République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABD ELHAMID BEN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques-Informatique

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Option : Calcul Fractionnaire

Intitulé

Equations Différentielles Fractionnaires Selon Caputo et Hadamard: Existence, Unicité et UH-stabilité.

Présenté par : **Kamel TABLENNEHAS**

Soutenue le :

Composition du Jury

Présidente	: Samira HAMANI	Prof. Université de Mostaganem
Examinateur	: Amar DEBBOUCHE	Prof. Université de Guelma
Examinateur	: Abdelkader SENOUCI	Prof. Université de Tiaret
Directeur de thèse	: Zoubir DAHMANI	Prof. Université de Mostaganem

Année Universitaire 2022-2023

Remerciements

Louage à **ALLAH Le Tout Puissant** qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail!

Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mon encadreur, Monsieur Zoubir DAHMANI, professeur à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse ainsi que pour sa disponibilité, sa patience et ses encouragements tout au long de la réalisation de cette thèse de Doctorat.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse, en l'occurrence :

Présidente : Samira HAMANI, professeur à l'Université de Mostaganem.

Examinateur : Amar DEBBOUCHE, professeur à l'Université de Guelma.

Examinateur : Abdelkader SENOUCI, professeur à l'Université de Tiaret.

J'adresse également mes remerciements envers ma famille, mes enseignants, mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons quelques résultats analytiques pour certains problèmes différentiels fractionnaires. Dans la première partie, nous commençons par utiliser à la fois l'intégrale au sens de Riemann-Liouville et la dérivée au sens de Caputo pour étudier un nouveau problème différentiel singulier non linéaire de type Lane et Emden. Ainsi, nous prouvons un premier résultat d'existence et d'unicité par l'application du principe de contraction de Banach, puis, un second résultat d'existence par l'application du théorème de Schaefer. Des exemples "illustratifs" sont discutés en détail pour montrer l'applicabilité des résultats obtenus. Ensuite, nous étudions deux concepts de stabilité; la stabilité Hyers-Ulam et la stabilité Hyers-Ulam généralisée. Dans la seconde partie, nous étudions un problème intégro-différentiel séquentiel de type Duffing impliquant des parametres (α, β, γ). En prenant en compte à la fois l'absence de "$(CO - SG)$" et les conditions du problème, nous présentons la solution auxiliaire intégrale du problème. Ensuite, nous prouvons un premier résultat d'unicité. Puis, nous prouvons le résultat d'existence d'une solution au moins. Quelques exemples sont discutés pour avoir une idée sur l'applicabilité des principaux résultats lorsque les trois paramètres dérivés changent. Nous introduisons quelques nouvelles définitions de stabilité Hyers-Ulam liées au problème de type Duffing étudié. Dans la dernière partie nous considérons un nouveau problème différentiel fractionnaire où nous utilisons à la fois l'intégrale au sens de Hadamard et la dérivée au sens de Caputo-Hadamard pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel non linéaire. Pour cela, nous allons utiliser les théorèmes de points fixes de Banach et de Schaefer. Des exemples sont également discutés pour valider les résultats obtenus.

ABSTRACT

In this thesis, we present some results using the fractional calculus theory for some different fractional differential problems. In the first part, we use both the integral in the sense of Riemann-Liouville and the derivative in the sense of Caputo to study a new non-linear singular differential problem of Lane-Emden type. Thus, we prove a first existence and uniqueness result by applying Banach contraction principle and a second existence result by applying Schaefer fixed point theorem. Some illustrative examples are discussed in details to show the applicability of the results. Then we study two types of stabilities; the Hyers-Ulam stability and the generalized one. In the second part, we study a sequential integro-differential problem of Duffing type involving the parameters (α, β, γ). By taking into account both the absence of properties of "(CO-SG") and the conditions of the problem, we present the integral solution of the problem. Then, we prove the uniqueness result, by applying Banach's contraction principle. Moreover, we prove the existence result using Schaefer fixed point theorem. Some illustrative examples are discussed to get an idea about the applicability of the main results when the parameters change. We introduce some new Hyers Ulam stability definitions related to the studied Duffing type problem. In the last part of our project, we consider a new fractional differential problem that involves both the integral in the sense of Hadamard and the derivative in the sense of Caputo-Hadamard. We study the existence and uniqueness of the solution of the non-linear differential problem. For this, we need to use the fixed point theorems of Banach and Schaefer. Some examples are discussed to validate the obtained results.

ملخص

في هذه الرسالة، نقدم بعض النتائج باستخدام نظرية حساب التفاضل والتكامل الكسري لبعض المسائل تفاضلية كسرية. في الجزء الأول، نبدأ باستخدام التكامل بمعنى **ريمان-ليوفيل** والمشتق بمعنى كبيتو لدراسة مسألة تفاضلية مفردة غير خطية جديدة من نوع **لين-امدن** وهكذا، فإننا نثبت نتيجة الوجود والفريدة للحل من خلال تطبيق مبدأ الانكماش في فضاء **بناخ**. بعد ذلك، نثبت نتيجة الثانية لوجود الحل من خلال تطبيق نظرية **شافر**. تمت مناقشة مثالين توضيحيين بالتفصيل لإظهار قابلية تطبيق النتائج التي تم الحصول عليها. ثم ندرس نوعين من مفاهيم الاستقرار **هرس-إلام** و **هرس-إلام** العامة. في الجزء الثاني، ندرس مسألة تفاضلية متكاملة متسلسلة (α.β.γ) من نوع **دو فينج**. من خلال مراعاة كل من غياب(CO-SG) وظروف المسألة، نقدم الحل المتكامل. ثم نثبت النتيجة الفريدة من خلال تطبيق مبدأ الانكماش **لبناخ**. علاوة على ذلك ، أثبتنا نتيجة الوجود باستخدام نظرية النقطة الثابتة **لشافر**. تمت مناقشة بعض الأمثلة التوضيحية للحصول على فكرة حول قابلية تطبيق النتائج الرئيسية عند تغيير المعلمات الثلاثة المشتقة. نقدم كدالك بعض تعريفات استقرار **هرس-إلام** الجديدة المتعلقة بالمشكلة المدروسة. في الجزء الأخير نعتبر مشكلة تفاضلية كسرية جديدة حيث نستخدم لدراسة وجود وتفرد حل المشكلة التفاضلية غير الخطية كلا من التكامل بمعنى **ادمار** والمشتق بمعنى **كبيتو-أدمار** كما يتم مناقشة مثالين للتحقق من صحة النتائج التي المتحصل عليها.

Liste des travaux de recherche et des publications

1. K. Tablennehas, A. Abdenebi, Z. Dahmani and M.M. Belhamiti: *An anti-periodic singular fractional differential problem of Lane-Emden type,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, (2021), 1-27.

2. K. Tablennehas,Z. Dahmani and M.M. Belhamiti and M.Z.Sarikaya: *On a Fractional Problem of Lane-Emden Type: Ulam Type Stabilities and Numerical Behaviours*, Advances in Difference Equations, 2021 (1), 1-19.

3. K. Tablennehas and Z. Dahmani: *AThree Sequential Fractional Differential Problem of Dufing Type*, Applied Mathematics E-Notes 21(2021), 587-598.

Table des Matières

Introduction

Les mathématiques appliquées telles qu'elles sont connues sont la mise en œuvre de connaissances mathématiques pour les besoins formels de la résolution des problèmes qui proviennent de diverses applications, telles que les sciences physiques, biologiques, l'ingénierie, les sciences sociales et d'autres domaines des sciences. Leurs solutions nécessitent la connaissance de diverses branches des mathématiques, telle que l'analyse, les équations différentielles, la stochastique, l'optimisation et la théorie des graphes....ect, en utilisant des méthodes analytiques et numériques

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que plusieurs phénomènes de la physique et des sciences de l'ingénieur peuvent très bien être modélisés à l'aide d'équations différentielles d'ordre standard ainsi que d'ordre non entier, telles que l'équation différentielle de type Lane-Emden elle peut décrire certains phénomènes en équilibre hydrostatique, voir pour plus de détails [17, 25, 47]. Aussi l'équation différentielle de type Duffing, est utilisée pour modéliser certains oscillateurs amortis et aussi pilotés, parmi les dernières études, on peut citer [16, 18, 26, 44, 49, 53, 54, 56, 61, 64, 71].

Au cours de ces dernières années, de nombreux résultats ont été établis concernant l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles fractionnaires en utilisant la théorie du point fixe (voir [6, 11, 14, 29, 38, 55, 64]).

Le concept de stabilité d'Ulam-Hyers signifie que l'on ne cherche pas la solution exacte pour un système stable d'Ulam-Hyers mais qu'il est nécessaire de trouver une fonction qui satisfait une inégalité d'approximation appropriée. Cette approche peut garantir qu'il existe une solution exacte proche utile dans de nombreuses applications.

La stabilité d'Ulam-Hyers est l'un des principaux sujets de la théorie des équations fonctionnelles trouve son origine dans un exposé célèbre de S.M. Ulam [77]. En 1940, Ulam [77] pose un problème concernant la stabilité des équations fonctionnelles: « Donner des conditions pour qu'une fonction linéaire proche d'une fonction approximativement linéaire existe ». Depuis, cette question a retenu l'attention de nombreux chercheurs. Notez que la première réponse à cette question a été donnée par Hyers [37] en 1941. Il a fait une belle avancée, quand il a donné une réponse affirmative au problème d'Ulam pour les fonctions additives définies sur l'espace du Banach. Par la suite, le résultat de Hyers [37] a été généralisé par Rassias [66]. Après cela, de nombreux mathématiciens ont étendu le problème d'Ulam à d'autres équations fonctionnelles et généralisé les résultats de Hyers dans diverses directions. Pour plus de détails sur les avancées récentes sur la stabilité d'Ulam-Hyers des équations différentielles, on peut voir [11, 27, 38].

Le but principal de cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations différentielles fractionnaires.

Nous commençons par le chapitre1 en rappelant les notions de base du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, en premier lieu nous étudions l'existence et l'unicité de solution en utilisant les théorèmes classiques du point fixe du problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}D^{\beta}z(t) + \frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t) + a_1F\big(t, z(t), D^{\gamma}z(t), J^{p}z(t)\big) + a_2G\big(t, z(t), D^{\gamma}z(t)\big) + a_3H\big(t, z(t)\big) = L(t). \\ z(0) + z(1) = 0, \qquad z'(0) + z'(1) = 0, \qquad D^{\gamma}(0) + D^{\gamma}(1) = 0, \\ k > 0, 1 \leq \beta \leq 2, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1, \quad 0 < \lambda < 1, p > 0, t \in I, \end{cases} \tag{1}$$

avec $I = [0, 1]$, D^{α}, D^{β} représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement, l'intégrale J^{p} est du Riemann-Liouville et $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

On établit donc les résultats suivants:

Théorème 0.1. *[74]Supposons que l'"hypothèse (HL_1) et l'inégalité*

$$0 < N < 1; N = max(N_1, N_2, N_3)$$

sont satisfaites. Alors, le problème de type Lane-Emden (1) admet une solution unique sur $I = [0, 1]$.

Théorème 0.2. *[74]Supposons que les hypothèses* $(HL_2), (HL_3)$ *et* (HL_4) *sont satisfaites. Alors le problème de type Lane-Emden (1) admet au moins une solution sur* I*.*

Ensuite, nous continuons l'étude des problèmes différentiel fractionnaire de type Lane-Emden (1) en étudiant la stabilité d'Ulam-Hyers et la stabilité d'Ulam-Hyers généralisées

Dans le chapitre 3, on s'intéresse d'abord à l'étude de l'existence et de l'unicité de solution du problème aux limites fractionnaire de type Duffing suivant:

$$\begin{cases} D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t)) + kf(t, D^{\alpha}z(t)) + g(t, z(t), D^{p}z(t)) + h(t, z(t), J^{q}(z(t))) = L(t) \\ z(0) = A_1 \in \mathbb{R}, D^{\alpha}z(0) = A_2 \in \mathbb{R}, J^{\alpha}z(1) = A_3 \in \mathbb{R} \\ 0 < p < \alpha, \beta, \gamma < 1, 1 < \alpha + \beta < 2, 1 < \beta + \gamma < 2, t \in I \end{cases} \tag{2}$$

avec $I = [0, 1]$, $D^{\alpha}, D^{\beta}, D^{p}$ représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α, β et γ respectivement, k est une constante reél, on note par J^{q} l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $q \geq 0$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 0.3. *[76]Supposons que l'hypothèse* (HD_1) *est vérifiée et que*

$$0 < T < 1, T := max(T_1, T_2, T_3).$$

Alors, le problème de type Duffing (2) admet une solution unique sur $I = [0, 1]$*.*

Quant au deuxième résultat, il est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 0.4. *[76]Supposons que les hypothèses* (HD_2)*et* (HD_3) *sont satisfaites. Alors le problème de type Duffing (2) admet au moins une solution sur* I*.*

Puis nous poursuivons l'étude des problèmes différentiels fractionnaires de type Duffing (2), en étudiant la stabilité d'Ulam-Hyers et la stabilité d'Ulam-Hyers généralisées.

