MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Alaa LATROUS

Équations Différentielles Complètes de Type Elliptique avec Conditions aux Limites de Robin, dans les Espaces UMD

soutenu publiquement le 30 Juin 2022, devant le jury composé de :

Président :	Zinelaabidine LATREUCH	MCA	UMAB
Examinateur :	*Rabah HAOUA*	MCA	UMAB
Encadreur :	Maamar ANDASMAS	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Soutenu par : Latrous Alaa

Équations Différentielles Complètes de Type Elliptique avec Conditions aux Limites de Robin, dans les Espaces UMD

....

Juin 2022

Devant le jury composé de

Président :	Zinelaabidine LATREUCH,	MCA,	UMAB.
Examinatreur :	Rabah HAOUA,	MCA,	UMAB.
Encadreur :	Maamar ANDASMAS,	MCA,	UMAB.

Remerciements

Louange à Allah le tout Puissant de nous avoir accordé la volonté et le courage pour accomplir ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mes professeurs du département mathématique de leurs efforts fournis dans l'enseignement que j'ai reçu tant théorique que travaux dirigés.

Je remercie aussi, mes encadreurs, Monsieur Andasmas et Mme Limame , qui ont compati avec patience par leurs conseils et orientations bien utiles pour arriver à concrétiser ce projet de mémoire de fin d'études.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes respects envers, Monsieur Z. Latreuch président de jury et Monsieur R. Haoua examinateur de ce mémoire.

Enfin, pour conclure ce projet de mémoire, je présente mes vifs remerciements à tous les enseignants qui ont participé à ma formation.

J'espère que tous mes efforts fournis au terme de ce modeste travail vous donneront satisfaction.

Veuillez recevoir, ma respectueuse considération, mon profond respect et ma gratitude.

Résumé

Notre but de travail est de faire une synthèse sur les résultats de l'article [6] concernant l'étude des équations différentielles abstraites d'ordre deux de type elliptique

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1) \tag{1}$$

avec une condition de Robin au bord $x = 0$ et autre de Dirichlet au bord $x = 1$:

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1; \tag{2}$$

telles que
* A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X de type UMD.
* f est une fonction de l'espace $L^p\,(0,1;X)$ avec $p \in \,]1,\infty[$.
On s'intérsse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution classique u du problème $(1)-(2)$ i.e. on cherche une solution u vérifiant

$$\begin{cases} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \quad u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ (ii) \; u(0) \in D(H). \end{cases} \tag{3}$$

Ce travail améliore et complète les résultats obtenus par Chaggag et autres dans [5] et par Mechden et Labbas dans [18].
Quelques exemples sont donnés à la fin de ce mémoire.

Abstract

Our work goal is to make a synthesis on the results of the article [6] concerning the study of abstract, elliptic type, differential equations of second order

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \ \ x \in (0,1)$$

with a Robin condition type at the boundary $x = 0$ and of type of Dirichlet at the boundary $x = 1$

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1;$$

such that :
– A, B and H are closed linear operators in a Banach space X of type UMD.
– f is a function in the space $L^P(0,1;X)$ with $p \in]1,\infty[$
We are interested in studying the existence, uniqueness and optimal regularity of the classical solution u of the problem $(1)-(2)$ i.e. One finds a solution u that satisfies

$$\begin{cases} (i) \ \ u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \quad u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ (ii) \ u(0) \in D(H). \end{cases}$$

This work improves and complements the results obtained by Chaggag et al in [5] and by Mechden and Labbas in [18].
Some examples are given in the end of this thesis.

Table des matières

Introduction **v**

1 Rappels **1**
1.1 Les opérateurs fermés . . . 1
1.2 L'intégrale de Dunford . . . 3
1.3 Les semi-groupes . . . 3
1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe) . . . 3
1.3.2 Les semi-groupes analytiques . . . 5
1.4 Les espaces fonctionnels . . . 6
1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre . . . 6
1.4.2 Les espaces d'interpolation . . . 7
1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov . . . 9
1.4.4 Les espaces UMD . . . 10
1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; X)$ . . . 11
1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans le cas commutatives . . . 12
1.6.1 Sommes de Da Prato et Grisvard . . . 13
1.6.2 Sommes de Dore et Venni . . . 14

2 Principaux Résultats **15**
2.1 Introduction . . . 15
2.2 *Hypothèses* . . . 16
2.3 Le cas de l'équation non complète B=0 . . . 18
2.3.1 Conditions nécessaires . . . 18
2.3.2 La solution stricte du problème . . . 22
2.4 Le cas où B génère un groupe . . . 23
2.5 Le cas où H est lié à A et B . . . 28
2.6 Exemples. . . . 31
2.6.1 Exemple 1. Conditions aux limites périodiques. . . . 31
2.6.2 Exemple 2 sur la droite réelle. . . . 34

Introduction

Dans ce travail, on étudie le problème différentiel opérationnel elliptique complet de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \qquad u(1) = u_1, \end{cases} \tag{P.1}$$

où

♦ A, B et H sont des operateurs linéaires fermés dans un espace de Banach UMD X.

♦ d_0, u_0 sont des éléments donnés de X.

L'étude se fait dans le cas où le second membre

$$f \in L^p(0,1;X), \; 1 < p < \infty.$$

L'objectif de ce travail est de trouver une solution classique u du problème (P.1) ; c'est-à-dire on cherche une fonction $u : [0,1] \to X$ telles que :

$$\begin{cases} (i) \; u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A)), \; u' \in L^p(0,1,D(B)). \\ (ii) \; u(0) \in D(H). \\ (iii) \; u \text{ satisfait (P.1)}. \end{cases}$$

Développement historique :

Soit l'équation différentielle astraite du second ordre :

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \quad p.p \;\; x \in (0,1), \tag{0.0.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0, \\ u(1) &= u_1. \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

tels que A et B sont des operateurs linéaires fermés dans un espace X, u_0, u_1 sont des éléments donnés de X. Plusieurs auteurs ont cherché l'existence de la solution du problème $(0.0.1)-(0.0.2)$ qui laisse les termes u'', Bu' et Au bien définis et appartiennent au meme espace que celui du second membre f. Différent cas sont étudiés, les plus étudiés sont le cas Holdérien où

$$f \in C^{\theta}([0,1];X), 0<\theta<1$$

et le cas L^p où le second membre

$$f \in L^p(0,1;X),\ 1<p<\infty;$$

quelques études parues dans ce genre de recherche : Krein [17], El Haial A. et Labbas R. [8], A. Favini et co-auteurs [11], [12], [13] et [14].
En 2004, par la technique des semi-groupe (Voir Krein [17]), A. Favini et co-auteurs [10] ont prouvé que si (B^2-A) est un opérateur linéaire fermé densement défini dans X, sous l'hypothèse de positivité

$$\begin{cases} B^2-A \text{ est un opérateur fermé linéaire dans } X \\ \mathbb{R}_- \subset \rho\left(B^2-A\right) \ \ et\ \exists C>0: \ \forall\lambda\geq 0 \\ \left\|\left(\lambda I+B^2-A\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{1+\lambda}, \end{cases} \tag{0.0.3}$$

avec

$$D(A) \subseteq D(B^2), \tag{0.0.4}$$

$$D((B^2-A)^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(B), \tag{0.0.5}$$

$$B(B^2-A)^{-1}y = (B^2-A)^{-1}By, \quad \forall y \in D(B), \tag{0.0.6}$$

et

$$B \text{ génère un groupe fortement continu } \left(e^{xB}\right)_{x\in\mathbb{R}}. \tag{0.0.7}$$

Le problème $(0.0.1)-(0.0.2)$ admet une solution stricte

$$u \in C^2\left([0,1];X\right) \cap C\left([0,1];D(A)\right) \text{ et } u' \in C\left([0,1];D\left(B\right)\right), \tag{0.0.8}$$

si f est Hölderienne et u_0, $u_1 \in D(A)$.
Dans [11], la condition (0.0.7) dans l'étude précédente est remplacée par la condition

$$\pm B-(B^2-A)^{\frac{1}{2}} \text{ génère un semi groupe analytique.} \tag{0.0.9}$$

Ils ont prouvé que si

$$f \in C^{\theta}([0,1];X), 0<\theta<1,$$

et que

$$u_0,\ u_1 \in D(A).$$

alors le problème $(0.0.1) - (0.0.2)$ admet une solution stricte $(0.0.8)$.
De plus,si

$$f(i),\ Au_i \in (D(A), X)_{\frac{2-\theta}{2},\infty},\ i = 0,\ 1 \quad ,$$

alors u a la propriété de la régularité maximale

$$u'',\ Bu',\ Au \in C^{\theta}([0,1]; X). \tag{0.0.10}$$

Dans le cadre L^p, pour avoir une solution stricte, généralement on suppose que l'espace X est un espace de Banach UMD, il donne plus de régularité au second membre f. Favini et co-auteurs [13], assume que X est UMD (voir [1.4.5]), dans ce cas l'hypothèse de positivité $(0.0.3)$ implique la densité du domaine $D(B^2 - A)$ (voir Hass [16]), sous les assomptions $(0.0.4) \sim (0.0.5)$, $(0.0.9)$ et $\pm B + (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \in BIP\,(\theta, X)$, le problème $(0.0.1) - (0.0.2)$ admet une solution stricte

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)) \\ u' \in L^p(0,1;D(B)). \end{cases} \quad , \tag{0.0.11}$$

si $f \in L^p(0,1;X)$ et que $u_o, u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
Pour simplifier l'ecriture de la solution explicite, Favini et co-auteurs dans [14] ont introduit (l'approche L et M) les deux opérateurs

$$L_0 = B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}} \ \text{ et } \ M_0 = -B - (B^2 - A)^{\frac{1}{2}}.$$

