle 0 (mère)	7
1.3	Les ondelettes de Jacobi $J^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ (T^2) : l'ondelette à l'échelle 0	8
1.4	Les ondelettes de Jacobi $J^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ (T^2) : (a) et (b) sont les ondelettes à l'échelle 1	8

Introduction

Ces dernières années, les ondelettes ont trouvé leur chemin dans différents domaines comme le traitement de signal, l'analyse de signal, en médecine, géophysique, les problèmes variationnels, les équations différentielles, dans la reconnaissance des formes et dans le contrôle optimale.

Parmi les avantages de l'analyse par ondelettes par rapport à l'analyse de Fourier est que la série de Fourier ne fonctionne pas bien quand elle doit décrire localement une fonction qui présente des discontinuités, contrairement à l'analyse par ondelettes qui offre une large gamme de fonctions de base dont on peut choisir la plus appropriée pour une application donnée.

La base d'ondelettes peut être utilisée pour réduire l'EDO/l'EDP à des systèmes d'équations algébriques. Ce processus simplifie considérablement la résolution de l'équation en estimant la dérivée à l'aide des matrices opérationnelles ([1]).

La façon préférée pour résoudre les équations différentielles partielles (EDPs) est d'exprimer la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions dites de base.

L'idée fondamentale de la méthode proposée est de réduire d'une équation différentielle, intégrale ou aux dérivées partielles à un simple système d'équations algébriques à l'aide des matrices opérationnelles (d'intégration ou de dérivation).

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires. D'abord, on va rappeler quelques résultats théoriques qui sont nécessaires pour le reste. On commence par les polynômes orthogonaux où on va donner leurs définitions et les différentes propriétés essentielles pour ce travail. On va également citer les polynômes orthogonaux de Jacobi . Ensuite, on introduit la notion et la théorie des ondelettes. De plus, On cite la dérivée des polynômes de Jacobi, ainsi, la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Jacobi monodimensionnelles. Enfin ,on présente les principaux résultats de l'application des ondelettes de Jacobi pour les EDOs et les problèmes variationnels.

Le deuxième chapitre est réservé pour la méthode des ondelettes de Jacobi bidimensionnelles. Une méthode numérique fondée sur les ondelettes de Jacobi de deux dimensions est développée pour la résolution des équations aux dérivées partielles qui dépendent de deux variables . On va décrire les différentes étapes effectuées pour calculer les matrices opérationnelles de dérivation. On termine ce chapitre par un test numérique, réalisé sur un exemple qui montre l'efficacité de cette méthode.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est conçu pour rappeler certaines notions mathématiques nécessaires pour le reste du manuscrit .

1 Généralités

1.1 Les Polynômes Orthogonaux

Soient a et b deux réels tels que $-\infty < a < b < +\infty$. On introduit la fonction poids w qui est une fonction positive, continue sauf peut être aux extrimités,intégrable sur $]a; b[$,et vérifiant

$$\int_a^b w(x) dx < \infty. \quad (1.1)$$

On définit l'espace de Hilbert (avec poids) $L_w^2]a, b[$ ([4]) par

$$L_w^2]a, b[= \left\{ f \mid \int_a^b f^2(x) w(x) dx < \infty \right\} \quad (1.2)$$

Le produit scalaire de cet espace est donné par

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx \quad (1.3)$$

L'équation 1.3 a un sens que si

$$f, g \in L_w^1]a, b[\quad (1.4)$$

Il est clair que si f et g sont deux fonctions continues , alors (1.4) est satisfaite .
Par conséquent ,équation (1.3)est valide .

Définition 1.1 On dit que deux fonctions f et g de $L_w^2]a, b[$ sont orthogonales([4]) si

$$\langle f, g \rangle_w = 0. \quad (1.5)$$

Définition 1.2 Une famille de fonctions f_0, f_1, \dots, f_l (l fini ou infini) est dite orthogonale si

$$\langle f_i, f_j \rangle_w = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \zeta (\zeta > 0), & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.6)$$

Si $\zeta = 1$, cette famille est dite orthonormale.

Soit $\{f_i\}_{i \geq 0}$ une famille de fonctions de $L^2_w([a, b])$ qui soit orthonormale.

Cette famille forme une base orthonormale (B.O.N) de $L^2_w([a, b])$ si et seulement si chaque fonction $f \in L^2_w([a, b])$ admet une décomposition unique dans cette famille

$$f = \sum_{i \geq 0} c_i f_i, \quad (1.7)$$

où les coefficients c_i sont définies par

$$c_i = \langle f, f_i \rangle_w = \int_a^b f(x) f_i(x) w(x) dx \quad (1.8)$$

1.2 Les polynômes orthogonaux de Jacobi

Les polynômes orthogonaux ont commencé avec Adrien-Marie Legendre dès le début du XIXe siècle où ce célèbre mathématicien a développé la suite de polynômes (auxquels son nom est maintenant associé, les polynômes de Legendre), dans le cadre de ses calculs concernant la mécanique céleste. Depuis cette époque jusqu'à aujourd'hui, la théorie concernant les polynômes orthogonaux n'a cessée de croître en importance puisque d'autres applications ont été découvertes. Aussi avec l'avènement des ordinateurs les polynômes orthogonaux sont devenus des outils d'approximation et d'encodage-décodage très utiles. Les polynômes orthogonaux ont des propriétés très intéressantes, qu'on va décrire brièvement dans cette section.

1.3 Polynômes de Jacobi

On définit la fonction poids

$$w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta. \quad (1.9)$$

Pour que la fonction $w^{(\alpha, \beta)}$ soit intégrable sur l'intervalle $[1, 1]$, on impose la condition suivante aux paramètres ([4]) α et β

$$\alpha, \beta > -1$$

On définit les polynômes de Jacobi ([2]) par la formule de Rodrigues

$$J_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^m}{2^n m!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+m} (1+x)^{\beta+m}), \quad (1.10)$$

L'orthogonalité

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux par rapport à w sur $]-1, 1[$, c.-à-d.

$$\int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_m^{(\alpha,\beta)}(x) w(x) dx = 0 \quad (1.11)$$

pour $n \neq m$,

et

$$\|J_m^{(\alpha,\beta)}\|_w^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) m! \Gamma(m+\alpha+\beta+1)}.$$

Relation de récurrence

Une propriété importante des polynômes de Jacobi est que chaque trois termes vérifient la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} J_0^{(\alpha,\beta)} = 1 \\ J_1^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2} [2(\alpha+1) + (\alpha+\beta+2)(x-1)] \\ J_{(m+1)}^{(\alpha,\beta)}(x) = (a_m x + b_m) J_m^{(\alpha,\beta)}(x) - c_m J_{m-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \end{cases}, m \geq 1; \quad (1.12)$$

avec

$$\begin{cases} a_m = \frac{(2m+\alpha+\beta+1)(2m+\alpha+\beta+2)}{2(m+1)(m+\alpha+\beta+1)} \\ b_m = \frac{(2m+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)}{2(m+1)(m+\alpha+\beta+1)(2m+\alpha+\beta)} \\ c_m = \frac{(\alpha+m)(\beta+m)(2m+\alpha+\beta+2)}{(m+1)(m+\alpha+\beta+1)(2m+\alpha+\beta)} \end{cases}$$

