MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Fethi BEGUELOUL

Puissances Imaginaires Bornées des Opérateurs Différentiels Abstraits

soutenu publiquement le 30 Juin 2022, devant le jury composé de :

Président :	Zinelaabidine LATREUCH	MCA	UMAB
Examinateur :	*Rabah HAOUA*	MCA	UMAB
Encadreur :	Maamar ANDASMAS	MCA	UMAB

Année Universitaire : 2021 / 2022

MASTER

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMIDE IBN BADIS MOSTAGANEM
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par :

BEGUELOUL FETHI

Intitulé

Puissances Imaginaires Bornées des Opérateurs Différentiels Abstraits

Juin 2022

Devant le jury composé de

Président : Latreuch Zinelaabidine MCA-Université de Mostaganem
Examinateur : Haoua Rabah MCA-Université de Mostaganem
Encadreur : Andasmas Maamar MCA-Université de Mostaganem

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu tout-puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.

Je voudrais dans un premier temps remercie, mon directeur de mémoire, Mr. Andasmas Maamar, de m'avoir encadré et pour sa patience, sa disponibilité et surtout sa judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je tiens à remercie toutes les personnes qui ont contribué au succès et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, ma famille et mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

En fin, je remercie ma chère mère qui est toujours été là pour moi.

Résumé

Ce mémoire, est consacré pour l'étude des résultats de l'article [12] ; concernant l'étude de certains opérateurs différentielles à puissances imaginaires bornées. On fait preuve, pour $\mu > 0$ suffisamment grand, que les opérateurs différentiels de la forme

$$P = a_0 \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial t} + \mu$$

où

$$(Pu)(t) := a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t),$$

telle que

$$u \in W^{n,p}(\mathbb{R}, E),$$

avec $a_0 = \pm 1$ et $a_i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ont des puissances imaginaires bornées dans l'espace $L^p(\mathbb{R}, E)$ (sont dans la classe $BIP(E, \theta)$), où $p \in (1, \infty)$ et E est un espace de Banach UMD.

Abstract

This dissertation, is devoted for the study of the results of the article [12]; concerning the study of some differential operators with bounded imaginary powers. We prove, for large $\mu > 0$, that the differential operators of the form

$$P = a_0 \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial t} + \mu,$$

where

$$(Pu)(t) := a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t),$$

such that

$$u \in W^{n,p}(\mathbb{R}, E),$$

with $a_0 = \pm 1$ and $a_i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, have bounded imaginary powers in the space $L^p(\mathbb{R}, E)$ (are in the class $BIP(E, \theta)$), where $p \in (1, \infty)$ and E is a UMD Banach space.

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est de prouver que certains opérateurs différentiels ont des puissances imaginaires bornées dans l'espace $L^p(\mathbb{R}, E)$, où E est un espace de Banach UMD et $p \in (1, \infty)$ (voir les définitions précises dans le premier chapitre).
L'importance des opérateurs à puissances imaginaires bornées a accru après le travail de Dore et Venni, 1987 (voir [10]), où ils ont trouvé que le caractère borné des puissances imaginaires des deux opérateurs A et B influe de manière significative sur le comportement des solutions de l'équation

$$Au + Bu = g,$$

en particulier leur régularité (l'inversibilité de la somme $A + B$ telle que $g \in L^p([0, 1], E)$ et E un espace UMD). Depuis ce temps, les résultats de Dore et Venni ont trouvé plusieurs applications, par exemple Clément et Prüss, 1990 [19], ils ont prouvé pour $p \in (1, \infty)$ l'estimation

$$\left|A_p^{i\gamma}\right| \leq C_p \left(1 + |\gamma|^2\right) e^{|\gamma|\frac{\pi}{2}}, \gamma \in \mathbb{R},$$

qui signifie que le générateur négatif A_p du semigroupe de Feller $F_p(\tau)$ admet des puissances imaginaires bornées. Prüss et Sohr, 1990 [20], ils définissent la classe $BIP(E, \theta)$ où E est un espace de Banach complexe et $\theta \in [0, \pi)$ puis ils donnent des hypothèses pour que les deux opérateurs αA, $\varepsilon + A$ soient $BIP(E, \theta)$, ils font preuve aussi que si E est ζ-convexe (UMD), A et B sont deux opérateurs $BIP(E, \theta)$ sachant que

$$\theta_A + \theta_B < \pi$$

et les opérateurs $A,\ B$ commutent aux sens des résolvantes.
Alors la somme

$$A+B\in BIP\left(E,\theta\right) \quad \text{où} \quad \theta=\max\left(\theta_{A},\theta_{B}\right).$$

Dans les espaces L^{p} de fonctions complexes de plusieurs variables réelles :
.) Seeley, 1971 [22], a prouvé le caractère borné des puissances imaginaires pour les opérateurs différentiels elliptiques à coefficients réguliés.
.) Prüss et Clement, 1990 [19] ont prouvé le caractère borné des puissances imaginaires pour les générateurs négatifs des semigroupes spéciaux.
.) Prüss-Sohr, 1991 [21], ont prouvé le caractère borné des puissances imaginaires pour les opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients continus de Hölder.
certaines études ont déjà été considérés comme un exemple dans [10], Dore et Venni ont étudié l'opérateur d/dt dans l'espace $L^{p}\left(\left[0,1\right],E\right)$; dans [19] Prüss et Clément, une application sur les équations intégro-différentielles; dans [21] Prüss et Sohr ont étudié comme exemple l'opérateur d/dt dans l'espace $L^{p}\left(\mathbb{R}_{+},E\right)$.
Notre mémoire traite des opérateurs différentiels d'ordre supérieur. On fait preuve, pour $\mu>0$ suffisamment grand, que les opérateurs différentiels de la forme

$$P=a_{0}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}+a_{1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}+\cdots+a_{n}\frac{\partial}{\partial t}+\mu$$

où

$$\left(Pu\right)\left(t\right):=a_{0}u^{(n)}\left(t\right)+a_{1}u^{(n-1)}\left(t\right)+\cdots+a_{n}u\left(t\right)+\mu u\left(t\right), \tag{0.0.1}$$

et

$$u\in W^{n,p}\left(\mathbb{R},E\right)$$

avec $a_{0}=\pm1$ et $a_{i}\in\mathbb{C},\ i\in\{1,2,...,n\}$, $n\in\mathbb{N}^{*}$, ont des puissances imaginaires bornées dans l'espace $L^{p}\left(\mathbb{R},E\right)$ (sont dans la classe $BIP\left(E,\theta\right)$), où $p\in(1,\infty)$ et E est un espace de Banach UMD.
Les techniques utilisées sont les propriétés des espaces UMD et une extension du théorème du multiplicateur de Michlin.

Le plan de ce travail

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres.

Le **premier chapitre** est consacré pour les rappels de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans ce travail.

Le deuxième chapitre est l'étude de l'opérateur (0.0.1), sous certaines hypothèses, on fait preuve, pour $\mu > 0$ suffisamment grand, l'opérateur $P \in BIP\,(E, \theta)$. On applique les résultats obtenus précédemment pour étudier quelques exemples d'opérateurs différentiels.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base concernant les outils d'analyse fonctionnelle comme les opérateurs linéaires fermés, les espaces fonctionnels, la théorie des semi-groupes, les puissances fractionnaires (pour plus de détails voir [3], [2], [4], [13], [16], [18]). On donnera aussi les résultats sur la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans le cadre commutatif approche de Dore et Venni voir [10].

1.1 Les opérateurs fermés

Soit E un espace de Banach complexe, A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ de E à valeurs dans E.

Définition 1.1.1 *A est dit borné si*

$$D(A) = E \text{ et } \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty$$

et on écrit $A \in L(E)$.

Définition 1.1.2 *On dit que l'opérateur A est fermé si et seulement si*

$$G(A) := \{(\xi, A\xi) \in E \times E : \xi \in D(A)\},$$

et fermé de $E \times E$.

