Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

IBTISSEM DENDEN

Sur Quelques Inégalités Quantiques De Type Hermite-Hadamard Pour Les Fonctions Convexes Coordonnées.

soutenu publiquement 30 juin 2022 devant le jury composé de :

Président :	Zoubir DAHMANI	Professeur	UMAB
Examinateur :	Ikram F. Z BENSAID	MAB	UMAB
Encadreur :	Sabrina TAF	MCB	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

Dédicaces

A l'aide de Dieu Le Tout Puissant, on a pu achever ce modeste travail que

J e dédie :

A mes parents qui m'ont encouragé et m'ont offert tous les moyens pour que je puisse atteindre ce niveau. Qu'Allah les protège..

A mes frères.

A toutes les familles DENDEN et DJALAKH grands et petits .

A tous mes amis, la promotion 2ème *année master MCO.*

A mon encadrante Sabrina Taf.

A tous mes enseignants durant tout mon cursus universitaire.

Remerciements

Nous remercions ALLAH Le Tout Puissant de nous avoir aidé à mener à terme ce travail et pour le courage qu'Il nous a donné durant ces années d'ètude.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadrante madame Sabrina Taf, pour son talent et sa patience pour son travail, ainsi que pour les conseils et astuces qui ont alimenté ma réflexion.

Je la remercie également pour sa disponibilité chaque fois que je demande de assistance et consultation.

Je tiens également à remercier le Professeur Zoubir Dahmani pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Examinatrice Madame Ikram Fatima-Zohra Bensaid pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je profite de cette occasion pour remercier tous les professeurs qui m'ont enseigné et par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils, leurs critiques, m'ont soutenu dans la poursuite de mes études.

Je tiens également à remercier les étudiants master 2 MCO, pour leur aide morale durant toute la période de préparation de ce mémoir.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mes parents pour leur soutien constant et leur encouragement.

Table des matières

Table des figures

Index des notations

D_q	:	La q-dérivée.
${}_a\mathrm{D}_q$	:	La q_a-dérivée .
${}^b\mathrm{D}_q$	:	La q^b-dérivée .
$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des réels positifs.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des entiers naturels .
$[n]_q$	:	Le q-analogue de n .
$[n]_q!$	:	Le q-analogue de la factorielle.
R_q	:	La q-intégrale de type de Riemann .

Introduction

Plusieurs mathématiciens ont appliqué les inégalités usuelles dans le domaine de q-analogue ou bien Le calcul quantique ou q-calcul est l'étude du calcul sans limites. Au 18 siècle, Euler a initié l'étude du q-calcul en introduisant le nombre q dans le travail de Newton sur les séries infinies. De nombreux résultats remarquables tels que l'identité du triple produit de Jacobi et la théorie des fonctions q-hypergéométriques ont été obtenus au 19 siècle. Au début du 20 siècle, Jackson (1910) [12] avait commencé une étude symétrique du q-calcul et introduit les intégrales q-définies. Le sujet du calcul quantique a de nombreuses applications dans différents domaines des mathématiques et de la physique tels que la théorie des nombres, la combinatoire, les polynômes orthogonaux, les fonctions hypergéométriques de base, la théorie quantique, la mécanique et la théorie de la relativité.

Ce sujet a reçu une considération exceptionnelle par de nombreux chercheurs et il est donc apparu comme un sujet interdisciplinaire entre les mathématiques et la physique. Les lecteurs intéressés sont renvoyés à Ernst (2012) [7], Gauchman (2004)[9] et Kac et Cheung (2002)[13] pour certains développements récents dans la théorie du calcul quantique et la théorie des inégalités dans le calcul quantique. Les inégalités jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches de la mathématique. Il a été observé que la théorie des inégalités et la théorie des fonctions convexes sont profondément dépendantes l'une de l'autre et, par conséquent, une vaste littérature sur les inégalités a été produite par un certain nombre de chercheurs utilisant des fonctions convexes, voir Dragomir et Pearce (2000) [6].

Les inégalités d'Hermite-Hadamard sont largement étudiées au cours des trois dernières décennies et les inégalités suivantes, connues sous le nom d'inégalités d'Hermite-Hadamard [11], fournissent une condition nécessaire et suffisante pour une fonction continue $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur $[a, b]$, tels que $a, b \in [a, b]$ avec $a < b$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{0.1}$$

Notre objectif est de développer davantage cette théorie pour les fonctions de deux variables et de fournir quelques analogues quantiques de l'inégalité Hermite-Hadamard des fonctions de deux variables sur des rectangles finis. A l'étape suivante, nous fournirons également des estimations quantiques pour la partie droite de l'analogue q de l'inégalité d'Hermite-Hadamard des fonctions de deux variables utilisant la convexité et r-convexité. (voir [14],[19],[15],[4],[1]).

Ce mémoire se compose essentiellement de quatre chapitres et d'une conclusion.

Dans le premier chapitre Elément de base quantique, nous définissons les notions de q-analogue , la q-dérivée ainsi que la q-intégrale.
Dans le deuxième chapitre, nous rappelons le type de convexité et le type de r-convexité pour une fonction à une variable et à deux variables ainsi que leurs propriétés .
Le troisième chapitre , nous traitons quelques résultats sur l'inégalité d'Hermiete hadamard

dont le cas convexe et r-convexe.
Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités d'Hermite Hadamard dont le cas à deux variables par leux deux types convexe et r-convexe.
Finalement, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale et une bibliographie est donnée à la fin de ce document.

Chapitre 1

Eléments de base de calcul quantique

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle on rappelle des notions et des concepts fondamentaux de la théorie du calcul quantique ou bien q-analogue (q-calcul), qui représentent un outil indispensable dans notre étude. Il y a deux groupes principaux de q-analogue, les q-analogues classiques et les q-analogues non-classiques nous donnons les définitions et des concepts fondamentaux nécessaires de q-analogue classique.

Dans la deuxième section, on introduit la définition de q-dérivée et dans la troisième l'intégrale de Jackson.

1.1 Généralités

La q-théorie classique commence par [13]

Définition 1.1.1 *Soit n un entier positif et $0 < q < 1$, on définit le q-analogue de n par*

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}, \qquad q \in \mathbb{C}.$$

En faisant tendre q vers 1, on a bien $\lim\limits_{q \longrightarrow 1} [n]_q = n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la q-shift factorielle est définit par

$$\begin{cases} (a;q)_n &= \prod_{k=0}^{n} (1-aq)^k, \qquad n = 1, 2, ..., \infty \\ \\ (a;q)_0 &= 1. \end{cases}$$

On peut définir le q-analogue de la factorielle connue sous le nom de q-factorielle, par

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}; \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad ou \qquad (q;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1-q^k).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le q-analogue de la fonction $(x-a)^{(n)}$ est définie comme suit

$$\begin{cases} (x-a)_q^n &= \prod_{k=0}^{n-1} (x-aq^k), \\ \\ (x-a)_q^0 &= 1. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^n)_q^{\infty}}.$$

Définition 1.1.2 *Le théorème de q-binomial est définit par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,q)_n}{(q,q_n)} z^n = \frac{(az,q)_\infty}{(z,q)_\infty}, \qquad |z|<1 \tag{1.1.2}$$

avec $(a,q)_n$ est un symbole q-Pochhammer.

1.2 Q-Dérivée

Définition 1.2.1 *[13] On définit la q-dérivée d'une fonction f par*

$$\mathrm{D}_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}, \quad x \neq 0. \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.1 *La q-dérivée de $f(x)=x^n$, où n est un entier positif*

$$\mathrm{D}_q f(x) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n-1}{q-1} x^{n-1} = [n]_q x^{n-1}.$$

Définition 1.2.2 *La q-dérivée du produit de la fonction $f(x)$ et la fonction $g(x)$ comme suit*

$$\mathrm{D}_q(f(x)g(x)) = f(x)\mathrm{D}_q g(x) + g(qx)\mathrm{D}_q f(x). \tag{1.2.2}$$

Proposition 1.2.1 *Pour tout entier n, on a*

i)

$$\mathrm{D}_q(x-a)_q^n = [n]_q (x-a)_q^{n-1}. \tag{1.2.3}$$

ii)

$$\mathrm{D}_q(a-x)_q^n = -[n]_q (a-qx)_q^{n-1}. \tag{1.2.4}$$

Preuve.

1. On raisonne par récurrence :
   La propriété est vraie pour $n=0$, car $[0]_q=0$, et on suppose qu'elle est vraie pour un certain rang k
   (i.e) :

   $$\mathrm{D}_q(x-a)_q^k = [k]_q (x-a)_q^{k-1}.$$

   On vérifie la propriété pour $k+1$, sachant que $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k (x-q^k a)$.
   En utilisant la dérivée du produit (1.2.2), on obtient

   $$\begin{aligned} \mathrm{D}_q(x-a)_q^{k+1} &= \mathrm{D}_q(x-a)_q^k (x-q^k a) \\ &= (x-a)_q^k + (qx-q^k a)\mathrm{D}_q(x-a)_q^k \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)[k]_q(x-a)_q^{k-1} \\ &= (1+q[k]_q)(x-a)_q^k \\ &= [k+1]_q(x-a)_q^k \quad . \end{aligned}$$

2. Selon la définition (1.1.1), pour $n \geq 1$. On a

   $$\begin{aligned} (a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\ldots(a-q^{n-1}x) \\ &= (a-x).q(q^{-1}a-x).q^2(q^{-2}a-x)\ldots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\ &= (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)\ldots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a). \end{aligned}$$

D'où,

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)_q^n. \tag{1.2.5}$$

De (1.2.5) et (1.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_q(a-x)_q^x &= (-1)^n q^{n(n-1)/2}\mathrm{D}_q(x-q^{-n+1}a)q^n \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2}[n]_q(x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}\times(-1)^{n-1}q^{(n-1)(n-2)/2}(x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\
&= -[n]_q q^{n-1}\times(q^{-1}a-x)_q^{n-1} \\
&= -[n]_q(a-qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

■

Définition 1.2.3 *[17] Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit q_a-dérivée de f sur $[a,b]$ par*

$${}_a\mathrm{D}_q f(x) = \frac{f(qx+(1-q)a)-f(x)}{(1-q)(a-x)}, \qquad x \neq a. \tag{1.2.6}$$

Exemple 1.2.2 *Soient a,b,s des réels et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x^2+x+s.$$

Alors, pour $x\neq a$. On a

$$\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_q f(x) &= \frac{([qx+(1-q)a]^2+[qx+(1-q)a]+s)-x^2-x-s)}{(1-q)(a-x)} \\
&= \frac{(q^2-1)x^2+(1-q)^2a^2+(1-q)(2qax)+(1-q)(a-x)}{(1-q)(a-x)} \\
&= \frac{-(q+1)x^2+(1-q)a^2+2qax+(a-x)}{(a-x)} \\
&= (1+q)x+(1-q)a+1.
\end{aligned}$$

Pour $x=a$, on obtient ${}_a\mathrm{D}_q f(x) = 2a+1$.

Définition 1.2.4 *[17] Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit q^b-dérivée de f sur $[a,b]$ par*

$${}^b\mathrm{D}_q f(x) = \frac{f(qx+(1-q)b)-f(x)}{(1-q)(b-x)}, \qquad x \neq b. \tag{1.2.7}$$

Exemple 1.2.3 *Soient a,b,s des réels et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = x^2+x+s.$$

Alors, pour $x\neq b$. On a

$$\begin{aligned}
{}^b\mathrm{D}_q f(x) &= \frac{([qx+(1-q)b]^2+[qx+(1-q)b]+s)-x^2-x-s)}{(1-q)(b-x)} \\
&= \frac{(q^2-1)x^2+(1-q)^2b^2+(1-q)(2qbx)+(1-q)(b-x)}{(1-q)(b-x)} \\
&= \frac{-(q+1)x^2+(1-q)b^2+2qbx+(b-x)}{(b-x)} \\
&= (1+q)x+(1-q)b+1.
\end{aligned}$$

Pour $x=b$, on obtient ${}^b\mathrm{D}_q f(x) = 2b+1$.