Équation différentielle

Il est possible de définir ces familles de polynômes par une équation différentielle

$$(1-x^2) J_m^{(\alpha,\beta)''}(x) + (\beta-\alpha - (\alpha+\beta+2)x) J_m^{(\alpha,\beta)'}(x) + m(m+\alpha+\beta+1) J_m^{(\alpha,\beta)}(x) = 0.$$

qui est équivalent au problème de Sturm-Liouville

$$-(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} J_m^{(\alpha,\beta)}(x) \right] - m(m+\alpha+\beta+1) J_m^{(\alpha,\beta)}(x) = 0.$$

Les premiers de ces polynômes

$$\begin{aligned} J_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1. \\ J_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2} [2(\alpha+1) + (\alpha+\beta+2)(x-1)]. \\ J_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8} [4(\alpha+1)(\alpha+2) + 4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)(x-1) + (\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)(x-1)^2] \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Les sélections spéciales de α et β portent des noms spéciaux

- $\alpha = \beta = 0$: polynômes de Legendre
- $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$: polynômes de chebychev (de premier espèce).
- $\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$: polynômes de chebychev (de seconde espèce).
- $\alpha = \beta$: polynômes ultrasphériques

Proposition 1.1 Cette familles de polynômes orthogonaux forme une base orthogonale de l'espace $L^2_w]a, b[$.

Dérivée d'un polynômes de Jacobi

Théorème 1.1 ([I]) Soit $x \in]-1; 1[, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > -1, \beta > -1$ et $m \in \mathbb{N}$, la dérivé de polynomes de Jacobi $J_m^{(\alpha, \beta)}$ est définie par

$$\left(J_m^{(\alpha, \beta)}(x) \right)' = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{2\Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(2i+\alpha+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \\ \left[\sum_{j=i}^{m-1} (-1)^{j-i} \frac{(2(j+1)+\alpha+\beta)\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+\beta+2)} \right] J_i^{(\alpha, \beta)}(x), & m \geq 1. \\ 0 & m = 0. \end{cases}$$

2 Les ondelettes

La théorie des ondelettes est un domaine relativement nouveau elle a été re-développée par Y.Meyer à l'université de Paris, I. Daubchies, S.Mallat et d'autres dans la fin de 1980. Elle a été appliquée dans plusieurs disciplines, en particulier dans l'analyse du signal, dans la représentation de forme d'onde et dans la segmentations. On peut dire que les ondelettes sont une extension de l'analyse de Fourier. Il existe plusieurs types d'ondelettes, la plus ancienne de toutes et la plus simple est l'ondelette de Haar (1911). Selon Meyer (1993), deux types fondamentaux d'ondelettes peuvent être considérées, les ondelettes de Grossmann-Morlet et les ondelettes de Gabor-Malvar. On peut aussi citer les ondelettes de Daubechies parmi celles des plus couramment utilisées.

L'analyse en ondelette consiste à décomposer les signaux (fonctions) en une famille de fonctions obtenues par dilatation et translation d'une ondelette dite "OndeletteMère" ou analysante.

Les ondelettes $\Psi_{a,b}(x)$ sont des fonctions générées par la translation et dilatation d'une fonction génératrice, appelée ondelette mère $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ sont définies par

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-a}{b}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

avec a est un paramètre de dilatation et b est un paramètre de translation.

Si les deux paramètres prennent des valeurs discrètes

$$\begin{cases} a = a_0^{-j}, a_0 > 1. \\ b = nb_0 a_0^{-j}, b_0 > 1. \end{cases}$$

Pour n et j entiers positifs, nous avons la famille des ondelettes discrètes

$$\Psi_{j,n}(x) = |a_0|^{-\frac{j}{2}} \Psi(a_0^j x - nb_0)$$

Où $\{\Psi_{j,n}(x)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$ forment une base d'ondelette de $L^2(\mathbb{R})$.

Si de plus $a_0 = 2, b_0 = 1$ et

$$\langle \Psi_{k,n}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{k,l} \delta_{k,m}$$

Alors, on a

$$\Psi_{j,n}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j x - n)$$

Et la famille $\{\Psi_{j,n}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de $L^2_w([0, 1])$

2.1 Les ondelettes de Jacobi monodimensionnelles

Les ondelettes de Jacobi sont des dilatations et translations des polynômes de Jacobi, le paramètre de dilatation $a = 2^{-j}$ et le paramètre de translation $b = (2n - 1) 2^{-j}$

$$\Psi_{n,k}^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k!(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\beta+1)}} 2^{\frac{j}{2}} J_k^{\alpha,\beta}(2^j x - 2n + 1), & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $k = 0, \dots, nc - 1$ ($nc \in \mathbb{N}^*$ est le degré du polynôme), $n = 1, \dots, 2^{j-1}$ ($j \in \mathbb{N}^*$) est le nombre des niveaux de la décomposition et $x \in [0, 1]$.

Remarque 1.2 Le coefficient $\sqrt{\frac{k!(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\beta+1)}}$ assure l'orthonormalité de la base.

D'après ces figures, on remarque que la forme et le positionnement de chaque graphe change d'un type de polynôme à un autre, et de même, le positionnement des racines de ces polynômes change.

2.2 Approximation d'une Fonction de $L^2_w([0, 1])$

D'après la remarque (1.2), on a tout fonction $f \in L^2([0, 1])$, se décompose dans la base par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2^{j-1}} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,k} \Psi_{n,m}(x) \quad (1.14)$$

où

$$C_{n,m} = \langle f, \Psi_{n,m} \rangle_{w_n} = \int_0^1 f(x) \Psi_{n,m}(x) w_n(x) dx \quad (1.15)$$

2. LES ONDELETTES

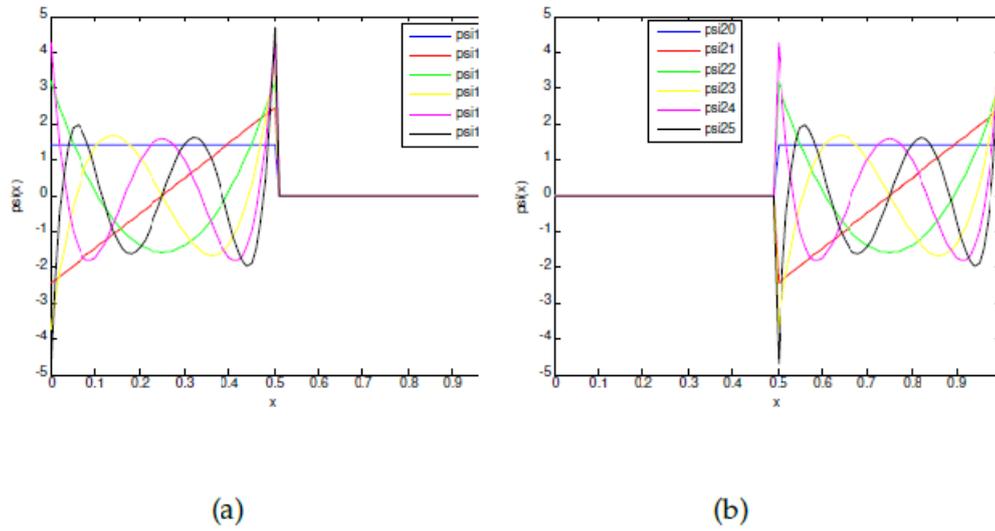


FIGURE 1.1 – Les ondelettes de Jacobi $J^{(0,0)}$ (Legendre) : (a) et (b) sont les ondelettes à l'échelle 1