Le dernier chapitre concerne l'étude d'un nouveau problème différentiel fractionnaire non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard suivant:

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha}x(t) + f(t, x(t)) = \eta, t \in J = [1, e] \\ x(1) = \eta, x(\theta) = g(x), 1 < \theta < e, 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} \tag{3}$$

où ${}_{H}^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues données.

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 0.5. *Supposons que l'hypothèse* $(A1)$ *est satisfaite et supposons que:*

$$\frac{k_1 \left(1 + \log \theta\right)}{\Gamma(\alpha + 1) \log \theta} + \frac{k_2}{\log \theta} < 1.$$

Alors le problème (3) admet une solution unique sur J*.*

Le deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 0.6. *On suppose quel les hypothèses (A2), (A3) et (A4) sont satisfaites. Alors le problème (3) admet au moins une solution sur* $J = [1, e]$ *.*

Ensuite, une conclusion du travail effectué est donnée. On termine cette thèse par une bibliographie.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire, quelques définitions, lemmes et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres ultérieurs. Ces définitions et propriétés sont extraites de [41, 56, 65, 67] auquel nous nous référons pour plus de détails.

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de dérivation et d'intégration ordinaires pour un ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire est un champ important qui se développe dans des mathématiques pures et appliquées. Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénieries sont très diverses. Ils apparaissent de plus en plus dans les différents domaines de recherches (voir [36, 52]).

1.1 Fonctions d'Euler

1. La fonction d'Euler Γ est considérée comme une fonction spéciale. Elle prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes.

Définition 1.1. *Pour $\Re(\alpha) > 0$ la fonction Γ est définie par:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \Re(\alpha) > 0.$$

où $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln(t)}$, cette intégrale est convergente pour tout complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\Re(\alpha) > 0$

Propriétés [41, 56, 65, 67]

a. La fonction Γ vérifie la formule:

$$\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right),\Re\left(\alpha\right)>0.$$

b. $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(0^{+})=+\infty$. Et aussi $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

c. En particulier, si $\alpha=n\in\mathbb{N}^{*}$, alors

$$\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!.$$

2. La fonction Béta est définie par :

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds=\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)},\mathrm{Re}\left(\alpha\right)>0,\mathrm{Re}\left(\beta\right)>0.$$

1.2 Intégration fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

1.2.1 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha>0$ selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la formule d'intégrales répétées n-fois.

$$\begin{aligned} I_{a}^{n}f(t) &= \int\limits_{a}^{t}ds_{1}\int\limits_{a}^{s_{1}}ds_{2}\int\limits_{a}^{s_{2}}ds_{3}.....\int\limits_{a}^{s_{n-1}}f\left(s_{n}\right)ds_{n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{a}^{t}\left(t-s\right)^{n-1}f\left(s\right)ds, n\in\mathbb{N}^{*}. \end{aligned}$$

Définition 1.2. *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha\geq0$, au sens de Riemann-Liouville est donnée par:*

$$I_{a}^{\alpha}f(t)=\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, & t>a \\ f(t), & \alpha=0 \end{cases}$$

Exemple 1.3. (1) *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f(t) = k$.

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(k) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} k ds, \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds, \\
&= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(t-s)^{\alpha}}{-\alpha} \right]_{s=a}^{s=t}, \\
&= \frac{k(t-a)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Pour $a = 0$ *on obtient:*

$$\begin{aligned}
I_0^{\alpha}(k) &= \frac{k.t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}. \\
\alpha &= 1 \Rightarrow I_0^1(k) = k.t. \\
\alpha &= 2 \Rightarrow I_0^2(k) = \frac{k.t^2}{2}.
\end{aligned}$$

(2) *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f(t) = t^m$.

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}(f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} t^m dt, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x(1-\frac{t}{x})^{\alpha-1} t^m dt, \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (1-\frac{t}{x})^{\alpha-1} t^m dt,
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable

$$\frac{t}{x} = s \Rightarrow dt = xds$$

alors

$$t = a \Rightarrow s = \frac{a}{x} \text{ et } t = x \Rightarrow s = 1$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left(x^m\right) &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-s)^{\alpha-1}\left(xs\right)^m xds,\\
&= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-s)^{\alpha-1}s^m ds,\\
&= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha, m+1),\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(m+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+m+1\right)}x^{\alpha+m},\\
&= \frac{\Gamma\left(m+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+m+1\right)}x^{\alpha+m}.
\end{aligned}$$

(3) *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f(x) = e^{kx}$.

$$I_a^{\alpha}\left(e^{kx}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}e^{kt}dt,$$

En faisant le changement de variable

$$x - t = s \Rightarrow dt = -ds$$

alors

$$t = a \Rightarrow s = x - a \;\; et \; t = x \Rightarrow s = 0$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left(e^{kx}\right) &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (s)^{\alpha-1}e^{k(x-s)}ds,\\
&= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} (s)^{\alpha-1}e^{-ks}ds
\end{aligned}$$

On pose

$$y = k.s \Rightarrow dy = kds$$

et

$$s = 0 \Rightarrow y = 0 - a, \;\; s = x - a \Rightarrow y = k\left(x-a\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left(e^{kx}\right) &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{k(x-a)}(\frac{y}{k})^{\alpha-1}e^{-y}\frac{dy}{k}\\
&= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{k(x-a)}(\frac{y}{k})^{\alpha-1}e^{-y}\frac{dy}{k},\\
&= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}\int\limits_0^{k(x-a)}(y)^{\alpha-1}e^{-y}dy,\\
&= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}\int\limits_0^{k(x-a)}(y)^{\alpha-1}e^{-y}dy.
\end{aligned}$$

si $a \rightarrow -\infty,$ *alors*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left(e^{kx}\right) &= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}\int\limits_0^{+\infty}(y)^{\alpha-1}e^{-y}dy,\\
&= \frac{e^{kx}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k^\alpha}.\Gamma(\alpha),\\
&= \frac{e^{kx}}{k^\alpha}.
\end{aligned}$$

L'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a la propriété de linéarité et la propriété de semi-groupe.

Proposition 1.4. *[41, 56, 65, 67]Soit* $f \in C[a,b]$. *Pour* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *on a:*

(a) $I_a^\alpha\left(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\right) = \lambda_1 I_a^\alpha f(t) + \lambda_2 I_a^\alpha g(t)$.

(b) $I_a^\alpha\left(I_a^\beta f(t)\right) = I_a^\beta\left(I_a^\alpha f(t)\right) = I_a^{\alpha+\beta} f\ (t)$.

1.2.2 Intégration fractionnaire de Hadamard

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ selon l'approche d'Hadamard, généralise la formule de la n$^{i\text{'eme}}$ intégrale suivante:

$$I_a^n f(x) = \int\limits_a^x \frac{dt_1}{t_1}\int\limits_a^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\int\limits_a^{t_2}\frac{dt_3}{t_3}.....\int\limits_a^{t_{n-1}} f\left(t_n\right)\frac{dt_n}{t_n}.$$

Définition 1.5. *[42] L'intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \geq 0$; pour une fonction $f \in C([a;b))$ est défini par:*

$$
{}_H I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s)}{s} ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0 \end{cases}
$$

où $\log(.) = \log_e(.)$ *et* Γ *est la fonction Gamma d'Euler.*

Exemple 1.6. *Soient* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f(t) = (\log \frac{t}{a})^\beta$.

$$
{}_H I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} (\log \frac{s}{a})^\beta ds, \ \alpha > 0,
$$

Effectuant le changement de variable

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{(\log \frac{s}{a})}{(\log \frac{t}{a})} \Rightarrow du = \frac{1}{(\log \frac{t}{a})} \frac{ds}{s} \\
&\Rightarrow \frac{ds}{s} = (\log \frac{t}{a}) du \\
&\Rightarrow (\log \frac{s}{a})^\beta = u^\beta (\log \frac{t}{a})^\beta \\
&\Rightarrow \frac{1}{s} (\log \frac{s}{a})^\beta ds = u^\beta (\log \frac{t}{a})^\beta (\log \frac{t}{a}) du \\
&\Rightarrow \frac{1}{s} (\log \frac{s}{a})^\beta ds = u^\beta (\log \frac{t}{a})^{\beta+1} du \\
& \quad \textit{et} \\
\log\left(\frac{t}{s}\right) &= \log\left(\frac{t}{a}\right)\left(1 - \frac{\log \frac{s}{a}}{\log \frac{t}{a}}\right) = \log\left(\frac{t}{a}\right)(1-u) \\
s &= a \Rightarrow u = 0, \ s = t \Rightarrow u = 1
\end{aligned}
$$

alors

$$
{}_H I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (\log\left(\frac{t}{a}\right)(1-u))^{\alpha-1} u^\beta (\log \frac{t}{a})^{\beta+1} du,
$$

$$
\begin{aligned}
{}_H I^\alpha f(t) &= \frac{(\log \frac{t}{a})^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (1-u)^{\alpha-1} (u)^\beta du, \ \alpha > 0, \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\log \frac{t}{a})^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

L'opérateur d'intégration fractionnaire au sens d' Hadamard a la propriété de linéarité et la propriété de semi-groupe.

Proposition 1.7. *[42]Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\forall\lambda_1,\lambda_2 \in R, \forall\alpha,\beta > 0$ on a:*

(a) ${}_HI^{\alpha}\left(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\right) = \lambda_1\left({}_HI^{\alpha} f(t)\right) + \lambda_2\left({}_HI^{\alpha} g(t)\right).$

(b) ${}_HI^{\alpha}\left({}_HI^{\beta} f\right)(t) = {}_HI^{\beta}\left({}_HI^{\alpha} f\right)(t) = \left({}_HI^{\alpha+\beta} f\right)(t).$

1.3 Dérivation fractionnaire

La notion de dérivée d'ordre fractionnaire est une généralisation du concept de la différentiation d'ordre entier. On présente dans cette section les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo, d'Hadamard et de Caputo-Hadamard.

1.3.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.8. *[41, 56, 65, 67]La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$ est donnée par:*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \tfrac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \tfrac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \quad n = [\alpha]+1, \quad t > a. $$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$ {}^{RL}D^0 f(t) = f(t). $$

et si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$ {}^{RL}D^n f(t) = f^{(n)}(t). $$

De plus, si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$ et

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds \quad , t > a. $$

Remarque 1.9. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]n-1, n[$ *s'obtient par une application de l'opérateur de dérivation classique d'ordre* n *suivie d'une intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$.

Exemple 1.10. (1) *Soit* $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, $m > -1$ *et* $f(t) = (t-a)^m$ *alors on a:*

$$^{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(t-a)^{m-\alpha} .$$

(2) *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante* $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}
^{RL}D^{\alpha}(\mathbf{K}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \mathbf{K} ds, \\
&= \frac{\mathbf{K}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} ds, \\
&= \frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha}(\mathbf{K}), \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{K}(t-a)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\right), \\
&= \frac{(1-\alpha)\mathbf{K}(t-a)^{-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \\
^{RL}D^{\alpha}(\mathbf{K}) &= \frac{\mathbf{K}(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.11. *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.*

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a les propriétés suivantes:

Proposition 1.12. *[41, 56, 65, 67]Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent,* $\alpha, \beta > 0$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *alors on a:*

(*a*) $^{RL}D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda^{RL}D^{\alpha} f(t) + \mu^{RL}D^{\alpha} g(t)$.

(*b*) $^{RL}D^{\alpha}\left(I^{\beta} f(t)\right) =^{RL} D^{\alpha-\beta} f(t)$.

(*c*) *L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville,*

$$^{RL}D^{\alpha}(I^{\alpha} f(t)) = f(t) .$$

Proposition 1.13. *[41, 56, 65, 67]Soient* $m \in N^*$ *et* $m-1 \leq \alpha < m, f \in C([a,b])$. *Si* ${}^{RL}D^{\alpha}\left(f(t)\right) = 0,$ *alors*

$$f\left(x\right) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma\left(j+1\right)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}, c_j \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.14. *En général la dérivation fractionnaire sens de Riemann-Liouville ne commutent pas:*

$${}^{RL}D^{\alpha}({}^{RL}D^{\beta}f\left(t\right)) \neq {}^{RL}D^{\beta}({}^{RL}D^{\alpha}f\left(t\right)).$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.15. *[41, 56, 65, 67]Pour une fonction* $f \in C^n\left([a,b]\right),\ n \in \mathbb{N}^*$, *la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *au sens de Caputo de* f *est définie par:*

$${}^{C}D_a^{\alpha}f(t) = I_a^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, & n-1 < \alpha < n, \quad t > a, \\ \\ f^{(n)}(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

Remarque 1.16. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre* $\alpha \in]n-1, n[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$ *suivie d'une dérivation classique d'ordre* n.