Remarque 1.2.1 *Si on prend $a = 0$ dans (1.2.6), ou si on prend $b = 0$ dans (1.2.7). Alors nous obtenons la formule (1.2.1).*

Propriétés 1.2.1 *Soient f et g deux fonctions arbitraire, et soient a, b deux réelles*

1. D_q *est un opérateur linéaire, ie*
$$D_q(af(x)+bg(x)) = aD_q(f(x))+bD_q(g(x)).$$
2. *La q-dérivée de produit entre deux fonctions f et g est donnée par :*
$$D_q(f(x).g(x)) = f(qx)D_q(g(x))+g(x)D_q(f(x)).$$
Et on a aussi :
$$D_q(f(x).g(x)) = f(x)D_q(g(x))+g(qx)D_q(f(x)).$$
3. *La q-dérivée de quotient entre deux fonctions f et g est donnée par :*
$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q(f(x))-f(x)D_q(g(x))}{g(x)g(qx)}, \qquad g(x)g(qx)\neq 0.$$
4. *Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on définit la fonction u par $u(x)=\alpha x^{\beta}$, alors*
$$D_q[f(u(x))] = (D_{q^{\beta}}f)(u(x))D_q(u(x)).$$

Preuve.

1. *On a*
$$\begin{aligned} D_q(af(x)+bg(x)) &= \frac{af(qx)+bg(qx)-af(x)-bg(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{a(f(qx)-f(x))}{(q-1)x}\frac{b(g(qx)-g(x))}{(q-1)x} \\ &= aD_q(f(x))+bD_q(g(x)). \end{aligned}$$
2. *On a*
$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(qx)d_q(g(x))+g(x)d_qf(x)}{(q-1)x} \\ &= f(qx)D_q(g(x))+g(x)D_q(f(x)). \end{aligned}$$
3. *Il est claire que $g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$, alors*
$$D_q\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_q(f(x)),$$
ce qui implique
$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_q(g(x)) = D_q(f(x)).$$
Donc
$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q(f(x))-f(x)D_q(g(x))}{g(x)g(qx)}.$$

4. *On a*

$$\begin{aligned}
D_q[f(u(x))] &= D_q[f(\alpha x^{\beta})] \\
&= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{qx - x} \\
&= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}} \frac{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}{qx - x} \\
&= \frac{f(q^{\beta} u) - f(u)}{q^{\beta} u - u} \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x} \\
&= (D_{q^{\beta}} f)(u(x)) D_q(u(x)).
\end{aligned}$$

■

1.3 Q-intégrale de Jackson

Définition 1.3.1 *[12] La q-intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[0, b]$ (l'intégrale de Jackson), est définie comme*

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q) b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(bq^n). \tag{1.3.1}$$

La fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x.$$

Définition 1.3.2 *[13] Soient f et g sont deux fonctions q-dérivables sur $[a, b]$, la q-intégration par partie est définie par*

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) d_q x = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b g(qx) D_q f(x) d_q x.$$

Définition 1.3.3 *[17] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit la q_a-intégrale de f sur $[a, b]$ par*

$$\int_a^t f(x)_a d_q x = (1-q)(t-a) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k t + (1-q^k) a), \quad t \in [a, b]. \tag{1.3.2}$$

La q^b-intégrale d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$

$$\int_t^b f(x)^b d_q x = (1-q)(b-t) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k t + (1-q^k) b), \quad t \in [a, b]. \tag{1.3.3}$$

Remarque 1.3.1
• *Pour $a = 0$ dans (1.3.2) ou pour $b = 0$ dans (1.3.3). On obtient la q-intégrale classique définie en (1.3.1).*
• *Pour $a = 0$ et $t = 1$ dans (1.3.2), on a*

$$\int_0^1 f(t)_0 d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k),$$

• *Pour $b = 1$ et $t = 0$ dans (1.3.3). On a*

$$\int_0^1 f(t)^1 d_q t = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(1-q^k).$$

Exemple 1.3.1 *Soient a, b, m, k des réels et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + k$. Alors, on a pour $q \in]0, 1[$ et pour tout $a < b$*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)_a d_q x &= (1-q)(b-a)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \left\{m[bq^k + (1-q^k)a] + k\right\} \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \left\{m(b-a)q^k + (ma+k)\right\} \\
&= (1-q)(b-a)\left(\frac{m(b-a)}{1-q^2} + \frac{ma+k}{1-q}\right) \\
&= (b-a)\left(\frac{m(b+aq)}{1+q} + k\right). \qquad (1.3.4)
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)^b d_q x &= (1-q)(b-a)\sum_{k=0}^{\infty} q^k \left\{m[aq^k + (1-q^k)b] + k\right\} \\
&= (b-a)\left(\frac{m(a+bq)}{1+q} + k\right). \qquad (1.3.5)
\end{aligned}$$

• *On remarque que pour q tend vers 1, on obtient le résultat classique dans les deux cas*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{m(b^2-a^2)}{2} + k(b-a).$$

Propriétés 1.3.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors pour $q \in]0,1[$, on a*

1. *La q_a-dérivée d'une q_a-intégrale de fonction f sur $]a, x[$ est donnée par*

$$_a d_q \int_a^x f(t)_a d_q t = f(x) - f(a).$$

2. *Soit $a < c < x$, alors la q_a-intégrale de q_a-dérivée d'une fonction f sur $]a, x[$ est donnée par*

$$\int_c^x {_a d_q} f(t)_a d_q t = f(x) - f(c).$$

3. *La q^b-dérivée d'une q^b-intégrale de fonction f sur $]x, b[$ est donnée par*

$$^b d_q \int_x^b f(t)^b d_q t = f(b) - f(x).$$

4. *Soit $x < c < b$, alors la q^b-intégrale de q^b-dérivée d'une fonction f sur $]x, b[$ est donnée par*

$$\int_a^c {^b d_q} f(t)^b d_q t = f(c) - f(x).$$

5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

$$\int_a^x \left[(\alpha f)(t) + g(t)\right]_a d_q t = \alpha \int_a^x f(t)_a d_q t + \int_a^x g(t)_a d_q t.$$

6. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

$$\int_x^b \left[(\alpha f)(t) + g(t)\right]^b d_q t = \alpha \int_x^b f(t)^b d_q t + \int_x^b g(t)^b d_q t.$$

7. *Soit $f \leq g$. Alors, on a*

$$\int_a^x f(t)_a d_q t \leq \int_a^x g(t)_a d_q t, \int_x^b f(t)^b d_q t \leq \int_x^b g(t)^b d_q t.$$

Définition 1.3.4 *[16] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit la q-intégrale de type de Riemann d'une fonction f par*

$$\mathrm{R}_q(f, a, b) = \int_a^b f(x) d_q^{\mathrm{R}} x = (b-a)(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(a + (b-a)q^k) q^k. \tag{1.3.6}$$

Dans [18], S. Taf et al. ont définis une nouvelle intégrale par la division d'un intervalle en deux parties à partir de la q-intégrale de type de Riemann.

Lemme 1.3.1 *[18] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors par la q-intégrale de type de Riemann. On définit l'intégrale suivante*

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) d_q^{\mathrm{R}} x = (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + q^k \left(\frac{b-a}{2}\right)\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - q^k \left(\frac{b-a}{2}\right)\right)\right) q^k. \tag{1.3.7}$$

Par la q-intégrale de Jackson, on obtient

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) d_q^{\mathrm{R}} x = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1-t}{2} a + \frac{1+t}{2} b\right) d_q t = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1+t}{2} a + \frac{1-t}{2} b\right) d_q t. \tag{1.3.8}$$

Preuve. D'après la q-intégrale de type Riemann, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) d_q^{\mathrm{R}} t &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) d_q^{\mathrm{R}} t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) d_q^{\mathrm{R}} t \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) d_q^{\mathrm{R}} t - \int_{\frac{a+b}{2}}^a f(t) d_q^{\mathrm{R}} t \\
&= \left(b - \frac{a+b}{2}\right)(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{a+b}{2} + \left(b - \frac{a+b}{2}\right) q^k\right) q^k \\
&- \left(a - \frac{b+a}{2}\right)(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{a+b}{2} + \left(a - \frac{a+b}{2}\right) q^k\right) q^k \\
&= \frac{b-a}{2}(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right) q^k\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - \left(\frac{b-a}{2}\right) q^k\right)\right] q^k.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la q-intégrale de Jackson. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(t) d_q t &= \int_{-1}^0 f(t) d_q t + \int_0^1 f(t) d_q t \\
&= \int_0^1 f(t) d_q t - \int_0^{-1} f(t) d_q t \\
&= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n + (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(-q^n) q^n = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(q^n) + f(-q^n)\right) q^n.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{a-b}{2}\right) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{a+b}{2} + q^n \frac{b-a}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - q^n \frac{b-a}{2}\right)\right) q^n,$$

ce qui est équivalent,

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) d_q^{\mathrm{R}} t = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{a-b}{2}\right) d_q t \tag{1.3.9}$$

■

Lemme 1.3.2 *Pour $p \geq 1$, on a l'inégalité suivante*

$$\int_0^1 (1-t)^p d_q t \leq \frac{q}{[p+1]_q} \tag{1.3.10}$$

Preuve. Soit la fonction f définie par

$$f(t) = (1-t)_q^{(p)} = (t,q)_p; \qquad p \in \mathbb{R}, \mathrm{P} \geq 1$$

Alors, par la q-dérivée. On obtient

$$\mathrm{D}_q f(t) = \mathrm{D}_q (1-t)_q^{(p)} = -[p]_q (1-qt)_q^{(p-1)}$$

donc

$$\mathrm{D}_q f(t) = -[p]_q (qt,q)_{p-1}.$$

Alors

$$(qt,q)_n \qquad \xrightarrow{q\ primitive} \qquad \frac{-1}{[n+1]_q}(t,q)_{n+1}.$$

D'autre part, on a

$$f(t) = (1-t)_q^{(p)} = \frac{(t,q)_\infty}{(tq^p,q)_\infty},$$

avec $(t,q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k t)$ et $(tq^p,q)_\infty = (1-q^p t)(1-q^{p+1}t).... = \prod_{k=p}^{\infty}(1-q^k t)$.
Donc,
• Si $(1-t)_q^{(p)} \leq (t,q)_p$, alors

$$\int_0^1 (1-t)^p d_q t \leq \int_0^1 (1-t)_q^{(p)} d_q t \leq \int_0^1 (t,q)_p d_q t = \frac{q}{[p+1]_q}$$

Or
• Si $(1-t)^{-p} \geq \frac{(tq^p,q)_\infty}{(t,q)_\infty}$, alors

$$(1-t)^{-p} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p+1)...(p+k-1)}{k!} t^k, \qquad t \in [0,1], \tag{1.3.11}$$

et la q-binôme (1.1.2). On obtient

$$\frac{1}{(1-t)_q^{(p)}} = \frac{(tq^p,q)_\infty}{(t,q)_\infty} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q^p,q)_k}{(q,q)_k} t^k. \tag{1.3.12}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{(q^p,q)_n}{(q,q)_n} &= \frac{(1-q^p)(1-q^{p+1})...(1-q^{p+s-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)} \\ &= \frac{(1-q^p)}{(1-q)} \frac{(1-q^{p+1})}{(1-q^2)} ... \frac{(1-q^{p+s-1})}{(1-q^k)} \end{aligned}$$

Donc, on considère maintenant la fonction

$$g_k(u) = \frac{1-u^{p+k-1}}{1-u^k}; \qquad 0 < u < 1.$$

La fonction g_k est croissante sur $]0,1[$ et $\lim_{u \to 1^-} g_k(u) = \frac{p+k-1}{k}$, alors

$$\frac{1-q^{p+k-1}}{1-q^k} \leq \frac{p+k-1}{k}, 0 < q < 1. \tag{1.3.13}$$

D'après la relation (1.3.11),(1.3.12) et(1.3.13) on trouve

$$(1-t)^p \leq \frac{(t,q)_\infty}{(tq^p,q)_\infty} = (1-t)_q^{(p)} \tag{1.3.14}$$

On intégré (1.3.14) sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 (1-t)^p d_q t \leq \int_0^1 (1-t)_q^{(p)} d_q t = \frac{q}{[p+1]_q}.$$

■

Définition 1.3.5 *[3]*
Supposons que $f : [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors q_a^d,q_c^b et q^{bd} intégrale sur $[a,b]\times[c,d]$ est défini par

$$\begin{aligned}\int_a^x \int_y^d f(t,s)^d d_{q_2} s_a d_{q_1} t &= (1-q_1)(1-q_2)(x-a)(d-y)\\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(q_1^n x+(1-q_1^n)a, q_2^m y+(1-q_2^m)d)q_1^n q_2^m \end{aligned}\tag{1.3.15}$$

$$\begin{aligned}\int_x^b \int_c^y f(t,s)_c d q_2 s^b d_{q_1} t &= (1-q_1)(1-q_2)(b-x)(y-c)\\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(q_1^n x+(1-q_1^n)b, q_2^m y+(1-q_2^m)c)q_1^n q_2^m \end{aligned}\tag{1.3.16}$$

et

$$\begin{aligned}\int_x^b \int_y^d f(t,s)^d d_{q_2} s^b d_{q_1} t &= (1-q_1)(1-q_2)(b-x)(d-y)\\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f(q_1^n x+(1-q_1^n)b, q_2^m y+(1-q_2^m)d)q_1^n q_2^m, \end{aligned}\tag{1.3.17}$$

pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$

Chapitre 2

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous définissons les fonctions convexes ,r-convexes et donnons quelques propriétés qui nous seront utiles par la suite.