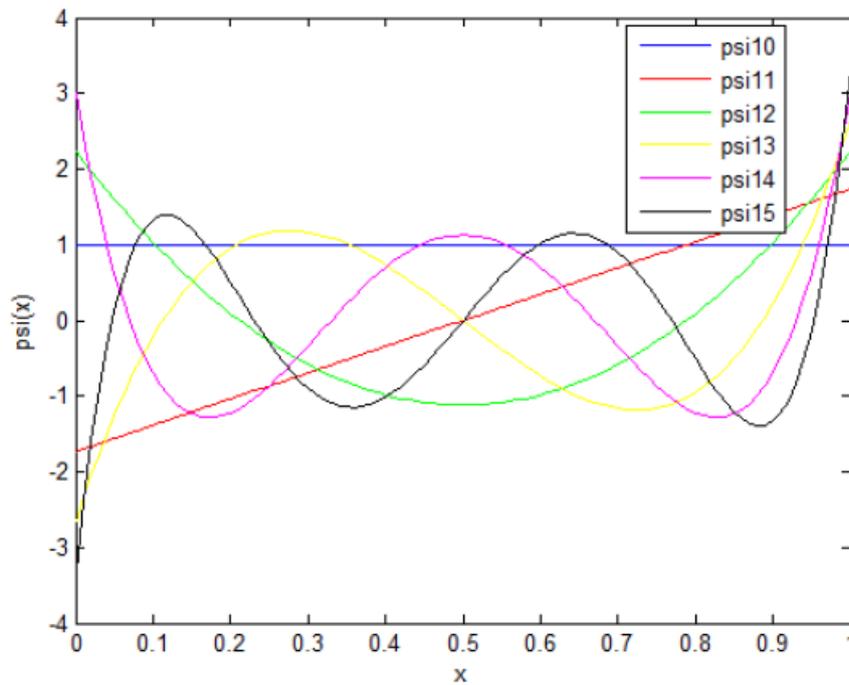


FIGURE 1.2 – Les ondelettes de Jacobi $J^{(0,0)}$ (Legendre) : l'ondelette à l'échelle 0 (mère)

2. LES ONDELETTES

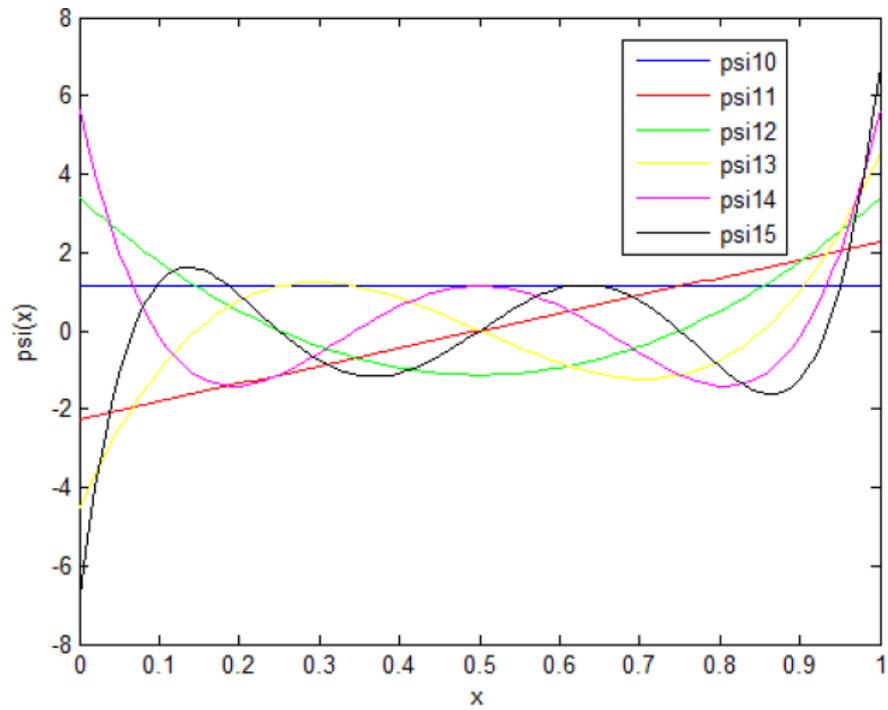


FIGURE 1.3 – Les ondelettes de Jacobi $J^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(T^2)$: l'ondelette à l'échelle 0

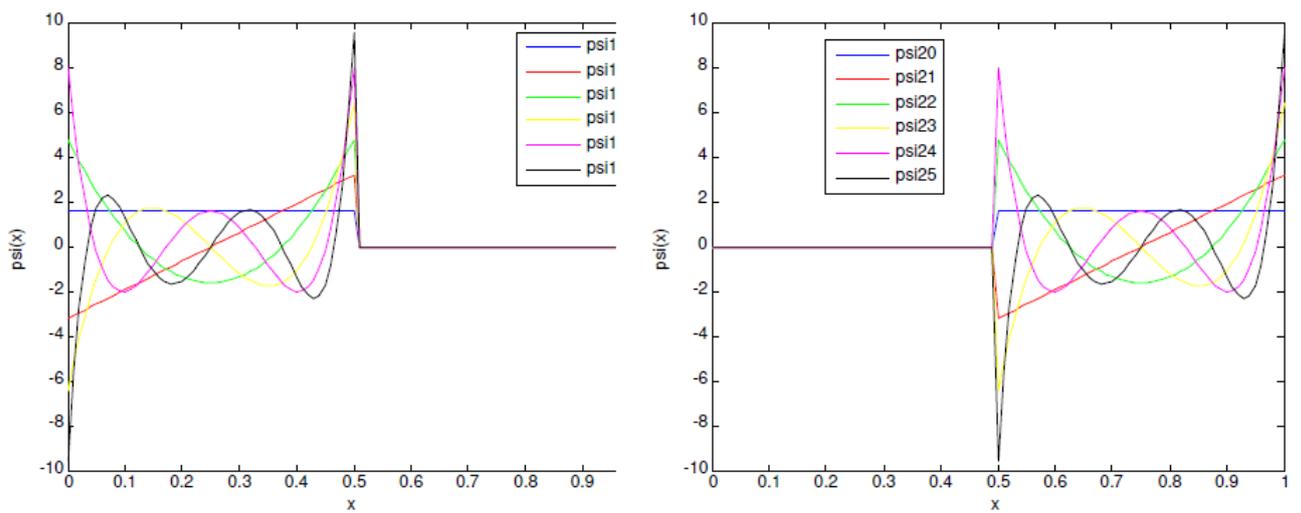


FIGURE 1.4 – Les ondelettes de Jacobi $J^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(T^2)$: (a) et (b) sont les ondelettes à l'échelle 1