Remarque : On dit que l'opérateur A est fermé si et seulement si pour toute suite

$$(x_n) \subset D(A),$$

telle que x_n converge vers x et Ax_n converge vers y, alors

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y.$$

Définition 1.1.3 *Soient $A : D(A) \subset E \to F$, $B : D(B) \subset E \to F$ deux opérateurs linéaires. On dit que B est une extension de A, et on note $A \subset B$ si*

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } A = B \text{ sur } D(A)$$

c'est à dire pour tout $x \in D(A)$ on a $Ax = Bx$.

Définition 1.1.4 *A est dit fermable s'il admet une extension fermée ; s'il existe $\overline{A}$, un opérateur linéaire sur E, tel que*

$$\overline{G(A)} = G\left(\overline{A}\right),$$

dans ce cas $\overline{A}$ est uniquement déterminé, c'est un opérateur fermé appelé la fermeture de A.
Remarque : A est dit fermable si et seulement si A admet une extension fermée i.e.

$$\forall (x_n) \subset D(A) : \begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

La plus petite extension fermée de A est notée $\overline{A}$ et s'appelle la fermeture de A.

Définition 1.1.5 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur E.*

♦ *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est définie par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est inversible dans } L(E)\}.$$

♦ *Le spectre de A, noté $\sigma(A)$, est définie par*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

♦ *On définit la résolvante $R_\lambda(A)$ de A au point $\lambda \in \rho(A)$ par*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Proposition 1.1.1 *Soient* $A : D(A) \subset E \to F$ *un opérateur linéaire.*
1. Si A *est un opérateur fermé, alors pour tout* $B \in L(E,F)$ *, l'opérateur*

$$A + B : D(A) \subset E \to F$$

est fermé.
2. Si A *est un opérateur fermé et injectif alors* A^{-1} *est fermé.*
3. Si A *est un opérateur fermé à valeurs dans* E *et* $D(A)$ *est fermé dans* E*, alors* A *est continue de* $D(A)$ *dans* E *(Application directe du théorème du graphe fermé).*
4. Si A *est un opérateur continu de* $D(A)$ *dans* E*, alors* A *est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*
5. Si $\rho(A) \neq \emptyset$ *alors* A *est fermé.*

Définition 1.1.6 *Soit* $A : D(A) \subset E \to F$ *un opérateur linéaire. On peut munir* $D(A)$ *d'une norme notée* $\|.\|_{D(A)}$ *et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout* $x \in D(A)$ *par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

Proposition 1.1.2 *Si* A *est un opérateur linéaire fermé, alors* $\left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.3 *Soient* $A \in L(E)$ *et* $B : D(B) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire fermé tels que* $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$*. Alors*

$$BA \in L(E).$$

Preuve *: Il est clair que* BA *est défini sur* E*. Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'éléments de* E *telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ dans } E, \\ (BA)\, x_n \to y \text{ dans } E. \end{cases}$$

Alors comme $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$*,* $(Ax_n)_n$ *est une suite d'éléments de* $D(B)$ *et comme* $A \in L(E)$ *on a*

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax \text{ dans } X, \\ B(Ax_n) \to y \text{ dans } X. \end{cases}$$

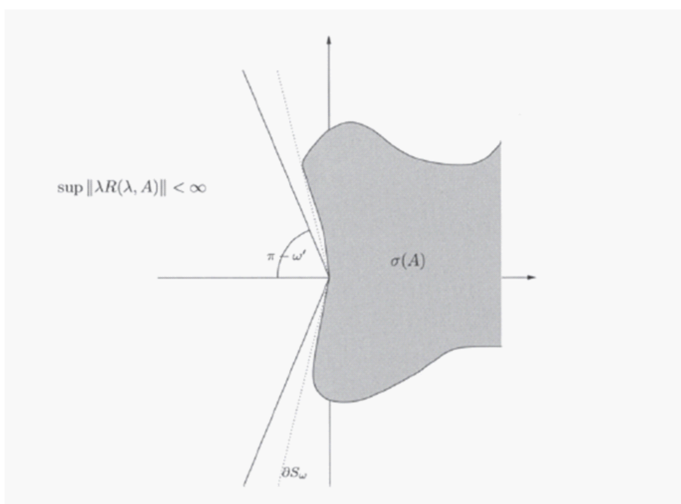
B étant fermé et $Ax \in D(B)$, d'après la définition (1.1.1)*, on a $B(Ax) = y$. Ainsi $x \in D(BA)$ et $(BA)x = y$.*
BA est donc un opérateur fermé et définie sur E. D'après le théorème du graphe fermé, on obtient BA borné sur E i.e. $BA \in L(X)$.

Définition 1.1.7 *[13, p. 19] On dit que l'opérateur A est sectoriel d'angle $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, si*

$$\begin{cases} i)\ \sigma(A) \subset \overline{S_\omega} \\ ii)\ M(A, \omega') := \sup\left\{\|\lambda R(\lambda, A)\|,\ \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\right\} \text{ pour tout } \omega' \in (\omega, \pi) \end{cases}$$

Avec

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \omega\} & si\quad 0 < \omega \leqslant \pi \\ (0, \infty) & si\quad \omega = 0 \end{cases}$$



Proposition 1.1.4 *Soient E un espace de Banach et A un opérateur fermé dans E.*
Si $(-\infty; 0) \subset \rho(A)$ et

$$M(A) := M(A, \pi) := \sup_{t>0} \left\|t(t + A)^{-1}\right\| < \infty,$$

alors

$$M(A) \geq 1$$

et

$$A \in Sect\left(\pi - \arcsin\left(\frac{1}{M(A)}\right)\right).$$

Proposition 1.1.5 *Soit $A \in Sect(\omega)$ avec $\omega \in [0;\pi[$.*
Alors, on a $N(A) \cap \overline{R(A)} = \{0\}$ et si $\overline{R(A)} = E$, alors A est injective.
Dans le cas où l'espace de Banach E est réflexif, alors

$$\overline{D(A)} = E \quad et \quad E = N(A) \oplus \overline{R(A)}.$$

Remarque 1.1.1 *Si l'espace E est un espace UMD (voir la définition ci-dessous [1.4.2]), alors il est réfléxif, d'où tout opérateur sectoriel A vérifie*

$$\overline{D(A)} = E \quad et \quad E = N(A) \oplus \overline{R(A)}.$$

Proposition 1.1.6 *Soit $A \in Sect(\omega)$ avec $\omega \in [0;\pi[$.*
Si $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\arg\lambda| + \omega < \pi$, alors

$$\lambda A \in Sect(|\arg\lambda| + \omega)$$

et

$$M(\lambda A, \omega') \leq M(A, \omega' - |\arg\lambda|)$$

pour tout

$$\omega' \in (|\arg\lambda| + \omega, \pi].$$

1.2 L'intégrale de Dunford

Notons par $H(A)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un ensemble fermé contenant le spectre de A. La formule analogue à la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes est définie par l'intégrale de Dunford suivante

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)(zI - A)^{-1}\,dz$$

Où γ est une courbe simple inclue dans $\rho(A)$ et $f \in H(A)$. L'opérateur $f(A) \in L(E)$ et ne dépend pas du choix de γ.

Exemple 1.2.1 *Pour $x \in D(A)$ on a*

$$A^{\alpha}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} z^{\alpha-1}R(z,A)\,Axdz,$$

d'après Balakrishnan on a

$$A^{\alpha}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}\,Axdt$$

pour tout $x \in D(A)$. Pour plus de détails voir [13, Propossition 3.1.12, P. 67].

1.3 Les semi-groupes

1.3.1 Les semi-groupes fortement continus (C_0 semi-groupe)

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach E toute famille $(G(t))_{t\geqslant 0}$ dans .$L(E)$ vérifiant les axiomes suivants*
(i) Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \to & E \\ t & \mapsto & G(t)\,x \end{array}$$

est continue.
(ii) $G(0) = I$.
(iii) $\forall s \geqslant 0, \forall t \geqslant 0 : G(t+s) = G(t)\,G(s)$.
On dit aussi que $(G(t))_{t\geqslant 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Remarques
$i)$ On dit que $G(t)$ est un groupe fortement continu si (i) et (iii) sont vérifiées pour s, t de signes quelconques.

$ii)$ On dit que $G(t)$ est un semi-groupe de contraction si

$$\|G(t)\| \leqslant 1.$$

Exemples

1) Soit A un opérateur borné dans E, alors la famille d'opérateurs

$$G(t) = e^{tA}, \ t \in \mathbb{R}$$

est un groupe sur E.