Sous la condition de la positivité $(0.0.3)$, telles que L_0 et M_0 ont le meme domaine et commutent entre eux, $D\,(L_0 M_0) \subset D\,(A)$, $L_0 - M_0 \subset B$, $L_0 + M_0$ est inversible et que

$$-L_0,\ -M_0 \in BIP\,(\theta, X)\,,$$

le problème $(0.0.1) - (0.0.2)$ admet une solution stricte $(0.0.11)$, si $f \in L^p(0,1;X)$ et que $u_o, u_1 \in (D(L_0^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
En 2008, Chaggag et coauteurs dans [5], ont consédéré l'équation non-complète $(0.0.1)$ telle que $B = 0$ et ils ont ajouté un parametre spectral à l'opérateur A qui devient $A_{\omega_0} = A - \omega_0 I$, avec une condition de Robin au bord $x = 0$

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \tag{0.0.12}$$

elle contient un opérateur fermé linéaire H défini sur $D\,(H) \subset X$ où X est UMD, telle que H, A_{ω_0} commutent aux sens des résolventes et sous les hypothèses

$$-A_{\omega_0},\ H \in BIP\,(\theta, X) \ \text{ et inversibles,} \tag{0.0.13}$$

$$\theta_A/2 + \theta_H < \pi \tag{0.0.14}$$

et

$$\begin{aligned} He^{x\left(-\sqrt{-A_\omega}\right)} &= e^{x\left(-\sqrt{-A_\omega}\right)}H, \\ \text{avec} \quad D\left(\sqrt{-A_\omega}\right) &\subset D\left(H\right) \end{aligned} \tag{0.0.15}$$

ils ont prouvé que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(x) + A_\omega u(x) = f(x) \quad p.p \;\; x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1, \end{array} \right. \tag{0.0.16}$$

admet une solution stricte (0.0.11) pour ω suffisament grand et que $u(0) \in D\left(H\right)$, si et seulement si $f \in L^p(0,1;X)$ $(\infty > p > 1)$ et $u_o \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$, $u_1 \in (D(A),X)_{\frac{1}{2p},p}$.

Ce mémoire est une étude qui complète le travail précédent, c'est une synthèse sur l'article [6]. On considère dans un espace UMD X, l'équation différentielle abstraite complète du second ordre

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1) \tag{0.0.17}$$

avec une condition de Robin au bord $x = 0$ et autre de Dirichlet au bord $x = 1$

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1; \tag{0.0.18}$$

telles que
* A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X de type UMD.
* f est une fonction de l'espace $L^p\left(0,1;X\right)$ avec $p \in \left]1,\infty\right[$.
On s'intérsse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution classique u du problème $(0.0.17) - (0.0.18)$ i.e. on cherche une solution u vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \quad u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ (ii) \; u(0) \in D(H). \end{array} \right. \tag{3}$$

La téchnique du travail se base sur le célèbre Théorème de Dore-Venni [7] sur l'inverse de la somme de deux opérateurs linéaires fermés et BIP et sur le théorème de réitération en théorie de l'interpolation [19], [25].

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Le premier chapitre est consacré pour quelques rappels des notions fondamentales de la théorie appliquée, ces notions seront nécéssaire pour comprendre notre travail, telles que : les opérateurs fermés, les espaces fonctionnels comme ceux de sobolève, la théorie des semi-groupes, la classe des opérateurs BIP.

Le chapitre 2 est une synthèse sur l'article [6] ; on donne la formule de représentation de la solution u. On étudie les deux cas ; le cas où $B = 0$ qui est un bon modèle pour clarifications et le cas de l'équation complète où B génère un groupe fortement continu $(G(x))_{x \in \mathbb{R}}$, puis on étudie des différentes situations où on applique les résultats obtenus pour $B = 0$ où B génère un groupe. À la fin de ce chapitre, on donne deux exemples d'application aux équations différentielles partielles.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur les notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les espaces fonctionnels, les espaces d'interpolation, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [3], [2], [4], [16], [20], [21]). On donnera aussi quelques résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif (voir [7], [15]).

1.1 Les opérateurs fermés

Soient X, E et F des espaces de Banach.

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire A est fermé si et seulement si son graphe est fermé i.e. pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Définition 1.1.2 *Soient $A : D(A) \subset X \to F$, $B : D(B) \subset X \to F$ deux opérateurs linéaires. On dit que B est une extension de A, et on note $A \subset B$ si*

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } A = B \text{ sur } D(A)$$

c'est à dire pour tout $x \in D(A)$ on a $Ax = Bx$.

Définition 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X.*

♦ *On définit l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \quad \text{est inversible dans } L(X)\}.$$

♦ *La résolvante* $R_\lambda(A)$ *de* A *au point* $\lambda \in \rho(A)$ *est définie par*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

♦ *On note par* $\sigma(A)$ *au spectre de* A*, il est défini par*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Proposition 1.1.1 *Soient* $A : D(A) \subset X \to F$ *un opérateur linéaire.*
1. Si A *est un opérateur fermé, alors pour tout* $B \in L(X, F)$*, l'opérateur*

$$A + B : D(A) \subset X \to F$$

est fermé.
2. Si A *est un opérateur fermé et injectif alors* A^{-1} *est fermé.*
3. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ *alors* A *est fermé.*

Définition 1.1.4 *Soit* $A : D(A) \subset X \to F$ *un opérateur linéaire. On peut munir* $D(A)$ *d'une norme notée* $\|.\|_{D(A)}$ *et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout* $x \in D(A)$ *par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_F.$$

Proposition 1.1.2 *Si* A *est un opérateur linéaire fermé, alors* $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.3 *Soient* $A \in L(X)$ *et* $B : D(B) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire fermé tels que* $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$*. Alors* $BA \in L(X)$*.*
Preuve *: On a* BA *est défini sur* X*. Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* X *telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } X, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

Alors comme $\mathrm{Im}(A) \subset D(B)$*,* $(Ax_n)_n$ *est une suite d'éléments de* $D(B)$ *et comme* $A \in L(X)$ *on a*

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } X, \\ B(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

B *étant fermé et* $Ax_n \in D(B)$*, d'après la définition* (1.1.1)*, on a* $B(Ax) = y$*. Ainsi* $x \in D(BA)$ *et* $(BA)x = y$*.*
BA *est donc un opérateur fermé et définie sur* X*. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient que* BA *est borné sur* X *i.e.* $BA \in L(X)$*.*

Définition 1.1.5 *[16, p. 19] On dit que l'opérateur A est sectoriel d'angle $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, si*

$$\begin{cases} i)\ \sigma(A) \subset \overline{S_\omega} \\ ii)\ M\left(A, \omega'\right) := \sup\left\{\left\|\lambda R(\lambda, A)\right\|,\ \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\right\} \text{ pour tout } \omega' \in (\omega, \pi) \end{cases}$$

Avec

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} & si\ \ 0 < \omega \leqslant \pi \\ (0, \infty) & si\ \ \omega = 0 \end{cases}$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f\left(A\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f\left(z\right) \left(zI - A\right)^{-1} dz$$

Où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ qui entourne le spectre de A et $f \in H(A)$. L'opérateur $f\left(A\right) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.
Pour plus de détails voir [16].

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X toute famille $\left(G\left(t\right)\right)_{t\geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}\left(X\right)$ vérifiant les axiomes suivants*
(i) Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & G\left(t\right)x \end{array}$$

est continue.
(ii) $G\left(0\right) = I$.
(iii) $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G\left(t+s\right) = G\left(t\right) G\left(s\right)$.
On dit aussi que $\left(G\left(t\right)\right)_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarques

$i)$ On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.

ii) On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leqslant 1.$$

Exemples

1) Soit A un opérateur borné dans X, alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur X.

2) Soit $X = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t) f)(x) = f(x - t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1 *Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\| \leqslant M e^{\omega t}.$$

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Remarques

1) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors A est fermé à domaine dense.

2) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A.

4) Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\| \leqslant M e^{\omega t},$$

alors, l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| \leqslant M (\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(G(t))_{t\geqslant 0}$, *alors*

i) Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors $G(t)x \in D(A)$.

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ *est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si* $x \in D(A)$, *de plus, pour* $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt}G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in X$ *et tout* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(A)$

$$A\int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3 *On appelle semi-groupe analytique de type* $\alpha \in \left]0, \pi/2\right[$ *toute application* G *définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ *telle que*

(1) $z \mapsto G(z)$ *est analytique sur* Σ_α.

(2) $\forall x \in X$, $G(0) = I$ *et*

$$\lim_{z\in\Sigma_\alpha \quad z\to 0} G(z)x = x$$

(1.3) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.

De plus

$$G(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{tz}(zI - A)^{-1}xdz = e^{tA}x.$$

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire vérifiant*

(1) A *fermé de domaine* $D(A)$ *dense dans* X.

(2) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *et* $\exists M > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors, A *est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* G *vérifiant*

(1) $\exists C > 0$, $\forall t > 0 : \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant C$.

(2) $\forall t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(X, D(A))$ *et* $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné), on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.4.1 *Soit $1 \leq p < +\infty$. On définit les espaces $L^p(0, R; X)$ pour $R > 0$ par*

$$L^p(0, R; X) = \left\{ g : (0, R) \longrightarrow X \ \textit{mesurable} : \int_0^R \|g(x)\|_X^p \, dx < \infty \right\}$$

La norme de cet espace est

$$\|g\|_{L^p(0,R,X)} = \left(\int_0^R \|g(x)\|_X^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$ on pose

$$L^\infty(0, R; X) = \left\{ g : [0, R] \longrightarrow X, \ \textit{mesurable} : \sup_{x \in (0,R)} ess \, \|g(x)\|_X < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{L^\infty(0,R,X)} = \sup_{x \in (0,R)} ess \, \|g(x)\| \, x.$$

Théorème 1.4.1 *L'espace $L^p(0, R; X)$, $p \in [1, +\infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

On rappelle le résultat classique :

Proposition 1.4.1 *Soient*
i) J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$,
ii) X un espace de Banach,
iii) $f : J \times [a, b] \to X$ une application continue admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a, b]$.
iv) α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a, b]$.
Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} h & : & J \longrightarrow X \\ x & \longrightarrow & h(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$ on a

$$h'(x) = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

1.4.2 Les espaces d'interpolation

On désigne par X_0 et X_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé X (c'est à dire $X_0 \hookrightarrow X$, $X_1 \hookrightarrow X$). Considérons les espaces de Banach

$$X_0 \cap X_1 \quad \text{et} \quad X_0 + X_1,$$

munis des normes $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \|x\|_{X_0} + \|x\|_{X_1}$, et

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf_{x=x_0+x_1,\quad x_i \in X_i} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right).$$

Le couple $\{X_0, X_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.4.2 *Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1 tout espace de Banach X tel que*

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1.$$

Les espaces X_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.4.3 *Soient $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre X_0, X_1 l'espace $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in X_i \quad (i = 0,1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1), \end{cases}$$

où

$$L_*^p(X) = \left\{ f :]0,\infty[\to X : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in]0,1[$ et p, q, $r \in [1,+\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors $(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\omega,q}$.