Exemple 1.17. (1) *Soit* $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$, $m > -1$ *et* $f(x) = (x-a)^m$ *alors on a:*

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}(x-a)^m &= I_a^{n-\alpha}[(\frac{d^n}{dx^n})(x-a)^m], \\ &= I_a^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}\right), \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)} I_a^{n-\alpha}(x-a)^{m-n}, \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)} \frac{\Gamma(m+1-n)}{\Gamma(m+1-\alpha)}(x-a)^{m-\alpha}, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$^{C}D^{\alpha}(x-a)^{m}=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha}.$$

(2) *La dérivée d'une fonction constante* $\mathbf{K}$ *au sens de Caputo*

$$\begin{aligned} ^{C}D^{\alpha}(K) &= I_{a}^{n-\alpha}[(\frac{d^{n}}{dx^{n}})(\mathbf{K})], \\ &= I_{a}^{n-\alpha}(0)=0. \end{aligned}$$

Remarque 1.18. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.*

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo possède les propriétés suivantes:

Proposition 1.19. *[41, 56, 65, 67] Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo existent, pour* $\alpha,\beta>0$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *on a:*
(*a*) $^{C}D^{\alpha}\left(\lambda f\left(t\right)+\mu g\left(t\right)\right)=\lambda^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)+\mu^{C}D^{\alpha}g\left(t\right).$
(*b*) $^{C}D_{a}^{\alpha}\left[I_{a}^{\beta}f(t)\right]=I_{a}^{\beta-\alpha}f(t).$
(*c*) $^{C}D_{a}^{\alpha}\left[I_{a}^{\alpha}f(t)\right]=f(t).$

Proposition 1.20. *Si* $0\leq\alpha,\beta\leq1$ *avec* $0\leq\alpha+\beta\leq1$ *et* f *est de classe* C^{1}*, alors*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}\left[^{C}D_{a}^{\beta}f(x)\right]={}^{C}D_{a}^{\alpha+\beta}f(x)={}^{C}D_{a}^{\beta}\left[^{C}D_{a}^{\alpha}f(x)\right]$$

Proposition 1.21. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville sont liés par la fomule:*

$$^{C}D_{a}^{\alpha}f(x)={}^{RL}D_{a}^{\alpha}f\left(x\right)-\sum_{j=0}^{m-1}{}_{j}\frac{f^{(j)}\left(a\right)\left(x-a\right)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)}.$$

Les résultats suivants peuvent être considérés comme des lemmes cruciaux.

Lemme 1.22. *[41, 56, 65, 67] Soit* f *une fonction définie sur* $[a;b]$ *vérifiant:*

$$D^{\alpha}z(t)=0,t\in I.$$

Alors

$$z(t)=c_{0}+c_{1}t+c_{2}t^{2}+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}.$$

$c_{i}\in\mathbb{R},i=0,1,\cdots,n-1,n=[\alpha]+1.$

Lemme 1.23. *[41, 56, 65, 67] Considérons un $\alpha > 0$. Alors*

$$J^{\alpha}[D^{\alpha}z(t)] = z(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, t \in I;$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens d'Hadamard

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.24. *[42] Soit une fonction $f \in C([a, b))$, la dérivée fractionnaire au sens d' Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ est définie par:*

$${}_{H}D^{\alpha}f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(s)}{s}ds = \delta_H^n I^{n-\alpha}f(t).$$

où $\delta = t\frac{d}{dt}$ et $n - 1 < \alpha < n, n = [\alpha] + 1$.

Exemple 1.25. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(t) = \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}$, alors on a:*

$${}_{H}D^{\alpha}f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} \left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta} \frac{1}{s}ds,$$

Par le changement de variable

$$u = \frac{\log\frac{s}{a}}{\log\frac{t}{a}},$$

on obtient:

$${}_{H}D^{\alpha}f(t) = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta},$$

Pour $n = 1$,

$${}_{H}D^{\alpha}f(t) = \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{1} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha+\beta},$$

et si $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{5}{2}$ on obtient:

$$\begin{aligned}
{}_{H}D^{\frac{1}{2}}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right) &= \tfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{1} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}, \\
{}_{H}D^{\frac{1}{2}}\left(\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right) &= \tfrac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(4)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^{1} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{3}, \\
&= \tfrac{15\sqrt{\pi}}{64} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{2}.
\end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ on a:

$$
\begin{aligned}
{}_{H}D^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{0} &= \tfrac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}\right)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \tfrac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{1}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&= \tfrac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

Remarque 1.26. *En générale la dérivée fractionnaire au sens d' Hadamard d'une constante n'est pas nulle.*

Proposition 1.27. *[42]Soient $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b])$, alors*

$$ {}_{H}D^{\beta}\left({}_{H}I^{\alpha}f(t)\right) ={}_{H} I^{\alpha-\beta}f(t). $$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors on a:

$$ {}_{H}D^{\alpha}\left({}_{H}I^{\alpha}f(t)\right) = f(t). $$

Proposition 1.28. *[42]Soient $\alpha > 0$. Si $f \in C([a,b])$, alors*

$$ {}_{H}I^{\alpha}\left({}_{H}D^{\alpha}f(t)\right) \neq f(t). $$

1.3.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard

Dans cette subsection on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens Caputo-Hadamard ainsi que quelques propriétés essentielles.

Définition 1.29. *[40, 42] Soit $f \in AC^{n}_{\delta}([a,b)), n \in \mathbb{N}^{*}$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ est définie par:*

$$ {}^{C}_{H}D^{\alpha}f(t) ={}_{H} I^{n-\alpha}\delta^{n}f(t) = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\delta^{n}\frac{f(s)}{s}ds. $$

où $\delta = t\frac{d}{dt}$ et $n-1 < \alpha < n, n = [\alpha]+1$.

Exemple 1.30. (1) *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(t) = \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta}$, alors on a:*

$$ {}_{H}^{C}D^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} = \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta}\frac{ds}{s}, $$

Pour $\beta = \frac{3}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 1$, alors:

$$ \begin{aligned} {}_{H}^{C}D^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} &= \tfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\frac{-1}{2}}\delta^1\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{ds}{s}, \\ &= \tfrac{\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{s}. \end{aligned} $$

En faisant le changement de variable

$$ u = \frac{\log\frac{s}{a}}{\log\frac{t}{a}} $$

on obtient:

$$ \begin{aligned} {}_{H}^{C}D^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} &= \tfrac{\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{s}, \\ &= \tfrac{\frac{3}{2}\left(\log\frac{t}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t (u)^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du, \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}\left(\log\frac{t}{a}\right), \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned} $$

(2) *En particulier, si $\alpha > 0$ et $\beta = 0$. Alors on a:*

$$ {}_{H}^{C}D^{\alpha}(1) = 0. $$

Remarque 1.31. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'une constante est nulle.*

Proposition 1.32. *[40, 42] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard existent, pour $\alpha, \beta > 0$ on a:*

$$ {}_{H}^{C}D_a^{\alpha}\left({}_{H}I_a^{\beta}f(t)\right) ={}_{H} I_a^{\alpha-\beta}\left(f(t)\right). $$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors on a:

$$ {}_{H}^{C}D_a^{\alpha}\left({}_{H}I_a^{\alpha}f(t)\right) = f(t). $$

1.3.5 Dérivées fractionnaires séquentielles

Cette approche est basée sur l'observation que, en fait, une différentiation du n ^{ième} ordre est tout simplement une série de différentiations de premier ordre:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}...\frac{d}{dt}f(t).}_{\text{n fois}} \tag{1.1}$$

S'il y a une méthode convenable pour "le remplacement" de la dérivée du premier ordre $\frac{d}{dt}$ par la dérivée D^α d'ordre non-entier, où $0 \le \alpha \le 1$, alors il sera possible de considérer l'analogue de (1.1) suivant:

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha D^\alpha .....D^\alpha f(t).}_{\text{n fois}} \tag{1.2}$$

K.S. Miller et B. Ross ont appelé la différentiation généralisée définie par (1.2), où D^α est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, différentiation séquentielle et ont considéré des équations différentielles avec dérivées fractionnaires séquentielles du type (1.2) dans leur livre [56].

Autres mutations des dérivées fractionnaires séquentielles peuvent être obtenues en interprétant D^α comme la dérivée de Caputo ou tout autre type de dérivée fractionnaire qui n'est pas considérée ici.

Au lieu de (1.2), il est possible de remplacer chaque dérivée de premier ordre dans (1.1) par des dérivées fractionnaires d'ordre qui ne sont pas nécessairement égales et de considérer l'expression la plus générale:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \underbrace{D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} .....D^{\alpha_n} f(t).} \\ \text{avec } \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \end{aligned} \tag{1.3}$$

qu'on appelera aussi la dérivée fractionnaire séquentielle.

1.4 Sur les points fixes

Les théorèmes de point fixe s'avèrent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution d'équations différentielles, ils permettent d'assurer l'existence de solutions d'un problème donné en fournissant des conditions suffisantes pour lesquelles, une application donnée admet des points fixes.

Définition 1.33. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de E est dite de* ***Cauchy*** *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, \|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon.$$

Définition 1.34. *Un espace métrique$(E, \|.\|)$ est dit complet si tout suite de Cauchy de E converge dans E. Un tel espace est aussi appelé* ***espace de Banach****.*

Définition 1.35. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dit* ***borné*** *si*

$$\exists M > 0, \forall x \in \Omega : \|x\| \leq M.$$

Définition 1.36. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé. Un sous-ensemble $\Omega \subset X$ est dit* ***uniformément borné*** *si*

$$\exists M > 0, \forall x \in \Omega : \|x\|_\infty \leq M.$$

Définition 1.37. *On dit que Ω est une partie* ***compacte*** *de X si de toute suite de points de Ω on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de Ω.*

Définition 1.38. *Une partie Ω de X est dite* ***relativement compacte*** *si toute suite de Ω admet une sous-suite convergente vers une limite appartenant à X.*

Définition 1.39. *Soient X et Y deux espaces de Banach. L'opérateur continu $\phi : X \to Y$ est* ***complètement continu*** *s'il transforme tout borné de X en une partie relativement compacte dans Y.*

Définition 1.40. *Soient $X = C(I, E)$ l'espace de toutes les fonctions continues définies de I dans E et Ω un sous-ensemble de X. Ω est* ***équicontinue*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in I, \forall \phi \in \Omega \in: |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.41. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une application ϕ de X dans X, est dite* ***Lipschitzienne*** *si*

$$\exists k > 0, \forall x, y \in X : \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Définition 1.42. *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* ϕ *de* X *dans* X*, est dite* ***Contractante*** *si*

$$\exists k \in [0;1[\,, \forall x, y \in X : \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k \|x - y\|\,.$$

Définition 1.43. *Soient* X *un espace vectoriel normé, de norme* $\|.\|$ *et* ϕ *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle* ***point fixe*** *de* ϕ *tout point* $x \in X$ *tel que:* $\phi(x) = x$

Théorème 1.44. *[31](**Théorème du point fixe de Banach**)Soient* X *un espace de Banach et* $\phi : X \to X$ *est un opérateur contractant. Alors* ϕ *admet un point fixe unique.*

Théorème 1.45. *[31] (**Théorème du point fixe de Schaefer)** Soient* X *un espace de Banach et* $\phi : X \to X$ *un opérateur complètement continu. Si l'ensemble*

$$\Omega = \{x \in X : x = \mu\phi x, 0 < \mu < 1\}$$

est borné, alors ϕ *possède au moins un point fixe.*

Théorème 1.46. *[31] (**Théorème d'Arzela-Ascoli)** Soient* X *un espace de Banach et* $\Omega \subset X$*. Alors* Ω *est relativement compact dans* X *si et seulement si* Ω *est uniformément borné et* Ω *est équicontinu.*

CHAPITRE 2

Problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden

2.1 Introduction

La théorie des problèmes fractionnaires singuliers est devenue un domaine de recherche au cours des trois dernières décennies (voir [2, 7, 19, 22, 41, 60]). L'une des équations décrivant ce type de problèmes est l'équation de Lane-Emden, qui a été publiée par Lane en 1870 [48] et détaillée par Emden [25]. Les équations différentielles de Lane-Emden sont des problèmes de valeurs initiales singulières du second ordre, elles décrivent une variété de phénomènes en physique mathématique et en astrophysique tels que les aspects de la structure stellaire d'un objet dont l'équation d'état est celle d'un polytrope. Pour plus d'informations sur certaines applications, on peut consulter les articles [3, 30].