2) Soit $E = L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leqslant p < \infty$ et

$$(G(t) f)(x) = f(x - t),$$

dans ce cas $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est un groupe appelé groupe des translations.

Théorème 1.3.1 *Soit G un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $\omega \geqslant 0$ telles que*

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|G(t)\| \leqslant M e^{-\omega t}.$$

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$, l'opérateur A défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in E : \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ Ax := \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Remarques

1) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$, alors A est fermé à domaine dense.

2) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est uniquement déterminé par son générateur infinitésimal A.

3) Le semi-groupe $(G(t))_{t \geqslant 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il est de la forme $\left(e^{tA}\right)_{t \geqslant 0}$ où A est un opérateur borné dans E.

4) Si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ tel que pour $\lambda > \omega$,

$$\|G(t)\| \leqslant Me^{-\omega t},$$

alors, l'opérateur

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(t)\, x dt,$$

est borné et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} x\right\| \leqslant M(\lambda - \omega)^{-1}.$$

5) Si A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $(G(t))_{t\geqslant 0}$, *alors*

i) Si $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$ alors $G(t)x \in D(A)$.

ii) La fonction $t \mapsto G(t)x$ *est continûment dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si* $x \in D(A)$.

De plus, pour $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax.$$

iii) Pour tout $x \in E$ *et tout* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \text{ et } A\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(A)$

$$A\int_0^t G(s)xds = \int_0^t G(s)Axds = G(t)x - x.$$

1.3.2 Les semi-groupes analytiques

Définition 1.3.3 *On appelle semi-groupe analytique de type* $\alpha \in]0, \pi/2[$ *toute application* G *définie sur l'ensemble*

$$\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \alpha\}$$

à valeurs dans $.L(E)$ *telle que*

(1) $z \mapsto G(z)$ *est analytique sur* Σ_α.

(2) $\forall x \in E,\ G(0) = I$ *et*

$$\lim_{z\in\Sigma_\alpha \quad z\to 0} G(z)\,x = x$$

(3) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha,\ G(z_1 + z_2) = G(z_1)\,G(z_2)$.

De plus

$$G(t)\,x = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{tz}\,(zI - A)^{-1}\,xdz = e^{tA}x.$$

Théorème 1.3.2 (de Kato) *Soit* $A : D(A) \subset E \to E$ *un opérateur linéaire vérifiant*

(1) A *fermé de domaine* $D(A)$ *dense dans* E.

(2) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *et* $\exists M > 0$ *telle que*

$$\forall \lambda \geq 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}.$$

Alors, A *est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique* G *vérifiant*

(1) $\exists C > 0,\ \forall t > 0 : \|G(t)\|_{.L(E)} \leqslant C$.

(2) $\forall t > 0,\ G(t) \in .L(E, D(A))$ *et* $\|AG(t)\| \leqslant \dfrac{M}{t}$.

1.4 Les espaces fonctionnels

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Définition 1.4.1 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *On définit les espaces* $L^p(0, R; E)$ *pour* $R > 0$ *par*

$$L^p(0,R;E) = \left\{ g : (0,R) \longrightarrow E \text{ mesurable : } \int_0^R \|g(x)\|_E^p\,dx < \infty \right\}$$

Si p est fini. On munit cet espace de la norme

$$\|g\|_{L^p(0,R,E)} = \left(\int_0^R \|g(x)\|_E^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$ on pose :

$$L^\infty(0,R;E) = \left\{ g : [0,R] \longrightarrow E, \text{ mesurable : } \sup_{x \in (0,R)} ess \, \|g(x)\|_E < +\infty \right\},$$

muni de la norme : $\|g\|_{L^\infty(0,R,E)} = \sup\limits_{x \in (0,R)} ess \, \|g(x)\| \, x.$

Théorème 1.4.1 *L'espace $L^p(0,R;E)$, $p \in [1,+\infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.*

1.4.1 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

On rappelle le résultat classique :

Proposition 1.4.1 *Soient*
i) J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$,
ii) E un espace de Banach,
iii) $f : J \times [a,b] \to E$ une application continue admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.
iv) α, β deux fonctions de classe C^1 sur J et à valeurs dans $[a,b]$.
Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} h & : & J \longrightarrow E \\ x & \longrightarrow & h(x) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dt \end{array}$$

est de classe C^1 sur J et pour tout $x \in J$ on a

$$h'(x) = \beta'(x) f(x,\beta(x)) - \alpha'(x) f(x,\alpha(x)) + \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

1.4.2 Les espaces de Sobolev et de Besov

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev (où Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$) des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev par

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

On définit les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\Omega, E)$, pour $s \in]0,1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, par

$$B^s_{p,q}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x-y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

Avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.

Dans le cas où $p = q$ on a

$$B^s_{p,p}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

Remarque 1.4.1 *Pour tous $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace $D(\mathbb{R}^d)$ des fonctions tests est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

1.4.3 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach E, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale Difference property), pour plus de détails voir [2].

Définition 1.4.2 *On dit que E est un espace UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

est bornée.

Définition 1.4.3 *E est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \to \mathbb{R}$ biconvexe telle que*

i) $\xi(0,0) > 0$
ii) $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$, $\forall x, y \in E$.

Théorème 1.4.2 *Soit E un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) E est UMD.
ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \forall x, y \in E$.

Exemples

- ▶ Les espaces de Hilbert (il suffit de choisir $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y \rangle$ où le crochet $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire).
- ▶ Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- ▶ Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ tel que E est UMD, sont des espaces UMD. Mais les espaces $C^\alpha(\Omega; E)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ ne sont pas UMD.

1.4.4 Multiplicateur de Fourier

Définition 1.4.4 *Un multiplicateur de Fourier est une fonction m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui définit un opérateur T_m par multiplication sur le spectre de fréquence d'une fonction. En particulier, l'opérateur T_m est défini sur l'espace de Schwartz $D(\mathbb{R}, E)$ dans $L^p(\mathbb{R}, E)$ par*

$$(T_m f)(t) = \left(m(\xi)\,\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee}(t),$$

où

$$\widehat{f}(\xi) = (f)^{\wedge}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t} dt$$

et

$$\overset{\vee}{f}(t) = (f)^{\wedge}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{2\pi i t \xi} d\xi$$

sont la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse de la fonction f, respectivement.
Alors on a

$$m(\xi)\,\widehat{f}(\xi) = m(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \xi . x} dt.$$

1.5 Multiplicateur de Mikhlin

Théorème 1.5.1 *Soit la fonction*

$$m : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{C};$$

telles que pour tout $\xi \neq 0$ et pour tout entier positif γ avec $\gamma \leq 3$, m satisfait

$$|\partial^{\gamma} m(\xi)| \leq B\, |\xi|^{-|\gamma|}.$$

Alors, pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constante C_p tel que

$$\left\| \left(m\widehat{f} \right)^{\vee} \right\|_{L^p} \leq C_p B \, \|f\|_{L^p}$$

pour tout $f \in D(\mathbb{R}, E)$.

Ce théorème implique le caractère borné dans L^p d'un large ensemble de multiplicateurs, par exemple la fonction sgn en une dimension et les fonctions lisses de support compact (les fonctions test).

1.5.1 Les espaces d'interpolation

On désigne par E_0 et E_1 deux espaces de Banach contenus avec injection continue dans un espace topologique séparé E (c'est à dire $E_0 \hookrightarrow E$, $E_1 \hookrightarrow E$). Considérons les espaces de Banach

$$E_0 \cap E_1 \quad \text{et} \quad E_0 + E_1,$$

munis des normes $\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}$, et

$$\|x\|_{E_0+E_1} = \inf_{x=x_0+x_1, \quad x_i \in E_i} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} \right).$$

Le couple $\{E_0, E_1\}$ est dit couple d'interpolation.

Définition 1.5.1 *Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. On appelle espace intermédiaire entre E_0 et E_1 tout espace de Banach E tel que*

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1.$$

Les espaces E_i, $i = 0, 1$ sont des espaces intermédiaires.