2.1 Fonction Convexe

Définition 2.1.1 *Soit $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{2.1.1}$$

pour tous $x, y \in \mathrm{I}$ et $t \in [0,1]$.

Exemple 2.1.1

i) La fonction $f(x) = e^x$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction $f(x) = x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.2 *(Inégalité de pente)*
On suppose que f est une fonction convexe définie sur $\mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si a, b, c sont trois points de I telle que $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b} \tag{2.1.2}$$

Propriétés 2.1.1

1. *Une fonction f est convexe sur $\mathrm{I} \to \mathbb{R}$ si et seulement si $df(t)$ est croissante.*
2. *Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions convexes, alors $f + g$ convexes aussi.*
3. *Si f et g sont deux fonctions convexes sur $[a, b]$, alors $(f \circ g)(x)$ n'est pas nécessairement convexe. Une condition nécessaire est que f soit croissante.*

Preuve.

1. On suppose que f est convexe sur $[a, b]$; $a < b$. D'après l'inégalité de pente on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}, \qquad \forall x \in]a, b[.$$

En faisant tendre x vers a, on obtient

$$\frac{df}{dt}(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

et en faisant tendre x vers b on en déduit que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{df}{dt}(b),$$

donc
$$\frac{df}{dt}(a) \leq \frac{df}{dt}(b),$$
D'où $\frac{df}{dt}(t)$ est croissante. Réciproquement, si $\frac{df}{dt}(t)$ est croissante, pour tous $a < b \in \mathrm{I}$ et tout $x \in]a, b[$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha \in]a, x[$, $\beta \in]x, b[$ tels que
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{df}{dt}(\alpha),$$
et
$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \leq \frac{df}{dt}(\beta),$$
puisque $\alpha < \beta$. Donc
$$\frac{df}{dt}(\alpha) \leq \frac{df}{dt}(\beta).$$
D'où
$$\frac{f(x) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$
Alors
$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) = f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)),$$
d'après (2.1.2) , on conclut que f est convexe.

2. Supposons que f et g sont convexes sur I, alors on a
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$
$$g(tx + (1 - t)y) \leq tg(x) + (1 - t)g(y),$$
pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $t \in [0, 1]$.
Ce qui implique
$$\begin{aligned} f(tx + (1 - t)y)g(tx + (1 - t)y) &\leq tf(x) + (1 - t)f(y) + tg(x) + (1 - t)g(y) \\ &\leq t(f(x) + g(x)) + (1 - t)(f(y) + g(y)). \end{aligned}$$
D'où
$$(f + g)(tx + (1 - t)y) \leq t(f + g)(x) + (1 - t)(f + g)(y).$$

3. Soit g une fonction convexe sur $[a, b]$ et $t \in [0, 1]$ alors on a :
$$g(tx + (1t)y) \leq tg(x) + (1 - t)g(y), \qquad x, y \in [a, b],$$
par application de la fonction f et puisque f est croissante. Alors
$$f(g(tx + (1 - t)y)) \leq f(tg(x) + (1 - t)g(y)).$$
D'où
$$f(g(tx + (1 - t)y)) \leq tf(g(x)) + (1 - t)f(g(y)).$$

■

Définition 2.1.3 *[5] Soit $f : \Delta := [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^2$ est une fonction convexe coordonnée avec $a < b$ et $c < d$ si*
$$f(tx + (1 - t)z, ty + (1 - t)w) \leq tf(x, y) + (1 - t)f(z, w), \tag{2.1.3}$$
pour tout $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$et $t \in [0, 1]$.

• *Considérons l'intervalle bidimensionnel* $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *tels que* $a < b$ *et* $c < d$. *une fonction* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *sera dit convexe sur les coordonnées si l'application partielle*

$$f_y : [a, b] \to \mathbb{R}, f_y(x) := f(x, y)$$

et

$$f_x : [c, d] \to \mathbb{R}, f_x(y) := f(x, y)$$

sont convexes où définis pour tout $y \in [c, d]$ *et* $x \in [a, b]$

Exemple 2.1.2

i) *La fonction* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction convexe sur* $\mathbb{R}^2$.

ii) *La fonction* $g(x, y) = x^2 + y^4$ *est une fonction convexe sur* $\mathbb{R}^2$.

Propriétés 2.1.2

1. *Toute application convexe* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *est convexe sur les coordonnées, mais l'inverse n'est généralement pas vrai.*
2. *Si* $f''(x) \geq 0$ *sur* I, *alors* f *est convexe sur* I.

Preuve.

1. Supposons que $f : \Delta \to \mathbb{R}$ est convexe sur Δ. Soit $f_x : [c, d] \to \mathbb{R}$ $f_x(v) := f(x, v)$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$ et $v, w \in [c, d]$ on a :

$$\begin{aligned} f_x(tv + (1-t)w) &= f(x, tv + (1-t)w) \\ &= f(tx + (1-t)x, tv + (1-t)w) \\ &\leq tf(x, v) + (1-t)f(x, w) \\ &= tf_x(v) + (1-t)f_x(w) \end{aligned}$$

qui montre la convexité de f_x.

• Le fait que $f_y : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_y(u) := f(u, y)$, est aussi convexe sur $[a, b]$ pour tout $y \in [c, d]$

• D'autre part l'application $f : [0, 1]^2 \to [0, \infty[$, est donnée par $f_0(x, y) = xy$.
C'est évident que f est convexe sur les coordonnées mais n'est pas convexe sur $[0, 1]^2$.
En effet, si $(u, 0), (0, w) \in [0, 1]^2$ et $t \in [0, 1]$, on obtient

$$f(t(u, 0) + (1-t)(0, w)) = f(tu, (1-t)w) = t(1-t)xw$$

et

$$tf(u, 0) + (1-t)f(0, w) = 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$, $u, w \in]0, 1[$. On a

$$f(t(u, 0) + (1-t)(0, w)) > tf(u, 0) + (1-t)f(0, w),$$

Ainsi f n'est pas convexe sur $[0, 1]^2$.

■

2.2 Fonction r-convexe

Définition 2.2.1 *[10] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive. Alors f est dite r-convexe si pour tous $x, y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ et $r \in \mathbb{R}$, on obtient*

$$f(tx+(1-t)y) \leq \begin{cases} (t[f(x)]^r + (1-t)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}} & r \neq 0 \\ \\ f(x)^t f(y)^{1-t} & r = 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Remarque 2.2.1

• *Les fonctions 0-convexes sont simplement des fonctions log-convexes.*

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Exemple 2.2.1 *Soit f une fonction définie sur $\left]\frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right[$*

1. *La fonction $f(x) = \sin x$ est une fonction ∞-convexe sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction $f(x) = \tan x$ est une fonction 1-convexe sur $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction $f(x) = \ln(\sec x)$ est une fonction -1-convexe sur $\mathbb{R}$.*
4. *La fonction $f(x) = |\sec x + \tan x|$ est une fonction 1-convexe sur $\mathbb{R}$.*

Propriétés 2.2.1

1. *Si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 < r \leq s$, alors l'inégalité suivante est vérifiée pour chaque paire des nombres réels non négatifs x et y. On a*

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq (\alpha x^r + (1-\alpha)y^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\alpha x^s + (1-\alpha)y^s)^{\frac{1}{s}}.$$

2. *Soit $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ une fonction r-convexe sur $[a,b]$ et $0 \leq r \leq s$, alors f est s-convexe.*

$$f(tx+(1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y), \qquad t \in [0,1].$$

En particulier si f est r-convexe et $0 \leq r \leq 1$ alors f est convexe.

Preuve.

1. Le côté gauche de l'inégalité est clair par l'inégalité de Young. Le coté droit est évident si $x = 0$ ou $y = 0$.
Soit $x > 0$ et $y > 0$, on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = (\alpha t^r + 1 - \alpha)^s - (\alpha t^s + 1 + \alpha)^r, \qquad (r,s > 0).$$

Donc

$$\frac{df(t)}{dt} = rs\alpha[t^{r-1}(\alpha t^r + 1 - \alpha)^{s-1} - t^{s-1}(\alpha t^s + 1 - \alpha)^{r-1}]. \tag{2.2.2}$$

Alors $t = 1$ est un point critique de f on voit que

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(1) = rs\alpha(1-\alpha)(r-s) \leq 0.$$

il s'ensuit que f atteint son maximum lorsque $t = 1$, ainsi $f(t) \leq f(1) = 0$. Alors

$$(\alpha t^r + 1 - \alpha)^s \leq (\alpha t^s + 1 - \alpha)^r. \tag{2.2.3}$$

Maintenant, si on prend $t = \frac{x}{y}$ dans l'inégalité (2.2.3). On obtient

$$(\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^s \leq \alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^r,$$

ce qui implique que

$$((\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^s)^{\frac{1}{rs}} \leq ((\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^r)^{\frac{1}{rs}},$$

Donc

$$(\alpha x^r + (1-\alpha) y^r)^{\frac{1}{r}}) \leq (\alpha x^s + (1-\alpha) y^s)^{\frac{1}{s}}.$$

2. Puisque f est r-convexe alors par (2.2.1), on a pour tous $x, y \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$.

$$f(tx + (1-t)y) \leq \begin{cases} (tf(x)^r + (1-t)f(y)^r)^{\frac{1}{r}} \leq (tf(x)^s + ((1-t)f(y)^s)^{\frac{1}{s}} \quad , & 0 < r \leq s \\ \\ f(x)^t f(y)^{1-t} \leq (tf(x)^s + (1-t)f(y)^s)^{\frac{1}{s}}, & r = 0 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

■

Définition 2.2.2 *[8] Soit $f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$, on dit que f est une fonction r-convexe sur le rectangle Δ si pour tout $t, \lambda \in [0,1]$ et $(x, y), (z, w) \in \Delta$.*

$$f(tx + (1-t)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq \begin{cases} \left[t\lambda[f(x, y)]^r + t(1-\lambda)f[(x, w)]^r + (1-t)\lambda f[(z, y)]^r + (1-t)(1-\lambda)f[(z, w)]^r\right]^{\frac{1}{r}} & r \neq 0 \\ \\ f[(x, y)]^{t\lambda} f[(x, w)]^{t(1-\lambda)} f[(z, y)]^{(1-t)\lambda} f[(z, w)]^{(1-t)(1-\lambda)}, & r = 0 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

• *Considérons l'intervalle bidimensionnel $\Delta := [a, b] \times [c, d]$ sur $\mathbb{R}_+$ tels que $a < b$ et $c < d$. Une fonction $f : \Delta \to \mathbb{R}_+$ sera dite r-convexe sur les coordonnées si les applications partielles*

$$f_y : [a, b] \to \mathbb{R}_+, f_y(u) = f(u, y)$$

Et

$$f_x : [c, d] \to \mathbb{R}_+, f_x(v) = f(x, v)$$

sont r-convexes pour tout $y \in [c, d]$ et $x \in [a, b]$.