L'équation classique de Lane-Emden a la forme suivante [17, 25]:

$$\left\{\begin{array}{l} z''(t) + \frac{a}{t} z'(t) + f(t, z(t)) = g(t), \ \ t \in [0,1], \\ \\ \text{et} \\ z(0) = q, \ \ z'(0) = r. \end{array}\right.$$

et tels que q et r sont des réels donnés, f, g sont des fonctions continues données.
Le problème ci-dessus a suscité l'intérêt de certains chercheurs scientifiques: nous commençons par citer [55], où leurs auteurs ont utilisé la méthode dite de collocation pour

étudier le problème suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}z(t)+\dfrac{k}{t^{\alpha-\beta}}D^{\beta}z(t)+f(t,z(t))=g(t), \ t\in[0,1], \\ \\ z(0)=A>0, \ z^{'}(0)=B>0, \\ \\ k\geq 0, \ 1<\alpha\leq 2, \ 0<\beta\leq 1. \end{cases}$$

Citons aussi le travail [38], où l'on trouve qu'Ibrahim Rabha a pris le problème suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha}+\frac{a}{t}\right)z(t)+f(t,z(t))=g(t), \\ \\ z(0)=\mu, \ z(1)=\nu, \\ \\ 0<\alpha,\beta\leq 1, \ 0\leq t\leq 1, \ a\geq 0. \end{cases}$$

Elle a considéré que D^{γ} est une dérivée de Caputo et f , g sont deux fonctions continues. Citons également l'article de Z. Bekkouche et Z. Dahmani [11]; ils ont traité le problème suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta_1}\left(D^{\alpha_1}+b_1g_1(t)\right)z_1(t)+f_1(t,z_1(t),z_2(t))=\omega_1S_1(t,z_1(t),z_2(t)), \ 0<t<1, \\ \\ D^{\beta_2}\left(D^{\alpha_2}+b_2g_2(t)\right)z_2(t)+f_2(t,z_1(t),z_2(t))=\omega_2S_2(t,z_1(t),z_2(t)), \ 0<t<1, \\ \\ z_k(0)=0, \ D^{\alpha}z_k(1)+b_kg_k(1)z_k(1)=0. \end{cases}$$

Notez que les auteurs ont pris: $0<\beta_k<1$, $0<\alpha_k<1$, $b_k\geq 0$, $0<\omega_k<\infty$, $k=1,2$ et D^{β_k} , D^{α_k} sont des dérivées de Caputo et $f_k:[0,1]\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$, $S_k:[0,1]\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ sont des fonctions continues et les fonctions $g_k:]0,1]\rightarrow[0,+\infty)$ sont singulier à l'origine.

L'article de Y. Gouari avec ses co-auteurs [29] a aussi consideré le problème non local suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\dfrac{k}{t^{\lambda}})z(t)+\Delta_1 f(t,z(t),D^{\delta}z(t))+\Delta_2 g(t,z(t),I^{\rho}z(t))+h(t,z(t))=l(t), \\ \qquad t\in]0,1[, \\ z(0)=0, \qquad z(1)=b\displaystyle\int_0^{\eta} z(s)ds,\ 0<\eta<1, \\ I^{q}z(u)=z(1),\ 0<u<1, \\ k>0, 0<\lambda\leq 1,\ 1\leq\beta\leq 2,\ 0\leq\alpha,\ \delta\leq 1. \end{cases}$$

En donnant d'autres paramètres, les auteurs de [6] ont traité l'unicité et la stabilité Ulam des solutions pour le problème suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta}\left(D^{\alpha}+\frac{k}{t^{\alpha-\beta}}\right)y\left(t\right)+\lambda f\left(t,D^{\delta}y\left(t\right)\right)+g(t,y(t)=h\left(t\right), \\ y\left(0\right)=m,\ y\left(1\right)=m^{*}, \\ 0<\beta<\alpha<1,\ 0<t<1,\ k\geq 0,\lambda\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

D^{α} , D^{β} et D^{δ} sont des dérivées de Caputo et f , g et h sont des fonctions continues.

Les travaux de [13, 33, 39, 51, 52, 63, 68] ont aussi traité d'autres problèmes de Lane-Emden.

Dans ce chapitre, on aborde la question de l'existence et de l'unicité en utilisant les théorèmes classiques du point fixe du problème différentiel fractionnaire de type Lane-Emden suivant:

$$\begin{cases} D^{\alpha}D^{\beta}z(t)+\frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t)+a_1F\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t),J^{p}z(t)\big)+a_2G\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t)\big) \\ \qquad +a_3H\big(t,z(t)\big)=L(t). \\ z(0)+z(1)=0, \qquad z'(0)+z'(1)=0, \qquad D^{\gamma}(0)+D^{\gamma}(1)=0, \\ k>0, 1\leq\beta\leq 2, \quad 0\leq\gamma\leq\alpha\leq 1, \quad 0<\lambda<1, p>0, t\in I. \end{cases}$$

Dans notre équation ci-dessus, il faut remarquer que $I:=[0,1]$, les dérivées sont de Caputo, l'intégrale J^{p} est du Riemann et Liouville et $F: I\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $G: I\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $H: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $L: I\to\mathbb{R}$ sont des fonctions.

Il est à remarquer que dans ce problème:

1-On a pris les dérivées des deux côtés du problème. L'intégrale au sens de Riemann-Liouville est aussi prise dans l'équation.
2-On remarquera aussi que l'on a pris plus d'un paramètre de différenciation; cela nous permet de prendre un problème nouveau et compliqué qui ne satisfait pas la commutativité ni la propriété de semi-groupe.
3- Une autre particularité est d'introduire des phénomènes de singularité au voisinage de $t = 0$.
4- Le "modèle" présenté dans [55] peut être vu comme un cas particulier du problème de type Lane-Emden (1) sous des valeurs particulières des paramètres considérés.

2.2 Existence et unicité de solutions

Définition 2.1. *Une fonction $z \in C(I, \mathbb{R})$ est dite une solution du problème de type Lane-Emden (1) si z satisfait l'´equation*

$$D^{\alpha}D^{\beta}z(t)+\frac{k}{t^{\lambda}}D^{\alpha}z(t)+a_1F\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t),J^{p}z(t)\big)+a_2G\big(t,z(t),D^{\gamma}z(t)\big)+a_3H\big(t,z(t)\big) = L(t)$$

sous les conditions:

$$\begin{cases} z(0)+z(1)=0, \qquad z'(0)+z'(1)=0, \qquad D^{\gamma}(0)+D^{\gamma}(1)=0, \\ k>0, 1\leq\beta\leq 2, \quad 0\leq\gamma\leq\alpha\leq 1, \quad 0<\lambda<1, p>0, t\in[0,1]. \end{cases}.$$

On démontre le lemme suivant qui est important pour établir la solution intégrale du problème de type Lane-Emden (1).

Lemme 2.2. *Soit $L_1 \in C(I)$, $t \in I$, $0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1, 1 < \beta < 2$. Alors la solution de l'équation:*

$$D^{\alpha}(D^{\beta})y(t)+(\frac{k}{t^{\lambda}})D^{\alpha}y(t) = L_1(t). \tag{2.1}$$

sous les conditions:

$$y(0)+y(1)=0, \qquad y'(0)+y'(1)=0, \qquad D^{\gamma}(0)+D^{\gamma}(1)=0. \tag{2.2}$$

est donnée par l'equation intégrale suivante:

$$\left[\begin{array}{c} y(t)=\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right] duds \\ +\left[K_1 t^\beta + K_2 t + K_3\right]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right] duds\right] \\ +\left[K_4 t^\beta + K_5 t - K_6\right]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right] duds\right] \\ \left[K_7\right]\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right] duds\right]. \end{array}\right] \tag{2.3}$$

telles que:

$$\left[\begin{array}{cc} K_1=\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\beta[\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)]}. & K_2=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)}. \\ K_4=\frac{2\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\beta[\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)]}. & K_3=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\beta\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)}. \\ K_5=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)-\Gamma(\beta-\gamma+1)} & K_6=\frac{2\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)-\beta\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{2\beta\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)} \\ \multicolumn{2}{c}{K_7=\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)-2\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}{2\Gamma(\beta-\gamma+1)-4\Gamma(\beta)\Gamma(2-\gamma)}} \end{array}\right]$$

Preuve. On suppose que y satisfait l'équation (2.1), en appliquant le lemme 1.22 et 1.23, la solution générale de (2.1) est donnée par:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right] duds \\ &\quad -\frac{c_0 t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - c_1 - c_2 t, \end{aligned} \tag{2.4}$$

En utilisant les conditions anti-périodiques (2.2), on trouve:

$$\left[\begin{array}{l} c_0=\frac{K_1}{\Gamma(\beta+1)}\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \quad \frac{K_4}{\Gamma(\beta+1)}\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \\ \quad c_1=K_7\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \quad +K_3\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \quad +K_6\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \\ \quad c_2=K_2\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \\ \quad K_5\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[L_1(u)-\frac{k}{u^\lambda}D^\alpha y(u)\right]duds\right] \end{array}\right]$$

En remplaçant c_0, c_1 et c_2 dans (2.4) on obtient l'équation (2.3). $\square$

On introduit l'éspace de Banach suivant:

$$X := \{y \in C(I,\mathbb{R}), D^\alpha y \in C(I,\mathbb{R}), D^\gamma y \in C(I,\mathbb{R})\}$$

muni de la norme suivante:$\| y \|_X = \max\{\| y \|_\infty, \| D^\alpha y \|_\infty, \| D^\gamma y \|_\infty\}$ telles que:

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in I} | x(t) |, \qquad \| D^\alpha x \|_\infty = \sup_{t\in I} | D^\alpha x(t) |, \qquad \| D^\gamma x \|_\infty = \sup_{t\in I} | D^\gamma x(t) | .$$

Et, on définie l'opérateur non linéaire $\Phi : X \to X$ par:

$$\begin{aligned}
\Phi y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \qquad (2.5)\\
&\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds \\
&+ \left[K_1 t^{\beta} + K_2 t + K_3\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds \\
&+ \left[K_4 t^{\beta} + K_5 t - K_6\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds \\
&- [K_7] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
&\times \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^{\gamma}y(u), J^p y(u)) - a_2 G(u, y(u), D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^{\lambda}} D^{\alpha} y(u) \end{array} \right] duds.
\end{aligned}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème(1), on considère les hypothèses suivantes:

(HL_1): Il existe des constantes positives $W_i, i = 1...6$, telle que pour chaque $t \in I$ et $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned}
|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3))| &\leq \left(\begin{array}{c} W_1|x_1 - y_1| + W_2|x_2 - y_2| \\ +W_3|x_3 - y_3| \end{array} \right). \\
|G(t, x_1, x_2) - G(t, y_1, y_2))| &\leq W_4|x_1 - y_1| + W_5|x_2 - y_2|. \\
|H(t, x_1) - H(t, y_1)| &\leq W_6|x_1 - y_1|.
\end{aligned}$$

(HL_2): Les fonctions $F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(HL$_3$): Il existe des constantes positives E_1, E_2 et E_3, telle que pour chaque $t \in I$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, on a: $|F(t,x_1,x_2,x_3)| \leq E_1, \quad |G(t,x_1,x_2)| \leq E_2, \quad |H(t,x_1)| \leq E_3.$

(HL$_4$): La fonction L donnée est supposée satisfaire $\|L\|_\infty = E_L$.

Afin de faciliter la preuve des principaux résultats, on note:

$$\begin{aligned}
N_1 &= (a_1W_{1,2}+a_2W_{4,5}+a_3W_6)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+ \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta)}+ \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \end{pmatrix} \\
&\quad +a_1W_3\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}+ \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta+p)}+ \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)} \end{pmatrix} + |k|\Gamma(1-\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}+ \\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)}+ \\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= (a_1W_{1,2}+a_2W_{4,5}+a_3W_6)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{pmatrix} \\
&\quad +a_1W_3\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+p+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+p)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{pmatrix} + |k|\Gamma(1-\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\lambda)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= (a_1W_{1,2}+a_2W_{4,5}+a_3W_6)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{pmatrix} \\
&\quad +a_1W_3\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{pmatrix} + |k|\Gamma(1-\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

telles que: $\quad W_{1,2} := \max(W_1, W_2), \qquad W_{4,5} := \max(W_4, W_5).$

2.2.1 Unicité de solutions

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 2.3. *Supposons que l''hypothèse* (HL_1) *et l'inégalité*

$$0 < N < 1; N = max(N_1, N_2, N_3) \tag{2.6}$$

sont satisfaites. Alors, le problème de type Lane-Emden (1) admet une solution unique sur $I = [0, 1]$.

Preuve. En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que Φ est une application contractante.