Définition 1.5.2 *Soient $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty]$. On appelle espace d'interpolation entre E_0, E_1 l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ tel que $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} i)\ \forall t > 0, \exists u_i(t) \in E_i \quad (i = 0, 1) : x = u_0(t) + u_1(t) \\ ii)\ t^{-\theta} u_0 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_0), \quad t^{1-\theta} u_1 \in L^p_*(\mathbb{R}_+, E_1), \end{cases}$$

où

$$L^p_*(E) = \left\{ f :]0, \infty[\to E : \int_0^{+\infty} \|f(t)\|^p_E \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Propriétés

On donne maintenant quelques propriétés fondamentales de ces espaces, pour tout ω, θ, $t \in]0,1[$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$:

1) Si $0 < \theta \leqslant \omega < 1$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\omega,q}$.

2) Si $p \leqslant q$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,q}$.

3) Si $E_0 = E_1$ alors $(E_0, E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1$.

4) Si $0 < \theta < 1$

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p} \tag{1.5.1}$$

Si $0 < \omega < \theta < 1$, alors on a $((E_0, E_1)_{\theta,p}, (E_0, E_1)_{\omega,q})_{t,r} = (E_0, E_1)_{\alpha,r}$, avec

$$\alpha = (1-t)\,\theta + t\omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{p} + \frac{t}{q}.$$

Propriété de réitération

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$. Alors pour tout $\theta \in]0,1[$, $p \in [1, +\infty]$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(E, D(A^n))_{\theta,p} = (E, D(A))_{n\theta,p} \tag{1.5.2}$$

Cas Particulier $(D(A), E)_{\theta,p}$

Soient E un espace de Banach, A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ inclus dans E. Posons $E_0 = D(A)$ et $E_1 = E$, alors

$$E_0 \cap E_1 = D(A) \text{ et } E_0 + E_1 = E,$$

donc, pour tout $\theta \in]0,1[$ et $p \in [1, +\infty]$ on a

$$D(A) \subset (D(A), E)_{\theta,p} \subset E.$$

Si $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ et s'il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0 : \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{.L(E)} \leqslant \frac{C_A}{\lambda},$$

alors

$$\begin{aligned}(D(A), E)_{\theta,p} &= D_A(1-\theta, p) = (E, D(A))_{1-\theta,q} \\ &= \left\{x \in E : \left\|t^{1-\theta} A(A-t)^{-1} x\right\|_E \in L_*^p\right\}.\end{aligned}$$

Définition 1.5.3 *Pour tout $\theta \in]0,1[$, $p \in [1,+\infty]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_A(\theta+k, p) = \left\{x \in D(A^k) : A^k x \in D_A(\theta, p)\right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{D_A(\theta+k,p)} = \|x\|_E + \left\|A^k x\right\|_{D_A(\theta,p)}.$$

Si $\theta \neq \frac{1}{2}$, on a le résultat de réitér_ation suivant

$$(E, D(A^2))_{\theta,q} = (E, D(A))_{2\theta,q} \tag{1.5.3}$$

En utilisant (1.5.3), on obtient

$$(D(A^2), E)_{\theta,q} = (E, D(A^2))_{1-\theta,q} = (E, D(A))_{2-2\theta,q} \tag{1.5.4}$$

(Pour plus de détails sur les espaces d'interpolation et le théorème de réitération, voir par exemple Lions-Peetre [15] et Lunardi [16]).

Théorème 1.5.2 (de Lions) *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(G(t))_{t\geqslant 0}$, alors pour tout $p \in [1,+\infty]$ et $\theta \in]0,1[$*

$$(D(A), E)_{\theta,p} = \left\{x \in E : \left\|t^{\theta-1}(G(t)-I)x\right\|_E \in L_*^p\right\}$$

muni de la norme

$$\|x\|_{(D(A),E)_{\theta,p}} = \|x\|_E + \left(\int_0^{+\infty} \left\|t^{\theta-1}(G(t)-I)x\right\|_E^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Avec les modifications usuelles si $p = \infty$.

1.6 Les puissances fractionnaires, classe Bip

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $A : E \to E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur A est définie par

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t^z (tI - A)^{-1} x dt,$$

Où z est un nombre complexe arbitraire.

Si A est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (Pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$A^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - A)^{-1} Ax dt,$$

Pour tout $x \in D(A)$ (voir Haase [13], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(A)$,

$$A^z x = A^{z+1} A^{-1} x = \frac{\sin (z+1) \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - A)^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de A^z (voir Dore et Venni [10])

Théorème 1.6.1 *Soit A un opérateur linéaire positif (sectoriel), alors on a les propriétés suivantes*

1) Soit $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ et $m, n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ alors

$$\forall x \in E \quad A^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} (A (tI - A))^{-1} A^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \to A^z$ est holomorphe de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ dans $L(E)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ *et* $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ *alors* $D(A^m)$ *est dense dans* $D(A^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ *alors*

$$A^w A^z \subseteq A^{w+z} \subseteq A^z A^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ *alors* $A^{w+z} = A^z A^w$.

5) Soit $\theta \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in D\left(A^\theta\right)$ *alors* $z \to A^z x$ *est holomorphe pour* $\operatorname{Re} z < \theta$.

6) Supposons que $A^{is} \in L(E)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *donc*
(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $A^{w+z} = A^w A^z = A^z A^w$.
(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *alors* $A^{is} A^w = A^{w+is} = A^w A^{is}$.
(c) Si $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ *alors* $A^{is} A^w \subseteq A^{w+is} \subseteq A^w A^{is}$ *et la seconde inclusion est en fait une égalité si* $\operatorname{Re} w > 0$.

7) Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$ *alors*

$$\left\|A^{-z}\right\| \leqslant M\left(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \operatorname{Im} z)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}\right).$$

8) Soit $A^{is} \in .L(E)$ *avec* $s \in \mathbb{R}$, *pour* $\varphi \in \left]0, \pi/2\right[$ *fixé, on pose*

$$\Sigma_\varphi = \left\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\right\},$$

alors $A^{z+is} \to A^{is}$ *(dans la topologie forte de* $L(E)$*).*

9) Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \|A^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $A^w \in L(E)$ *et* $A^z \to A^w$ *où* $z \to w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $L(E)$*).*

10) Si $T \in L(E)$ *alors* $(A - \lambda I)^{-1} T = T (A - \lambda I)^{-1}$, *pour* $\lambda \in \rho(A)$, *et*

$$\begin{aligned} (a)\ TA^z &= A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ TA^z &\subseteq A^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{aligned}$$

11) Si $(A - \lambda I)^{-1}$ *et* $(B - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*
(a) $A^z B^w = B^w A^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0$.
(b) si A^{is} *et* $B^{it} \in L(E)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $A^z B^w = B^w A^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0$.

Définition 1.6.1 *On note $BIP(E,\theta)$ (**B**ounded **I**maginary **P**owers) ou $\theta \in [0,\pi[$, l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E qui admettent des puissances imaginaires bornées (Pour plus de détail voir [10]), c'est à dire $A \in BIP(E,\theta)$, si A est un operateur linéaire fermé densément satisfaisant :*

$$\begin{cases}]-\infty,0[\subset \rho(A),\ Ker(A)=\{0\}\,,\ \overline{\operatorname{Im}(A)}=E \\ \quad \text{et } \exists c\geq 1,\forall\lambda>0,\|\ (A+\lambda I)^{-1}\ \|_{L(E)}\leqslant \dfrac{c}{\lambda} \end{cases} \tag{1.6.1}$$

$Ker(A)$, $\operatorname{Im}(A)$ et $\rho(A)$ sont respectivement le noyau, l'image et l'ensemble résolvant de A et :

$$\begin{cases} \text{pour tout } s\in\mathbb{R},\ A^{is}\in L(E) \text{ et :} \\ \exists c\leq 1,\forall s\in\mathbb{R},\|\ A^{is}\ \|_{L(E)}\leqslant ce^{\theta|s|} \end{cases} \tag{1.6.2}$$

On rappelle que l'operateur vérifiant (1.6.1) admet une puissance complexe A^z pour tout $z\in\mathbb{C}$ (voir Haase [13] p.70). D'autre part, soit

$$\theta\in]0,1[;q\in[1,+\infty[,m\in\mathbb{N},\mu\in\mathbb{R}$$

et V un operateur linéaire fermé dans E satisfaisant :

$$]\mu,+\infty[\subset\rho(V) \text{ et } \sup_{\lambda>\mu}\|\ \lambda(V-\lambda I)^{-1}\ \|_{L(E)}<+\infty.$$

1.7 Sommes d'opérateurs linéaires dans le cas commutatives

Soit E un espace de Banach complexe, A et B deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans E et leurs ensembles résolvants $\rho(A)$ et $\rho(B)$ non vides.