La fonction dans l'équation(1.14) peut être approché par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^M C_{n,m} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x) = C^\top \Psi^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (1.16)$$

où C et ψ sont deux vecteurs de dimension $2^k(M+1)$, données par

$$C = [C_{1,0}, C_{1,1} \dots C_{1,M}, C_{2,0}, C_{2,1}, \dots, C_{2,M}, \dots, C_{2^k,0}, \dots, C_{2^k,M}]^\top \quad (1.17)$$

et

$$\Psi^{(\alpha,\beta)}(x) = [\Psi_{1,0}^{(\alpha,\beta)}(x), \Psi_{1,1}^{(\alpha,\beta)}(x) \dots \Psi_{1,M}^{(\alpha,\beta)}(x), \Psi_{2,0}^{(\alpha,\beta)}(x), \Psi_{2,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, \Psi_{2,M}^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, \Psi_{2^k,0}^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, \Psi_{2^k,M}^{(\alpha,\beta)}(x)]^\top \quad (1.18)$$

2.3 La Matrice Opérationnelle de dérivation

Dans ce qui suit , nous introduisons la matrice opérationnelle de dérivée des ondelettes de Jacobi.

Théorème 1.2 ([1]) *Soit $x \in [0, 1]$ la dérivée du vecteur d'ondelette de Jacobi de Eq (1.18) peut être exprimée par*

$$\frac{d\Psi^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = D^{(\alpha,\beta)} \Psi^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (1.19)$$

La matrice $D^{(\alpha,\beta)}$ est la matrice opérationnelle de dérivation de dimension $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$ donnée par

$$D^{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} F^{(\alpha,\beta)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^{(\alpha,\beta)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$F^{(\alpha,\beta)}$ est une matrice carrée de dimension $(M+1) \times (M+1)$ telque les éléments $(i, j)^{ème}$ sont donné par

$$F_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} 2^{k+1} \frac{\sqrt{h_{j-1}^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_{i-1}^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{j-1,i-1}^{(\alpha,\beta)} & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.21)$$

avec

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \left\| J_m^{(\alpha,\beta)} \right\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) m! \Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \quad (1.22)$$

et

$$\begin{aligned} \Upsilon_{j-1, i-1}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{\Gamma(i + \beta) (2(j - 1) + \alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + j)}{2\Gamma(i + \alpha + \beta) \Gamma(\alpha + j)} \\ &\times \left[\sum_{d=j-1}^{i-1} (-1)^{d-j-1} \frac{(2(d + 1) + \alpha + \beta) \Gamma(\alpha + d + 1)}{\Gamma(\beta + d + 2)} \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Preuve. ([1]) Soit $\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}$ définie comme dans l'équation (1.13), pour $m = 0, \dots, M, n = 1, \dots, 2^k$, et $x \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k} \right]$. La dérivée de $\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}$ par rapport à x est

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{h_m^{(\alpha, \beta)}}} 2^{\frac{k+1}{2}} 2^{k+1} \left(J_m^{(\alpha, \beta)} \right)' (2^{k+1}x - 2n + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h_m^{(\alpha, \beta)}}} 2^{\frac{k+1}{2}} 2^{k+1} \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{2\Gamma(m + \alpha + \beta + 1)} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2r + \alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + r + 1)}{\Gamma(\alpha + r + 1)} \\ &\times \left[\sum_{s=r}^{m-1} (-1)^{s-r} \frac{(2(s + 1) + \alpha + \beta) \Gamma(\alpha + s + 1)}{\Gamma(\beta + s + 2)} \right] J_r^{(\alpha, \beta)} (2^{k+1}x - 2n + 1). \end{aligned} \quad (1.24)$$

On pose

$$\begin{aligned} \Upsilon_{m,r}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{2\Gamma(m + \alpha + \beta + 1)} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2r + \alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + r + 1)}{\Gamma(\alpha + r + 1)} \\ &\times \left[\sum_{s=r}^{m-1} (-1)^{s-r} \frac{(2(s + 1) + \alpha + \beta) \Gamma(\alpha + s + 1)}{\Gamma(\beta + s + 2)} \right] \end{aligned}$$

Alors, la dérivée des ondelettes de Jacobi $\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}$ pour un n et m fixés prend la forme

$$\frac{d\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{h_m^{(\alpha, \beta)}}} 2^{k+1} \sum_{r=0}^{m-1} \Upsilon_{m,r}^{(\alpha, \beta)} \sqrt{h_r^{(\alpha, \beta)}} \frac{2^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{h_r^{(\alpha, \beta)}}} \quad (1.25)$$

$$\times J_r^{(\alpha, \beta)} (2^{k+1}x - 2n + 1) \quad (1.26)$$

$$= \frac{2^{k+1}}{\sqrt{h_m^{(\alpha, \beta)}}} \sum_{r=0}^{m-1} \Upsilon_{m,r}^{(\alpha, \beta)} \sqrt{h_r^{(\alpha, \beta)}} \psi_{n,r}^{(\alpha, \beta)}(x).$$

On peut écrire (1.25) avec la notation matricielle suivante

$$\frac{d\psi_{n,m}^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} = \frac{2^{k+1}}{\sqrt{h_m^{(\alpha, \beta)}}} \left(\Upsilon_{m,0}^{(\alpha, \beta)} \sqrt{h_0^{(\alpha, \beta)}}, \Upsilon_{m,1}^{(\alpha, \beta)} \sqrt{h_1^{(\alpha, \beta)}}, \dots, \Upsilon_{m,m-1}^{(\alpha, \beta)} \sqrt{h_{m-1}^{(\alpha, \beta)}}, 0, \dots, 0 \right) \begin{pmatrix} \psi_{n,0}^{(\alpha, \beta)} \\ \psi_{n,1}^{(\alpha, \beta)} \\ \vdots \\ \psi_{n,m-1}^{(\alpha, \beta)} \\ \vdots \\ \psi_{n,M}^{(\alpha, \beta)} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Puisque