Remarque 2.2.2
• *Pour $r = 0$, on trouve la fonction log-convexe*

$$f(tx+(1-t)z, \lambda y+(1-\lambda)w) \leq f[(x, y)]^{t\lambda} f[(x, w)]^{t(1-\lambda)} f[(z, y)]^{(1-t)\lambda} f[(z, w)]^{(1-t)(1-\lambda)}, \qquad t, \lambda[0, 1].$$

• *Pour $r = 1$, on trouve la fonction convexe coordonnée.*

Propriétés 2.2.2 *Toute fonction r-convexe $f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe sur les coordonnées et $t, \lambda \in [0, 1]$.*

Preuve. Supposons que $f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe sur Δ, donc

$$f_y : [a, b] \to \mathbb{R}_+, f_y(u) = f(u, y)$$

• Si $r=0$ et $u_1, u_2 \in [a, b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_y(tu_1+(1-t)u_2) &= f(tu_1+(1-t)u_2, y)\\
&= f(tu_1+(1-t)u_2, \lambda y+(1-\lambda)y)\\
&\leq f^{t\lambda}(u_1,y)f^{t(1-\lambda)}(u_1,y)f^{(1-t)\lambda}(u_2,y)f^{(1-t)(1-\lambda)}(u_2,y)\\
&= f_y^{t\lambda}(u_1)f_y^{t(1-\lambda)}f_y^{(1-t)\lambda}(u_2)f_y^{(1-t)(1-\lambda)}(u_2).
\end{aligned}$$

• Si $r \neq 0$ et $u_1, u_2 \in [a, b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_y(tu_1+(1-t)u_2) &= f(tu_1+(1-t)u_2, y)\\
&= f(tu_1+(1-t)u_2, \lambda y+(1-\lambda)y)\\
&\leq [t\lambda f^r(u_1,y)+t(1-\lambda)f^r(u_1,y)(1-t)\lambda f^r(u_2,y)+(1-t)(1-\lambda)f^r(u_2,y)]^{\frac{1}{r}}\\
&= [t\lambda f_y^r(u_1)+t(1-\lambda)f_y^r(u_1)+(1-t)\lambda f_y^r(u_2)+(1-t)(1-\lambda)f_y^r(u_2)]^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Donc $f_y(u)=f(u,y)$ est r-convexe sur $[a, b]$. Par un argument similaire, on peut voir $f_x(v)=f(x,v)$ est r-convexe sur $[c, d]$. ■

2.3 Continuité, différentiabilité et quelques inégalités

Définition 2.3.1 *(Continuité)*
Soient I *un intervalle réel,* $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ *une fonction définie sur* I *à valeurs réelles et* $a\in\mathrm{I}$. *La fonction* f *est dite continue en* a *si*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0 \forall x\in\mathrm{I}(|x-a|)<\eta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

Définition 2.3.2 *(Fonction différentiable)*
Soit $u\subset\mathrm{E}$ *un ouvert non vide, et soit* $f:u\to\mathrm{F}$. *On dit que la fonction* f *est différentiable en* $a\in u$ *si et seulement s'il existe une application linéaire et continue* $\mathrm{L}\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *telle que*

$$\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-\mathrm{L}(x-a)\|_{\mathrm{F}}}{||x-a\|_{\mathrm{E}}}=0.$$

On peut aussi écrire, en posant $x-a=h$

$$\lim_{h\to 0_{\mathrm{E}} h\neq 0_{\mathrm{E}}}\frac{\|f(a+h)-f(a)-\mathrm{L}(h)\|_{\mathrm{F}}}{\|h\|_{\mathrm{E}}}=0.$$

L'application L *est alors unique, elle est appelée différentielle de* f *en* a *et elle est notée* df_a.

Définition 2.3.3 *(L'équation tangente)*
Soit f *une fonction dérivable en* a. *L'équation réduite de la tangente* $\mathrm{T_A}$ *à la courbe de* f *au point abscisse* a *est*

$$y=f'(x)(x-a)+f(a).$$

Théorème 2.1 *(Inégalité de convexité)*
Soient f *une fonction convexe,* $(x_1,\ldots,x_n)$ *un* n*-uplet de réels appartenant à l'intervalle de définition de* f *et* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *un* n*-uplet de réels positifs tels que*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$$

Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

Définition 2.3.4 *(Inégalité de Minkowski)*
Soit $f, g \in \mathrm{L}_p[a, b]$, alors pour $p > 1$. On a

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3.1}$$

Définition 2.3.5 *(Inégalité de Cauchy)*
Soient a, b deux réels, alors on a

$$|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \tag{2.3.2}$$

Définition 2.3.6 *(Inégalité de Hölder)*
Soient f et g deux fonction continue et intégrable sur $[a, b]$, Soient $1 < p$, $q < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) \leq \left(\int_a^b (f(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (g(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.3.3}$$

Chapitre 3

Q-Inégalites d'Hermite Hadamard

Dans ce chapitre, nous traitons quelques résultats liés au chapitre précédent. Commençons par le premier cas :

3.1 Cas Convexe

Dans [18], S.Taf et al. ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.1 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe, alors pour tout* $0 < q < 1$. *On obtient l'inégalité suivante*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_q^{\mathrm{R}}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.1}$$

Preuve. D'après la définition d'une fonction convexe, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2},$$

pour tout $x \in [a, b]$.
Alors, posons $x = \frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b$ et $y = \frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b$, on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right), \qquad t \in [-1, 1].$$

Puis, on intègre l'inégalité sur $[-1, 1]$ par rapport a t, on trouve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_{-1}^1 d_qt \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right)d_qt + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)d_qt.$$

Ce qui implique

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)d_q^{\mathrm{R}}t, \tag{3.1.2}$$

qui prouve la première inégalité.
la preuve de la seconde inégalité est donnée par

$$f\left(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b\right) \leq \left(\frac{1-t}{2}\right)f(a) + \left(\frac{1+t}{2}\right)f(b),$$

on intègre l'inégalité sur $[-1, 1]$ par rapport a t, on obtient

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)d_q^{\mathrm{R}}t \leq f(a)\int_{-1}^1 \frac{1-t}{2}d_qt + f(b)\int_{-1}^1 \frac{1+t}{2}d_qt.$$

Donc
$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)d_q^{\mathrm{R}}x \leq f(a)+f(b). \tag{3.1.3}$$
De (3.1.2) et (3.1.3), on trouve (3.1.1). ■

Dans [1], N. Alp et al. ont prouvé l' inégalité q_a -Hermite-Hadamard suivante pour les fonctions convexes dans le cadre du calcul quantique :

Théorème 3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable convexe sur un $]a,b[$. Alors pour $0<q<1$, on a*
$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)_a d_q x \leq \frac{qf(a)+f(b)}{1+q}. \tag{3.1.4}$$

Preuve. On a par la définition d'une suite géométrique
$$\begin{aligned}\frac{a+qb}{1+q} &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}a(1-q)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k-\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k}\right)(1-q)b\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[q^{2k}a(1-q)+(q^k-q^{2k})(1-q)b\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}q^k(1-q)[q^ka+(1-q^k)b],\end{aligned}$$

telle que $\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)q^k=1$ car $\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$.
Donc, par la continuité d'une fonction f sur $]a,\, b[$, et par l'inégalité de Jensen. On obtient
$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty}q^k(1-q)[(1-q^k)a+q^kb].$$

Ainsi, par q_a-Intégration sur $[a,\, b]$. On trouve
$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)_a d_q x \tag{3.1.5}$$

D'où la première inégalité est prouvé.

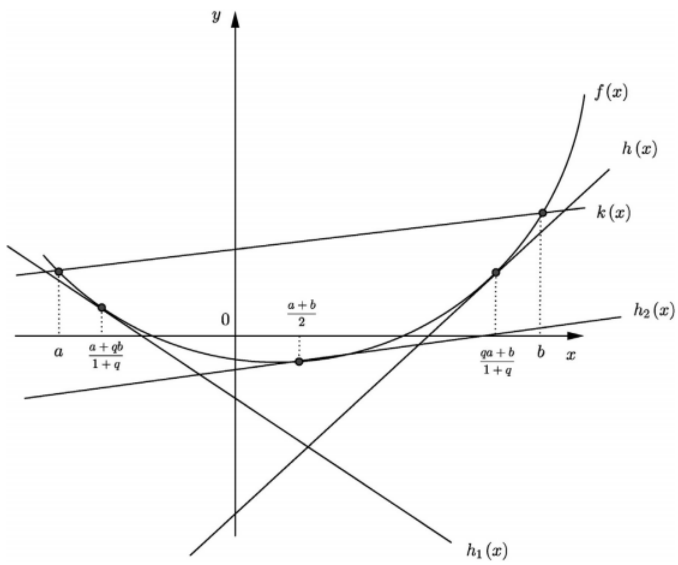

FIGURE 3.1 – Tangente et ligne de corde pour une fonction convexe.

D'autre part, par la convexité d'une fonction f, telle que

$$f(x) \leq h(x)$$

où $h(x)$ est la sécante qui relié entre les points $(a, f(a))$ et$(b, f(b))$,

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{af(a)-af(b)}{b-a}.$$

Alors, selon la définition de la q_a-intégrale, on a

$$\int_a^b f(x)_a d_q x \leq \int_a^b h(x)_a d_q x = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b x_a d_q x + \frac{af(a)-af(b)}{b-a}\int_a^b 1_a d_q x \tag{3.1.6}$$

Ainsi la tenant compte de la formule (1.3.4) en prenant $m=1$ et $k=0$, on obtient.

$$\int_a^b f(x)_a d_q x \leq (b-a)\frac{qf(a)+f(b)}{1+q}. \tag{3.1.7}$$

De (3.1.5) et (3.1.7) on obtient l'inégalité (3.1.4) . ■
Dans [2], S. Bermudo et al.ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour $0 < q < 1$, on a*

$$f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^b d_q x \leq \frac{f(a)+qf(b)}{1+q}. \tag{3.1.8}$$

Preuve. On a par la définition d'une suite géométrique

$$\frac{qa+b}{1+q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k(1-q)[(1-q^k)a + q^k b],$$

telle que , $\sum_{k=0}^{\infty}(1-q)q^k = 1$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
Donc, par la continuité d'une fonction f sur $]a, b[$, et par l'inégalité de Jensen. On obtient

$$f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty}(1-q)q^k f(q^k a + (1-q^k)b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^b d_q x.$$

Ainsi par q^b-intégration sur $[a, b]$, on trouve

$$f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^b d_q x \tag{3.1.9}$$

D'où la première inégalité est prouvé.
D'autre par, par la convexité d'une fonction f, telle que

$$f(x) \leq s(x)$$

où $s(x)$ est la sécante qui relié entre les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$,

$$s(x) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Alors, selon la définition de la q^b-intégrale, on a

$$\int_a^b f(x)^b d_q x \leq \int_a^b s(x)^b d_q x = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b x^b d_q x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\int_a^b 1^b d_q x. \tag{3.1.10}$$

Ainsi la tenant compte de la formule (1.3.5) en prenant $m=1$ et $k=0$, on obtient

$$\int_a^b f(x)^b d_q x \leq (b-a)\frac{f(a)+qbf(b)}{1+q}. \tag{3.1.11}$$

De (3.1.9) et (3.1.11), on obtient l'inégalité (3.1.8) . ■

Remarque 3.1.1 *D'après les conditions du Théorème 3.3, on peut éliminer l'hypothèse de la différentiabilité du Théorème 3.2.*

La somme des résultats des Théorèmes 3.2 et 3.3 donne le corollaire suivant

Corollaire 3.1.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $q \in]0, 1[$. Alors on a*

$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)+f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f(x)_a d_q x + \int_a^b f(x)^b d_q x\right\} \leq f(a)+f(b). \tag{3.1.12}$$

On va montrer que nous pouvons changer la bande inférieure dans (3.1.13) à deux fois la bande inférieure dans (0.1).