2) Si $p \leqslant q$ alors $(X_0, X_1)_{\theta,p} \subset (X_0, X_1)_{\theta,q}$.

3) Si $X_0 = X_1$ alors $(X_0, X_1)_{\theta,p} = X_0 = X_1$.

4) Si $0 < \theta < 1$

$$(X_0, X_1)_{\theta,p} = (X_1, X_0)_{1-\theta,p}. \tag{1.4.1}$$

5) Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a $\left((X_0, X_1)_{\theta,p}, (X_0, X_1)_{\omega,q}\right)_{t,r} = (X_0, X_1)_{\alpha,r}$, avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Propriété de réitération

Soient X un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. Alors pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$, $p \in [1, +\infty]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(X, D(A^n))_{\theta,p} = (X, D(A))_{n\theta,p} \tag{1.4.2}$$

Cas Particulier $(D(A), X)_{\theta,p}$

Soient X un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans X. Posons $X_0 = D(A)$ et $X_1 = X$, alors

$$X_0 \cap X_1 = D(A) \text{ et } X_0 + X_1 = X,$$

donc, pour tout $\theta \in \left]0,1\right[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), X)_{\theta,p} \subset X.$$

Si $\rho\,(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

alors

$$\begin{aligned}(D\,(A)\,, X)_{\theta,p} &= D_A\,(1-\theta, p) = (X, D(A))_{1-\theta,p} \\ &= \left\{x \in X : \left\|t^{1-\theta} A\,(A-t)^{-1}\,x\right\|_X \in L^p_*\right\}.\end{aligned}$$

Définition 1.4.4 *Pour tout* $\theta \in \left]0,1\right[$, $p \in [1, +\infty]$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$D_A\,(\theta + k, p) = \left\{x \in D(A^k) : A^k x \in D_A\,(\theta, p)\right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_X + \left\|A^k x\right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Si $\theta \neq \frac{1}{2}$, on a le résultat de réitération suivant

$$(X, D(A^2))_{\theta,q} = (X, D(A))_{2\theta,q} \tag{1.4.3}$$

En utilisant (1.4.3), on obtient

$$(D(A^2), X)_{\theta,q} = (X, D(A^2))_{1-\theta,q} = (X, D(A))_{2-2\theta,q} \tag{1.4.4}$$

(Pour plus de détails sur les espaces d'interpolation et le théorème de réitération, voir par exemple Lions-Peetre [19] et Lunardi [20]).

Théorème 1.4.2 (de Lions) *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0,1[$*

$$(D(A), X)_{\theta,p} = \left\{x \in X : \left\|t^{\theta-1}(G(t) - I)\, x\right\|_X \in L^p_*\right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),X)_{\theta,p}} = \|x\|_X + \left(\int_0^{+\infty} \left\|t^{\theta-1}(G(t) - I)\, x\right\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Avec les modifications usuelles si $p = \infty$.

1.4.3 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, X)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to X$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, X)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,X)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,X)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,X)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev par

$$W^{s,p}(\Omega, X) = \left\{f \in L^p(\Omega, X) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_X^p}{|x-y|^{sp+n}} dxdy < \infty\right\}.$$

On définit les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, X)$. Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, par

$$B^s_{p,q}(\Omega, X) = \left\{f \in L^p(\Omega, X) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|_X^p}{|x-y|^{sq+n}} dx\right)^{q/p} dy < \infty\right\}.$$

Avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a $B^s_{p,p}(\Omega, X) = W^{s,p}(\Omega, X)$.

1.4.4 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach X, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale Difference property), pour plus de détails voir [?].

Définition 1.4.5 *On dit que X est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, X)$$

est bornée.

Définition 1.4.6 *X est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : X \times X \to \mathbb{R}$ biconvexe telle que*

$i)$ $\xi(0,0) > 0$
$ii)$ $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1, \ \forall x, \ y \in X.$

Théorème 1.4.3 *Soit X un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

$i)$ *X est* UMD.
$ii)$ *Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et*

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que

$$\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \quad \forall x, \ y \in X.$$

Exemples

- Les espaces de Hilbert (il suffit de choisir $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire).
- Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- Les espaces construits sur $L^p(\Omega, X)$, $1 < p < \infty$ tel que X est UMD

sont des espaces UMD. Mais les espaces $C^\alpha(\Omega; X)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ ne sont pas UMD.

1.5 Les puissances fractionnaires, classe $\mathbf{Bip}(\theta; X)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $A : X \to X$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur **A** est définie par

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma t^z \left(tI - A\right)^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Si A est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle $0 < \operatorname{Re} z < 1$ par la représentation de Balakrishnan [1] suivante

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{z-1}\left(tI - A\right)^{-1} Axdt,$$

pour tout $x \in D(A)$ (voir Haase [16], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(A)$,

$$A^z x = A^{z+1}A^{-1}x = \frac{\sin\left(z+1\right)\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} t^z\left(tI - A\right)^{-1} xdt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de A^z (voir Dore et Venni [7])

Théorème 1.5.1 *Soit A un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*
1) Soient $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ et $m,\ n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ alors

$$\forall x \in X \quad A^z x = \frac{\Gamma\left(m\right)}{\Gamma\left(n+z\right)\Gamma\left(m-n-z\right)}\int_0^{+\infty} t^{z+n-1}\left(A\left(tI - A\right)\right)^{-1} A^{-n}xdt$$

est absolument convergente.
2) $z \to A^z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $\mathcal{L}\left(X\right)$.
3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ alors $D\left(A^m\right)$ est dense dans $D\left(A^z\right)$.
4) Soient $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ alors

$$A^w A^z \subseteq A^{w+z} \subseteq A^z A^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}\left(w+z\right) \neq 0$ alors $A^{w+z} = A^z A^w$.
5) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $x \in D\left(A^\alpha\right)$ alors $z \to A^z x$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z < \alpha$.
6) Supposons que $A^{is} \in \mathcal{L}\left(X\right)$ pour $s \in \mathbb{R}$ donc

(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $A^{w+z} = A^w A^z = A^z A^w$.
(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *alors* $A^{is} A^w = A^{w+is} = A^w A^{is}$.
(c) Si $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ *alors* $A^{is} A^w \subseteq A^{w+is} \subseteq A^w A^{is}$ *et la seconde inclusion est une égalité si* $\operatorname{Re} w > 0$.

9) Soient $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \|A^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $A^w \in \mathcal{L}(X)$ *et* $A^z \to A^w$ *où* $z \to w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(X)$*).*

10) Si $T \in \mathcal{L}(X)$ *alors* $(A - \lambda I)^{-1} T = T (A - \lambda I)^{-1}$, *pour tout* $\lambda \in \rho(A)$, *et*

$$\begin{aligned} (a)\ TA^z &= A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ TA^z &\subseteq A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{aligned}$$

11) Si $(A - \lambda I)^{-1}$ *et* $(B - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*
(a) $A^z B^w = B^w A^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$.
(b) si A^{is} *et* $B^{it} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $A^z B^w = B^w A^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0$.

Définition 1.5.1 *On note* $BIP(X, \alpha)$ *(**B**ounded **I**maginary **P**owers) ou* $\alpha \in [0, \pi[$, *l'ensemble des opérateurs sectoriels sur* X *qui admettent des puissances imaginaires bornées (Pour plus de détail voir [7]), c'est à dire* $U \in BIP(X, \alpha)$, *si* U *est un operateur linéaire fermé densément défini et satisfaisant :*

$$\begin{cases}]-\infty, 0[\subset \rho(U),\ Ker(U) = \{0\},\ \overline{\operatorname{Im}(U)} = X \\ \quad et\ \ \exists c \leqslant 1, \forall \lambda > 0, \| (U + \lambda I)^{-1} \|_{L(X)} \leqslant \dfrac{c}{\lambda}, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

où $Ker(U), \operatorname{Im}(U)$ *et* $\rho(U)$ *sont respectivement le noyau, l'image et l'ensemble résoulvant de* U *et*

$$\begin{cases} \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R},\ U^{is} \in L(X) \\ \qquad\qquad et \\ \exists c \geqslant 1, \forall s \in \mathbb{R}, \| U^{is} \|_{L(X)} \leqslant c e^{\alpha |s|} \end{cases} \tag{1.5.2}$$

On rappelle que l'operateur vérifiant (1.5.1) admet une puissance complexe U^z *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *(voir Haase [16] p.70).*

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans le cas commutatives

Soient X un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires pour résoudre le problème suivant

$$Au + Bu - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

lorsque les résolvantes des opérateurs A et B commutent : i.e.,

$$\left[(A - zI)^{-1} ; (B - \mu I)^{-1}\right] := (A - zI)^{-1} (B - \mu I)^{-1} - (B - \mu I)^{-1} (A - zI)^{-1} = 0$$

La résolution de ce problème repose sur la construction de l'inverse de $A + B$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes

1.6.1 Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

$$(DG.1) \quad \begin{cases} \exists\ C_A, C_B > 0,\ \theta_A, \theta_B \in [0, \pi[\ \text{ tels que} \\ i)\ \rho(A) \supset \Sigma_A = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_A\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{A}};\ \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_A(\theta)}{|z|}. \\ ii)\ \rho(B) \supset \Sigma_B = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_B\}, \\ \forall z \in \Sigma_B;\ \left\|(B - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_B(\theta)}{|z|}. \\ iii)\ \theta_A + \theta_B < \pi. \\ iv)\ \overline{D(A) + D(B)} = X, \end{cases}$$

$$(DG.2) \quad \begin{cases} \quad \forall \lambda \in \rho(A), \forall \mu \in \rho(B) : \\ \left[(A - \lambda I)^{-1} ; (B - \mu I)^{-1}\right] = 0. \end{cases}$$