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires pour résoudre le problème suivant

$$Au+Bu-\lambda u=f,\quad \lambda>0 \tag{1.7.1}$$

lorsque les résolvantes des opérateurs A et B commutent : i.e.,

$$\left[(A-zI)^{-1};(B-\mu I)^{-1}\right]:=(A-zI)^{-1}(B-\mu I)^{-1}-(B-\mu I)^{-1}(A-zI)^{-1}=0$$

La résolution de ce problème repose sur la construction de l'inverse de $A+B$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes

1.7.1 Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.7.1). Ils ont supposé que

$$(DV.0)\quad E \text{ est un espace de Banach de type } UMD,$$

$$(DV.1)\begin{cases} i)\rho(A)\supset\left]-\infty,0\right] \ et\ \exists M_A>0:\left\|(A+tI)^{-1}\right\|\leqslant\dfrac{M_A}{1+t},\forall t\geqslant 0\\ ii)\rho(B)\supset\left]-\infty,0\right] \ et\ \exists M_B>0:\left\|(B+tI)^{-1}\right\|\leqslant\dfrac{M_B}{1+t},\forall t\geqslant 0\end{cases}$$

$$(DV.2)\begin{cases}\forall\lambda\in\rho(A),\ \mu\in\rho(B),\\ (\lambda I-A)^{-1}(\mu I-B)^{-1}=(\mu I-B)^{-1}(\lambda I-A)^{-1}.\end{cases}$$

$$(DV.3)\begin{cases} i)\forall s\in\mathbb{R}:A^{is}\in L(E)\ \ et\\ \exists K_A\geqslant 1,\ \theta_A>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\|A^{is}\|\leqslant K_Ae^{\theta_A|s|},\\ ii)\forall s\in\mathbb{R}:B^{is}\in L(E)\ \ et\\ \exists K_B\geqslant 1,\ \theta_B>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\|B^{is}\|<K_Be^{\theta_B|s|},\\ iii)\theta_A+\theta_B<\pi.\end{cases}$$

Alors, la somme $A+B$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{2i}\int_{\gamma}\frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin\pi z}dz,$$

Où γ est une courbe verticale contenue dans la bande

$$\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\},$$

et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [20], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Chapitre 2

Principaux résultats

2.1 Introduction

Ce chapitre, est consacré pour l'étude des résultats de l'article [12] ; concernant l'étude de certains opérateurs différentielles à puissances imaginaires bornées dans l'espace $L^p(\mathbb{R}, E)$, où $p \in (1, \infty)$ et E est un espace de Banach UMD. En utilisant les propriétés des espaces UMD et une extension du théorème du multiplicateur de Michlin [24], pour $\mu > 0$ suffisamment grand, on fait preuve que les opérateurs différentiels de la forme

$$P = a_0 \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial t} + \mu$$

où

$$(Pu)(t) := a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t),$$

avec

$$u \in W^{n,p}(\mathbb{R}, E)$$

telles que $a_0 = \pm 1$ et $a_i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ont des puissances imaginaires bornées (sont dans la classe $BIP(E, \theta)$).

2.1.1 Terminologie et Notations

On cite quelques définitions et notations qui sont indispensables pour facilité la compréhension des preuves dans ce qui suit. Pour plus de détails, voir le premier chapitre.
Pour un opérateur linéaire A dans E, on note $D(A)$, $R(A)$, $N(A)$, $\rho(A)$ respectivement le domaine, l'image, le noyau et l'ensemble résolvant de l'opérateur A.
$L(E)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés dans E.
Soit $\theta \in (0, \pi)$, On dit qu'un opérateur linéaire A dans E appartient à la classe $BIP(E;\theta)$ (Bounded Imaginary Powers) [1.6.1], s'il existe $M > 0,\ K > 0$ tels que :
– $N(A) = 0$,
– $D(A)$ et $R(A)$ sont denses dans E,
$(-\infty, 0) \subset \rho(A)$, avec

$$\left\|(A+\lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq M\lambda^{-1} \quad \forall\lambda > 0 \tag{2.1.1}$$

$$\left\|A^{i\tau}\right\|_{L(E)} \leq Ke^{|\tau|\theta}, \quad \forall\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{2.1.2}$$

Pour un opérateur satisfaisant (2.1.1), les puissances complexes (en général non bornées) sont bien définies, voir [1.6.1] et [14] pour les détails. On rappelle que pour $x \in D(A) \cap R(A)$ et $Re(z) \in (-1, 1)$, $z \neq 0$, on définit les puissances complexes par

$$A^z x := \pi^{-1}\sin(\pi z)\left\{\frac{x}{z} - \frac{A^{-1}x}{1+z} + \int_0^1 \lambda^{z+1}(A+\lambda)^{-1}A^{-1}xd\lambda + \int_1^\infty \lambda^{z-1}(A+\lambda)^{-1}Axd\lambda\right\} \tag{2.1.3}$$

On a $z \longmapsto A^z x$ est une fonction analytique de z à valeur dans l'espace E tel que $Re(z) \in (-1, 1)$.
L'opérateur $x \longmapsto A^z x$ est fermable, et sa fermeture est notée par A^z.
Pour $x \in D(A)$ et $Re(z) \in (0, 1)$ on a aussi

$$A^z x := \pi^{-1}\sin(\pi z)\int_0^\infty \lambda^{z-1}(A+\lambda)^{-1}Axd\lambda \tag{2.1.4}$$

Dans la suite, On utilisera la transformée de Fourier [1.4.4] définie pour $u \in L^1(\mathbb{R}, E)$ par

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t}u(t)\,dt.$$

La transformée de Fourier inverse est notée par

$$\check{u}(t) := (1/(2\pi)) \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} u(\xi)\, d\xi.$$

On appelle $T : D(\mathbb{R}, E) \longmapsto L^p(\mathbb{R}, E)$ une transformation de multiplicateur (voir [1.5.1]), s'il existe une fonction complexe $m(\xi)$ telle que

$$(Tu)(t) = (m(\xi)\hat{u}(\xi))\check{}(t), \forall u \in D(\mathbb{R}, E).$$

2.2 Lemmes préliminaires

On mentionne quelques lemmes qui fournissent des résultats indispensable par la suite.

Lemme 2.2.1 *(**Multiplier de Mikhlin** voir* [1.5.1] *[24]) Soient E un espace de Banach UMD, $p \in (1, \infty)$, $m(\xi) \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ et*

$$\gamma_1(m) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \max\{|m(\xi)|, \xi\, |m'(\xi)|\} < \infty. \tag{2.2.1}$$

Alors la transformée du multiplicateur

$$(Tu)(t) = (m(\xi)\hat{u}(\xi))\check{}(t)$$

satisfait

$$\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \leq c\gamma_1(m)\, \|u\|_{L^p(\mathbb{R},E)}, \forall u \in D(\mathbb{R}, E) \tag{2.2.2}$$

où c une constante positive ne dépend que de p et de E.