A: Soit $x, y \in X$. Alors on a:

$$\begin{aligned}
|\Phi y(t) - \Phi x(t)| \leq\ & a_1 \sup_{t\in I} \int_0^t \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u))|\, duds \\
& + a_1 \sup_{t\in I} \left[|K_1| t^\beta + |K_2| t + |K_3| \right] \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u))|\, duds \\
& + a_1 \sup_{t\in I} \left[|K_4| t^\beta + |K_5| t + |K_6| \right] \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u))|\, duds \\
& + a_1 |K_7| \sup_{t\in I} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - F(u, x(u), D^\gamma x(u), J^p x(u))|\, duds \\
& + a_2 \sup_{t\in I} \int_0^{to} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - G(u, x(u), D^\gamma x(u)|\, duds \\
& + a_2 \sup_{t\in I} \left[|K_1| t^\beta + |K_2| t + |K_3| \right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
& \times |G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - G(u, x(u), D^\gamma x(u)|\, duds.
\end{aligned}$$

$$+a_2 \sup_{t\in I}\left[|K_4|\,t^{\beta}+|K_5|\,t+|K_6|\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$
$$\times\left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-G(u,x(u),D^{\gamma}x(u)\right|duds$$
$$+a_2\,|K_7|\sup_{t\in I}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$
$$\times\left|G(u,y(u),D^{\gamma}y(u))-G(u,x(u),D^{\gamma}x(u))\right|duds$$

$$+a_3\sup_{t\in I}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|H(u,y(u))-H(u,x(u))\right|duds$$
$$+a_3\sup_{t\in I}\left[|K_1|t^{\beta}+|K_2|t+|K_3|\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$
$$\times\left|H(u,y(u))-H(u,x(u))\right|duds$$
$$+a_3\sup_{t\in I}\left[|K_4|t^{\beta}+|K_5|t+|K_6|\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|H(u,y(u))-H(u,x(u))\right|duds$$
$$+a_3|K_7|\sup_{t\in I}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|H(u,y(u))-H(u,x(u))\right|duds$$

$$+\sup_{t\in I}\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{|k|}{u^{\lambda}}\right)\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$
$$+\sup_{t\in I}\left[|K_1|\,t^{\beta}+|K_2|\,t+|K_3|\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{|k|}{u^{\lambda}}\right)\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$
$$+\sup_{t\in I}\left[|K_4|\,t^{\beta}+|K_5|\,t+|K_6|\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{|k|}{u^{\lambda}}\right)\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds$$
$$+|K_7|\sup_{t\in I}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{|k|}{u^{\lambda}}\right)\left|D^{\alpha}y(u)-D^{\alpha}x(u)\right|duds.$$

D'après l'hypothèse (HL1), on a pour chaque $t\in I$ l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}
|\Phi y(t)-\Phi x(t)| \leq\ & a_1\left[W_{1,2}\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+W_3\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\right]\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_1\left[|K_1|+|K_2|+|K_3|\right]\left[W_{1,2}\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}+W_3\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+p-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+p)}\right]\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_1\left[|K_4|+|K_5|+|K_6|\right]\left[\begin{array}{c} W_{1,2}\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}+\\ W_3\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma+p}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)}\end{array}\right]\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_1|K_7|\left[W_{1,2}\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+W_3\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}\right]\parallel y-x\parallel_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+a_2W_{4,5}\left[\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+(|K_1|+|K_2|+|K_3|)\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_2W_{4,5}\left[(|K_4|+|K_5|+|K_6|)\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}+|K_7|\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right]\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_3W_6\left[\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+(|K_1|+|K_2|+|K_3|)\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]\parallel y-x\parallel_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+a_3\left[|K_4|+|K_5|+|K_6|\right]W_6\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\parallel y-x\parallel_X\\
&+a_3|K_7|W_6\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\parallel y-x\parallel_X\\
&+|k|\sup_{t\in I}\frac{\Gamma(1-\lambda)t^{\alpha+\beta-\lambda}}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}\parallel y-x\parallel_X\\
&+|k|\left[|K_1|+|K_2|+|K_3|\right]\sup_{t\in I}\frac{\Gamma(1-\lambda)t^{\alpha+\beta-\lambda-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)}\parallel y-x\parallel_X\\
&+|k|\left[|K_4|+|K_5|+|K_6|\right]\sup_{t\in I}\frac{\Gamma(1-\lambda)t^{\alpha+\beta-\gamma-\lambda}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}\parallel y-x\parallel_X\\
&+|k|\,|K_7|\sup_{t\in I}\frac{\Gamma(1-\lambda)t^{\alpha+\beta-\lambda}}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}\parallel y-x\parallel_X .
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité vaut:

$$\parallel \Phi x-\Phi y\parallel_\infty\leq (a_1W_{1,2}+a_2W_{4,5}+a_3W_6)\left[\begin{array}{c}\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta)}+\\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\end{array}\right]\parallel y-x\parallel_X$$

$$+a_1W_3\left[\begin{array}{c}\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+p+1)}+\\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta+p)}+\\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)}\end{array}\right]\parallel y-x\parallel_X+|k|\Gamma(1-\lambda)\left[\begin{array}{c}\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}+\\ \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)}+\\ \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}\end{array}\right]\parallel y-x\parallel_X$$

ce qui implique que

$$\| \Phi y - \Phi x \|_\infty \leq N_1 \| y - x \|_X .$$

B: D'autre part, on a:

$$D^\alpha \Phi y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - \\ a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] ds$$

$$+$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{K_1 \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ + \\ \frac{K_2 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right] \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - \\ a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] ds$$

$$+$$

$$[K_7] \times \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left[\begin{array}{c} L(u) - a_1 F(u, y(u), D^\gamma y(u), J^p y(u)) - \\ a_2 G(u, y(u), D^\gamma y(u)) - a_3 H(u, y(u)) - \frac{k}{u^\lambda} D^\alpha y(u) \end{array} \right] ds$$

Ainsi, pour $x, y \in X$, on obtient:

$$\left[\begin{array}{c} \| D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x \|_\infty \leq \left(\begin{array}{c} a_1 W_{1,2} + \\ a_2 W_{4,5} + a_3 W_6 \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right] \| y - x \|_X \\ + a_1 W_3 \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+p+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+p)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right] \| y - x \|_X + \\ k|\Gamma(1-\lambda) \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\lambda)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right] \| y - x \|_X \end{array} \right]$$

D'ou,

$$\| D^\alpha \Phi y - D^\alpha \Phi x \|_\infty \leq N_2 \| y - x \|_X .$$

C: Enfin, on peut voir que:

$$D^{\gamma}\Phi y(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\times\begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^py(u)) \\ -a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u)\end{bmatrix}ds$$

$$+\left[\frac{K_1\Gamma(\beta+1)t^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}+\frac{K_2t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-1)}\times\begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^py(u)) \\ -a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u)\end{bmatrix}ds$$

$$+\left[\frac{K_4\Gamma(\beta+1)t^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}+\frac{K_5t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)}\right]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-2\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)}\times\begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^py(u)) \\ -a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u)\end{bmatrix}ds$$

$$-[K_7]\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\times\begin{bmatrix} L(u)-a_1F(u,y(u),D^{\gamma}y(u),J^py(u)) \\ -a_2G(u,y(u),D^{\gamma}y(u)) \\ -a_3H(u,y(u))-\frac{k}{u^{\lambda}}D^{\alpha}y(u)\end{bmatrix}ds$$

Par conséquent,

$$\|D^{\gamma}\Phi y-D^{\gamma}\Phi x\|_{\infty} \leq \begin{pmatrix} a_1W_{1,2}+ \\ a_2W_{4,5}+a_3W_6\end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}\end{bmatrix}\| y-x\|_X$$

$$+a_1W_3\begin{bmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p+1)}+\frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+p)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+p+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}\end{bmatrix}\| y-x\|_X$$

$$+|k|\Gamma(1-\lambda)\begin{bmatrix} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}+\frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}\end{bmatrix}\| y-x\|_X$$

Ainsi, l'inégalité devient :

$$\| D^{\gamma}\Phi y-D^{\gamma}\Phi x\|_{\infty}\leq N_3\| y-x\|_X .$$

Par conséquent on a:

$$\| \Phi y-\Phi x\|_X\leq N\| y-x\|_X .$$

Grâce aux étapes A, B et C ci-dessus, on peut conclure que Φ est contractante. Suite au principe de contraction de Banach, on déduit que Φ admet un point fixe unique qui est l'unique solution du problème de type Lane-Emden (1). $\square$

2.2.2 Existence de solutions

Le deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 2.4. *Supposons que les hypothèses $(HL_2), (HL_3)$ et (HL_4) sont satisfaites. Alors le problème de type Lane-Emden (1) admet au moins une solution sur I.*

Preuve. La preuve est présentée par les étapes suivantes:

A1: On montre que Φ est un opérateur continu sur X.

Cette première étape est triviale et sa preuve peut être omise (il suffit d'utiliser l'hypothèse HL_2).

A2: On montre maintenant que l'opérateur Φ est uniformément bornée sur X.

Soit $B_r := \{x \in X, \|x\|_X \leq r\}$

Si $y \in B_r$, alors grâce à (HL_3) et (HL_4), on peut écrire:

$$\|\Phi y\|_\infty \leq [E_L + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3] \times \left[\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\right]$$

$$+|k|r\Gamma(1-\lambda)\left[\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)} + \frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)} + \frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}\right] < +\infty \tag{2.7}$$

et

$$\left[\begin{array}{c} \|D^{\alpha}\Phi y\|_{\infty} \leq [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \times \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+K_2\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \\ \\ + \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array}\right] \\ \\ +|k|r\Gamma(1-\lambda)\left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta-\lambda+1)} + \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\lambda)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array}\right] < +\infty \end{array}\right] \tag{2.8}$$

D'autre part,

$$\left[\begin{array}{c} \|D^{\gamma}\Phi y\|_{\infty} \leq [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \times \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} \\ + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \\ + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array}\right] \\ \\ +|k|r\Gamma(1-\lambda)\left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda-\gamma+1)} \\ + \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \\ + \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array}\right] < +\infty \end{array}\right] \tag{2.9}$$

Ainsi, de (2.7) ,(2.8) et (2.9), on en déduit que $\|\Phi y\|_X < +\infty$.

On conclut alors que Φ est uniformément borné sur B_r.

A3: On montre que Φ est complètement continu dans X.

Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$ et soit B_r un ensemble borné de X. Alors pour $y \in B_r$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a:

$$\left[\begin{array}{c}
|\Phi y(t_1) - \Phi y(t_2)| \leq \left[\begin{array}{c} E_L + a_1E_1 \\ +a_2E_2 + a_3E_3 \end{array}\right] \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
+|k| \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^\alpha y(u)|}{u^\lambda} duds \\
+[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
+|k| \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^\alpha y(u)|}{u^\lambda} duds \\
+[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \left[\begin{array}{c} |K_1| \left|t_1^\beta - t_2^\beta\right| \\ +|K_2| |t_1 - t_2| \end{array}\right] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
+|k| \left[|K_1| \left|t_1^\beta - t_2^\beta\right| + |K_2| |t_1 - t_2|\right] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^\alpha y(u)|}{u^\lambda} duds \\
+[E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \left[\begin{array}{c} |K_4| \left|t_1^\beta - t_2^\beta\right| \\ +|K_5| |t_1 - t_2| \end{array}\right] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} duds \\
+|k| \left[|K_4| \left(\left|t_1^\beta - t_2^\beta\right|\right) + |K_5| |t_1 - t_2|\right] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|D^\alpha y(u)|}{u^\lambda} duds.
\end{array}\right] \tag{2.10}$$

et

$$\left[\begin{array}{c}
|D^\alpha \Phi y(t_1) - D^\alpha \Phi y(t_2)| \leq [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \\
+|k| \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}-(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{|D^\alpha y(t_1)|}{t_1^\lambda} ds + [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \\
|k| \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{|D^\alpha y(t_2)|}{t_2^\lambda} ds + \left(\left[\frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left|t_1^{\beta-\alpha} - t_2^{\beta-\alpha}\right|\right] + \left[\frac{|K_2|}{\Gamma(2-\alpha)} \left|t_1^{1-\alpha} - t_2^{1-\alpha}\right|\right]\right) \\
\times \left([E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} ds + |k| \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \left|\frac{D^\alpha y(t_1)}{t_1^\lambda} - \frac{D^\alpha y(t_2)}{t_2^\lambda}\right| ds\right) \\
+\left(\left[\frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \left|t_1^{\beta-\alpha} - t_2^{\beta-\alpha}\right|\right] + \left[\frac{|K_5|}{\Gamma(2-\alpha)} \left|t_1^{1-\alpha} - t_2^{1-\alpha}\right|\right]\right) \\
\times \left([E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} ds + |k| \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \left|\frac{D^\alpha y(t_1)}{t_1^\lambda} - \frac{D^\alpha y(t_2)}{t_2^\lambda}\right| ds\right) \\
+|k| |K_7| \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left|\frac{D^\alpha y(t_1)}{t_1^\lambda} - \frac{D^\alpha y(t_2)}{t_2^\lambda}\right| ds\right).
\end{array}\right] \tag{2.11}$$