Les auteurs ont montré, pour $f \in D_A(\theta, q) + D_B(\theta, q)$, $\theta \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty]$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (A - (z + \lambda) I)^{-1} (B + zI)^{-1} f dz$$

Où γ_λ est une courbe simple orientée de $\infty\ e^{-i\theta_0}$ à $\infty\ e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]\theta_B, \pi - \theta_A[$, demeurant dans $\Sigma_{A-\boldsymbol{\lambda}} \cap \Sigma_{-B}$. De plus, la solution a la régularité suivante

$$Au,\ Bu \in D_A(\theta, q) \qquad (\text{resp. } D_B(\theta, q)).$$

1.6.2 Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

$$
\begin{array}{ll}
(DV.0) & X \text{ est un espace de Banach de type } UMD, \\
(DV.1) & \left\{ \begin{array}{l} i)\rho(A) \supset]-\infty, 0] \;\; et \; \exists M_A > 0 : \left\| (A+tI)^{-1} \right\| \leqslant \dfrac{M_A}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \\ ii)\rho(B) \supset]-\infty, 0] \;\; et \; \exists M_B > 0 : \left\| (B+tI)^{-1} \right\| \leqslant \dfrac{M_B}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \end{array} \right. \\
(DV.2) & \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \rho(A), \quad \mu \in \rho(B), \\ (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - B)^{-1} = (\mu I - B)^{-1} (\lambda I - A)^{-1}. \end{array} \right. \\
(DV.3) & \left\{ \begin{array}{l} i)\forall s \in \mathbb{R} : A^{is} \in \mathcal{L}(X) \;\; et \\ \exists K_A \geqslant 1, \; \theta_A > 0, \; \forall s \in \mathbb{R} : \|A^{is}\| \leqslant K_A e^{\theta_A |s|}, \\ ii)\forall s \in \mathbb{R} : B^{is} \in \mathcal{L}(X) \;\; et \\ \exists K_B \geqslant 1, \; \theta_B > 0, \; \forall s \in \mathbb{R} : \|B^{is}\| < K_B e^{\theta_B |s|}, \\ iii) \; \theta_A + \theta_B < \pi. \end{array} \right.
\end{array}
$$

Alors, la somme $A + B$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz,$$

Où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [22], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Lemme de Trace

Lemme 1.6.1 *([15, p. 678, Theorem 2]) Soit u une fonction telle que*

$$u \in W^{n,p}(a, b; X) \cap L^p(a, b; D(Q^k)),$$

où $n, \; k \in N^*$ *et* $p \in]1, +\infty[$. *Puis pour* $j \in \mathbb{N}$ *satisfait la condition de Poulsen* $0 < \frac{1}{p} + j < n$ *et* $s \in \{a, b\}$, *on a* $u^{(j)}(s) \in (D(Q^k), X)_{\frac{j}{n} + \frac{1}{np}, p}$.

Chapitre 2

Principaux Résultats

2.1 Introduction

Ce travail est une étude sur des nouveaux résultats concernant les solutions d'une équation différentielle abstraite complète de second ordre avec une condition au limite de Robin généralisée. On donne une synthèse sur les résultats de l'article [6].

On considère dans un espace UMD X, l'équation différentielle abstraite complète du second ordre

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad p.p \;\; x \in (0,1) \tag{2.1.1}$$

avec une condition de Robin au bord $x = 0$ et autre de Dirichlet au bord $x = 1$

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u(1) = u_1; \tag{2.1.2}$$

telles que

* A, B et H sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach X de type UMD.

* f est une fonction de l'espace $L^p(0,1;X)$ avec $p \in \left]1,\infty\right[$.

On s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité optimale de la solution classique u du problème $(0.0.17) - (0.0.18)$ i.e. on cherche une solution u vérifiant

$$\begin{cases} (i) \;\; u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)), \quad u' \in L^p(0,1;D(B)). \\ (ii) \; u(0) \in D(H). \end{cases} \tag{3}$$

On étudie les deux cas ; le cas où $B = 0$ qui est un bon modèle pour clarifications et le cas de l'équation complète où B génère un groupe fortement continu $(G(x))_{x\in\mathbb{R}}$, puis on étudie des différentes situations où on applique les résultats obtenus pour $B = 0$ où B génère un groupe.

2.2 *Hypothèses*

Soient X un espace de Banach complexe,

f appartient a $L^p(0,1;X)$ où $1 \prec p \prec \infty$ et d_0, u_1 sont des donnés de X,

A, B et H sont des opérateurs linéaires fermès dans X.

On considère dans l'espace X l'équation différentielle abstraite complète du second ordre $(2.1.1)$, avec les conditions aux limites abstraites de Robin $(2.1.2)$.

Pour résoudre (2.1.1)-(2.1.2) sans plus de régularité sur f, c'est à dire $f \in L^p(0,1;X)$.

On suppose que

$$X \text{ est un espace } UMD \tag{2.2.1}$$

pour plus de détail sur l'espace UMD voir le premier chapitre [1.4.5] et [2].

Les hypothèses sur les opérateurs sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} B^2 - A \text{ est un opérateur linéaire fermés dans } X \text{ avec domaine } D(A) \cap D(B^2) \text{ telle que} \\ ]-\infty, 0[\subset \rho(B^2 - A) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \| \lambda(B^2 - A + \lambda I)^{-1} \|_{L(x)} \prec +\infty, \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} B,\ B + H \text{ sont deux opérateurs linéaires fermés dans } X \text{ avec domaine resp. } D(B) \\ \text{et } D(B) \cap D(H), \\ \text{il existe } \lambda_0 \in \rho(B + H)\,;\ \mu_0 \in \rho(B) \text{ telle que} \\ (B^2 - A)^{-1}(B + H - \lambda_0 I)^{-1} = (B + H - \lambda_0 I)^{-1}(B^2 - A)^{-1} \text{et} \\ (B^2 - A)^{-1}(B + H - \mu_0 I)^{-1} = (B + H - \mu_0 I)^{-1}(B^2 - A)^{-1}, \end{array}\right. \tag{2.2.3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{pour toute } s \in R,\ (B^2 - A)^{is} \in L(x) \text{ il existe } \theta_0 \in]0; \pi[\\ \text{telle que } \sup_{s \in R} \| e^{-\theta|s|}(B^2 - A)^{is} \|_{L(x)} \prec +\infty, \end{array}\right. \tag{2.2.4}$$

B génère un groupe fortement continu

$$(G(X))_{x \in R} \text{ sur } X, \tag{2.2.5}$$

$$D\left((B^2 - A)^{\frac{1}{2}}\right) \subset D(B). \tag{2.2.6}$$

De plus, on utilises des hypothèses d'inversibilité.

On note

$$P = -(B^2 - A)^{\frac{1}{2}}$$

et on considère l'opérateur Π défini par

$$D(\Pi) = D(P) \cap D(B) \cap D(H) \quad \text{et} \quad \Pi = (P - B - H) + e^{2P}(P + B + H).$$

On suppose que

$$\Pi \text{ est fermé à inverse borné.} \tag{2.2.7}$$

On cherche ensuite une solution stricte au problème (2.1.1)-(2.1.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(B)), \;\; u' \in L^p(0,1;D(B)) \tag{2.2.8}$$

et

$$u \text{ satisfait } (2.1.1)\text{-}(2.1.2).$$

Remarque 2.2.1 *Sous* $(2.2.1)$*et* $(2.2.2)$, *on obtient*
1. P est densement dèfini (voir [16], proposition 2.1.1. h, p. 20-21).
2. P est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique $\left(e^{xP}\right)_{x\geq 0}$ dans X (voir $[1]$).
Alors,

$$\begin{cases} P^2 e^{\cdot P}\varphi \in L^p(0,1,X) \text{ si seulement si } \varphi \in \left(D\left(P^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p} \\ Pe^{\cdot P}\varphi \in L^p(0,1,X) \text{ si seulement si } \varphi \in \left(D\left(P^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} \end{cases}$$

(pour les détails voir le Lemme 4 dans [5], où l'opérateur $A_w = A - wI$ est remplacé par l'opérateur $A - B^2$).
De plus, $e^P\xi \in D\left(P^k\right)$ pour tout $\xi \in X$, $k \in \mathbb{N}$, donc

$$P^K e^{\cdot P} e^P \xi = e^{\cdot P} P^K e^P \xi \in L^P(0,1;X) \tag{2.2.9}$$

(voir aussi le Lemme 9 dans [5]).