$$\left(J_0^{(\alpha,\beta)} \right)' = 0,$$

alors, pour tout $n = 1, \dots, 2^k$, on a

$$\frac{d\Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = 0.$$

D'où, la dérivée du vecteur d'ondelettes de Jacobi pour n fixe et $m = 0, \dots, M$ est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{n,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \vdots \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}' &= 2^{k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{h_0^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_1^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{1,0}^{(\alpha,\beta)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{h_0^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_2^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{2,0}^{(\alpha,\beta)} & \frac{\sqrt{h_1^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_2^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{2,1}^{(\alpha,\beta)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{h_0^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_M^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{M,0}^{(\alpha,\beta)} & \frac{\sqrt{h_1^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_M^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{M,1}^{(\alpha,\beta)} & \dots & \frac{\sqrt{h_{M-1}^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_M^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{M,M-1}^{(\alpha,\beta)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{n,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \vdots \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ &= F^{(\alpha,\beta)} \begin{pmatrix} \Psi_{n,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{n,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \vdots \\ \Psi_{n,M}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

où $F^{(\alpha,\beta)}$ est une matrice $(M+1) \times (M+1)$, son $(i, j)^{\text{ème}}$ élément est donné par

$$F_{i,j}^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} 2^{k+1} \frac{\sqrt{h_{j-1}^{(\alpha,\beta)}}}{\sqrt{h_{i-1}^{(\alpha,\beta)}}} \Upsilon_{j-1,i-1}^{(\alpha,\beta)} & \text{si } i > j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, pour n variant de 1 à 2^k , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} &= \begin{pmatrix} F^{(\alpha,\beta)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^{(\alpha,\beta)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \Psi^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &= D^{(\alpha,\beta)} \Psi^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned} \quad (1.30)$$

■

Exemple 1.1 On va calculer la matrice opérationnelle des ondelettes de Jacobi pour $k = 1$ et $M = 1$. On a

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{1,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,1}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{h_0}} \\ \frac{1}{\sqrt{h_1}} \left(\frac{\alpha+\beta+2}{2} (4x-1) + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{h_0}} \\ \frac{1}{\sqrt{h_1}} \left(\frac{\alpha+\beta+2}{2} (4x-3) + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \end{pmatrix},$$

Donc la dérivée est donnée par

$$\begin{pmatrix} \Psi_{1,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{1,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,1}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) \\ 0 \\ \frac{4}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) \end{pmatrix}.$$

On utilise la matrice opérationnelle de dérivation des ondelettes de Jacobi (1.19) on trouve

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{1,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,1}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\sqrt{h_0}}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\sqrt{h_0}}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{1,1}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,0}^{(\alpha,\beta)} \\ \Psi_{2,1}^{(\alpha,\beta)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) \\ 0 \\ \frac{4}{\sqrt{h_1}}(\alpha + \beta + 2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 La matrice opérationnelle de la dérivée $n^{\text{ème}}$ des ondelettes de Jacobi

Le théorème 2.3 peut facilement être généralisé au cas de la dérivée d'ordre n . En fait, il suffit de dériver n fois le vecteur d'ondelettes de Jacobi et d'appliquer la même procédure que celle du théorème 2.3. Ensuite, la matrice opérationnelle de dérivation d'ordre n est donnée par

$$\frac{d^n \Psi^{\alpha,\beta}(x)}{dx^n} = \left(D^{(\alpha,\beta)} \right)^n \Psi^{\alpha,\beta}(x),$$

où $\left(D^{(\alpha,\beta)} \right)^n$ dénote la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice $D^{(\alpha,\beta)}$.

2.5 Application aux équations différentielles ordinaires

Dans cette section, on applique la méthode des ondelettes de Jacobi pour résoudre les EDOs.

Estimation d'erreur

Étant donné que les solutions des EDOs ne sont connues qu'aux points de collocation, la norme la plus appropriée est la norme euclidienne si la solution exacte est connue. La précision de la méthode proposée est estimée par

$$\begin{aligned} \text{erreur} &= \|f(x) - f_{ex}(x)\|_2 \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{nc} |f(x_i) - f_{ex}(x_i)|^2}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

où f_{ex} est la solution exacte, f est la solution approchée et nc est le nombre de points de collocation donnés.

2.6 Exemple illustratif

Soit l'équation différentielle non - linéaire du seconde ordre suivante

$$\begin{cases} f''(x) + 2(f'(x))^2 + 8f(x) = 0, x \in]0, 1[\\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Nous résolvons ce problème en utilisant la méthode des ondelettes de Jacobi décrite dans la section précédente avec des indices $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Le vecteur solution C est calculé en résolvant le système d'équations linéaires. Pour $M = 2, k = 0$; en abrégé, on aura

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 12\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$$

Et on arrive au système

$$\begin{cases} c_{0,0} - \sqrt{3}c_{0,1} + \sqrt{5}c_{0,2} = 0, \\ c_{0,0} + \sqrt{3}c_{0,1} + \sqrt{5}c_{0,2} = 0. \end{cases}$$

Dont une solution est $C^T = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{30}\right)$; ensuite, on calcule les $\Psi_{n,m}$, et on arrive à

$$\begin{aligned} f(x) &= C^T \Psi(x) \\ &= \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{30}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}(2x-1) \\ \sqrt{5}(6x^2-6x+1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(6x^2-6x+1) \\ &= -x^2 + x \end{aligned}$$

qui est l'exacte solution.

3 Problème de calcul variationnel

Définition 1.3 Soit L une fonction à valeurs réelles définie sur $[0, 1] \times C^1_{([0,1], \mathbb{R}^n)} \times C^0_{([0,1], \mathbb{R}^n)}$. Le problème du calcul des variations est le problème de trouver l'extremum du fonctionnel

$$J = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1.33)$$

Avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} x(0) = A_1, \dot{x}(0) = B_1, \\ x(1) = A_2, \dot{x}(1) = B_2. \end{cases} \quad (1.34)$$

Nous intéressons à la solution numérique de ce problème, lorsque la fonction intégrande L est quadratique, c'est-à-dire;

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = v^T(t) H v(t), \quad (1.35)$$

Où,

$$v(t) = [t, x(t), \dot{x}(t)]^T, \quad (1.36)$$

Et H est une matrice symétrique réelle de dimension $(2n + 1) \times (2n + 1)$.

Remarque 1.3 Un problème de programmation quadratique est un problème d'optimisation qui peut être formulé comme suit

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} u^T Q u + c^T u \\ A u \leq b, \end{cases} \quad (1.37)$$

Où $u \in \mathbb{R}^n$ est la variable statique, Q est une matrice symétrique réelle de dimension $n \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et A est une matrice de dimension $m \times n$.

À noter que l'intégration du produit de deux vecteurs d'ondelettes de Legendre (1.18) est obtenu comme

$$I = \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \quad (1.38)$$

avec I est la matrice identité.

3.1 La résolution d'un problème variationnel par la méthode des ondelettes de Jacobi

Dans cette section, on développe la méthode des ondelettes de Jacobi pour $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ [3] sur un problème de calcul variationnel.