Corollaire 3.1.2 *Pour toute une fonctions convexe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $q \in]0, 1[$. Alors on a*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b f(x)_a d_q x + \int_a^b f(x)^b d_q x\right\} \leq f(a)+f(b). \tag{3.1.13}$$

Preuve. D'après le corollaire (3.1.2), et par la convexité de f, on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{qa+b}{1+q}+\frac{1}{2}\frac{a+qb}{1+q}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{a+qb}{1+q}\right).$$

■

Remarque 3.1.2 *Si dans (3.1.12) ou (3.1.13), en faisant tendre q vers 1, on obtient l'inégalité d'Hermite–Hadamard classique (0.1).*
On note aussi que pour la q^b-intégrale , l'inégalité

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^b d_q x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3.1.14}$$

n'est pas vrai en général pour f une fonction arbitraire convexe.

Exemple 3.1.1 *Pour $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x$ et $q = \frac{1}{2}$, f est convexe sur $[0, 1]$ donc*

$$f\left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)^1 d_{\frac{1}{2}} x = \left(1-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \frac{1}{3}.$$

Et pour $[a, b] = [0, 1]$,$f(x) = 1-x$ et $q = \frac{1}{2}$, f est convexe sur $[0, 1]$ donc on obtient

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)^1 d_{\frac{1}{2}} x = \left(1-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{2}{3} \geq \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alors, nous donnons des bornes pour la somme des intégrale q^a et q^b de la fonction convexe.

3.2 Cas r-Convexe

Dans [4], K. Brahim et al.ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.4 *Soit $f : [a, b] \to]0, \infty[$ est une fonction r-convexe sur $[a, b]$, Alors on a l'inégalité pour tout $0 < r \leq 1$*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) d_q^{\mathbb{R}} x \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\left([qf(a)]^r+[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.2.1}$$

Preuve. Selon la définition de r-convexe, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)a+tb) \leq \left((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{3.2.2}$$

puis,on intègre l'inégalité par rapport a t sur $[0,1]$. On obtient

$$\int_0^1 f((1-t)a+tb)\, d_q t \leq \int_0^1 \left((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t.$$

D'après l'inégalité de Minkowski (2.3.1), on a

$$\int_0^1 \left((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t \leq \left(\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r [f(a)]^r + \left(\int_0^1 t^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r [f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

ainsi, par le Lemme 1.3.2, nous avons

$$\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r \leq \left(\frac{q}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r.$$

Donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)d_q^{\mathrm{R}}x \leq \left(\left(\frac{q}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r [f(a)]^r + \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q^r}[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}(q^r[f(a)]^r + [f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}.$$

D'où le Théorème 3.4 est prouvée. ■

Dans [4], K. Brahim et al.ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.5 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe sur $[a, b]$. Alors on a l'inégalité pour tout* $0 < r \leq 1$ *et* $0 < q < 1$ *on obtient*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)_a d_q x \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}([qf(a)]^r + [f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.2.3}$$

Preuve. Par la q-intégrale de l'inégalité (3.2.2) par rapport à t sur [0, 1], on obtient

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)d_q t \leq \int_a^b \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t. \tag{3.2.4}$$

Puis, d'après la définition 1.3.2 On trouve

$$\int_a^b f(x)_a d_q x \leq \int_0^1 \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t. \tag{3.2.5}$$

Ainsi, par l'inégalité de Minkowski pour le côté droit de l'inégalité (3.2.5) Nous avons

$$\int_0^1 \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t \leq \left(\left(\int_0^1 t^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r [f(a)]^r + \left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r [f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2.6}$$

et par le Lemme 1.3.2, on obtient

$$\left(\int_0^1 t^{\frac{1}{r}} d_q t\right) = \left(\frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r. \tag{3.2.7}$$

$$\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r \leq \left(\frac{q}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r. \tag{3.2.8}$$

De (3.2.7) et (3.2.8) dans (3.2.6) , on obtient

$$\int_a^b f(x)_a d_q x \leq \left(\left(\frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r [f(a)]^r + \left(\frac{q}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\right)^r [f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

D'où le résultat. ■

Dans [19], Xuexiao You et al. ont introduit l'inégalité suivante :

Théorème 3.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe sur $[a, b]$, Alors on a l'inégalité pour tout $0 < r \leq 1$ et $0 < q < 1$*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,{}^b d_q x \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_q}\left([f(a)]^r + [q f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3.2.9}$$

Preuve. Par la q-intégrale de l'inégalité (3.2.2) par rapport à t sur $[0, 1]$, on obtient (3.2.4)
Puis, d'après la définition 1.3.3. On trouve

$$\int_a^b f(x)\,{}^b d_q x \leq \int_0^1 \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t. \tag{3.2.10}$$

Ainsi, par l'inégalité de Minkowski pour le côté droit de l'inégalité (3.2.10), Nous avons

$$\int_0^1 \left(t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}} d_q t \leq \left(\left(\int_0^1 t^{\frac{1}{r} d_q t}\right)^r [f(a)]^r + \left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r [f(b)]^r\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{3.2.11}$$

et par le Lemme 1.3.2, on obtient

$$\left(\int_0^1 t^{\frac{1}{r}} d_q t\right) = \left(\frac{1}{[\frac{1}{r}+1]_q}\right)^r. \tag{3.2.12}$$

$$\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{r}} d_q t\right)^r \leq \left(\frac{q}{[\frac{1}{r}+1]_q}\right)^r. \tag{3.2.13}$$

De (3.2.12) et (3.2.13) dans (3.2.11), on obtient 3.2.9.
D'où le résultat. ■
Dans [19], Xuexiao You et al. ont introduit les inégalités suivantes :

Théorème 3.7 *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions r_1-convexe et r_2-convexe respectivement sur $[a, b]$. Alors pour $0 < r_1, r_2 \leq 2$, on a l'inégalité suivante*

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,{}^b d_q x \leq \frac{1}{\left[\frac{2}{r1}+1\right]_q}\left([f(a)]^{r1} + [q^{\frac{1}{2}} f(b)]^{r1}\right)^{\frac{2}{r1}} + \frac{1}{\left[\frac{2}{r2}+1\right]_q}\left([g(a)]^{r2} + [q^{\frac{1}{2}} g(b)]^{r2}\right)^{\frac{2}{r2}}. \tag{3.2.14}$$

Preuve. Par les hypothèses que f est une r_1-convexe et g est une r_2-convexe, on peut écrire

$$f(ta+(1-t)b) \leq \left(t[f(a)]^{r1} + (1-t)[f(b)]^{r1}\right)^{\frac{1}{r1}},$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq \left(t[g(a)]^{r2} + (1-t)[g(b)]^{r2}\right)^{\frac{1}{r2}},$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $r_1, r_2 > 0$.
Alors

$$f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \leq \left(t[f(a)]^{r1} + (1-t)[f(b)]^{r1}\right)^{\frac{1}{r1}} \left(t[g(a)]^{r2} + (1-t)[g(b)]^{r2}\right)^{\frac{1}{r2}},$$

et puis on fait une intégration pour les deux cotes par rapport à t sur $[0, 1]$ et d'après la définition 1.3.3. On obtient

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,{}^b d_q x \leq \int_0^1 \left(t[f(a)]^{r1} + (1-t)[f(b)]^{r1}\right)^{\frac{1}{r1}} \left(t[g(a)]^{r2} + (1-t)[g(b)]^{r2}\right)^{\frac{1}{r2}} d_q t. \tag{3.2.15}$$

Ainsi par l'inégalité de Cauchy pour le côté droit de l'inégalité (3.2.15), nous avons

$$\int_0^1 \left(t[f(a)]^{r1}+(1-t)[f(b)]^{r1}\right)^{\frac{1}{r1}}\left(t[g(a)]^{r2}+(1-t)[g(b)]^{r2}\right)^{\frac{1}{r2}}d_qt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t[f(a)]^{r1}+(1-t)[f(b)]^{r1}\right)^{\frac{2}{r1}}d_qt+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(t[g(a)]^{r2}+(1-t)[g(b)]^{r2}\right)^{\frac{2}{r2}}d_qt.$$

Maintenant par l'inégalité de Minkowski (2.3.1), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t[f(a)]^{r_1}+(1-t)[f(b)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}d_qt &\leq \left(\left(\int_0^1 t^{\frac{2}{r_1}}d_qt\right)^{\frac{r_1}{2}}[f(a)]^{r_1}+\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{2}{r_1}}d_qt\right)^{\frac{r_1}{2}}[f(b)]^{r_1}\right)^{\frac{2}{r_1}}\\ &= \left(\left(\frac{1}{[\frac{2}{r_1}+1]_q}\right)^{\frac{r_1}{2}}[f(a)]^{r_1}+\left(\frac{q}{[\frac{2}{r_1}+1]_q}\right)^{\frac{r_1}{2}}[f(b)]^{r_1}\right)^{\frac{2}{r_1}}.\end{aligned}$$

De même on a

$$\int_0^1 (t[g(a)]^{r_2}+(1-t)[g(b)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}d_qt \leq \left(\left(\frac{1}{[\frac{2}{r_2}+1]_q}\right)^{\frac{r_2}{2}}[g(a)]^{r_2}+\left(\frac{q}{[\frac{2}{r_2}+1]_q}\right)^{\frac{r_2}{2}}[g(b)]^{r_2}\right)^{\frac{2}{r_2}}. \quad (3.2.16)$$

Ainsi d'après l'inégalité (3.2.15) et (3.2.16) on obtient le résultat ■

Théorème 3.8 *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions r_1-convexe et r_2-convexe respectivement. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)^b d_qx \leq \left(\frac{[f(a)]^{r1}+[qf(b)]^{r1}}{[2]_q}\right)^{\frac{1}{r1}}\left(\frac{[g(a)]^{r2}+[qg(b)]^{r2}}{[2]_q}\right)^{\frac{1}{r2}} \quad (3.2.17)$$

ou $0<q<1$ *et* $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1$ *avec* $r_1>1$.

Preuve. On applique l'inégalité de Hölder (2.3.3) dans (3.2.15), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)^b d_qx &\leq \left(\int_0^1 (t[f(a)]^{r1}+(1-t)[f(b)]^{r1})d_qt\right)^{\frac{1}{r1}}\left(\int_0^1 (t[g(a)]^{r2}+(1-t)[g(b)]^{r2})d_qt\right)^{\frac{1}{r2}}\\ &= \left(\frac{[f(a)]^{r1}+[qf(b)]^{r1}}{[2]_q}\right)^{\frac{1}{r1}}\left(\frac{[g(a)]^{r2}+[qg(b)]^{r2}}{[2]_q}\right)^{\frac{1}{r2}}. \quad (3.2.18)\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 4

Q_1,Q_2-Inégalites d'Hermite Hadamard

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux inégalités, connues sous le nom Q_1 et Q_2 d'Hermite Hadamard, relatives aux fonctions a deux variables dans les cas convexes et r-convexes

4.1 Cas convexe

Dans [14], M.A. Latif et al. ont introduit l'inégalité suivante

Théorème 4.1 *Soit $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction convexe coordonnées sur $[a, b] \times [c, d]$, Alors on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)\, {}_ad_{q_1}x + \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2}, y\right)\, {}_cd_{q_2}y\right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\, {}_cd_{q_2}y\, {}_ad_{q_1}x \\ &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}_cd_{q_2}y + \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}_cd_{q_2}y \\ &+ \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}_ad_{q_1}x + \frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}_ad_{q_1}x \\ &\leq \frac{q_1q_2f(a,c) + q_1f(a,d) + q_2f(b,c) + f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Preuve. Comme $f : [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur les coordonnées sur $[a,b] \times [c,d]$, Alors on a

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b+tb+(1-t)a}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(ta+(1-t)b, \frac{c+d}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(ta+(1-t)b, \frac{c+d}{2}\right). \end{aligned}$$

Par q_1-intégration par rapport à t sur $[0,1]$, et par q_2-intégration par rapport à y sur $[c,d]$ en deux côtés de l'inégalité ci-dessus. on obtient par le changement de variables

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+d}{2}\right)\, {}_ad_{q_1}x \tag{4.1.2}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{cs+(1-s)d+sd+(1-s)c}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}, cs+(1-s)d\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}, cd+(1-s)c\right). \end{aligned}$$