Remarque 2.2.2 *Soient $x \geq 0$, $y \in R$, $v \in \rho(P)$, $\lambda \in \rho(B+H)$ et $\mu \in \rho(B)$. Sous les hypothèses* $(2.2.1) \sim (2.2.5)$, *on obtient*

$$\begin{cases} (p-vI)^{-1}(B+H-\lambda I)^{-1} = (B+H-\lambda I)^{-1}(P-vI)^{-1} \\ (P-vI)^{-1}(B-\mu I)^{-1} = (B-\mu I)^{-1}(P-vI)^{-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{xP}(B+H-\lambda I)^{-1} = (B+H-\lambda I)^{-1} e^{xP} \\ e^{xP}(B-\mu I)^{-1} = (B-\mu I)^{-1} e^{xP}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(y)(B+H-\lambda I)^{-1} = (B+H-\lambda I)^{-1} G(y) \\ G(y)(p-vI)^{-1} = (p-vI)^{-1} G(y) \;\text{ et } G(y)e^{xP} = e^{xP}G(y). \end{cases}$$

On outre pour tout $z \in D\left(B^2 - A\right)$, de $Az = (B+P)(B-P)z$ et $(2.2.3)$, *il s'ensuit que*

$$\left(B^2 - A\right)^{-1} Az = A\left(B^2 - A\right)z,$$

$$G(y)z \in D\left(B^2 - A\right)$$

et

$$G(y)Az = AG(y)z.$$

Remarque 2.2.3 *On assume* (2.2.1) $\sim$ (2.2.7) *. On a* $B\Pi^{-1}$*est un opérateur linéaire fermé défini sur* X*. À partir du théorème du graphe fermé, nous déduisons que* $B\Pi^{-1} \in L(X)$*.*
De même $B\Pi^{-1} \in L(X)$*.*

2.3 Le cas de l'équation non complète B=0

Dans ce cas, le problème précédent devient

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) \quad p.p. \;\; x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \text{ et } \;u(1) = u_1. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Les hypothèses (2.2.2) $\sim$ (2.2.6) sont réduit à

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur lineaire fermés dans } X, \\ [0; +\infty[\subset \rho(A) \text{ et } \sup_{\lambda \geq 0} \parallel \lambda(A - \lambda I)^{-1} \parallel_{L(x)} \prec +\infty \end{cases} \tag{2.3.2}$$

$$\begin{cases} H \text{ est un opérateur lineaire fermés dans } X \text{ et il existe } \lambda_0 \in \rho(H) \\ \text{telle que } A^{-1} (H - \lambda_0 I)^{-1} = (H - \lambda_0 I)^{-1} A^{-1} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } s \in R, \;(-A)^{is} \in L(X) \text{ et il existe } \theta \in]0, \pi] \\ \text{telle que } \sup_{s \in R} \parallel e^{-\theta|s|}(-A)^{is} \parallel_{L(x)} \prec +\infty \end{cases} \tag{2.3.4}$$

On note $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$ et on definit l'opérateur Λ par

$$D(\Lambda) = D(H) \cap D(Q) \quad \text{et} \quad \Lambda = (Q - H) + e^{2Q}(Q + H).$$

Alors l'hypothèse (2.2.7) devient

$$\Lambda \text{ est fermé et inversible.} \tag{2.3.5}$$

2.3.1 Conditions nécessaires

La proposition suivante montre que si on veut un résultat d'unicité pour le problème (2.1.1)-(2.1.2) alors l'opérateur Λ défini précédemment doit être injectif.

Proposition 2.3.1 *On suppose* (2.3.2) $\sim$ (2.3.4) *et soit* $p \in \,]1, +\infty[$*.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout* $f \in L^p(0,1;X)$ *et tous* d_0, $u_1 \in X$*, il existe au plus une seule solution stricte* u *pour le problème* (2.3.1)*.*
2. *S'il existe une fonction* $u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$ *satisfait*

$$\begin{cases} u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = 0 \quad p.p \;\; x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

alors $u = 0$.

3. $\ker \Lambda = \{0\}$.

Preuve :
Les affirmations 1. et 2. sont clairement équivalentes.
Maintenant, on suppose l'instruction 2. et on considère $y_0 \in \ker \Lambda$, on a

$$y_0 \in D(Q) \cap D(H) \quad \text{et} \quad \left((Q - H) + e^{2Q}(Q + H)\right) y_0 = 0.$$

en raison de (2.3.3), on a

$$Q^{-1} y_0 \in \ker \Lambda \cap D(A).$$

En posant

$$u_0(x) = e^{xQ} Q^{-1} y_0 - e^{(1-x)Q} e^{Q} Q^{-1} y_0, \qquad p.p. \;\; x \in (0,1),$$

on obtient $u_0 \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$ avec

$$\begin{cases} u_0''(x) + Au_0(x) = 0 & p.p \;\; x \in (0,1) \\ u_0'(0) - Hu_0(0) = 0, & u_0(1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, par l'assertion 2. , $u_0 = 0$. Mais u_0 est une fonction continue sur $[0,1]$, donc

$$Q^{-1}\left(I - e^{2Q}\right) y_0 = Q^{-1} y_0 - e^{Q} e^{Q} Q^{-1} y_0 = u_0(0) = 0,$$

puisque $\left(I - e^{2Q}\right)$ admet un inverse borné (voir [20], p. 60), on obtient $y_0 = 0$, par conséquent

$$Ker \Lambda = \{0\}.$$

Inversement, on suppose l'assertion 3. et on considère une fonction

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A)),$$

qui est une solution stricte de

$$\begin{cases} u_0''(x) + Au_0(x) = 0 & p.p \;\; x \in (0,1) \\ u_0'(0) - Hu_0(0) = 0, & u_0(1) = 0. \end{cases}$$

En utilisant la méthode de réduction de Krein (voir [14] et [17]) et en notant que u appartient à $C([0;1];X)$, on fait preuve qu'il existe y_0 , $z_1 \in X$ tel que pour tout $x \in [0;1]$

$$u(x) = e^{xQ} y_0 + e^{(1-x)Q} z_1.$$

Mais ,

$$u(0) \in D(H) \quad \text{et} \quad u(1) = 0,$$

ceci implique que

$$y_0 + e^{Q} z_1 \in D(H) \quad \text{et } e^{Q} y_0 + z_1 = 0, \tag{2.3.6}$$

ainsi

$$\left(I - e^{2Q}\right) y_0 = \left(y_0 + e^{Q} z_1\right) - e^{Q}\left(e^{Q} y_0 + z_1\right) \in D(H).$$

Alors, à partir de (2.3.3), on déduit qu'il existe $\xi \in X$ telle que

$$\left(I - e^{2Q}\right) y_0 = (H - \lambda_0 I)^{-1} \xi,$$

et

$$y_0 = \left(I - e^{2Q}\right)^{-1} (H - \lambda_0 I)^{-1} \xi$$

d'où

$$y_0 = (H - \lambda_0 I)^{-1} \left(I - e^{2Q}\right)^{-1} \xi,$$

qui prouve que $y_0 \in D(H)$.
On outre, pour tout $x \in]0,1[$

$$Q^{-1} u'(x) = e^{xQ} y_0 - e^{(1-x)Q} z_1,$$

puisque $u' \in C([0,1]; X)$, on obtient

$$y_0 - e^{Q} z_1 = Q^{-1} u'(0) \in D(Q),$$

mais $e^{Q} z_1 \in D(Q)$ qui donne $y_0 \in D(Q)$.
Finalement

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = Qy_0 - Qe^{Q} z_1 - H\left(y_0 + e^{Q} z_1\right) = 0 \\ u(1) = e^{Q} y_0 + z_1 = 0, \end{cases}$$

et

$$0 = (Q - H) y_0 - (Q + H) e^{Q} z_1 = [(Q - H) + e^{2Q}(Q + H)] y_0;$$

Par l'assertion 3., on obtien $y_0 = 0$ et à partir de (2.3.6), on obtien $z_1 = 0$. Finalement $u = 0$.
La proposition suivante montre que si on veut un résultat d'existence pour notre problème (2.3.1) lorsque les données d_0 , u_1 sont dans $D(A)$ (en fait on obtient des résultats lorsque les données sont dans des espaces d'interpolation réels entre $D(A)$ et X) alors l'image de l'opérateur Λ doit être dense en X.

On note que si on suppose (2.2.1), (2.3.2) alors $\overline{D(A)} = X$ (voir [16], proposition 1.1, p.18 – 19).

Proposition 2.3.2 *On suppose* (2.2.1) *avec* (2.3.2) $\sim$ (2.3.4) *et on suppose que pour tout* $d_0 \in D(A)$*, il existe une fonction*

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D(A))$$

qui satisfait

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = 0 \quad p.p. \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \quad u_0(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Alors $\overline{R(\Lambda)} = X$ *(voir que* $R(\Lambda) = \Lambda(D(\Lambda))$ *c'est l'image de l'opérateur* Λ*).*

Preuve :

On prend $d_0 \in D(A)$. On considère une stricte solution $u \in W^{2,p}(0,1,X) \cap L^p(0,1,D(A))$ de (2.3.7). Alors, comme dans la preuve de la proposition précédente, il existe y_0 ; $z_1 \in X$ tel que

$$u(x) = e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Qz_1}, \quad x \in [0;1],$$

avec

$$\begin{cases} y_0 + e^Q z_1 \in D(H), \ y_0 - e^Q z_1 \in D(H) \\ \text{et} \\ e^{xQ}y_0 + z_1 = 0, \end{cases}$$

dont on déduit que $y_0 \in D(H) \cap D(Q)$. Enfin

$$\begin{cases} u'(0) - Hu(0) = Qy_0 - Qe^Q z_1 - H\left(y_0 + e^Q z_1\right) = 0 \\ u(1) = e^Q y_0 + z_1 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[(Q-H) + e^{2Q}(Q+H)]y_0 = (Q-H)y_0 - (Q+H)e^Q z_1 = d_0,$$

donc $d_0 \in R(\Lambda)$. Alors $D(A) \subset R(\Lambda)$, on conclut ,que $\overline{D(A)} = X$.

Pour l'instant, si on assume $0 \in \rho(\Lambda)$ ceci veut dire que $\ker \Lambda = \{0\}$, $\overline{R(\Lambda)} = X$ et Λ^{-1} est continu de $R(\Lambda)$ dans X.

D'après la proposition précédente, on a l'existence et l'unicité de la solution pour notre probléme (2.3.1).

On note que l'inversibilité dans la supposition (2.3.5)est exactement

$$\Lambda \text{ est fermé et } 0 \in \rho(\Lambda).$$

2.3.2 La solution stricte du problème

On conclut cette section par un théoreme qui résout le problème $(2.3.1)$ et dont la preuve complète est donnée dans [5, Théorème 11]. Dans [5], les auteurs remplacent A et Q par$A_w = A - wI$ et $Q_w = -(-A_w)^{\frac{1}{2}}$ et ils prouvent, sous une hypothèse supplémentaire sur H, que $\Lambda_w = (Q_w - H) + e^{2Q_w}(Q_w + H)$ est fermé et inversible pour $w \geq 0$ assez grand. Ici, puisque nous supposons l'inversiilité dans la supposition $(2.3.5)$, le paramètre spectral w n'est pas nécessaire.

Théorème 2.3.1 *On suppose* $(2.2.1)$ *et* $(2.3.2) \sim (2.3.5)$. *Soit* $f \in L^p(0,1;X)$ *avec* $1 \prec p \prec +\infty$. *Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes,*

1. $d_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$, $u_1 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. *Le problème* $(2.3.1)$ *admet une solution stricte* u.