Aussi on a:

$$\left[\begin{array}{c}
\left|D^{\gamma}\Phi y(t_1)-D^{\gamma}\Phi y(t_2)\right| \leq \left[\begin{array}{c} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{array}\right]\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}-(t_2-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}ds \\
+|k|\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}-(t_2-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\frac{|D^{\alpha}y(t_1)|}{t_1^{\lambda}}ds+\left[\begin{array}{c} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{array}\right]\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}ds \\
+|k|\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\frac{|D^{\alpha}y(t_2)|}{t_2^{\lambda}}ds+\left(\left[\frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}\left|t_1^{\beta-\gamma}-t_2^{\beta-\gamma}\right|\right]+\left[\frac{|K_2|}{\Gamma(2-\alpha)}\left|t_1^{1-\gamma}-t_2^{1-\gamma}\right|\right]\right) \\
\times\left(\left[\begin{array}{c} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{array}\right]\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}ds+|k|\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}\left|\frac{D^{\alpha}y(t_1)}{t_1^{\lambda}}-\frac{D^{\alpha}y(t_2)}{t_2^{\lambda}}\right|ds\right) \\
+\left(\begin{array}{c} \left[\frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)}\left|t_1^{\beta-\gamma}-t_2^{\beta-\gamma}\right|\right] \\ + \\ \left[\frac{|K_5|}{\Gamma(2-\gamma)}\left|t_1^{1-\gamma}-t_2^{1-\gamma}\right|\right] \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} E_L+a_1E_1 \\ +a_2E_2+a_3E_3 \end{array}\right]\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-2\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)}ds \\ +|k|\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-2\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)}\left|\frac{D^{\alpha}y(t_1)}{t_1^{\lambda}}-\frac{D^{\alpha}y(t_2)}{t_2^{\lambda}}\right|ds \end{array}\right) \\
+|k|\,|K_7|\left(\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\left|\frac{D^{\alpha}y(t_1)}{t_1^{\lambda}}-\frac{D^{\alpha}y(t_2)}{t_2^{\lambda}}\right|ds\right).
\end{array}\right] \tag{2.12}$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, le second membre de l'inégalité précédent tend vers zéro. Ainsi, grâce à **A1**,**A2** et **A3**, on peut conclure que Φ est équicontinu.
et d'après le théorème d'Ascolli Arzella, Φ est un opérateur complètement continu.

A4: On termine la preuve du théorème en montrant que l'ensemble V est borné tel que: $V=\{x\in X : x=\eta\Phi x, 0<\eta<1\}$.

Soit $y\in V$, on a: $y=\eta\Phi(y)$, avec $0<\eta<1$.

Alors on peut écrire:

$$\|y\|_{\infty}\leq\eta\left(\begin{array}{c} [E_L+a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3]\times\left[\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta)}+\frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\right] \\ +|k|r\Gamma(1-\lambda)\left[\frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda+1)}+\frac{|K_1|+|K_2|+|K_3|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda)}+\frac{|K_4|+|K_5|+|K_6|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda+1)}\right]. \end{array}\right)$$

D'autre part, on a:

$$\|D^{\alpha}\Phi y\|_{\infty} \leq \eta \left(\begin{array}{c} [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta+1)} \\ +\frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \\ +\frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right] \\ \\ +|k|r\Gamma(1-\lambda) \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\beta-\lambda+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_2|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\lambda)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\alpha)+|K_5|\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(2-\alpha)} \end{array} \right]. \end{array} \right)$$

De la même manière, on peut prouver que:

$$\|D^{\gamma}\Phi y\|_{\infty} \leq \eta \left(\begin{array}{c} \leq [E_L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3] \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array} \right] \\ \\ +|k|r\Gamma(1-\lambda) \left[\begin{array}{c} \frac{1+|K_7|}{\Gamma(\alpha+\beta-\lambda-\gamma+1)}+ \\ \frac{|K_1|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_2|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)}+ \\ \frac{|K_4|\Gamma(\beta+1)\Gamma(2-\gamma)+|K_5|\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma-\lambda+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(2-\gamma)} \end{array} \right]. \end{array} \right)$$

Grâce à (2.7) ,(3.7) et (2.9), on déduit que $\|y\|_X < \infty$. Cela montre que l'ensemble V est borné.

En application directe du théorème de point fixe de Schaefer, on conclut que Φ a au moins un point fixe, qui est l'une des solutions du problème de type Lane-Emden (1). □

2.3 Validatation des résultats théoriques

On s'intéresse à la discussion de deux problèmes de type Lane-Emden. Le premier est donné par :

Exemple 2.5.

$$\begin{cases} D^{0.98}(D^{1.003})y(t) + (\frac{0.07}{t^{0.6}})D^{0.98}y(t) + 0.001F(t, y(t), D^{0.001}y(t), J^{2.3}y(t)) \\ \quad +0.0002G(t, y(t), D^{0.001}y(t)) + 0.003H(t, y(t)) = L(t), \quad t \in [0, 1], \\ y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0, \qquad D^{0.001}(0) + D^{0.001}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

On notera que:

$$\alpha = 0.98, \quad \beta = 1.003, \quad \gamma = 0.001, \quad k = 0.07, \quad p = 2.3,$$
$$a_1 \;=\; 0.001, \quad a_2 = 0.0002, \quad a_3 = 0.0003, \quad \lambda = 0.6.$$

En choisissant:

$$\begin{aligned}
F(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{cos(t)}{\sqrt{16 + t^2}} + \frac{1}{5}x_1 + \frac{93}{100}x_2 + \frac{3}{1000}x_3,\\
G(t, x_1, x_2) &= \frac{1}{120 + t^4} + \frac{\sqrt{\pi}}{9}x_1 + \frac{13}{20}x_2,\\
H(t, x_1) &= \frac{\sin(1 - t^2)}{\sqrt{1 + t^2}} + \frac{2}{7}x_1,\\
L(t) &= \frac{27}{11}\exp(-3t)cos(t).
\end{aligned}$$

On trouve, pour chaque $t \in [0, 1]$ *et* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
|F(t, x_1, x_2, x_3) - F(t, y_1, y_2, y_3))| &\leq \frac{1}{5}|x_1 - y_1| + \frac{93}{100}|x_2 - y_2| + \frac{3}{1000}|x_3 - y_3|,\\
|G(t, x_1, x_2) - G(t, y_1, y_2))| &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{9}|x_1 - y_1| + \frac{13}{20}|x_2 - y_2|,\\
|H(t, x_1) - H(t, y_1)| &\leq \frac{2}{7}|x_1 - y_1|.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$W_1 = \frac{1}{5}, \quad W_2 = \frac{93}{100}, \quad W_3 = \frac{3}{1000}, \quad W_4 = \frac{\sqrt{\pi}}{9}, \quad W_5 = \frac{13}{20}, \quad W_6 = \frac{2}{7}, W_{1,2} = \frac{93}{100}, \quad W_{4,5} = \frac{13}{20}.$$

Tout cela implique que:

$$N_1 = 0.6951, \quad N_2 = 0.9470, \quad N_3 = 0.9266.$$

Alors

$$N = \max(N_1, N_2, N_3) = 0.9470 < 1.$$

Donc grâce au premier résultat principal donné par le théorème 2.3 , le problème de type Lane-Emden (2.13) admet une solution unique.

Exemple 2.6. *Le deuxième problème illustratif de type Lane-Emden est donné par:*

$$\begin{cases} D^{0.98}(D^{1.003})y(t) + (\frac{0.07}{t^{0.6}})D^{0.98}y(t) + 0.001F(t, y(t), D^{0.001}y(t), J^{2.3}y(t)) \\ \quad +0.0002G(t, y(t), D^{0.001}y(t)) + 0.003H(t, y(t)) = L(t), \quad t \in [0,1], \\ y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0, \qquad D^{0.001}(0) + D^{0.001}(1) = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

En choisissant:

$$\begin{aligned} F(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{\sin(x_1 + x_2) - \cos(x_3)}{\left(2\sqrt{1+\pi} + e^{t^2}\right)^3}, \quad G(t, x_1, x_2) = \frac{1 + \cos(x_1 x_2)}{3 + t(x_1 + x_2)^2}, \\ H(t, x_1) &= \frac{e^{-2t}}{1 + t x_1^2}, \quad L(t) = \frac{4t+2}{3}. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, x_2, x_3)| &\leq \frac{2}{\left(2\sqrt{1+\pi} + 1\right)^3} = E_1, \quad |G(t, x_1, x_2)| \leq \frac{2}{3} = E_2, \\ |H(t, x_1)| &\leq 1 = E_{3,} \quad \|L(t)\|_\infty = 2 = E_L. \end{aligned}$$

Puisque les hypothèses de théorème(2.4) sont satisfaites, alors le problème de type Lane-Emden (2.14) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

2.4 Stabilité: Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisée

Dans cette section, on continue l'étude du problème différentiel fractionnaire anti-périodique de type Lane-Emden (1) en étudiant la stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers généralisée.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante:

Soient $1 \leq \beta \leq 2, \quad 0 \leq \gamma \leq \alpha \leq 1$, ϵ un nombre réel positif et la fonction $T \in C(I, \mathbb{R}^+)$.

$$\left[\begin{array}{c} D^\alpha D^\beta y(t) + \frac{k}{t^\lambda} D^\alpha y(t) + a_1 F\big(t, y(t), D^\gamma y(t), J^p y(t)\big) + a_2 G\big(t, y(t), D^\gamma y(t)\big) \\ + a_3 H\big(t, y(t)\big) = L(t), t \in I \end{array} \right] \tag{2.15}$$

et les inéquations différentielles fractionnaires suivantes:

$$\left| \begin{array}{c} D^\alpha D^\beta x(t) + \frac{k}{t^\lambda} D^\alpha x(t) + a_1 F\big(t, x(t), D^\gamma x(t), J^p x(t)\big) + a_2 G\big(t, x(t), D^\gamma x(t)\big) \\ + a_3 H\big(t, x(t)\big) - L(t) \end{array} \right| \leq \epsilon, t \in I, \tag{2.16}$$

Afin de faciliter les preuves des principaux résultats de cette section, on pose:

$$\Delta = \left| \begin{array}{l}
\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{bmatrix} duds \\
+ \left[K_1 t^\beta + K_2 t + K_3\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{bmatrix} duds \\
+ \left[K_4 t^\beta + K_5 t - K_6\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{bmatrix} duds \\
- [K_7] \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{bmatrix} duds \\
- \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^\gamma y(s), J^p y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^\gamma y(s)) \\ -a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha y(s) \end{bmatrix} duds \\
- \left[K_1 t^\beta + K_2 t + K_3\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^\gamma y(s), J^p y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^\gamma y(s)) \\ -a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha y(s) \end{bmatrix} duds \\
- \left[K_4 t^\beta + K_5 t - K_6\right] \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^\gamma y(s), J^p y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^\gamma y(s)) \\ -a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha y(s) \end{bmatrix} duds \\
+ [K_7] \times \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{bmatrix} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^\gamma y(s), J^p y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^\gamma y(s)) \\ -a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha y(s) \end{bmatrix} duds.
\end{array} \right|$$

$$
M_1 = \left| \begin{array}{c}
x(t) - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) - \\ a_2 G(u, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] duds \\
- \left[K_1 t^\beta + K_2 t + K_3 \right] \\
\times \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) - \\ a_2 G(u, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] duds \\
- \left[K_4 t^\beta + K_5 t - K_6 \right] \\
\times \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) - \\ a_2 G(u, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] duds \\
+ [K_7] \\
\times \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) - \\ a_2 G(u, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] duds.
\end{array} \right|
$$

$$
M_2 = \left| \begin{array}{c}
D^\alpha x(t) - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(u, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] ds \\
- \left[\frac{K_1 \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{K_2 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right] \\
\times \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] ds \\
- \left[\frac{K_4 \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{K_5 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right] \\
\times \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] ds \\
+ [K_7] \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^\gamma x(s), J^p x(s)) \\ -a_2 G(s, x(s), D^\gamma x(s)) - a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^\lambda} D^\alpha x(s) \end{array} \right] ds.
\end{array} \right|
$$

et

$$M_3 = \left| \begin{array}{c} D^{\gamma}x(t) - \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s,x(s),D^{\gamma}x(s),J^p x(s)) - a_2 \times \\ G(u,x(s),D^{\gamma}x(s)) - a_3 H(s,x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha}x(s) \end{array} \right] ds \\ - \left[\frac{K_1 \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} + \frac{K_2 t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \right] \times \\ \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-\gamma-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-1)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s,x(s),D^{\gamma}x(s),J^p x(s)) - \\ a_2 G(s,x(s),D^{\gamma}x(s)) - a_3 H(s,x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha}x(s) \end{array} \right] ds \\ - \left[\frac{K_4 \Gamma(\beta+1) t^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta-\gamma+1)} + \frac{K_5 t^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \right] \times \\ \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-2\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-2\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s,x(s),D^{\gamma}x(s),J^p x(s)) - \\ a_2 G(s,x(s),D^{\gamma}x(s)) - a_3 H(s,x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha}x(s) \end{array} \right] ds \\ + [K_7] \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s,x(s),D^{\gamma}x(s),J^p x(s)) - \\ a_2 G(s,x(s),D^{\gamma}x(s)) - a_3 H(s,x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha}x(s) \end{array} \right] ds. \end{array} \right|$$

Définition 2.7. *[75]Le problème de type Lane-Emden (1) est stable au sens Ulam-Hyers, s'il existe un nombre réel* $S > 0$*, telle que pour tout* $\epsilon > 0, t \in I$*, et pour toute solution* $x \in X$ *de l'inéquation (2.16), il existe une solution* $y \in X$ *de l'équation (2.15) (avec les mêmes conditions qu'au problème de type Lane-Emden (1), tel que:*

$$\|x(t) - y(t)\|_X \leq S\epsilon, t \in I.$$

Définition 2.8. *[75]Le problème de type Lane-Emdem (1) est stable au sens Ulam-Hyers généralisée, s'il existe une fonction croissante* $Z \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$*,* $Z(0) = 0$*, telle que pour tout* $\epsilon > 0$*, et pour toute solution* $x \in X$ *de l'inéquation (2.16), il existe une solution* $y \in X$ *de l'équation (2.15) (avec les mêmes conditions qu'au problème de type Lane-Emden (1), tel que:*

$$\|x(t) - y(t)\|_X \leq Z(\epsilon), t \in I.$$

Théorème 2.9. *[75]On suppose que l''hypothèse* (HL_3) *et l'inégalité (2.6) sont satisfaites. Alors, le problème de type Lane-Emdem (1) est stable au sens Ulam-Hyers dans* X*.*

Preuve. Soit $x \in X$ une solution de l'inéquation (2.16).