Par q_1-intégration par rapport à x sur $[0,1]$, et par q_2-intégration par rapport à s sur $[c,d]$ en deux côtés de l'inégalité ci-dessus. on obtient par le changement de variables

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\leq\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)\,{}_cd_{q_2}y \tag{4.1.3}$$

En additionnant (4.1.2) et(4.1.3) et en divisant les deux côtés par 2, on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}\right)\leq\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)\,{}_cd_{q_2}y. \tag{4.1.4}$$

On Considère maintenant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) &= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(x,\frac{cs+(1-s)d+sd+(1-s)c}{2}\right)\,{}_ad_{q_1}x\\ &\leq \frac{1}{4(b-a)}\int_a^b f(x,cs+(1-s)d)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{4(b-a)}\int_a^b f(x,sd+(1-s)c)\,{}_ad_{q_1}x\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Par q_2-intégration par rapport à s sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{1}{4(b-a)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{4(b-a)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x\\ &= \frac{1}{2(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

De la même manière

$$\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)\,{}_cd_{q_2}y\leq\frac{1}{2(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x \tag{4.1.7}$$

De (4.1.6) et (4.1.7), on trouve

$$\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f\left(x,\frac{c+d}{2}\right)+\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d f\left(\frac{a+b}{2},y\right)\,{}_cd_{q_2}y\leq\frac{1}{2(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x. \tag{4.1.8}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x &= (b-a)\int_0^1\int_c^d f\big(tb+(1-t)a,y\big)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_0d_{q_1}t\\ &\leq (b-a)\int_0^1\int_c^d (1-t)f(a,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_0d_{q_1}t+(b-a)\int_0^1\int_c^d tf(b,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_0d_{q_1}t\\ &= \frac{q_1(b-a)}{1+q_1}\int_c^d f(a,y)\,{}_cd_{q_2}y+\frac{(b-a)}{1+q_1}\int_c^d f(b,y)\,{}_cd_{q_2}y.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Et

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x &= (d-c)\int_a^b\int_0^1 f\left(x,sd+(1-s)c\right)\,{}_cd_{q_2}s\,{}_0d_{q_1}x\\ &\leq (d-c)\int_a^b\int_0^1 sf(x,d)\,{}_cd_{q_2}s\,{}_0d_{q_1}x+(d-c)\int_a^b\int_c^d (1-s)f(x,c)\,{}_cd_{q_2}s\,{}_0d_{q_1}x\\ &= \frac{(d-c)}{1+q_2}\int_a^b f(x,d)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{q_2(d-c)}{1+q_2}\int_a^b f(x,c)\,{}_ad_{q_1}x\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

En additionnant (4.1.9) et (4.1.10) et multipliant l'inégalité trouvée par $\frac{1}{2(b-a)(d-c)}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)_c d_{q_2}y_a d_{q_1}x &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)_c d_{q_2}y\\ &+ \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)_c d_{q_2}y\\ &+ \frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)_a d_{q_1}x\\ &+ \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)_a d_{q_1}x.\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)_c d_{q_2}y + \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)_c d_{q_2}y$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)_a d_{q_1}x + \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)_a d_{q_1}x\\ &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)}\int_0^1 f(a,sd+(1-s)c)_0 d_{q_2}s + \frac{1}{2(1+q_1)}\int_0^1 f(b,sd+(1-s)c)_0 d_{q_2}s\\ &+ \frac{1}{2(1+q_2)}\int_0^1 f(tb+(1-t)a,d)_0 d_{q_1}t + \frac{q_2}{2(1+q_2)}\int_0^1 f(tb+(1-t)a,c)_0 d_{q_1}t\\ &\leq \frac{q_1 f(a,d)}{2(1+q_1)}\int_0^1 s_0 d_{q_2}s + \frac{q_1 f(a,c)}{2(1+q_1)}\int_0^1 (1-s)_0 d_{q_2}s + \frac{f(b,d)}{2(1+q_1)}\int_0^1 s_0 d_{q_2}s + \frac{f(b,c)}{2(1+q_1)}\int_0^1 (1-s)_0 d_{q_2}s\\ &+ \frac{f(b,d)}{2(1+q_2)}\int_0^1 t_0 d_{q_1}t + \frac{f(a,d)}{2(1+q_2)}\int_0^1 (1-t)_0 d_{q_1}t + \frac{q_2 f(b,c)}{2(1+q_2)}\int_0^1 t_0 d_{q_1}t + \frac{q_2 f(a,c)}{2(1+q_2)}\int_0^1 (1-t)_0 d_{q_1}t\\ &= \frac{q_1q_2 f(a,c)+q_1 f(a,d)+q_2 f(b,c)+f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Exemple 4.1.1 *Soit $f:[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=1-x-y$ est une fonction convexe continue sur les coordonnées sur $[0,1]\times[0,1]$.*
D'après (4.1.1), pour tout $q_1,q_2\in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned}f\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0}\int_0^1 f\left(x,\frac{0+1}{2}\right)\,_0d_{q_1}x + \frac{1}{1-0}\int_0^1 f\left(\frac{0+1}{2},y\right)\,_0d_{q_2}y\right]\\ &\leq \frac{1}{(1-0)(1-0)}\int_0^1\int_0^1 (1-x-y)\,_0d_{q_2}y\,_0d_{q_1}x\\ &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)(1-0)}\int_0^1 f(0,y)\,_cd_{q_2}y + \frac{1}{2(1+q_1)(1-0)}\int_0^1 f(1,y)\,_cd_{q_2}y\\ &+ \frac{q_2}{2(1+q_2)(1-0)}\int_0^1 f(x,0)\,_0d_{q_1}x + \frac{1}{2(1+q_2)(1-0)}\int_0^1 f(x,1)\,_0d_{q_1}x\\ &\leq \frac{q_1q_2 f(0,0)+q_1 f(0,1)+q_2 f(1,0)+f(1,1)}{(1+q_1)(1+q_2)}.\end{aligned}$$

En calculant les intégrales quantiques suivantes

$$\mathrm{I}_1 = f\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2}\right) = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0,$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0}\int_0^1 f\left(x,\frac{0+1}{2}\right)\,{}_0d_{q_1}x+\frac{1}{1-0}\int_0^1 f\left(\frac{0+1}{2},y\right)\,{}_0d_{q_2}y\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)\,{}_0d_{q_1}x+\int_0^1\left(\frac{1}{2}-y\right)\,{}_0d_{q_2}y\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{1+q_1}-\frac{1}{1+q_2}\right]=\frac{q_1q_2-1}{2(1+q_1)(1+q_2)},
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{I}_3=\int_0^1\int_0^1(1-x-y)\,{}_0d_{q_2}y\,{}_0d_{q_1}x=1-\frac{1}{1+q_1}-\frac{1}{1+q_2}=\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)},$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{4a} &= \frac{q_1}{2(1+q_1)(1-0)}\int_0^1 f(0,y)\,{}_cd_{q_2}y=\frac{q_1}{2(1+q_1)}\int_0^1(1-y)\,{}_cd_{q_2}y=\frac{q_1q_2}{2(1+q_1)(1+q_2)},\\
\mathrm{I}_{4b} &= \frac{1}{2(1+q_1)(1-0)}\int_0^1 f(1,y)\,{}_cd_{q_2}y=\frac{1}{2(1+q_1)}\int_0^1(-y)\,{}_cd_{q_2}y=-\frac{1}{2(1+q_1)(1+q_2)},\\
\mathrm{I}_{4c} &= \frac{q_2}{2(1+q_2)(1-0)}\int_0^1 f(x,0)\,{}_0d_{q_1}x=\frac{q_2}{2(1+q_2)}\int_0^1(1-x)\,{}_0d_{q_1}x=\frac{q_1q_2}{2(1+q_1)(1+q_2)},\\
\mathrm{I}_{4d} &= \frac{1}{2(1+q_2)(1-0)}\int_0^1 f(x,1)\,{}_0d_{q_1}x=\frac{1}{2(1+q_2)}\int_0^1(-x)\,{}_0d_{q_1}x=-\frac{1}{2(1+q_1)(1+q_2)},
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{I}_4=\mathrm{I}_{4a}+\mathrm{I}_{4b}+\mathrm{I}_{4c}+\mathrm{I}_{4d}=\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)},$$

Et

$$\mathrm{I}_5=\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)}.$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &\le \mathrm{I}_2\le\mathrm{I}_3\le\mathrm{I}_4\le\mathrm{I}_5,\\
0 &\le \frac{q_1q_2-1}{2(1+q_1)(1+q_2)}\le\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)}\le\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)}\le\frac{q_1q_2-1}{(1+q_1)(1+q_2)}.
\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

Si on pose $q_1=q_2=\frac{1}{2}$ dans (4.1.11), alors on a la contradiction suivante

$$0\le-\frac{1}{6}\le-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}\le-\frac{1}{3}.$$

Dans [3], H. Budak et al. ont introduit les inégalités suivantes

Théorème 4.2 *Soit $f : [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur les coordonnées sur $[a,b]\times[c,d]$. Alors pour tout q_1, $q_2 \in]0,1[$, Alors on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1},\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) &\le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1},y\right)\,{}_cd_{q_2}y\right]\\
&\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x\\
&\le \frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^b f(a,y)\,{}_cd_{q_2}y+\frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\,{}_cd_{q_2}y\\
&+ \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\,{}_ad_{q_1}x\\
&\le \frac{q_1q_2f(a,c)+q_1f(a,d)+q_2f(b,c)+f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}. \qquad (4.1.12)
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $g_x : [c,\, d] \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x,y)$ est une fonction convexe.
Alors d'après le Théorème 3.2, on a

$$g_x\left(\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right)\le\frac{1}{d-c}\int_c^d g_x(y)\,{}_cd_{q_2}y\le\frac{q_2g_x(c)+g_x(d)}{1+q_2},$$

donc

$$f\left(x,\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right)\le\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\le\frac{q_2f(x,c)+f(x,d)}{1+q_2}, \qquad (4.1.13)$$

Pour tout $x \in [a,b]$ et $q_1,q_2 \in]0,1[$.
Par $q_{a,1}$-intégration par rapport à x sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right)\,{}_adq_1x &\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x\\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{q_2f(x,c)+f(x,d)}{1+q_2}\,{}_ad_{q_1}x. \qquad (4.1.14)
\end{aligned}$$

et soit $g_y : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, $g_y(x) = f(x,y)$ est une fonction convexe. Alors de la même manière, on trouve

$$f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1},y\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x,y)\,{}_ad_{q_1}x\le\frac{q_1f(a,y)+f(b,y)}{1+q_1}. \qquad (4.1.15)$$

pour tout $y \in [c,\, d]$ et $q_1, q_2 \in]0,\, 1[$.
Par la $q_{c,2}$-intégration sur $[c,\, d]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1},y\right)\,{}_cdq_2y &\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cdq_2y\,{}_ad_{q_1}x\\
&\le \frac{1}{d-c}\int_c^d \frac{q_1f(a,y)+f(b,y)}{1+q_1}\,{}_cdq_2y. \qquad (4.1.16)
\end{aligned}$$

De (4.1.14) et (4.1.16), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{cq_2+d}{1+q_2}\right)\,{}_ad_{q_1}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1},y\right)\,{}_cd_{q_2}y\right]\\
&\quad\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_cd_{q_2}y\,{}_ad_{q_1}x\\
&\quad\le \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\,{}_adq_1x+\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\,{}_ad_{q_1}x\\
&\quad+\frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\,{}_cd_{q2}y+\frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\,{}_cd_{q_2}y.
\end{aligned}$$

Ainsi, posant $x = \frac{aq_1+b}{1+q_1}$ et $y = \frac{cq_2+d}{1+q_2}$ dans (4.1.14) et (4.1.15), alors on obtient

$$f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, \frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, y\right) {}_c d_{q_2} y \leq \frac{q_2 f(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, c) + f(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, d)}{1+q_2}, \tag{4.1.17}$$

et

$$f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, \frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x \leq \frac{q_1 f(a, \frac{cq_2+d}{1+q_2}) + f(b, \frac{cq_2+d}{1+q_2})}{1+q_1}. \tag{4.1.18}$$