De plus, dans ce cas, u *est uniquement déterminé par la représentation suivante*

$$u(x) = s_1(x, d_0, u_1) + s_2(x, f) + R(x, d_0, u_1, f), \qquad p.p\ x \in (0,1),$$

telles que

$$s_1(x, d_0, u_1) = \Lambda^{-1} e^{xQ} d_0 + e^{(1-x)Q_{u_1}},$$

$$\begin{aligned} s_2(x,f) &= \frac{1}{2}(Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{xQ}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2}Q^{-1}e^{(1-x)Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds \\ &+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(x,d_0,u_1,f) &= (Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{xQ}e^{Q}u_1-(Q+H)\Lambda^{-1}e^{(1-x)Q}e^{2Q}u_1\\
&-\Lambda^{-1}e^{(1-x)Q}e^{Q}d_0\\
&-\frac{1}{2}(Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{xQ}e^{Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds\\
&-\frac{1}{2}(Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{(1-x)Q}e^{Q}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds\\
&+\frac{1}{2}(Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}e^{(1-x)Q}e^{2Q}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

2.4 Le cas où B génère un groupe

Le cas où B génère un groupe fortement continu

$$(G(X))_{x\in R} \text{ sur } X,$$

avec

$$D\left((B^2-A)^{\frac{1}{2}}\right)\subset D(B).$$

On a le théorème suivant ;

Théorème 2.4.1 *On suppose* (2.2.1) $\sim$ (2.2.7). *Soit* $f\in L^p(0,1;X)$ *avec* $1<p<+\infty$. *Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1.
$$d_0\in\left(D\left(A-B^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p} \quad , \quad u_1\in\left(D\left(A-B^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

2. *Le problème* (2.1.1)-(2.1.2) *admet une solution stricte u. De plus,*
$$u\in L^p\left(0,1;D\left(A-B^2\right)\right).$$

Théorème 2.4.2 *Dans ce cas, u est uniquement déterminé par la représentation suivante*

$$\begin{aligned} u(x) &= G(-x)e^{xp}\left[\Pi^{-1}d_0 + Ke^{P}G(1)u_1\right] \qquad (2.4.1)\\ &+\frac{1}{2}G(-x)e^{xp}KP^{-1}\left[\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds - e^{P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds\right]\\ &+G(-x)e^{(1-x)P}\left[\left(I-Ke^{2P}\right)G(1)u_1 - \Pi^{-1}e^{P}d_0\right]\\ &-\frac{1}{2}G(-x)e^{(1-x)P}Ke^{P}P^{-1}\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds\\ &-\frac{1}{2}G(-x)e^{(1-x)P}\left(I-Ke^{2P}\right)P^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds\\ &+\frac{1}{2}G(-x)P^{-1}\left[\int_0^x e^{(x-s)P}G(s)f(s)ds + \int_x^1 e^{(s-x)P}G(s)f(s)ds\right], \end{aligned}$$

où

$$K = (P+B+H)\Pi^{-1}.$$

Preuve. Soient $d_0 \in \left(D\left(A-B^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$ et $u_1 \in \left(D\left(A-B^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+,p}$.
Premièrement, en vertu de (2.2.3), on déduit que

$$G(1)u_1 \in \left(D\left(A-B^2\right),X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}.$$

De plus, puisque (2.2.2) $\sim$ (2.2.7) sont satisfaites alors (2.3.2) $\sim$ (2.3.5)) sont satisfaites avec A remplacé par $A-B^2$ et H remplacé par $B+H$. On remarque aussi que

$$x \mapsto G(x)f(x) \in L^p(0,1;X)$$

Ainsi, par le Théorème 2.3.1, on peut construire une fonction

$$v \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^p(0,1;D\left(A-B^2\right)), \qquad (2.4.2)$$

qui est la solution stricte de

$$\left\{\begin{array}{l} v''(x) + \left(A-B^2\right)v(x) = G(x)f(x), \quad p.\ p.x \in (0,1)\,, \\ v'(0) - (B-H)\,v(0) = d_0, v(1) = G\,(1)\,u_{1.} \end{array}\right. \qquad (2.4.3)$$

Maintenant, pour tout $x \in (0,1)$, on pose

$$u\,(x) = G\,(-x)\,v(x),$$

et par (**??**), adapté au problème (2.4.3), on obtient

$$v(x) = s_1\,(x) + s_2\,(x) + r\,(x)\,, \qquad (2.4.4)$$

où

$$s_1(x) = \Pi^{-1}e^{xP}d_0 + e^{(1-x)P}G(1)\,u_1,$$

$$\begin{aligned} s_2(x) &= \frac{1}{2}KP^{-1}e^{xP}\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds - \frac{1}{2}P^{-1}e^{(1-x)P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}P^{-1}\int_0^x e^{(x-s)P}G(s)f(s)ds + \frac{1}{2}P^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)P}G(s)f(s)ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(x) &= Ke^{xP}e^{P}G(1)\,u_1 - Ke^{(1-x)P}e^{2P}G(1)\,u_1 - \Pi^{-1}e^{(1-x)P}e^{P}d_0 \\ &\quad -\frac{1}{2}KP^{-1}e^{xP}e^{P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds \\ &\quad -\frac{1}{2}KP^{-1}e^{(1-x)P}e^{P}\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds \\ &\quad +\frac{1}{2}KP^{-1}e^{(1-x)P}e^{2P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds. \end{aligned}$$

De l'énoncé 2 de la Remarque 2.2.1, on obtient

$$x \mapsto Pe^{xP}d_0 \in L^p(0,1;X) \text{ et } x \mapsto P^2e^{(1-x)P}u_1 \in L^P(0,1;X),$$

mais, en raison de la Remarque 2.2.2, on a

$$\begin{aligned} Bs_1'(x) &= B\Pi^{-1}Pe^{xP}d_0 - BP^{-1}P^2e^{(1-x)P}G(1)\,u_1 \\ &= B\Pi^{-1}Pe^{xP}d_0 - BP^{-1}G(1)\,P^2e^{(1-x)P}u_1, \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que (voir la Remarque 2.2.3)

$$B\Pi^{-1} \in L(X)$$

et

$$BP^{-1}G(1) \in L(X),$$

on déduire que

$$Bs_1' \in L^P(0,1;X).$$

De la même manière

$$\begin{aligned} 2Bs_2'(x) &= BP^{-1}KPe^{xP}\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds + BP^{-1}Pe^{(1-x)P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds \\ &\quad +BP^{-1}P\int_0^x e^{(x-s)P}G(s)f(s)ds - BP^{-1}P\int_x^1 e^{(s-x)P}G(s)f(s)ds \end{aligned}$$

mais

$$BP^{-1}, K \in L(X),$$

en appliquant le Théorème de [7] (voir Lemme 3 dans [5]), on déduit que

$$Bs_2' \in L^P\left(0,1;X\right).$$

– Pour terminer

$$\begin{aligned}
Br'(x) \;\; = \;\; & BP^{-1}KP^2e^{xP}e^PG\left(1\right)u_1 \\
& + BP^{-1}KP^2e^{(1-x)P}e^{2P}G\left(1\right)u_1 + BP^{-1}\Pi^{-1}P^2e^{(1-x)P}e^Pd_0 \\
& - \frac{1}{2}BP^{-1}KPe^{xP}e^P\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds \\
& + \frac{1}{2}BP^{-1}KPe^{(1-x)P}e^P\int_0^1 e^{sP}G(s)f(s)ds \\
& - \frac{1}{2}BP^{-1}KPe^{(1-x)P}e^{2P}\int_0^1 e^{(1-s)P}G(s)f(s)ds,
\end{aligned}$$

et grâce à (2.2.9), on obtient

$$Br^{'} \in L^P(0,1;X),$$

puisque $Br^{'}$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme

$$TP^ke^{\cdot P}e^P\zeta, TP^ke^{(1-\cdot)P}e^P\zeta,$$

où $T \in L\left(X\right),\ k \in \{1,2\}\,,\ \zeta \in X.$

Ainsi, on a

$$Bv^{'} = Bs_1^{'} + Bs_2^{'} + Br^{'} \in L^P(0,1;X). \tag{2.4.5}$$

Puisque

$$B(B^2-A)^{-1},\ B^2(B^2-A)^{-1} \in L\left(X\right),$$

de (2.4.2) on déduit que

$$\left\{ \begin{array}{r} Bv = B(B^2-A)^{-1}(B^2-A)v \in L^P(0,1;X) \\ B^2v = B^2(B^2-A)^{-1}(B^2-A)v \in L^P(0,1;X). \end{array} \right. \tag{2.4.6}$$

Maintenant, pour tout $x \in (0,1)$, on obtient de (2.4.2), (2.2.3) et de la Remarque 2.2.2

$$u\left(x\right) = G\left(-x\right)v\left(x\right) \in D\left(A-B^2\right), \qquad \left(A-B^2\right)u\left(x\right) = G\left(-x\right)\left(A-B^2\right)v\left(x\right),$$

donc

$$u \in L^P(0,1;D\left(A-B^2\right)),$$

et de (2.4.2), (2.4.5) et (2.4.6) on obtient

$$\begin{cases} u'(x) = G(-x)\left(-Bv(x) + v'(x)\right) \\ u''(x) = G(-x)\left(B^2 v(x) - 2Bv'(x) + v''(x)\right), \end{cases}$$

– avec

$$u \in W^{2,p}(0,1;X)$$

De plus, grâce à la Remarque 2.2.2, on obtient pour p. p. $x \in (0,1)$

$$Au(x) = G(-x)\, Av(x),$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} & u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) \\ = \; & G(-x)\left(B^2 v(x) - 2Bv'(x) + v''(x) - 2B^2 v(x) + 2Bv'(x) + Av(x)\right) \\ = \; & G(-x)\left(v''(x) + \left(A - B^2\right) v(x)\right) \\ = \; & f(x). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{cases} u(1) = G(-1)\, v(1) = u_1 \\ u'(0) - Hu(0) = -Bv(0) + v'(0) - Hv(0) = d_0, \end{cases}$$

on a prouver que u est une solution stricte de (2.1.1)-(2.1.2) vérifiant

$$u \in L^P(0,1;D\left(A - B^2\right)).$$

Inversement, si u est une telle solution stricte de (2.1.1)-(2.1.2), on pose

$$v(x) = G(x)\, u(x), \quad \text{p. p. } x \in (0,1).$$

Puisque

$$u \in W^{2,p}(0,1;X) \cap L^P(0,1;D\left(A - B^2\right)),\ u' \in L^P(0,1;D(B)),$$

on en déduit que v est la solution stricte de

$$\begin{cases} v''(x) + (A - B^2)\, v(x) = G(x)\, f(x), \quad \text{a. e. } x \in (0,1), \\ v'(0) - (B + H)\, v(0) = d_0,\ v(1) = G(1)u_1. \end{cases}$$

Encore une fois (2.3.2) $\sim$ (2.3.5) sont satisfaites, avec A étant remplacé par $A - B^2$ et H étant remplacé par $B + H$, donc par le Théorème 2.3.1, on obtient

$$d_0 \in \left(D\left(A - B^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p},\ u_1 = G(-1)G(1)u_1 \in \left(D\left(A - B^2\right), X\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Pour conclure, on note que si l'assertion 1. ou 2. est satisfaite alors

$$u(x) = G(-x)\,v(x)\,, \qquad \text{p. p. } x \in (0,1)$$

où v est uniquement déterminé par (2.4.4). Cela donne (2.4.1).