En développant chaque composant du vecteur d'état en série d'ondelettes de Jacobi $((\alpha, \beta) = (0, 0))$, on obtient

$$x(t) = C^T \Psi(t) \quad (1.39)$$

En utilisant la relation (1.19), on obtient

$$\dot{x}(t) = C^T D \Psi(t) \quad (1.40)$$

Nous pouvons aussi exprimer t en termes de $\Psi(t)$ comme

$$t = d^T \Psi(t). \quad (1.41)$$

En remplaçant (1.39), (1.40) et (1.41) dans (1.36), le vecteur $v(t)$ devient

$$v(t) = [d_1^T \Psi(t), C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t)]^T. \quad (1.42)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L(t, x(t), \dot{x}(t)) &= \frac{1}{2} v(t)^T H v(t) \\ &= \frac{1}{2} (d^T \Psi(t), 0, 0) H (d^T \Psi(t), 0, 0)^T \\ &\quad + (d^T \Psi(t), 0, 0) H (0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t))^T \\ &\quad + \frac{1}{2} (0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t)) H (0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t))^T. \end{aligned} \quad (1.43)$$

En intégrant le second terme dans la relation (1.43) et en utilisant la relation (1.38). On obtient

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

Tel que

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (d^T \Psi(t), 0, 0) H (d^T \Psi(t), 0, 0)^T dt = \frac{1}{2} h_{11} d^T d,$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_0^1 (d^T \Psi(t), 0, 0) H(0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t))^T dt \\
 &= \int_0^1 (h_{12} d^T \Psi(t) \Psi^T(t) C + h_{13} d^T \Psi(t) \Psi^T(t) D^T C) dt \\
 &= (h_{12} d^T + h_{13} d^T D^T) C.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t)) H(0, C^T \Psi(t), C^T D \Psi(t))^T dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (h_{22} C^T \Psi(t) \Psi^T(t) C + h_{23} C^T \Psi(t) \Psi^T(t) D^T C + \\
 &\quad h_{32} C^T D \Psi(t) \Psi^T(t) C + h_{33} C^T D \Psi(t) \Psi^T(t) D^T C) dt \\
 &= \frac{1}{2} (h_{22} C^T C + h_{23} C^T D^T C + h_{32} C^T D C + h_{33} C^T D D^T C) \\
 &= \frac{1}{2} C^T (h_{22} I + h_{23} D^T + h_{32} D + h_{33} D D^T) C,
 \end{aligned}$$

Pour simplifier on laisse en J_2 et J_3 respectivement

$$K = h_{12} d + h_{13} D d \text{ et } \hat{H} = h_{22} I + h_{23} D^T + h_{32} D + h_{33} D D^T, \quad (1.44)$$

Ainsi,

$$J = \frac{1}{2} C^T \hat{H} C + K^T C + \frac{1}{2} h_{11} d^T d. \quad (1.45)$$

De la relation (1.44). On obtient un problème de programmation quadratique avec contraintes.

Exemple 1.2

$$\begin{cases} \min J(x) = \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + t \dot{x}(t) + x^2(t)] dt \\ x(0) = 0 \text{ et } x(1) = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (1.46)$$

En utilisant la méthode actuelle, nous obtenons

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le problème (1.46) par la méthode proposée, on développe $\dot{x}(t)$, $x(t)$ et t dans la série d'ondelettes de Jacobi $((\alpha, \beta) = (0, 0))$ comme (1.39) – (1.40) – (1.41). De (1.44) et (1.45), on calcule le problème de programmation quadratique réduite

$$\begin{cases} \min J = C^T (I + D D^T) C + (D d)^T C \\ C^T \Psi(0) = 0. \\ C^T \Psi(1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

On calcule à chaque instant t la solution $x(t)$ pour une valeur donnée de k et M . Dans ce tableau, les erreurs absolues entre la valeur exacte et la valeur numérique sont données pour $k = 2$ et $M = 4, M = 6, M = 8$.

3. PROBLÈME DE CALCUL VARIATIONNEL

t	M = 4	M = 6	M = 8
0.1	6.73×10^{-6}	5.58×10^{-9}	1.08×10^{-13}
0.2	1.02×10^{-5}	3.05×10^{-9}	1.47×10^{-13}
0.3	9.84×10^{-6}	2.87×10^{-9}	1.06×10^{-13}
0.4	6.87×10^{-6}	5.44×10^{-9}	1.39×10^{-13}
0.5	6×10^{-9}	1.72×10^{-15}	2.78×10^{-15}
0.6	4.72×10^{-6}	3.89×10^{-9}	8.03×10^{-14}
0.7	7.12×10^{-6}	2.12×10^{-9}	9.78×10^{-14}
0.8	6.92×10^{-6}	2.03×10^{-9}	7.65×10^{-14}
0.9	4.79×10^{-6}	3.82×10^{-9}	9.25×10^{-14}

TABLEAU 1.1 – Les erreurs absolues pour $k = 2$ et différentes valeurs de M.

Chapitre 2

Les ondelettes de Jacobi bidimensionnelles

1 Les ondelettes de Jacobi bidimensionnelles

Définition 2.1 Les ondelettes de Jacobi en deux dimensions sont définies sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ comme suit

$$\Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \begin{cases} \Psi_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(x) \Psi_{n',m'}^{(\alpha,\beta)}(y), \\ \text{si } \left\{ \frac{n-1}{2^k} \leq x < \frac{n}{2^k}, \frac{n'-1}{2^{k'}} \leq y < \frac{n'}{2^{k'}} \right. \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.1)$$

où,

- $k, k' \in \mathbb{N}$,
- $n = 1, \dots, 2^k, n' = 1, \dots, 2^{k'}$ représentent le nombre de niveaux de la décomposition suivant x, y respectivement,
- $m = 0, \dots, M, m' = 0, \dots, M'$ représentent le degré des polynômes de Jacobi, $M, M' \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.1 La famille $\left\{ \Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)} \right\}$ forme une base d'ondelette de $L_w^2([0, 1] \times [0, 1])$.

2 Approximation d'une fonction de $L_w^2([0, 1[\times [0, 1])$

On peut écrire toute fonction f de cet espace sous la forme suivante

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{2^{k'}} \sum_{m'=0}^{\infty} c_{n,m,n',m'} \Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)}(x,y), \quad (2.2)$$

où,

$$C_{n,m,n',m'} = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)}(x,y) dx dy,$$

On tronque la série (2.2), on trouve

$$f(x,y) \approx \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^M \sum_{n'=1}^{2^{k'}} \sum_{m'=0}^{M'} c_{n,m,n',m'} \Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)}(x,y) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(x,y), \quad (2.3)$$

où C et $\Psi^{(\alpha,\beta)}$ sont deux vecteurs de dimensions $2^k 2^{k'} (M+1) (M'+1)$ donnés par