Lemme 2.2.2 *[11] Soient E un espace de Banach, A et B deux opérateurs linéaires fermés dans E, avec $0 \in \rho(B)$. On suppose que*

$$\textit{il existe } \theta \in (0,\pi) \ \textit{ tel que } B \in BIP\,(E,\theta)\ ; \tag{2.2.3}$$

$$\textit{il existe } \eta \in (0,1) \ \textit{ telle que } D\,(B^{\eta}) \subset D\,(A)\,. \tag{2.2.4}$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in (0,\pi-\theta)$, il existe $\mu_0 > 0$ tel que

$$A + B + \mu \in BIP\,(E;\theta+\varepsilon)\,,\, \forall \mu > \mu_0. \tag{2.2.5}$$

Lemme 2.2.3 *Soient E un espace de Banach UMD et $p \in (1,\infty)$. On considère, dans l'espace $X = L^p(\mathbb{R},E)$, les opérateurs différentiels*

$$(B_1 u)\,(t) := (-1)^m\, u^{(2m)}\,(t)\,,\ D\,(B_1) = W^{2m,p}\,(\mathbb{R},E)\,,\ m = 1,2,...$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (B_2 u)\,(t) := \sigma u^{(2m+1)}\,(t)\,,\ \sigma = +1 \textit{ ou } -1. \\ D\,(B_2) = W^{2m+1,p}\,(\mathbb{R},E)\,,\ m = 0,1,2,... \quad . \end{array} \right.$$

Alors

$$B_1 \in BIP\,(E;\varepsilon)\,,\quad \forall \varepsilon \in (0,\pi)\,; \tag{2.2.6}$$

$$B_2 \in BIP\,(E;\pi/2+\varepsilon)\,,\quad \forall \varepsilon \in (0,\pi/2)\,. \tag{2.2.7}$$

Plus précisément, il existe $c = c(p,m,E) > 0$ tel que

$$\left\| B_1^{i\tau} \right\|_{L(E)} \leq c\,(1+|\tau|)\,,\quad \forall \tau \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}\,, \tag{2.2.8}$$

$$\left\| B_2^{i\tau} \right\|_{L(E)} \leq c\,(1+|\tau|)\, e^{|\tau|\pi/2},\quad \forall \tau \in \mathbb{R}\diagdown\{0\} \tag{2.2.9}$$

Preuve :

On prend $\sigma = (-1)^m$ (pour les autres cas on travail avec la même méthode).

On remarqe que

$$N(B_2) = 0$$

et pour $p \in [1; \infty)$

$$D(B_2) \text{ et } R(B_2) \quad \text{sont denses dans } L^p(\mathbb{R}, E).$$

Soient $f \in D(\mathbb{R}, E)$, $\lambda > 0$ et $p \in [1; \infty)$. On veut résoudre l'équation

$$(B_2 + \lambda)u = f,$$

c'est à dire

$$(-1)^m u^{(2m+1)}(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad u \in W^{2m+1,p}(\mathbb{R}, E) \tag{2.2.10}$$

En appliquant la transformation de Fourier, On obtient formellement

$$\hat{u}(\xi) = \left(i\xi^{2m+1} + \lambda\right)^{-1} \hat{f}(\xi) \tag{2.2.11}$$

On appelle $K_\lambda(t)$ les fonctions dont sa transformée de Fourier est $\left(i\xi^{2m+1} + \lambda\right)^{-1}$; veut dire

$$\left(\left(i\xi^{2m+1} + \lambda\right)^{-1}\check{\ }\right)(t) = K_\lambda(t),$$

On calcule $K_\lambda(t)$ explicitement comme suit :
Soit

$$\alpha_k = \lambda^{\frac{1}{2m+1}} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{1}{2m+1} + \frac{2k\pi i}{2m+1}\right), \quad k = 0, ..., 2m$$

sont les racines d'ordre $2m+1$ de $i\lambda$.
Alors

$$\left(i\xi^{2m+1} + \lambda\right)^{-1} = -i\prod_{k=0}^{2m}(\xi - \alpha_k)^{-1}$$

Il existe clairement des constantes positives $c(k, m)$ telles que

$$|\mathrm{Im}(\alpha_k)| = c(k, m)\lambda^{\frac{1}{2m+1}} \neq 0 \text{ pour tout } k \in \{0, ..., 2m\}$$

de plus

$$\left((\xi-\alpha_k)^{-1}\right)^{\vee}(t)=i\exp\left(i\alpha_k t\right)\varkappa_{(0,\infty)}(t)\,,\ \text{si}\ \operatorname{Re}\left(i\alpha_k\right)=-\operatorname{Im}\left(\alpha_k\right)<0,$$

$$\left((\xi-\alpha_k)^{-1}\right)^{\vee}(t)=-i\exp\left(i\alpha_k t\right)\varkappa_{(-\infty,0)}(t)\,,\ \text{si}\ \operatorname{Re}\left(i\alpha_k\right)=-\operatorname{Im}\left(\alpha_k\right)>0,$$

où $\varkappa$ désigne la fonction caractéristique, donc on a

$$\left\|\left((\xi-\alpha_k)^{-1}\right)^{\vee}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}=\left|\operatorname{Im}\left(\alpha_k\right)\right|^{-1},$$

pour tout $k=0,...,2m$.
Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
K_\lambda &= \left(\left(i\xi^{2m+1}+\lambda\right)^{-1}\check{\ }\right)(t)\\
&= \left(-i\prod_{k=0}^{2m}(\xi-\alpha_k)^{-1}\check{\ }\right)(t)\\
&= -i\left((\xi-\alpha_0)^{-1}\right)^{\vee}*\left((\xi-\alpha_1)^{-1}\right)^{\vee}*...*\left((\xi-\alpha_{2m})^{-1}\right)^{\vee}\in L^1(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\|K_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})}\leq\prod_{k=0}^{2m}\left|\operatorname{Im}\left(\alpha_k\right)\right|^{-1}=\prod_{k=0}^{2m}c(k,m)^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2m+1}}=c\,(m)\,\lambda^{-1}.$$

Alors de $(2.2.11)$, on a

$$\hat{u}(\xi)=\hat{K}_\lambda(\xi)\,\hat{f}(\xi),$$

d'après les propriétés du produit de convolution et la transformée de Fourier, on obtient

$$u\,(t):=(K_\lambda*f)\,(t)\,. \tag{2.2.12}$$

Par l'inégalité de Young pour les convolutions, on a

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R},E)}\leq\|K_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}\leq c\,(m)\,\lambda^{-1}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}\,. \tag{2.2.13}$$

Puisque $D\,(\mathbb{R},E)$ est dense dans $L^p\,(\mathbb{R},E)$, donc chaque fonction de l'espace $L^p\,(\mathbb{R},E)$ est une limite d'une suite de fonctions dans l'espace de fonctions $D\,(\mathbb{R},E)$, ceci montre que $(2.2.10)$ a une solution unique u pour tout $f\in L^p\,(\mathbb{R},E)$, donc

$$\mathbb{R}_-\subset\rho\,(B_2)$$

et (2.2.13) donne

$$\left\|(B_2+\lambda)^{-1} f\right\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \leq c\,(m)\,\lambda^{-1}\left\|f\right\|_{L^p(\mathbb{R},E)}, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R},E),\ \forall\lambda>0 \tag{2.2.14}$$

Donc (2.1.1) est valable pour B_2. Remarquons que (2.2.14) est également valable pour $p=1$.
On pose

$$f \in D(\mathbb{R},E),\ \delta \in (0,1),\ \tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ p \in (1,\infty)$$

Par (2.1.4)

$$B^{\delta+i\tau} f = \pi^{-1}\sin\left(\pi\left(\delta+i\tau\right)\right)\int_0^\infty \lambda^{\delta+i\tau-1}\left(B_2\left(B_2+\lambda\right)^{-1} f\right) d\lambda \tag{2.2.15}$$

En utilisant (2.2.14), on remarque que

$$h(\lambda,t) := \lambda^{\delta+i\tau-1}\left(B_2\left(B_2+\lambda\right)^{-1} f\right)(t)$$

appartient a $L^1((0,\infty)\times\mathbb{R},E)$.
Ainsi, en prenant les transformées de Fourier de chaque côté dans (2.2.15), d'après (2.2.11)

$$\left(B_2^{\delta+i\tau} f\right)^\wedge(\xi) = \pi^{-1}\sin\left(\pi\left(\delta+i\tau\right)\right)\int_0^\infty \lambda^{\delta+i\tau-1}\frac{i\xi^{2m+1}}{i\xi^{2m+1}+\lambda} d\lambda \hat{f}(\xi)\,. \tag{2.2.16}$$