2.5 Le cas où H est lié à A et B

On rappelle que $P = -(B^2 - A)^{1/2}$. On étudie le cas particulier

$$H = -B - \alpha P \ \ (\alpha \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}\,(\alpha) \geq 0)\,,$$

et donc considérer le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} u^{''}(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x), \quad \text{a. e. } \ x \in (0,1) \\ u'(0) + Bu(0) + \alpha P u(0) = d_0, \quad u(1) = u_1. \end{array} \right. \tag{2.5.1}$$

Théorème 2.5.1 *On suppose* (2.2.1) $\sim$ (2.2.6). *Soient* $f \in L^P(0,1;X)$ *avec* $1 < p < +\infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *avec* $\mathrm{Re}\,(\alpha) \geq 0$.

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. $d_0 \in (D(A - B^2), X)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$, $u_1 \in (D(A - B^2), X)_{\frac{1}{2p},p}$.
2. *Le problème* (2.5.1) *admet une solution stricte* u. *De plus*

$$u \in L^P(0,1; D\left(A - B^2\right)).$$

Dans ce cas, u *est uniquement déterminé par*

$$\begin{aligned} u(x) \ &= \ G(-x)e^{xP}\Pi^{-1}\left[d_0 + (1-\alpha)\,Pe^P G(1)u_1\right] \\ &+\frac{1}{2}G(-x)e^{xP}\,(1-\alpha)\,\Pi^{-1}\int_0^1 e^{sP}G\,(s)\,f(s)d_s \\ &-\frac{1}{2}G(-x)e^{xP}\,(1-\alpha)\,\Pi^{-1}e^P\int_0^1 e^{(1-s)P}G\,(s)\,f(s)d_s \\ &+G(-x)e^{(1-x)P}\left[\left(I - (1-\alpha)\,\Pi^{-1}Pe^{2P}\right)G(1)u_1 - \Pi^{-1}e^P d_0\right] \\ &-\frac{1}{2}G(-x)e^{(1-x)P}\,(1-\alpha)\,\Pi^{-1}e^P\int_0^1 e^{sP}G\,(s)\,f(s)d_s \\ &-\frac{1}{2}G(-x)e^{(1-x)P}\left(P^{-1} - (1-\alpha)\,\Pi^{-1}e^{2P}\right)\int_0^1 e^{(1-s)P}G\,(s)\,f(s)d_s \\ &+\frac{1}{2}G(-x)P^{-1}\left[\int_0^x e^{(x-s)P}G\,(s)\,f(s)d_s + \int_x^1 e^{(s-x)P}G\,(s)\,f(s)d_s\right], \end{aligned}$$

où

$$\Pi = (1+\alpha)(I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}e^{2P})P.$$

Preuve. On veut appliquer le Théorème 2.4.1 avec $H = -B - \alpha P$, mais dans ce cas

$$\Pi = (1+\alpha) DP \text{ avec } D = I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} e^{2P},$$

et pour conclure, il suffit de prouver que D est bornée inversible.
Par exemple :
Si $\alpha = 1$ alors $D = I$ est borné inversible.
Si $\alpha = 0$, puisque P engendre un semi-groupe analytique, on obtient que $I - e^{2P}$ et $I - e^{4P}$ sont inversible (voir [20], p. 60), donc

$$D = \left(I - e^{4P}\right)\left(I - e^{2P}\right)$$

est inversible.
Maintenant, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, on adapte la preuve de A. Lunardi [20], p. 60.
Dans un premier temps, nous étudions la fonction g définie par

$$g(z) = 1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} e^{2z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Comme $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, on a

$$\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right| = \sqrt{\frac{(\operatorname{Re}(\alpha))^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha) + 1 + (\operatorname{Im}(\alpha))^2}{(\operatorname{Re}(\alpha))^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha) + 1 + (\operatorname{Im}(\alpha))^2}} \geq 1,$$

donc, il existe $\mu = ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right| \in [0, +\infty[$ et $v \in [0, 2\pi[$, telle que

$$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = e^{\mu + i\nu},$$

Donc

$$g(z) = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{\mu}{2} + i\left(\frac{\nu}{2} + k\pi\right),$$

d'où l'on déduit que

$$g(z) \neq 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{Re}(z) < 0 \quad \text{et} \quad g(0) \neq 0. \tag{2.5.2}$$

De plus il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\left|\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right| e^{2R_0} \leq \frac{1}{2},$$

alors

$$|g(z)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \operatorname{Re}(z) \leq -R_0. \tag{2.5.3}$$

Nous étudions maintenant les propriétés spectrales de l'opérateur P.

Pour $\eta \in \left]0, \pi\right[$, on pose

$$S_\eta = \{z \in \mathbb{C}\backslash\ \{0\} : |\arg z| < \eta\}.$$

Puisque P est borné inversible et génère un semi-groupe analytique sur X, il existe $\theta_0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\rho > 0$ tels que

$$S_{\theta_0} \cup B(0, \rho) \subset \rho(A)$$

et

$$\sup_{S_{\theta_0} \cup B(0,\rho)} \left\| z (P - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty. \tag{2.5.4}$$

On choisit maintenant $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \theta_0\right[$.
De $(2.5.2), (2.5.3)$ et $(2.5.4)$, on en déduit qu'il existe $C > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} |g(z)| \geq C \text{ si } z \in \mathbb{C}\backslash S_\theta \text{ et} \\ \left\| (P - zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{M}{1+|z|} \text{ si } z \in \overline{S_\theta}. \end{array} \right. \tag{2.5.5}$$

Enfin, on construit l'inverse de $D = I + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} e^{2P}$, en considérant

$$\sum = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} \frac{g(z) - 1}{g(z)} (P - zI)^{-1} dz,$$

où Γ_θ est la courbe frontière de S_θ orientée positivement.
Grâce à (2.5.5), on obtient, pour $z = re^{\pm i\theta} \in \Gamma_\theta$ $(r \geq 0)$

$$\left| \frac{g(z) - 1}{g(z)} (P - zI)^{-1} \right| \leq \left| \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right| e^{2\operatorname{Re}(z)} . \frac{1}{C} . \frac{M}{1+|z|} \leq \frac{M}{C} \left| \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right| \frac{e^{2r\cos\theta}}{1+r},$$

mais $\cos\theta < 0$, donc l'intégrale sur Γ_θ est absolument convergente.
Maintenant, on fixe pour $\varepsilon > 0$ (suffisamment petit)

$$\varepsilon + \Gamma_\theta = \left\{ \varepsilon + re^{\pm i\theta},\ r \geq 0 \right\},$$

et en utilisant le calcul de Dunford, on obtient

$$D = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon + \Gamma_\theta} (g(\lambda) - 1)(P - \lambda I)^{-1} d\lambda + I,$$

et donc, grâce à la deuxième identité de la résolvante

$$\begin{aligned}(D-I)\,\Sigma &= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}\int_{\Gamma_\theta}(g(\lambda)-1)\,\frac{g(z)-1}{g(z)}(P-\lambda I)^{-1}(P-zI)^{-1}dzd\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}\frac{g(z)-1}{g(z)}\frac{1}{\lambda-z}dz\right)(g(\lambda)-1)\,(P-\lambda I)^{-1}\,d\lambda \\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}\frac{g(\lambda)-1}{\lambda-1}d\lambda\right)\frac{g(z)-1}{g(z)}(P-zI)^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}\frac{(g(\lambda)-1)^2}{g(\lambda)}(P-\lambda I)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}(g(\lambda)-1)\,(P-\lambda I)^{-1}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon+\Gamma_\theta}\frac{g(\lambda)-1}{g(\lambda)}(P-\lambda I)^{-1}d\lambda \\ &= (I-D)-\Sigma,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$D(\Sigma+I)=I.$$

De même

$$(\Sigma+I)D=I,$$

qui est le résultat d'inversibilité attendu.