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,0,1,0}, \dots, c_{1,0,1,M}, c_{1,0,2,0}, \dots, c_{1,0,2,M'}, \dots, c_{1,0,2^{k'},0}, \dots, c_{1,M,1,0}, \dots, \\ c_{1,M,1,M'}, c_{1,M,2,0}, \dots, c_{1,M,2,M'}, \dots, c_{1,M,2^{k'},0}, \dots, c_{1,M,2^{k'},M'}, \dots, c_{2,0,1,0}, \dots, c_{2,0,1,M'}, c_{2,0,2,0}, \dots, \\ c_{2,0,2,M'}, \dots, c_{2,0,2^{k'},0}, \dots, c_{2,0,2^{k'},M'}, \dots, c_{2,M,1,0}, \dots, c_{2,M,1,M'}, \dots, c_{2,M,2,0}, \dots, c_{2,M,2,M'}, \dots, \\ c_{2,M,2^{k'},0}, \dots, c_{2,M,2^{k'},M'}, \dots, c_{2^k,0,1,0}, \dots, c_{2^k,0,1,M'}, c_{2^k,0,2,0}, \dots, c_{2^k,0,2,M'}, \dots, c_{2^k,0,2^{k'},0}, \dots, c_{2^k,M,2^{k'},M'} \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

et

$$\Psi^{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \Psi_{1,0,1,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,0,1,M}^{\alpha,\beta}, \Psi_{1,0,2,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,0,2,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,0,2^{k'},0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,M,1,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \\ \Psi_{1,M,1,M'}^{\alpha,\beta}, \Psi_{1,M,2,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,M,2,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,M,2^{k'},0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{1,M,2^{k'},M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,0,1,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,0,1,M'}^{\alpha,\beta}, \Psi_{2,0,2,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \\ \Psi_{2,0,2,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,0,2^{k'},0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,0,2^{k'},M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,M,1,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,M,1,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,M,2,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,M,2,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \\ \Psi_{2,M,2^{k'},0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2,M,2^{k'},M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2^k,0,1,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2^k,0,1,M'}^{\alpha,\beta}, \Psi_{2^k,0,2,0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2^k,0,2,M'}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2^k,0,2^{k'},0}^{\alpha,\beta}, \dots, \Psi_{2^k,M,2^{k'},M'}^{\alpha,\beta} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

3 Le Produit de Kronecker

3.1 Objectifs

Autre forme de multiplication matricielle .Le produit de Kronecker noté \otimes est également connu comme le produit direct ou le produit tenseur .

-Avantage intéressant par rapport aux produits matricielles classiques .

-Les dimensions des deux matrices étant multipliés ensemble n'ont pas besoin d'avoir de relation les unes avec les autres .

3.2 Les applications

- Traitement du signal,
- Traitement d'image ,
- Programmation semi définie,
- Calcul quantique,etc...

Le produit de Kronecker s'avère également un noyau efficace permettant l'examen de transformation linéaire.

La résolution des équations matricielles linéaires et les grands problèmes des moindres carrés sont parmi les applications du produit de Kronecker .

3.3 Définitions et quelques propriétés du produit de Kronecker

Définition 2.2 [5] Soit \mathbb{k} espace .Le produit de Kronecker de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{k}^{m \times n}$ et de $B = (b_{ij}) \in \mathbb{k}^{p \times q}$ noté $A \otimes B$ est une matrice bloc définie par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{k}^{mp \times nq} \quad (2.6)$$

Exemple 2.1 Soient A et B deux matrices données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & -8 \\ 6 & 3 & 15 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ -12 & -6 & 18 & 9 & 4 & 2 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1 $A \otimes B \neq B \otimes A$ (en général)

Définition 2.3 [5] soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. La $k^{\text{ième}}$ puissance $A^{\otimes k}$ est définie de manière inductive par : $\forall k$ un entier positif, $A^{\otimes 1} = A$ et $A^{\otimes k} = A \otimes A^{(k-1)}$ pour $k = 2, 3, \dots$

Propriétés de bases

Théorème 2.1 [5] soit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, Alors,

- $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } B \in \mathbb{K}^{p \times q}$,
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ pour $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$,
- $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ pour $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$,
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ pour $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$ et $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$,
- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ pour $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$ et $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$,
- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ pour $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$ et $C \in \mathbb{K}^{r \times s}$,
- $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$,
- $I_m \otimes I_n = I_{mn}$.

4 Les matrices opérationnelles de dérivation

Lors de la résolution d'une EDP par la méthode des ondelettes de Jacobi, on aura besoin d'introduire les matrices opérationnelles de dérivation, notées $D_x^{(\alpha, \beta)}$, $D_y^{(\alpha, \beta)}$.

Théorème 2.2 La matrice opérationnelle de dérivation par rapport à x

La matrice opérationnelle de dérivation par rapport à x est définie par

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) = D_x^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y), \quad (2.7)$$

telque $D_x^{(\alpha, \beta)}$ est une matrice de dimension $(2^{k-1} 2^{k'-1} M M') \times (2^{k-1} 2^{k'-1} M M')$ définie par

$$D_x^{(\alpha, \beta)} = D^{(\alpha, \beta)} \otimes I. \quad (2.8)$$

avec $D^{(\alpha, \beta)}$ désigne la matrice opérationnelle de dérivation de dimension $2^k (M + 1) \times 2^k (M + 1)$, I la matrice identité et \otimes le produit de Kronecker.

La matrice opérationnelle de dérivation par rapport à y

La matrice opérationnelle de dérivation par rapport à y est définie par

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) = D_y^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y), \quad (2.9)$$

telque $D_y^{(\alpha, \beta)}$ est une matrice de dimension $(2^{k-1} 2^{k'-1} M M') \times (2^{k-1} 2^{k'-1} M M')$ définie par

$$D_y^{(\alpha, \beta)} = I \otimes D^{(\alpha, \beta)}. \quad (2.10)$$

avec I la matrice identité, $D^{(\alpha, \beta)}$ désigne la matrice opérationnelle de dérivation de dimension $2^k (M+1) \times 2^k (M+1)$ et \otimes le produit de Kronecker.

Preuve. Soit $\Psi^{\alpha, \beta}$ définie comme dans l'équation (2.5), La dérivée de $\Psi^{\alpha, \beta}$ par rapport à x est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) &= \frac{d}{dx} \left(\Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \otimes \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \right) \otimes \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \\ &= D^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \otimes \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \\ &= \left(D^{(\alpha, \beta)} \otimes I \right) \Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \\ &= \left(D^{(\alpha, \beta)} \otimes I \right) \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\ &= D_x^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) \end{aligned}$$

■

De la même manière, on trouve la dérivée de $\Psi^{(\alpha, \beta)}$ par rapport à y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) &= \frac{d}{dy} \left(\Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \otimes \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \right) \\ &= \Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \otimes \frac{d}{dy} \left(\Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \right) \\ &= \Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \otimes \left(D^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \right) \\ &= \left(I \otimes D^{(\alpha, \beta)} \right) \Psi^{(\alpha, \beta)}(x) \Psi^{(\alpha, \beta)}(y) \\ &= \left(I \otimes D^{(\alpha, \beta)} \right) \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\ &= D_y^{(\alpha, \beta)} \Psi^{(\alpha, \beta)}(x, y) \end{aligned}$$

5 Description de la méthode (JWM2D)

Dans cette section, on développe la méthode des ondelettes de Jacobi bidimensionnelles (JWM2D) sur un exemple type.