Par le changement de variable

$$\lambda = |\xi|^{2m+1} w^{1/2}$$

et en rappelant que

$$\int_0^\infty \frac{w^{z-1}}{w+1} dw = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

pour $\mathrm{Re}\,(z) \in (0,1)$.
On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{\delta+i\tau-1}\frac{1}{i\xi^{2m+1}+\lambda} d\lambda &= |\xi|^{(2m+1)(\delta+i\tau-1)}(\pi/2)\left[\frac{1}{\cos\left(\left(\delta+i\tau\right)\pi/2\right)}\right.\\ &\left.-i\frac{sgn(\xi)}{\sin\left(\left(\delta+i\tau\right)\pi/2\right)}\right].\end{aligned}$$

Donc (2.2.16) devient

$$\left(B_2^{\delta+i\tau}f\right)^{\wedge}(\xi) = |\xi|^{(2m+1)(\delta+i\tau)}\left[\cos\left((\delta+i\tau)\pi/2\right) + isgn(\xi)\sin\left((\delta+i\tau)\pi/2\right)\right]\widehat{f}(\xi), \tag{2.2.17}$$

alors

$$\left(B_2^{\delta+i\tau}f\right)^{\wedge} \in L^1(\mathbb{R}, E).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left(B_2^{\delta+i\tau}f\right)(t) = &\Big\{|\xi|^{(2m+1)(\delta+i\tau)}\left[\cos\left((\delta+i\tau)\pi/2\right)\right.\\ &+\left. isgn(\xi)\sin\left((\delta+i\tau)\pi/2\right)\right]\widehat{f}(\xi)\Big\}^{\vee}(t), \quad t\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Maintenant on fait tendre $\delta \to 0$, on obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$|\xi|^{(2m+1)(\delta+i\tau)}\left[\cos\left((\delta+i\tau)\pi/2\right) + isgn(\xi)\sin\left((\delta+i\tau)\pi/2\right)\right]\widehat{f}(\xi) \to$$

$$\to |\xi|^{(2m+1)i\tau}\left[\cos(i\tau\pi/2) + isgn(\xi)\sin(i\tau\pi/2)\right]\widehat{f}(\xi) := m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

et

$$\begin{aligned}\left\||\xi|^{(2m+1)(\delta+i\tau)}\left[\cos\left((\delta+i\tau)\pi/2\right) + isgn(\xi)\sin\left((\delta+i\tau)\pi/2\right)\right]\widehat{f}(\xi)\right\| &\leq \\ (1+|\xi|)^{(2m+1)}\left[|\cos(i\tau\pi/2)| + |\sin(i\tau\pi/2)|\right]\left\|\widehat{f}(\xi)\right\| &\in L^1(\mathbb{R}\ , E),\end{aligned}$$

d'après le théorème de la convergence dominée, on a

$$\lim_{\delta\to 0}\left(B_2^{\delta+i\tau}f\right)^{\wedge}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

dans $L^1(\mathbb{R}, E)$, donc pour

$$\lim_{\delta\to 0}\left(B_2^{\delta+i\tau}f\right)(t) = (m(\xi)\widehat{f}(\xi))^{\vee}(t), \quad \text{p. p. } t\in\mathbb{R}.$$

Si, de plus, $f \in R(B_2)$, on a

$$B_2^{\delta+i\tau}f \to B_2^{i\tau}f$$

dans $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Donc finalement

$$\left(B_2^{i\tau}f\right)(t) = (m(\xi)\widehat{f}(\xi))^{\vee}(t), \text{ p. p. } t \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in D(\mathbb{R}, E) \cap R(B_2).$$

Par conséquent $B_2^{i\tau}$ est une transformation de multiplicateur correspondante au multiplicateur

$$m(\xi) = |\xi|^{(2m+1)i\tau}\left[\cos\left(i\tau\pi/2\right) + i\ sgn\left(\xi\right)\sin\left(i\tau\pi/2\right)\right].$$

de (2.2.1) ,on trouve

$$\gamma_1(m) \leq c(m)(1 + |\tau|)\, e^{|\tau|\pi/2},$$

donc par (2.2.2)

$$\begin{aligned} \left\|B_2^{i\tau}f\right\|_{L^p(\mathbb{R},E)} &\leq c(m,p,E)(1+|\tau|)\, e^{|\tau|\pi/2}\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}, \\ \forall f &\in D(\mathbb{R},E) \cap R(B_2), \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\|B_2^{i\tau}f\right\|_{L(L^p(\mathbb{R},E))} \leq c(m,p,E)(1+|\tau|)\, e^{|\tau|\pi/2}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

2.3 Principaux Résultats

Théorème 2.3.1 *Soit E un espace de Banach UMD, n un entier positif, $a_0 = +1$ ou -1, a_1,...,$a_n \in \mathbb{C}$, $p \in (1, \infty)$. On considère dans $X = L^p(\mathbb{R}, E)$, l'opérateur différentiel P telle que*

$$(Pu)(t) := a_0 u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t),$$

avec le domaine $W^{n,p}(\mathbb{R}, E)$, alors on a les deux assertions suivantes :

- *Si n est impair, pour tout $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $\mu > \mu_0$, on a*

$$P \in BIP\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right).$$

- *Si n est pair et $a_0 = (-1)^{n/2}$, pour tout $\varepsilon \in (0, \pi)$, il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $\mu > \mu_0$ on a*

$$P \in BIP(\varepsilon).$$

Preuve : Dans l'espace $X = L^p(\mathbb{R}, E)$, on définit l'opérateur différentiel P_n telle que

$$(P_n u)(t) := a_0 u^{(n)}(t)$$

avec le domaine

$$D(P_n) := W^{n,p}(\mathbb{R}, E);$$

et l'opéraeur A telle que

$$(Au)(t) := a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t)$$

avec le domaine

$$D(A) := W^{n-k,p}(\mathbb{R}, E),$$

où $k \in \{1, ..., n\}$ est le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$.
Pour appliquer le Lemme [2.2.2]. On définit dans E l'opérateur

$$B := P_n + I,$$

avec le domaine

$$D(B) := D(P_n),$$

d'où

$$0 \in \rho(B).$$

D'après le Lemme [2.2.3], P_n admet des puissances imaginaires bornées.
Puisque E est un espace de Banach UMD et $p \in (1, \infty)$; donc X est également un espace de Banach UMD. D'après le Théorème 3 de (Prüss-Sohr, 1990) [20], cela donne
– si n est impair ;

$$B \in BIP(\pi/2 + \theta, X), \quad \forall \theta \in (0, \pi/2),$$

– si n est pair et $a_0 = (-1)^{n/2}$;

$$B \in BIP(\theta, X), \quad \forall \theta \in (0, \pi).$$

Enfin, on vérifie (2.2.4). Par le Théorème 1.15.3 de (Triebel, 1978) [23], on a

$$D(B^{\eta}) = [E, D(B)]_{\eta}$$

espace d'interpolation complexe, donc

$$D(B^{\eta}) = [L^{p}(\mathbb{R}, E), W^{n,p}(\mathbb{R}, E)]_{\eta} \subset W^{n-k,p}(\mathbb{R}, E) = D(A)$$

si $\eta \in (0,1)$ est suffisamment proche de 1.
Donc l'hypothèse (2.2.4) se tient. En appliquant (2.2.5), on obtient :
Pour exemple n est pair, on a pour tout $\varepsilon \in (0, \pi - \theta)$ telle que θ est arbitraire dans $(0, \pi)$, il existe $\mu_0 > 0$ tel que

$$A + B + \mu \in BIP(E; \theta + \varepsilon), \ \forall \mu > \mu_0.$$

Comme ε est arbitraire, on trouve pour tout $\varepsilon \in (0, \pi - \theta)$, il existe $\mu_0 > 0$ tel que

$$P = A + B + \mu \in BIP(E; \theta + \varepsilon), \ \forall \mu > \mu_0 + 1;$$

Maintenant, on pose $\varepsilon' = \varepsilon + \theta \in (0, \pi)$, il existe $\mu_0 > 0$ tel que

$$P = A + B + \mu \in BIP(E; \varepsilon), \ \forall \mu > \mu_0 + 1.$$

Remarque 2.3.1 *La même preuve peut être adaptée pour obtenir des résultats dans le cas où les coefficients a_1,..., a_n dépendent de t et appartiennent à divers espaces de fonctions, et a_0 est un nombre complexe.*
Pour $a_0 = a_0(t)$ on a besoin des résultats de perturbation plus puissants pour la classe BIP, voir (Prüss et Sohr, 1991) [21].