Alors , en intégrant a l'ordre $(\alpha + \beta)$ l'inéquation (2.16), on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} x(t) - J^{\beta} J^{\alpha} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^{\gamma} x(s), J^{p} x(s)) - a_2 G(u, x(s), D^{\gamma} x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} x(s) \end{array} \right] (t) \\ \\ - \left[K_1 t^{\beta} + K_2 t + K_3\right] J^{\beta-1} J^{\alpha} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^{\gamma} x(s), J^{p} x(s)) - a_2 G(s, x(s), D^{\gamma} x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} x(s) \end{array} \right] (1) \\ \\ - \left[K_4 t^{\beta} + K_5 t - K_6\right] J^{\beta-\gamma} J^{\alpha} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^{\gamma} x(s), J^{p} x(s)) - a_2 G(s, x(s), D^{\gamma} x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} x(s) \end{array} \right] (1) \\ \\ + \left[K_7\right] J^{\beta} J^{\alpha} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, x(s), D^{\gamma} x(s), J^{p} x(s)) - a_2 G(s, x(s), D^{\gamma} x(s)) \\ -a_3 H(s, x(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} x(s) \end{array} \right] (1). \end{array} \right|$$

$$M_1 \leq \frac{\epsilon t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

A partir du théorème 2.3, la solution unique de problème de type Lane-Emdem (1) est donnée par:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^{\gamma} y(s), J^{p} y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^{\gamma} y(s)) - a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} y(s) \end{array} \right] duds \\ &+ \quad \left[K_1 t^{\beta} + K_2 t + K_3\right] \times \\ &\quad \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^{\gamma} y(s), J^{p} y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^{\gamma} y(s)) - a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} y(s) \end{array} \right] duds \\ &+ \quad \left[K_4 t^{\beta} + K_5 t - K_6\right] \times \\ &\quad \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\beta-\gamma)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^{\gamma} y(s), J^{p} y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^{\gamma} y(s)) - a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} y(s) \end{array} \right] duds \\ &\quad - \left[K_7\right] \times \\ &\quad \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[\begin{array}{c} L(s) - a_1 F(s, y(s), D^{\gamma} y(s), J^{p} y(s)) \\ -a_2 G(s, y(s), D^{\gamma} y(s)) - a_3 H(s, y(s)) - \frac{k}{s^{\lambda}} D^{\alpha} y(s) \end{array} \right] duds. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in I$, on obtient: $\quad |x(t) - y(t)| \leq \dfrac{\epsilon t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \Delta$

Cela implique que:

$$\|x-y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + N_1\|x-y\|_X. \tag{2.17}$$

En intégrant a l'ordre $(\alpha+\beta)$ et en dérivant a l'ordre α l'inéquation (2.16), on a:

$$M_2 \leq \frac{\epsilon t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Raisonnant du mème manière que précédement, on peut montrer que:

$$\|D^\alpha x - D^\alpha y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+1)} + N_2\|x-y\|_X. \tag{2.18}$$

D'autre part, on a:

$$M_3 \leq \frac{\epsilon t^{\alpha+\beta-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}.$$

Egalement, on a:

$$\|D^\gamma x - D^\gamma y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} + N_3\|x-y\|_X. \tag{2.19}$$

En utilisant les inégalités (2.17),(2.18) et (2.19), on a:

$$\|x-y\|_X \leq \max\left(\frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\right) + N\|x-y\|_X.$$

Donc

$$\|x-y\|_X \leq S\epsilon,$$

tel que:

$$S = \frac{\max\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}, \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\right)}{1-N} > 0.$$

En conséquence, le problème de type Lane-Emdem (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers. $\square$

De plus, remarquons que si on pose $Z(\epsilon) = S\epsilon$, alors le problème de type Lane-Emdem (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée. On a donc le corollaire suivant:

Corollaire 2.10. *[75]Supposons que les hypothèses du théorème 2.9 sont satisfaites. Alors le problème de type Lane-Emdem (1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée.*

Exemple 2.11. *On considère le problème aux limites de type Lane-Emdem de l'exemple (2.13):*

$$\begin{cases} D^{0.98}(D^{1.003})y(t) + (\frac{0.07}{t^{0.6}})D^{0.98}y(t) + 0.001F(t, y(t), D^{0.001}y(t), J^{2.3}y(t)) \\ \quad +0.0002G(t, y(t), D^{0.001}y(t)) + 0.003H(t, y(t)) = L(t). \quad t \in [0,1] \\ y(0) + y(1) = 0, \qquad y'(0) + y'(1) = 0, \qquad D^{0.001}(0) + D^{0.001}(1) = 0. \end{cases}$$

il résulte du Théorème 2.9 que le problème de type Lane-Emdem (2.13) est stable au sens au sens d'Ulam-Hyers. De plus, par le corollaire 2.10, la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée du problème de type Lane-Emdem (2.13) est obtenue.

CHAPITRE 3

Problème différentiel fractionnaire de type Duffing

3.1 Introduction

L'équation de Duffing, ou encore oscillateur de Duffing, du nom de G. Duffing (1861−1944), est une équation différentielle non linéaire du second ordre utilisée pour modéliser certains oscillateurs amortis et forcés, (voir [18, 26, 44, 49, 53, 54, 56, 61, 64, 71]). Sa forme standard est donnée par l'équation différentielle suivante [17]:

$$z^{''}(t)+az^{'}(t)+f(t,z(t))=h(t)\,,t\in[0,1]\,,a>0,$$

sous les conditions:

$$z(0)=A\in\mathbb{R},\;\; z^{'}(0)=B\in\mathbb{R},$$

où la fonction (inconnue) $z(t)$ est le déplacement au temps, $z'(t)$ est la vitesse et $z''(t)$ est l'accélération, f et h sont deux fonctions données.

Certains auteurs ont étudié d'autres problèmes de type Duffing. Nous commençons à en citer quelques-uns, par exemple dans [29], les auteurs ont examiné l'application d'une approche numérique de l'équation non linéaire forcée de Duffing suivante:

$$\begin{cases} D^{\beta}u(t))+\delta D^{\alpha}u(t)+\rho u(t))+\mu u^{3}(t)=\lambda\sin(\omega t) \\ u(0)=A^{*}\in\mathbb{R}, D^{\alpha}u(0)=B^{*}\in\mathbb{R}, \\ 0<\alpha<1, 1<\beta<2, t\in[0,1]\,. \end{cases}$$

où D^{β}, D^{α} sont des dérivées de Caputo et $\delta,\rho,\mu,\lambda>0$.

Dans [64], les auteurs ont étudié le problème de type Duffing suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta}y(t))+aD^{\alpha}y(t)+f(t,z(t))=h(t) \\ y(z_0)=y_0, y'(z_0)=y_1, \\ 0<\alpha<1, 1<\beta<2, t\in[0,1]\,. \end{cases}$$

Dans un travail récent [14], les auteurs ont étudié le problème de type Duffing suivant:

$$\begin{cases} D^{\beta}D^{\alpha}z(t)) + kf(t, D^{\alpha}z(t)) + g(t, z(t), D^{p}z(t)) = h(t) \\ z(0) = A^{*} \in \mathbb{R}, D^{\alpha}z(0) = B^{*} \in \mathbb{R}, z(1) = C^{*} \in \mathbb{R} \\ 0 < p < \alpha < 1, 1 < \beta < 2, t \in [0, 1]\,. \end{cases}$$

où D^{α}, D^{β} et D^{p} sont les dérivées au sens de Caputo, k est une constante réelle et les fonctions f, g et h sont continues

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème aux limites fractionnaire de type Duffing (2) donné par:

$$\begin{cases} D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t)) + kf(t, D^{\alpha}z(t)) + g(t, z(t), D^{p}z(t)) + h(t, z(t), J^{q}(z(t))) = L(t) \\ z(0) = A_{1} \in \mathbb{R}, D^{\alpha}z(0) = A_{2} \in \mathbb{R}, J^{\alpha}z(1) = A_{3} \in \mathbb{R} \\ 0 < p < \alpha, \beta, \gamma < 1, 1 < \alpha + \beta < 2, 1 < \beta + \gamma < 2, t \in I \end{cases}$$

où $I = [0, 1]$, D^{α}, D^{β} et D^{p} représentent les dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α, β et γ respectivement, k est une constante reél, on note par J^{q} l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $q \geq 0$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : I \times \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$, $h : I \times \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Il est très important de noter que dans la partie gauche du problème problème de Duffing d'ordre séquentiel ci-dessus, nous considérons trois paramètres de dérivation α, β et γ;qui ne vérifie pas les propriétés de commutativité et de semi-groupe.

On note aussi que le problème proposé est plus intéressant et plus général puisque, d'une part, l'équation de Duffing classique est d'ordre deux et d'autre part pour notre cas, pour certaines valeurs de α, β et γ (sans commutativité ni propriété de semi-groupe), on peut avoir la forme standard de l'équation de Duffing de [17]; ce problème peut donc être utilisé pour mieux modéliser le cas de l'ordre fractionnaire.

3.2 Equation intégrale

Définition 3.1. *Une fonction $z \in C(I,\mathbb{R})$ est dite une solution du problème de type Duffing (2) si z satisfait l'´equation:*

$$D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t)) + kf(t, D^{\alpha}z(t)) + g(t, z(t), D^{p}z(t)) + h(t, z(t), J^{q}(z(t))) = L(t).$$

sous les conditions:

$$\begin{cases} z(0) = A_1 \in \mathbb{R}, D^{\alpha}z(0) = A_2 \in \mathbb{R}, J^{\alpha}z(1) = A_3 \in \mathbb{R}, \\ 0 < p < \alpha, \beta, \gamma < 1, 1 < \alpha+\beta < 2, 1 < \beta+\gamma < 2, t \in I. \end{cases}$$

On démontre le lemme suivant qui est important pour établir la solution intégrale du problème de type Duffing (2).

Lemme 3.2. *Soit $R \in C([0,1])$, $t \in I$, $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$. Alors la solution unique de l''èquation suivante:*

$$D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t) = R(t). \tag{3.1}$$

sous les conditions:

$$z(0) = A_1, D^{\alpha}z(0) = A_2, J^{\alpha}z(1) = A_3. \tag{3.2}$$

est donnée par l''équation intégrale suivante:

$$\left[\begin{array}{c} z(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} R(v)dvduds \\ -B_1 \left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \left(\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\int\limits_0^{\mathrm{u}} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} R(v)dv\right) du\right) ds\right] t^{\alpha+\beta} \\ -\left[B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3\right] t^{\alpha+\beta} + B_4A_2t^{\alpha} + A_1. \end{array}\right] \tag{3.3}$$

telles que:

$B_1 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$, $B_2 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}$, $B_3 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}$,
$B_4 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$, $B_5 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}$, $B_6 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$,
$B_7 = \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$, $B_8 = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-p+1)}$, $B_9 = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}$.