2.6 Exemples.

2.6.1 Exemple 1. Conditions aux limites périodiques.

Motivation et exemple modèle :

Soit $f\in L^p(0,1;L^2\,(0,1))$ avec $1<p<+\infty.$, on considère le problème aux dérivées partielles suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}\,(x,y)+2\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\,(x,y)+2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\,(x,y)-au\,(x,y)=f(x,y)\\ \qquad\qquad (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\,,\\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\,(0,y)+\dfrac{\partial u}{\partial y}\,(0,y)=d_0(y),\quad 0<y<1,\\ u(1,y)=u_1(y),\quad 0<y<1,\\ u(x,0)=u(x,1),\ \ 0<x<1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\,(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}\,(x,1)\,,\ \ 0<x<1,\end{array}\right.$$

On utilise les notations vectorielles usuelles,

$$\begin{cases} u(x,y) = (u(x))(y) \\ f(x,y) = (f(x))(y) \end{cases}$$

pour écrire, le problème $''P''$ sous la forme abstraite suivante

$$u''(x) + 2Bu'(x) + Au(x) = f(x) \quad p.p \;\; x \in (0,1)$$

posé dans $X = L^2(0,1)$, avec les conditions aux limites

$$u^{'}(0) + Bu(0) = d_0 \quad \text{et} \quad u(1) = u_1$$

où

$$\begin{cases} D(B) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1)\}, \\ Bf = f'. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(A) = \left\{f \in H^2(0,1) : f(0) = f(1) \; et \; f^{'}(0) = f^{'}(1)\right\} \\ Af = 2f^{''} - af. \end{cases}$$

Pour cet exemple modèle, dans l'espace $X = L^2(0,1)$ (UMD), on peut introduire l'opérateur T définie par

$$\begin{cases} D(T) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1)\}, \\ Tf = if'. \end{cases}$$

donc on peut réécrire les opérateurs

$$D(B) = D(T) \qquad B = -iT,$$

$$D(A) = D(T^2), \quad Af = (-2T^2 - aI)f = 2f^{''} - af,$$

$$D(H) = D(T) \qquad H = iT,$$

Ainsi l'opérateur

$$A - B^2 = \left(-2T^2 - aI\right) - (-iT)^2 = -2T^2 - aI + T^2 = -T^2 - aI$$

avec

$$D\left(A - B^2\right) = D(T^2).$$

or l'opérateur $B + H$ est nul

$$B + H = 0;$$

On a l'opérateur T est auto-adjoint et son spectre $\sigma(T) = 2\pi\mathbb{Z}$, donc B génère un groupe fortement continu en plus les opérateurs A, B et H vérifient les hypothèses (2.2.2) $\sim$ (2.2.6).

Proposition 2.6.1 *Soit $f \in L^p(0,1;L^2(0,1))$ avec $1 < p < +\infty$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
1) Le Problème (P) admet une solution stricte u et $u(0,.) \in D(T)$.

2) $d_0 \in (D(A), L^2(0,1))_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$, $u_1 \in (D(A), L^2(0,1))_{1/2p,p}$.

Remarque 2.6.1 *Les deux derniers espaces d'interpolation peuvent être caractérisés en tenant compte du fait que B défini par*

$$D(B) = H^1(0,1) \text{ avec } u(0) = u(1) \text{ et } Bu = \frac{du}{dx},$$

qui génère le C_0-groupe $\left(e^{tB}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $L^2(0,1)$ avec

$$\left(e^{tB}u\right)(x) = u(x+t-n), \quad n-1 \leq x+t < n,\ n \in \mathbb{Z},$$

voir [24], p. 93-94. Ainsi d'après [25], Théorème 1.13.2, p. 78 et Théorème 1.13.6, p. 87. On en déduit que

1. *$d_0 \in (D(A), L^2(0,1))_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}$, si $d_0 \in L^2(0,1)$ et satisfait pour certains $\delta > 0$,*

$$\int_0^\delta t^{-p}\left(\int_0^1 \left|\left(e^{tB}d_0\right)(x) - d_0(x)\right|^2 dx\right)^{p/2} dt < +\infty$$

2. *$u_1 \in (D(A), L^2(0,1))_{\frac{1}{2p},p}$, si $u_1 \in H^1(0,1)$ et satisfait pour certains $\delta > 0$*

$$\begin{cases} u_1(0) = u_1(1), \\ \text{et} \\ \int_0^\delta t^{-p}\left(\int_0^1 \left|\left(e^{tB}u_1'\right)(x) - u_1'(x)\right|^2 dx\right)^{p/2} dt < +\infty, \end{cases}$$

où

$$u_1'(x) = \frac{du_1}{dx}(x).$$

2.6.2 Exemple 2 sur la droite réelle.

Soit $X = L^{q}(\mathbb{R})$, $1 < q < +\infty$. On introduit les opérateurs $A,\ B$ définis par

$$\begin{array}{rcl} D(A) & = & W^{2,q}(\mathbb{R}), \quad Au = a\dfrac{d^2u}{dy^2} - cu \\ & & \text{et} \\ D(B) & = & W^{1,q}(\mathbb{R}), \quad Bu = b\dfrac{du}{dy}, \end{array}$$

où $c > 0$, $a > b^2 > 0$.
Puisque

$$\left(B^2 - A\right) u = \left(b^2 - a\right) u'' + cu, \ u \in D(B^2 - A) = W^{2,p}(\mathbb{R}),$$

on obtient que l'opérateur $-\left(B^2 - A\right)^{1/2}$ génere un semi-groupe de contraction positif sur X, donc il admet un H^{∞}-calculus borne, d'où l'hypothèse (**2.2.4**) est bien vérifiée.
De plus, B génère un groupe fortement continu dans X, voir [9], pp. 74-75.
Alors, d'après le Théorème 2.5.1 (avec $\alpha = 0$), on obtient

Proposition 2.6.2 *Soit $f \in (L^p((0,1); L^q(\mathbb{R}))$ avec $1 < p,\ q < +\infty$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1.
$$d_0 \in \left(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2},p}, \quad u_1 \in \left(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2p},p}.$$

2. *Le problème aux limites*
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - cu(x,y) \\ = f(x,y), \quad (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) + b\frac{\partial u}{\partial y}(0,y) = d_0(y), \quad y \in \mathbb{R}, \\ u(1,y) = u_1(y), \quad y \in \mathbb{R}, \end{array}\right.$$

admet une solution stricte u vérifiant

$$u \in W^{2,p}(0,1; L^q(\mathbb{R})) \cap L^p(0,1; W^{2,q}(\mathbb{R})), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^p(0,1; W^{1,q}(\mathbb{R})),$$

et

$$u(0,.) \in W^{1,q}(\mathbb{R}).$$

Remarque 2.6.2 *On remarque que*

$$\left(W^{2,q}(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R})\right)_{\theta,p} = B^{2(1-\theta)}_{q,p}(\mathbb{R}) \quad où \quad 0 < \theta < 1,$$

voir [25], Remarque 4, p. 186.

Bibliographie

[1] Balakrishnan A. V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them.* Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] Bourgain J. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ark. Mat. 21 (1983), 163-168.

[3] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[4] Burkholder D. L. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional.* Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.

[5] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S. and Medeghri A. : *Strum-Liouville problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Space*, Differential and Integral Equations, Vol. 21, 9-10, (2008), 981-1000.-16.

[6] Cheggag M., Favini A., Labbas R., Maingot S. and Medeghri A. : *Complete abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in UMD spaces*, DCDS-S 4(3) (2011), pp. 1–16

[7] Dore G. and Venni. A. : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.

[8] El Haial A. and Labbas R. : *On the Ellipticity and Solvability of Abstract Second-order Differential Equation*, Electronic Journal of Differential Equations, 57 (2001), 1-18.

[9] Fattorini H. O. : *The Cauchy Problem, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 18, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.

[10] Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H. and Yagi A. : *On the solvability of complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkc. Ekv, 47 (2004), 423-452.

[11] Favini A., Labbas R., Tanabe H., and Yagi A. : *On the solvability and the maximal regularity of complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type*, Funkc. Ekv, 47 (2004), 205-224.

[12] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. *Etude Unifiée de problèmes Elliptiques dans le Cadre Holdérien*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), 485-490.

[13] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. : *Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type in UMD Spaces*, Funkcialaj Ekvacioj, 49 (2006), 193-214.

[14] Favini A., Labbas R., Maingot S, Tanabe H and Yagi A. *A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differenial Equations in UMD Spaces and New Applications*, Funkcialaj Ekvacioj, 51 (2008), 165-187.

[15] Grisvard P. : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[16] Haase M. : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[17] Krein S. G. : *Linear differential equations in Banach spaces.* Moscou, (1967).

[18] Labbas R. and Mechdene M. : *Problème à dérivée oblique pour une equation differentielle opérationnelle du second ordre*, Maghreb Math. Rev., 2 (1992), 177-200.

[19] Lions j. J., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Publications Mathématiques de l'institut des hautes études scientifiques*, (1964), vol. 19 N°1, pp.5-68.

[20] Lunardi A. : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, (1995).

[21] Pazy A. : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[22] Prüss J. and Sohr H. : *On operators with bounded Imaginary powers in Banach spaces,* Math Zeitschrift, 203 (1990), pp.429-452.

[23] Prüss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces.* Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.

[24] Showalter R. E. : *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Pitman, LondonSan Francisco-Melbourne, (1977).

[25] Triebel H. : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North Holland, Amsterdam, (1978).

مسائل إهليجية ذات معاملات مؤثرات خطية بالشروط الحدية من الشكل روبن - و ديركلي- في فضاءات خاصة و تطبيقات

هدفنا من العمل هو تقديم ملخص حول نتائج المقال (6) بشأن دراسة المعادلات التفاضلية المجردة من الرتبة الثانية من النوع الإهليلجي :

$$u''(x)+2Bu'(x)+Au(x)=f(x), \quad p.p \ x\in(0,1)$$

بشرط عند الحد $x = 0$ من شكل Robin وآخر من شكل Dirichlet عند الحد $x = 1$:

$$u'(0)-Hu(0)=d_0, \quad u(1)=u_1;$$

بحيث :

A, B, H مؤثرات خطية مغلقة في فضاء بناخ من النوع UMD

f دالة في الفضاء $L^{p}(0,1;X)$ مع $p\in]1,\infty[$

نهتم بدراسة الوجود والوحدانية والانتظام الأمثل للحل الكلاسيكي u للمشكلة السابقة أي أننا نبحث للحصول على حل الذي يحقق الشروط التالية :

(i) $u\in W^{2,p}(0,1;X)\cap L^{p}(0,1;D(A)), \quad u'\in L^{p}(0,1;D(B))$.

(ii) $u(0)\in D(H)$.

هذا العمل يطور ويكمل النتائج التي تم الحصول عليها في العملين (5) و (18)
يتم إعطاء بعض الأمثلة في نهاية هذه المذكرة.