On considère l'équation d'ordre deux à coefficients constants sur $]0, 1[\times]0, 1[$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + cu(x, y) = 0, \quad (2.11)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0, y) = g(y), u(1, y) = h(y), y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \beta(x), u(x, 1) = \gamma(x), x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.12)$$

g, h, β et γ sont des fonctions données régulières.

Pour résoudre le problème (2.11), on commence par la décomposition de la fonction u dans la base des ondelettes de Jacobi $\{\Psi_{n,m,n',m'}^{(\alpha,\beta)}\}$. On applique donc (2.3), à savoir

$$u(x, y) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y), \quad (2.13)$$

avec C est le vecteur solution de ce problème. Ensuite, en appliquant le théorème 4, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = C^T D_x^{(\alpha,\beta)} \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y) \quad (2.14)$$

Une deuxième dérivation par rapport à la variable x donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = C^T \left(D_x^{(\alpha,\beta)} \right)^2 \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y) \quad (2.15)$$

En refaisant les mêmes étapes, (par rapport à la variable y), on obtient la décomposition de $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = C^T D_y^{(\alpha,\beta)} \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y) \quad (2.16)$$

Une deuxième dérivation par rapport à la variable y donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = C^T \left(D_y^{(\alpha,\beta)} \right)^2 \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y) \quad (2.17)$$

Maintenant, en substituant les équations (2.13) – (2.15) et (2.17) dans l'équation différentielle partielle (2.11), on obtient l'équation de l'inconnue C ,

$$C^T \left(a \left(D_x^{(\alpha,\beta)} \right)^2 + b \left(D_y^{(\alpha,\beta)} \right)^2 + c I \right) \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, y) = 0. \quad (2.18)$$

avec I la matrice identité.

Pour avoir une solution unique de l'équation (2.11) il faudra insérer les conditions initiales ou les conditions aux limites. On obtient via (2.3)

$$\begin{cases} u(0, y) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(0, y) = g(y), u(1, y) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(1, y) = h(y), y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, 0) = \beta(x), u(x, 1) = C^T \Psi^{(\alpha,\beta)}(x, 1) = \gamma(x), x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Colocaliser l'équation obtenue en (2.18) en utilisant des points de collocation. $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots$ on obtient un système d'équations algébriques linéaires qui peuvent être facilement résolues pour l'inconnu C .

Exemple 2.2 On va tester la méthode proposée (JWM2D) sur un exemple abstrait.

On considère l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (2.20)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0, y) = \cos y, \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = \cos x \cos y.$$

Nous résolvons le problème (2.20) avec (2.21) en utilisant la méthode des ondelettes de Jacobi décrite dans la section précédente avec des indices (α, β) différents et pour $k = 0, k' = 3, M = 3, M' = 3$.

Les résultats numériques sont présentés dans le tableau suivant

x	y	U Exacte	U approchée		Erreur	
			$(\alpha, \beta) = (0, 0)$	$(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\alpha, \beta) = (0, 0)$	$(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
0.1	0.5	0.87319	0.49678	0.999903	0.37641	0.126713
0.2	0.5	0.86008	0.49678	0.999903	0.3633	0.139823
0.3	0.5	0.83838	0.49678	0.999903	0.3416	0.161523
0.4	0.5	0.80830	0.49678	0.999903	0.31152	0.191603
0.5	0.5	0.77015	0.49678	0.999903	0.27337	0.229753
0.6	0.5	0.72430	0.49678	0.999903	0.22752	0.275603
0.7	0.5	0.67121	0.49678	0.999903	0.17443	0.328693
0.8	0.5	0.61141	0.49678	0.999903	0.11463	0.388493
0.9	0.5	0.54551	0.49678	0.999903	0.04873	0.454393

TABLEAU 2.1 – Les erreurs euclidienne de l'exemple 2.2.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a développé une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles qui dépendent de deux variables . Cette méthode est basée sur l'approximation d'une fonction par une série d'ondelettes de Jacobi , où on a construit les matrices opérationnelles de dérivation des ondelettes de Jacobi pour tous les indices (α, β) . Ensuite on a introduit une procédure calculatoire utilisant ces matrices pour résoudre des problèmes différentiels partielles en les réduisant à des systèmes d'équations algébriques

Comme perspectives pour ce travail, on peut proposer une méthode des ondelettes de Jacobi pour la résolution des problèmes variationnels.

Bibliographie

- [1] N. Abbassa, S.M.Bahri, and A.Amir. The general jacobi operational matrix of derivative for ordinary differential equations. Boletin de la sociedad mathematica Mexicana, soumis pour publication. [1](#), [5](#), [9](#), [10](#)
- [2] N. Abbassa, S.M.Bahri, and A.Amir. The general jacobi wavelets method for solving nonlinear reverse osmosis desaliation system. Applied Mathematics ans information science, sous publication. [4](#)
- [3] N. Ablaoui-Lahmar, O. Belhamiti, and S. M. Bahri. A new legendre wavelets decomposition method for solving pdes. An International Journal of Mathematical Sciences with Computer Applications, Malaya j. mat, (2(1)),2014. [14](#)
- [4] D. Jackson. Fourier series and orthogonal polynomials. published by the Mathematical Association of America, 1941. [2](#), [3](#)
- [5] Somveer Singh , Vijay kumar Patel, Vineet Kumar –SinghApplications of wavelet collocation method for hyperbolic partial differential equations via Matrices – Applied mathematics and computations 320 (2018). [18](#), [19](#)

Résumé : Ce mémoire porte sur l'utilisation des ondelettes de Jacobi pour résoudre les équations différentielles partielles (EDPs) qu'ils ont été réduits à des simples systèmes d'équations algébriques à l'aide des matrices opérationnelles de dérivation , on a pris un exemple pour vérifier l'efficacité de la méthode des ondelettes de Jacobi bidimensionnelles (JWM2D).

La matrice opérationnelle générale de dérivation des ondelettes de Jacobi monodimensionnelle et leurs applications pour résoudre les équations différentielles ordinaires (EDOs) et les problèmes variationnels sont présentées dans ce travail.

Mots-Clés. Polynômes de Jacobi, ondelettes de Jacobi, matrice opérationnelle de dérivation, équations différentielles ordinaires, équations différentielles partielles, les problèmes variationnels.

Abstract : This thesis deals with the use of Jacobi wavelets to solve partial differential equations (PDEs) that they have been reduced to simple systems of algebraic equations using operational matrices of derivation, we have taken an example to verify the efficiency of the two-dimensional Jacobi wavelet method (JWM2D) .

The general operational matrix for the derivation of one-dimensional Jacobi wavelets and their applications to solve ordinary differential equations (ODEs) and variational problems are presented in this work.

Key Words. Jacobi polynomials, Jacobi wavelets, Operational matrix of derivative, Ordinary differential equations, Partial differential equations, Variational problems.