De (4.1.17) et (4.1.18), alors on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, \frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{cq_2+d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x + \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, y\right) {}_c d_{q_2} y\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{q_2 f(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, c) + f(\frac{aq_1+b}{1+q_1}, d)}{1+q_2} + \frac{q_1 f(a, \frac{cq_2+d}{1+q_2}) + f(b, \frac{cq_2+d}{1+q_2})}{1+q_1}\right]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité(4.1.17), on a

$$\frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}_a d_{q_1} x \leq \frac{q_2}{2(1+q_2)} \frac{q_1 f(a,c) + f(b,c)}{1+q_1}, \tag{4.1.19}$$

$$\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}_a d q_1 x \leq \frac{1}{2(1+q_2)} \frac{q_1 f(a,d) + f(b,d)}{1+q_1}, \tag{4.1.20}$$

$$\frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}_c d_{q_2} y \leq \frac{q_1}{2(1+q_1)} \frac{q_2 f(a,c) + f(a,d)}{1+q_2}, \tag{4.1.21}$$

$$\frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}_c d q_2 y \leq \frac{1}{2(1+q_1)} \frac{q_2 f(b,c) + f(b,d)}{1+q_2}. \tag{4.1.22}$$

Maintenant, l'addition de (4.1.19) et (4.1.20) et (4.1.21) et (4.1.22) on trouve l'inégalité (4.1.12). D'où le résultat. ■

Théorème 4.3 *Soit $f : [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction convexe coordonnées sur $[a,b] \times [c,d]$, Alors on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x + \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, y\right) {}^d d q_2 y\right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, {}^d d_{q_2} y\, {}_a d_{q_1} x \\ &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}^d d_{q_2} y + \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}^d d_{q_2} y \\ &+ \frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}_a d_{q_1} x + \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}_a d_{q_1} x \\ &\leq \frac{q_1 f(a,c) + q_1 q_2 f(a,d) + f(b,c) + q_2 f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}. \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Pour tout $q_1, q_2 \in]0,1[$.

Preuve. Soit $\phi_x : [c,d] \to \mathbb{R}$, $\phi_x(y) = f(x,y)$ est une fonction convexe sur $[c,d]$ en utilisant l'inégalité (3.1.8) pour l'intervalle $[c,d]$ et $q_2 \in]0,1[$, on obtient (4.1.13)
On intègre cette dernière inégalité sur $[a,b]_q$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, {}^d d_{q_2} y\, {}_a d_{q_1} x \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x,c) + q_2 f(x,d)}{1+q_2}\, {}_a d_{q_1} x. \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Soit $\phi_y : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi_y(x) = f(x,y)$ est une fonction convexe sur $[a,b]$, alors d'après l'inégalité (3.1.4) pour $q_1 \in]0,1[$, On obtient (4.1.15)
Par la $q_{d,2}$ en intégrant les deux côtés de l'inégalité (4.1.15), pour $q_1 \in]0,1[$ on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, y\right) {}^d d_{q_2} y &\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\, {}^d d_{q_2} y\, {}_a d_{q_1} x \\ &\leq \frac{1}{d-c}\int_c^d \frac{q_1 f(a,y)+f(b,y)}{1+q_1}\, {}^d d_{q_2} y. \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

De (4.1.24) et (4.1.25), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x + \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, y\right) {}^d d_{q_2} y \\ &\quad \leq \frac{2}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\, {}^d d_{q_2} y\, {}_a d_{q_1} x \\ &\quad \leq \frac{q_1}{(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}^d d_{q_2} y + \frac{1}{(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}^d d_{q_2} y \\ &\quad +\frac{1}{(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}_a d_{q_1} x + \frac{q_2}{(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}_a d_{q_1} x. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la deuxième et la troisième inégalité dans (4.1.23).
Par la première inégalité de (3.1.4), on trouve

$$f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) {}_a d_{q_1} x. \tag{4.1.27}$$

Et par l'inégalité de (3.1.8), on trouve

$$f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, \frac{c+q_2 d}{1+q_2}\right) \leq \frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{q_1 a+b}{1+q_1}, y\right) {}^d d_{q_2} y. \tag{4.1.28}$$

De (4.1.27) et (4.1.28), on obtient la première inégalité en (4.1.23).
Enfin en utilisant les deuxièmes inégalités de (3.1.4) et (3.1.8), on obtient

$$\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}_a d_{q_1} x \leq \frac{1}{2(1+q_2)} \frac{q_1 f(a,c)+f(b,c)}{1+q_1}, \tag{4.1.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}_a d_{q_1} x &\leq \frac{q_2}{2(1+q_2)} \frac{q_1 f(a,d)+f(b,d)}{1+q_1}, \\ \frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}^d d_{q_2} y &\leq \frac{q_1}{2(1+q_1)} \frac{f(a,c)+q_2 f(a,d)}{1+q_2}, \\ \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}^d d_{q_2} y &\leq \frac{1}{2(1+q_1)} \frac{f(b,c)+q_2 f(b,d)}{1+q_2}, \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

De l'inégalité (4.1.29) et (4.1.30), on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\, {}^b d_{q_1} x + \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\, {}^b d_{q_1} x \\ &\quad +\frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\, {}^d d_{q_2} y + \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\, {}^d d_{q_2} y \\ &\quad \leq \frac{q_1 f(a,c)+q_1 q_2 f(a,d)+f(b,c)+q_2 f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)} \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

■

Théorème 4.4 *Soit $f:[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction convexe coordonnées sur $[a,b]\times[c,d]$, Alors on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+q_1b}{1+q_1},\frac{q_2c+d}{1+q_2}\right) &\leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{q_2c+d}{1+q_2}\right)\,{}^b d_{q_1}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+q_1b}{1+q_1},y\right)\,{}_c d_{q_2}y\right]\\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_c d_{q_2}y\,{}^b d_{q_1}x\\
&\leq \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\,{}_c d_{q_2}y+\frac{q_1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(b,y)\,{}_c d_{q_2}y\\
&+ \frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)\,{}^b d_{q_1}x+\frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\,{}^b d_{q_1}x\\
&\leq \frac{q_2f(a,c)+f(a,d)+q_1q_2f(b,c)+q_1f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}. \qquad (4.1.32)
\end{aligned}$$

Preuve. La démonstration du Théorème 4.4, passant par deux intégration $q_{b,1}$ et $q_{c,2}$ est de même que la démonstration du Théorème 4.3. ■

Théorème 4.5 *Soit $f:[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe coordonnée sur $[a,b]\times[c,d]$, Alors on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+q_1b}{1+q_1},\frac{c+q_2d}{1+q_2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x,\frac{q_2c+d}{1+q_2}\right)\,{}^b d_{q_1}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{a+q_1b}{1+q_1},y\right)\,{}^d d_{q_2}y\right]\\
&\leq \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}^d d_{q_2}y\,{}^b d_{q_1}x\\
&\leq \frac{1}{2(1+q_1)(d-c)}\int_c^d f(a,y)\,{}^d d_{q_2}y+\frac{q_1}{2(1+q_2)(d-c)}\int_c^d f(b,y)^d d_{q_2}y\\
&+ \frac{1}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,c)^b d_{q_1}x+\frac{q_2}{2(1+q_2)(b-a)}\int_a^b f(x,d)\,{}^b d_{q_1}x\\
&\leq \frac{f(a,c)+q_2f(a,d)+q_1f(b,c)+q_1q_2f(b,d)}{(1+q_1)(1+q_2)}. \qquad (4.1.33)
\end{aligned}$$

Preuve. La démonstration du Théorème 4.5, passant par deux intégration $q_{b,1}$ et $q_{d,2}$ est de même que la démonstration du Théorème 4.3. ■

4.2 Cas r-convexe

Dans [19], Xuexiao You et al. ont introduit les inégalités suivantes

Théorème 4.6 *Soient $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe coordonnée positive sur $[a,b]\times[c,d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}^b d_{q_1}x^d d_{q_2}y &\leq \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_2}}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left([f(x,c)]^r+[q_2f(x,d)]^r\right)^{\frac{1}{r}}\,{}^b d_{q_1}x\\
&+ \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_1}}\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d\left([f(a,y)]^r+[q_1f(b,y)]^r\right)^{\frac{1}{r}}\,{}^d d_{q_2}x.
\end{aligned}$$
$$. \qquad (4.2.1)$$

Preuve. Puisque $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe coordonnée alors on a les applications suivante

$$f_x:[c,d]\to\mathbb{R}_+,\quad f_x(v)=f(x,v)$$

$$f_y : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \quad f_y(u) = f(u, y)$$

sont r-convexe et par l'inégalité (3.2.9). On peut écrire

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f_x(y)\,{}^d d_{q_2} y \le \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_2}}\left([f_x(c)]^r + [q_2 f_x(d)]\right)^{\frac{1}{r}}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(x,y)\,{}^d d_{q_2} y \le \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_2}}\left([f(x,c)]^r + [q_2 f(x,d)]^r\right)^{\frac{1}{r}} \tag{4.2.2}$$

On devise les deux côtés de l'inégalité (4.2.2) sur $(b-a)$ et par q^b-intégration par rapport à x sur $[a, b]$. On obtient

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}^b d_{q_1} x\,{}^d d_{q_2} y \le \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_2}}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x,c)\right]^r + \left[q_2 f(x,d)\right]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}^b d_{q_1} x\right] \tag{4.2.3}$$

De même par similarité pour l'application

$$f_y : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \quad f_y(u) = f(u, y),$$

nous avons

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}^b d_{q_1} x\,{}^d d_{q_2} y \le \frac{1}{\left[\frac{1}{r}+1\right]_{q_1}}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d \left[(f(a,y)\right]^r + \left[q_1 f(b,y)\right]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}^d d_{q_2} y\right] \tag{4.2.4}$$

De (4.2.3) et (4.2.4), on obtient l'inégalité (4.2.1). ∎

Théorème 4.7 *Soient $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe coordonnée positive sur $[a, b] \times [c, d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_a d_{q_1} x\,{}^c d_{q_2} y \quad &\le \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]_{q_2}}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b ([q_2 f(x,c)]^r + [f(x,d)]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}_a d_{q_1} x \\ &+ \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]_{q_1}}\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d ([q_1 f(a,y)]^r + [f(b,y)]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}_c d_{q_2} y.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Pour tout $0 < r \le 1$ *et* $0 < q_1, q_2 < 1$

Preuve. De même manière que la démonstration du Théorème 4.6 ∎

Théorème 4.8 *Soient $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe coordonnée positive sur $[a,b] \times [c,d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,{}_a d_{q_1} x\,{}^d d_{q_2} y \quad &\le \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]q_2}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b ([q_2 f(x,c)]^r + [f(x,d)]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}_a d_{q_1} x \\ &+ \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]q_1}\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d ([f(a,y)]^r + [q_1 f(b,y)]^r)^{\frac{1}{r}}\,{}_d d_{q_2} y.\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Pour tout $0 < r \le 1$ *et* $0 < q_1, q_2 < 1$

Preuve. De même manière que la démonstration du Théorème 4.6 ∎

Théorème 4.9 *Soient $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r-convexe coordonnée positive sur $[a,b] \times [c,d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)^b d_{q_1}x_c d_{q_2}y \quad &\leq \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]q_2}\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b([f(x,c)]^r+[q_2 f(x,d)]^r)^{\frac{1}{r}}\ {}^b d_{q_1}x \\ &+ \quad \frac{1}{[\frac{1}{r}+1]q_1}\frac{1}{2(d-c)}\int_c^d [q_1 f(a,y)]^r+[f(b,y)]^r)^{\frac{1}{r}}\ {}_c d_{q_2}.\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Pour tout $0<r\leq 1$ *et* $0<q_1,q_2<1$

Preuve. De même manière que la démonstration du Théorème 4.6 ∎

Théorème 4.10 *Soient $f,g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r_1-convexe coordonnée et r_2-convexe coordonnée respectivement sur $[a, b] \times [c, d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)\ {}^d d_{q_2}y^b d_{q_1}x \leq &\frac{1}{4\left[\frac{2}{r_1}+1\right]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left([f(x,c)]^{r_1}+[q_2^{\frac{1}{2}}f(x,d)]^{r_1}\right)^{\frac{2}{r_1}}\ {}^b d_{q_1}x \\ &+\frac{1}{4\left[\frac{2}{r_2}+1\right]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left([g(x,c)]^{r_2}+[q_2^{\frac{1}{2}}g(x,d)]^{r_2}\right)^{\frac{2}{r_2}}\ {}^b d_{q_1}x \\ &+\frac{1}{4\left[\frac{2}{r_1}+1\right]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d\int_c^d\left([f(a,y)]^{r_1}+[q_1^{\frac{1}{2}}f(b,y)]^{r_1}\right)^{\frac{2}{r_1}}\ {}^d d_{q_2}y \\ &+\frac{1}{4\left[\frac{2}{r_2}+1\right]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d\left([g(a,y)]^{r_2}+[q_1^{\frac{1}{2}}g(b,y)]^{r_2}\right)^{\frac{2}{r_2}}\ {}^d d_{q_2}y.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

avec $0<r_1,r_2\leq 2$ *et* $0<q_1,q_2<1$.