2.3.1 Application

On cite le théorème suivant, qui est une application direct sur notre opérateur P.

Théorème 2.3.2 *Soient E un espace de Banach UMD, n un entier positif **impair**, a_1, ... , $a_n \in \mathbb{C}$, $\mu > 0$ et soit l'opérateur Λ défini sur $D(\Lambda) \subset E$, tel qu'il existe $\theta_\Lambda \in (0, \pi/2)$ où $\Lambda \in BIP(\theta_\Lambda)$ dans l'espace E.*
On Considère l'équation différentielle, à l'inconnue u, suivante

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t) + \Lambda u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.3.1}$$

où

$$f \in L^p(\mathbb{R}, E), \ p \in (1, \infty).$$

Alors, pour μ suffisamment grand, l'équation (2.3.1) admet une solution unique dans $W^{n,p}(\mathbb{R}, E)$.

Preuve : On définit $X = L^p(\mathbb{R}, E)$ et un opérateur P par

$$(Pu)(t) = u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n u(t) + \mu u(t),$$

telle que

$$D(P) = W^{n,p}(\mathbb{R}, E)$$

et l'oérateur A sur $D(A) \subset X$ avec

$$(Au)(t) = \Lambda u(t),$$

telle que

$$D(A) = \{u \in X : u(t) \in D(\Lambda) \text{ p. p. } t \in \mathbb{R} \text{ et } t \longmapsto \Lambda u(t) \text{ appartient à } X\}.$$

Alors A est un opérateur BIP et

$$A \in BIP(\theta_\Lambda)$$

dans X.
Par le Théorème [2.3.1] , pour μ suffisamment grand, on a

$$P \in BIP(\pi/2+\varepsilon)$$

dans X. Comme

$$\theta_\Lambda + \pi/2 + \varepsilon < \pi,$$

d'où il existe $\varepsilon > 0$, telle que

$$\varepsilon < \pi/2 - \theta_\Lambda.$$

Toutes les hypothèses de l'inversibilité de la somme de théorème de Dore et Venni [10] sont vérifiées ; d'où

$$(P+A) \text{ est inversible à inverse borné.}$$

De (2.3.1) , on a

$$(P+A)\,u = f,$$

donc

$$u = (P+A)^{-1} f,$$

par conséquent le Théorème [2.3.2] est prouvé.

2.3.2 Exemples

Exemple 2.3.1

Prenons $E := L^2(\mathbb{R})$. On définit les opérateurs A et H comme suit,

$$\begin{cases} D(A) = H^4(\mathbb{R}) \\ A\psi = -\psi^{(4)} + 2\psi^{(3)} - i\psi' + \mu\psi, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D(H) = H^1(\mathbb{R}) \\ H\psi = -\psi' + a\psi. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *Les opérateurs A et H sont linéaires fermés des domaines denses dans l'espace UMD E. D'après le Théorème* [2.3.1] , *on trouve*

– *Pour tout* $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ *, il existe* $a_0 \in \mathbb{R}$*, telle que pour tout* $a > a_0$*, on a*

$$H \in BIP\left(X, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right).$$

– *Pour tout* $\varepsilon \in (0, \pi)$ *, il existe* $\mu_0 \in \mathbb{R}$*, telle que pour tout* $\mu > \mu_0$*, on a*

$$A \in BIP\left(X, \varepsilon\right).$$

Ceci implique que les opérateurs A *et* H *vérifient :*

i) Pour tout $\varepsilon_H \in (0, \pi/2)$ *, il existe* $a_0 \in \mathbb{R}$*, telle que pour tout* $a > a_0$*, on a*

$$\exists K_H > 1,\ \forall s \in \mathbb{R} : \left\|(H)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant K_A e^{\left(\epsilon_H + \frac{\pi}{2}\right)|s|};$$

et

ii) pour tout $\varepsilon_A \in (0, \pi)$ *, il existe* $\mu_0 \in \mathbb{R}$*, telle que pour tout* $\mu > \mu_0$*, on a*

$$\exists K_A > 1,\ \forall s \in \mathbb{R} : \left\|(A)^{is}\right\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant K_H e^{\epsilon_A |s|}.$$

Bibliographie

[1] Balakrishnan A.V. : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*. Pacific. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[2] Bourgain J. : *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*. Ark. Mat. 21 (1983), pp.163-168.

[3] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[4] Burkholder D.L. : *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*. Ann. Probab. 9 (1981), pp. 997-1011.

[5] Cheggag M., Favini A., Labbas A., Maingot S., Ould Melha K. : *New results on complete elliptic equations with Robin boundary coefficient-operator conditions in non commutative case*, Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr., 2017, Volume 10, Issue 1, 70–96.

[6] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. *Strum-Liouville problems for an Abstract Differential Equation of Elliptic Type in UMD Space*, Differential and Integral Equations, Vol. 21, 9-10, (2008), 981-1000.

[7] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. *Complete Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary Conditions in UMD Space*, DCDS-S, 4, no. 3 (2011), 1-16.

[8] Cheggag M. , Favini A., Labbas R., Maingot S., Medeghri A. *Abstract Differential Equations of Elliptic Type with General Robin Boundary conditions in Holder Space*, Applicable Analysis, Vol. 91, No. 8, (2012), p. 1453-1475.

[9] Coifman R. R., Weiss G. : *Transference methods in analysis*. Conf. Board Math. Sci., Reg. Conf. Series Math. 31. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, (1977).

[10] Dore G. and Venni A. : *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z. (1987), 196 : 189-201.

[11] Dore G. Venni A. : *Some results about complex powers of closed operators*, J. Math. Anal. Appl. (1990), 149(1990), pp.124-136.

[12] Fuhrman M. : *Bounded imaginary powers of abstract differential operators*, in : P. Clement (ed.) et al, Evolution equations, control theory and biomathematics, Lect. Notes Pure Appl. Math., Dekker, Basel, 155(1993) ,pp. 215-223.

[13] Haase M. : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods*. Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[14] Komatsu H. : *Fractional Powers of Operators*, Pacific Journal of Mathematics, 19, no. , 2(1966), pp.285-346.

[15] J.L. Lions and J. Peetre : *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19(1964), pp.5-68.

[16] Lunardi A. : *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, (1995).

[17] Mc Connell T.R. : *On Fourier multiplier transformations of Banach-valued functions*. Trans. Am. Math. Soc. 285(1984), pp.739-757.

[18] Pazy A. : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119 (1983).

[19] Clément Ph., Prüss J. : *Completely positive measures and Fellersemigroups*, Math. Ann., 287(1990), pp.73-105.

[20] Prüss J. and Sohr H. : *On operators with bounded Imaginary powers in Banach spaces.* Math Zeitschrift, 203 (1990), pp.429-452.

[21] Prüss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces.* Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.

[22] Seeley R. : *Norm and domains of the complex powers* A_B^z, Amer. J. Math., 93(1971), pp.299-309.

[23] Triebel H. : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North Holland, amsterdam, (1978).

[24] Zimmerman F. : *On vector-valued Fourier multiplier theoremes*, Studia Mathematica, 93(1989), pp.201-222.

مؤثرات تفاضلية معينة ذات قوى تخيلية محدودة

هذه الأطروحة مخصصة لدراسة نتائج مقال فيرمان الصادر سنة 1993 والذي يتعلق بدراسة مؤثرات تفاضلية معينة ذات قوى تخيلية محدودة, حيث سنثبت من أجل

$\mu>0$ كبير بالقدر الكافي أن المؤثرات التفاضلية من الشكل

$$\mathbf{P} = \mathbf{a_0}\frac{\partial^{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{t}^{\mathbf{n}}} + \mathbf{a_1}\frac{\partial^{\mathbf{n-1}}}{\partial \mathbf{t}^{\mathbf{n-1}}} + \cdots + \mathbf{a_n}\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} + \boldsymbol{\mu}$$

لديها قوى تخيلية محدودة في فضاء **L^p** **حيث** **$p\in(1,\infty)$**