Preuve. Comme $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r_1-convexe coordonnée sur $[a,b]\times[c,d]$, puis les correspondances partielles

$$f_x : [c,\, d] \to \mathbb{R}_+, f_x(v) = f(x,v),$$

$$f_y : [a,\, b] \to \mathbb{R}_+, f_y(u) = f(u,y),$$

Sont r_1-convexe fonction sur $[a,b]\times[c,d]$, si g est fonction r_2-convexe coordonnée, puis les correspondances partielles

$$g_x : [c,\, d] \to \mathbb{R}_+, g_x(v) = f(x,v),$$

$$g_y : [a,\, b] \to \mathbb{R}_+, g_y(u) = f(u,y),$$

Sont r_2-convexe fonction sur $[a,\, b]\times[c,\, d]$ d'après l'inégalité (3.2.14) on obtient

$$\frac{2}{d-c}\int_c^d f_x(y)g_x(y)^d d_{q_2}y \leq \frac{1}{[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}([f_x(c)]^{r_1}+[q_2^{\frac{1}{2}}f_x(d)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}})+\frac{1}{[\frac{2}{r_2}+1]_{q_2}}([g_x(c)]^{r_2}+[q_2^{\frac{1}{2}}g_x(d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}},$$

et

$$\frac{2}{d-c}\int_c^d f(x,y)g(x,y)^d d_{q_2}y \leq \frac{1}{[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}([f(x,c)]^{r_1}+[q_2^{\frac{1}{2}}f(x,d)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}+[\frac{1}{\frac{2}{r_2}+1}]([g(x,c)]^{r_2}+[q_2^{\frac{1}{2}}g(x,d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}},$$

En divisant les deux côtés de l'inégalité sur $(b-a)$ et q^b -intégration par rapport à x sur $[a, b]$ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)^d d_{q_2}y^b d_{q_1}x \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\frac{1}{[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b([f(x,c)]^{r_1}+[q_2^{\frac{1}{2}}f(x,d)]^{r_1})^{\frac{1}{r_1}}\ {}^b d_{q_1}x\right]\\ &+ \quad \frac{1}{2}\frac{1}{[\frac{2}{r_2}+1]_{q_2}}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b([g(x,c)]^{r_2}+[q_2^{\frac{1}{2}}g(x,d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}^b d_{q_1}x\right].\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)\ {}^d d_{q_2}y^b d_{q_1}x \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\frac{1}{[\frac{2}{r_1}+1]\ _{q_1}}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d([f(a,y)]^{r_1}+[q_1^{\frac{1}{2}}f(b,y)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\ {}^d d_{q_2}y\right]\\ &+ \quad \frac{1}{2}\frac{1}{[\frac{2}{r_2}+1]_{q_1}}\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d([g(a,y)]^{r_2}+[q_1^{\frac{1}{2}}g(b,y)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}^d d_{q_2}y\right].\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

En additionnant les inégalités (4.2.9) et (4.2.10) on obtient le résultat. ■

Théorème 4.11 *Soient $f, g : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r_1-convexe coordonnée et r_2-convexe coordonnée respectivement sur $[a, b]\times[c, d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)_c d_{q_2}y\ {}^b d_{q_1}x \quad &\leq \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([f(x,c)]^{r_1}+[q_2 f(x,d)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\ {}^b d_{q_1}x\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([g(x,c)]^{r_2}+[q_2^{\frac{1}{2}}g(x,d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}^b d_{q_1}x\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([q_1^{\frac{1}{2}}f(a,y)]^{r_1}+[f(b,y)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\ {}_c d_{q_2}y\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([q_1^{\frac{1}{2}}g(a,y)]^{r_2}+[g(b,y)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}_c d_{q_2}y.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Théorème 4.12 *Soient $f, g : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r_1-convexe coordonnée et r_2-convexe coordonnée respectivement sur $[a, b]\times[c, d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)_c d_{q_2}y\ {}_a d_{q_1}x \quad &\leq \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([q_2^{\frac{1}{2}}f(x,c)]^{r_1}+[f(x,d)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\ {}_a d_{q_1}x\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([q_2^{\frac{1}{2}}g(x,c)]^{r_2}+[g(x,d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}_a d_{q_1}x\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([q_1^{\frac{1}{2}}f(a,y)]^{r_1}+[f(b,y)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\ {}_c d_{q_2}y\\ &+ \quad \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([q_1^{\frac{1}{2}}g(a,y)]^{r_2}+[g(b,y)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\ {}_c d_{q_2}y.\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Théorème 4.13 *Soient $f, g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction r_1-convexe coordonnée et r_2-convexe coordonnée respectivement sur $[a, b] \times [c, d]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)g(x,y)\,{}^{d}d_{q_2}y\,{}_{a}d_{q_1}x \quad\leq\quad & \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([q_2^{\frac{1}{2}}f(x,c)]^{r_1}+[f(x,d)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\,{}_{a}d_{q_1}x \\
+ & \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_2}}\frac{1}{b-a}\int_a^b([q_2^{\frac{1}{2}}g(x,c)]^{r_2}+[g(x,d)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\,{}_{a}d_{q_1}x \\
+ & \frac{1}{4[\frac{2}{r_1}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([f(a,y)]^{r_1}+[q_1^{\frac{1}{2}}f(b,y)]^{r_1})^{\frac{2}{r_1}}\,{}^{d}d_{q_2}y \\
+ & \frac{1}{4[\frac{2}{r_2}+1]_{q_1}}\frac{1}{d-c}\int_c^d([g(a,y)]^{r_2}+[q_1^{\frac{1}{2}}g(b,y)]^{r_2})^{\frac{2}{r_2}}\,{}^{d}d_{q_2}y.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Preuve. La démonstration du Théorème 4.11et Théorème 4.12 et le Théorème 4.13 est de même que Théorème 4.10. ■

Conclusion

Ce mémoire est censé faire découvrir les notions de base du q-calcul (q-dérivée, q-intégrale de jackson), en se basant sur le thème choisis avec mon encadrante qui est les q-inégalités d'Hermite Hadamard et q_1, q_2-inégalités d'Hermite Hadamard, en utilisant les fonctions dans le cas convexes et r-convexes, les résultats obtenus dans ce travail sont les raffinements des résultats actuels.

Bibliographie

[1] **Alp. N., Sarikaya. M.Z., Kunt. M.and Iscan.I** (2018), *Q-Hermie-Hadamard inequalities and quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions*, J.King Saud Univ., **30**, pp 193 – 203. 2, 21

[2] **Bermudo. S., Korus . P., and Nàpoles Valdés. J.E.** (2020) , *On q-Hermite-Hadamard inequalities for general convex function*, Acta Mathematica Hungarica, **Vol.162, no. 1**, pp 364 – 374. 22

[3] **Budak. H., AliMA. M., and Tarhanaci.** (2020) , *Some new q-Hermite-Hadamard like inequalities for coordinated convex functions*, J Optim Theory Appl, , pp 186(3) – 899-910. 12, 31

[4] **Brahim. K., Latifa. L., and Taf. S.** (2015), *Hermite-Hadamard type inequalities for r-convex functions in q-calculus*, Le Matematiche, **Vol.LXX(2015)-Fasc.II**, pp 295–303 . doi :10.4418/2015.70.2.20 2, 23, 24

[5] **Dragomir. S.S.** (2001), *On the Hadamard's inequality for function on the coordinates in a rectangle from the plan*, Taiwanese J.Math,5, , pp 775 – 788. 14

[6] **Dragomir. S.S., Pearce. C.E.M** (2000), *Select Topic On Hermite Hadamard Inequalities And Applications*, RGMIA Monographs Victoria University. 2

[7] **Ernst. T.** (2012), *A Comprehensive Treatment of q-Calculus*, Springer, Basel 2

[8] **Ekinci. A., Akdemir. A.O., and Ozdemir. M.E.** , *On Hadamard-type Inequalities for coordinated r-convex functions*, 17

[9] **Gauchman. H.** (2004), *Integral Inequalities In q-Calculus*, Comput. Math. Appl. 47, 281-300. 2

[10] **Gill. P.M., Pearce. C.E.M., and Pecaric. J.** (1997), *Hadamardís inequality for r -convex functions*, J.Math. Anal. Appl.215, pp 461 –470 . 16

[11] **Hadamard. J.** (1893), *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math. Pures Appl.58, pp 171–215 . 2

[12] **Jackson. F.H.** (1910), *On a q-definite integrals*, Quarterly J. pure Appl. Math.41. 2, 8

[13] **Kac. V. G., Cheung. p.** (2002), *Quantum Calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2, 4, 5, 8

[14] **Latif. M.A., Dragomir. S.S., and Momoniat. E.** (2017), *Some q-analogues of Hermite-Hadamard inequality of functions of two variables on finite rectangles in the plane*, Journal of King Saud University-Science. 29. , pp 263 – 273. 2, 27

[15] **Necmettin Alp, Mehmet Zeki Sarikaya** (2020), *Quantum Hermite-Hadamard's type inequalities for coordinated convex functions*, Applied mathematics-E-Notes. 20. , pp 341 – 356 . 2

[16] **Rajkovic. PM., Stankovic. M.S., Marinkovic. S.D.** (2004), *The zeros of polynomials orthogonal with respect to q-integral on several intervals in the complex plane*, Softex.Sofia , pp 178 – 188 . 10

[17] **Tariboon. J., Ntouyas. S.K.** (2013), *Quatum calculus on finite intervals and applications to impulsive differnce equations*, Adv Difference Equ., pp 282 – 1-19. 6, 8, 42

[18] **Taf. S., Brahim . K., and Riahi. L** (2014), *Some results for Hadamard-type inequalities in quantum calculus*, Le matematiche, **Vol.LXIX(2014)-Fasc.II**, pp 243 – 258. doi :10.4418/2014.69.2.21 10, 20, 42

[19] **Xuexiao You, Hasan Kara, Huseyin Budak, and Humaira Kalsoom** (2021), *Quantum inequalities of Hadamard type for r-Convex functions*, Hindawi journal of Mathematics, **Volume 2021, Article ID 6634614**, pp 14 page doi :org/10.1155/2021/6634614. 2, 25, 34

Résumé

Dans ce mémoire, on va étudier l'inégalité Hermite Hadamard dans le calcul quantique en utilisant la notion de q-dérivé et q-intégrales nouvellement définies, cité par S. Taf et all [18], et J. Tariboon [17] passant par deux type convexe et r-convexe, avec un seul variable ainsi avec deux variable.

Mots-Clés. Fonction Convexe, Fonction r-convexe, Q-Dérivée, Q-intégrale de Jackson.

On Some Quantum Inequalities of the Hermite-Hadamard Type for Coordinated Convex Functions

Abstract :In this thesis, we will study the Hermite Hadamard inequality in quantum calculus using the notion of q-derivatives and newly defined q-integrals, cited by S. Taf et all [18], and J. Tariboon [17] passing through two types convex and r-convex, with only one variable thus with two variables.

Key Words. Convex function, r-convex function, q-derivatives, q-integrals.