Preuve. On suppose que z satisfait l'équation (3.1). En appliquant le lemme 1.22 et le lemme 1.23, la solution générale de l'équation (3.1) est donnée par:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} R(v)dvduds \\ &\quad -c_0 \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} - c_1 \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - c_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

où c_0, c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

En utilisant les conditions (3.2), on trouve:

$$\begin{cases} c_0 = \Gamma\left(2\alpha+\beta+1\right) \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \left(\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} R(v)dv \right) du \right) ds \\ \quad + \left(\frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)A_2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+\beta+1)A_1}{\Gamma(\alpha+1)} - \Gamma\left(2\alpha+\beta+1\right) A_3 \right), \\ c_1 = -A_2 \\ \text{et} \\ c_2 = -A_1. \end{cases}$$

et si on remplace c_0, c_1 et c_2 dans (3.4), alors on obtient l´équation intégrale (3.3). $\square$

On introduit l'espace de Banach suivant:

$$Z := \left\{ z \in C(I,\mathbb{R}), D^{\alpha}z \in C(I,\mathbb{R}), D^{p}z \in C(I,\mathbb{R}) \right\},$$

muni de la norme suivante:

$$\| z \|_Z = \max\{ \| z \|_\infty, \| D^\alpha z \|_\infty, \| D^p z \|_\infty \},$$

telles que:

$$\| z \|_\infty = \sup_{t\in I} | z(t) |, \qquad \| D^\alpha z \|_\infty = \sup_{t\in I} | D^\alpha z(t) |, \qquad \| D^p z \|_\infty = \sup_{t\in I} | D^p z(t) | .$$

Ensuite, on définie l'opérateur non linéaire $\Phi : Z \to Z$ par:

$$\left[\begin{array}{c} \Phi z(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v) - kf(v, D^\alpha z(v)) - \\ g(v, z(v), D^p z(v)) - h(v, z(v), J^q(z(v))) \end{array} \right] dvduds \\ -B_1 \left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \left(\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v) - kf(v, D^\alpha z(v)) - \\ g(v, z(v), D^p z(v)) - \\ h(v, z(v), J^q(z(v))) \end{array} \right] dv \right) du \right) ds \right] t^{\alpha+\beta} \\ - \left[B_2 A_2 + B_3 A_1 - B_1 A_3 \right] t^{\alpha+\beta} + B_4 A_2 t^\alpha + A_1. \end{array} \right] \tag{3.5}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème de type Duffing (2), on considère les hypothèses suivantes:

(HD$_1$): Il existe des constantes positives $W_i, i = 1...5$, telle que pour chaque $t \in I = [0,1]$ et pour tout $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on a:

- $|f(t,a_1) - f(t,b_1))| \leq W_1|a_1 - b_1|$,

- $|g(t,a_1,a_2) - g(t,b_1,b_2))| \leq W_2|a_1 - b_1| + W_3|a_2 - b_2|$,

- $|h(t,a_1,a_2) - h(t,b_1,b_2)| \leq W_4|a_1 - b_1| + W_5\,|a_2 - b_2|$.

(HD_2): Les fonctions $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

(HD_3): Il existe des constantes positives E_f, E_g, E_h et E_L, telle que pour chaque $t \in I$ et pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a:

$$|f(t,a_1)| \leq E_f, \quad |g(t,a_1,a_2)| \leq E_g, \quad |h(t,a_1,a_2)| \leq E_h, \quad |L\,(t)| \leq E_L.$$

Afin de faciliter la preuve des principaux résultats, on note par:

$$\begin{aligned} T_1 \;\; : \;\; &= (|k|\,W_1 + W_2 + W_3 + W_4)\left[\frac{1}{\Gamma\,(\alpha+\beta+\gamma+1)} + |B_1|\,\frac{1}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\ &+ W_5\left[\frac{1}{\Gamma\,(\alpha+\beta+\gamma+q+1)} + |B_1|\,\frac{1}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 \;\; : \;\; &= (|k|\,W_1 + W_2 + W_3 + W_4)\left[\frac{1}{\Gamma\,(\beta+\gamma+1)} + \frac{|B_5|}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\ &+ W_5\left[\frac{1}{\Gamma\,(\beta+\gamma+q+1)} + \frac{|B_5|}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 \;\; : \;\; &= (|k|\,W_1 + W_2 + W_3 + W_4)\left[\frac{1}{\Gamma\,(\alpha+\beta+\gamma-p+1)} + \frac{|B_1 B_8|}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\ &+ W_5\left[\frac{1}{\Gamma\,(\alpha+\beta+\gamma+q-p+1)} + \frac{|B_1 B_8|}{\Gamma\,(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right]. \end{aligned}$$

3.2.1 Solutions uniques

Notre premier résultat est basé sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 3.3. *[76]Supposons que l'hypothèse* (HD_1) *est vérifiée et que*

$$0 < T < 1, T := max(T_1, T_2, T_3).$$

Alors, le problème de type Duffing (2) admet une solution unique sur $I = [0,1]$.

Preuve. On transforme le problème de type Duffing (2) a un problème du point fixe, dont les solutions du problème de type Duffing (2) sont identifiées à des points fixes de l'opérateur Φ défini par (3.5).

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que Φ est contractante.

La preuve sera donnée en trois étapes.

A: Soient $x, y \in Z$, alors on a:

$$\left[\begin{gathered}
|\Phi y(t) - \Phi x(t)| \le |k| \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|f(v, D^{\alpha}y(v)) - f(v, D^{\alpha}x(v))\right| dvduds \\
+ |k| \, |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|f(v, D^{\alpha}y(v)) - f(v, D^{\alpha}x(v))\right| dvduds \\
+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|g(v, y(v), D^{p}y(v)) - g(v, x(v), D^{p}x(v))\right| dvduds \\
+ |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|g(v, y(v), D^{p}y(v)) - g(v, x(v), D^{p}x(v))\right| dvduds \\
+ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|h(v, y(v), J^{q}y(v)) - h(v, x(v), J^{q}x(v))\right| dvduds \\
+ |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left|h(v, y(v), J^{q}y(v)) - h(v, x(v), J^{q}x(v))\right| dvduds.
\end{gathered}\right]$$

D'après (HD_1), nous avons pour chaque $t \in I$:

$$\left[\begin{gathered}
|\Phi y(t) - \Phi x(t)| \le |k| \, W_1 D^{\alpha} \|y - x\|_{\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+ |k| \, W_1 D^{\alpha} \|y - x\|_{\infty} |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+ \left(W_2 \|y - x\|_{\infty} + W_3 D^{p} \|y - x\|_{\infty}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+ \left(W_2 \|y - x\|_{\infty} + W_3 D^{p} \|y - x\|_{\infty}\right) |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+ \left(W_4 \|y - x\|_{\infty} + W_5 J^{q} \|y - x\|_{\infty}\right) \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+ \left(W_4 \|y - x\|_{\infty} + W_5 J^{q} \|y - x\|_{\infty}\right) |B_1| \, t^{\alpha+\beta} \left(\int_0^1 \frac{(t-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds\right).
\end{gathered}\right]$$

Alors,

$$\left[\begin{gathered}
\sup_{t\in I} |\Phi y(t) - \Phi x(t)| \le |k| \, W_1 \|D^{\alpha}y - D^{\alpha}x\|_{\infty} \left[\sup_{t\in I} \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t\in I} \frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\
+ (W_2 + W_3) \|y - x\|_{\infty} \left[\sup_{t\in I} \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t\in I} \frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\
W_4 \|y - x\|_{\infty} \left[\sup_{t\in I} \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + |B_1| \sup_{t\in I} \frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] + \\
+ W_5 \|y - x\|_{\infty} \left[\sup_{t\in I} \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma+q}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+q+1)} + |B_1| \sup_{t\in I} \frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma+q}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right].
\end{gathered}\right]$$

Par conséquent, on obtient:

$$\sup_{t\in I}|\Phi y(t)-\Phi x(t)|\leq\left[\begin{array}{c}(|k|\,W_1+W_2+W_3+W_4)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}+|B_1|\,\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right]\\ +W_5\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+q+1)}+|B_1|\,\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right]\end{array}\right]\|y-x\|_Z\,.$$

D'où, $\|\Phi y-\Phi x\|_\infty\leq T_1\,\|y-x\|_Z\,.$

B: Soient $x,y\in Z$, alors on a:

$$\left[\begin{array}{c}\|D^\alpha\Phi y-D^\alpha\Phi x\|_\infty\leq(|k|\,W_1)\,\|D^\alpha y-D^\alpha x\|_\infty\left[\sup_{t\in I}\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+|B_5|\sup_{t\in I}\frac{t^{2\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right]\\ +(W_2\,\|y-x\|_\infty+W_3\,\|D^p y-D^p x\|_\infty)\left[\sup_{t\in I}\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+|B_5|\sup_{t\in I}\frac{t^{2\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right]\\ +(W_4\,\|y-x\|_\infty+W_5\,\|J^q y-J^q x\|_\infty)\left[\sup_{t\in I}\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+|B_5|\sup_{t\in I}\frac{t^{2\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right]\end{array}\right].$$

Par conséquent,

$$\|D^\alpha\Phi y-D^\alpha\Phi x\|_\infty\leq\left(\begin{array}{c}(|k|\,W_1+W_2+W_3+W_4)\left[\begin{array}{c}\sup_{t\in I}\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}\\ +|B_5|\sup_{t\in I}\frac{t^{2\alpha+2\beta+\gamma}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\end{array}\right]\\ W_5\left[\begin{array}{c}\sup_{t\in I}\frac{t^{\beta+\gamma+q}}{\Gamma(\beta+\gamma+q+1)}\\ +|B_5|\sup_{t\in I}\frac{t^{2\alpha+2\beta+\gamma+q}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\end{array}\right]\end{array}\right)\|y-x\|_\infty\,.$$

Donc,

$$\|D^\alpha\Phi y-D^\alpha\Phi x\|_\infty\leq\left(\begin{array}{c}(|k|\,W_1+W_2+W_3+W_4)\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}+\frac{|B_5|}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right]\\ +W_5\left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\gamma+q+1)}+|B_5|\,\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right]\end{array}\right)\|y-x\|_Z\,.$$

Ainsi, $\|D^\alpha\Phi y-D^\alpha\Phi x\|_\infty\leq T_2\,\|y-x\|_Z\,.$

C: D'autre part, si $x,y\in Z$, alors on peut obtenir:

$$\left[\begin{array}{l} \left\| D^{p}\Phi y-D^{p}\Phi x\right\|_{\infty}\leq \left| k\right| \int\limits_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|\begin{array}{c} f(v,D^{\alpha}y(v))- \\ f(v,D^{\alpha}x(v)) \end{array}\right| dvduds \\ \\ +\left| k\right| \left| B_{1}B_{8}\right| \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|\begin{array}{c} f(v,D^{\alpha}y(v))- \\ f(v,D^{\alpha}x(v)) \end{array}\right| dvduds\right] t^{\alpha+\beta-p} \\ \\ +\int\limits_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|\begin{array}{c} g(v,y\left(v\right),D^{p}y(v))- \\ g(v,x\left(v\right),D^{p}x(v)) \end{array}\right| dvduds \\ \\ +\left| B_{1}B_{8}\right| \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|\begin{array}{c} g(v,y\left(v\right),D^{p}y(v))- \\ g(v,x\left(v\right),D^{p}x(v)) \end{array}\right| dvduds\right] t^{\alpha+\beta-p} \\ \\ +\int\limits_{0}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|\begin{array}{c} h(v,y\left(v\right),J^{q}y(v))- \\ h(v,x\left(v\right),J^{q}x(v)) \end{array}\right| dvduds \\ \\ +\left| B_{1}B_{8}\right| \left[\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|\begin{array}{c} h(v,y\left(v\right),J^{q}y(v))- \\ h(v,x\left(v\right),J^{q}x(v)) \end{array}\right| dvduds\right] t^{\alpha+\beta-p} \end{array}\right]$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \left\| D^{p}\Phi y-D^{p}\Phi x\right\|_{\infty}\leq \left(\left| k\right| W_{1}\right)\left\| D^{\alpha}y-D^{\alpha}x\right\|_{\infty}\left(\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-p}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)}+\left| B_{1}B_{8}\right| \sup_{t\in I}\frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma-p}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right) \\ \\ +\left(W_{2}\left\| y-x\right\|_{\infty}+W_{3}\left\| D^{p}y-D^{p}x\right\|_{\infty}\right)\left(\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-p}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)}+\left| B_{1}B_{8}\right| \sup_{t\in I}\frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma-p}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right) \\ \\ +\left(W_{4}\left\| y-x\right\|_{\infty}+W_{5}\left\| J^{q}y-J^{q}x\right\|_{\infty}\right)\left(\sup_{t\in I}\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-p}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)}+\left| B_{1}B_{8}\right| \sup_{t\in I}\frac{t^{3\alpha+2\beta+\gamma-p}}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right). \end{array}\right]$$

Par conséquent, on obtient:

$$\left\| D^{p}\Phi y-D^{p}\Phi x\right\|_{\infty}\leq \left(\begin{array}{c} \left(\left| k\right| W_{1}+W_{2}+W_{3}+W_{4}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)}+\frac{\left| B_{1}B_{8}\right| }{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\ +W_{5}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+q-p+1)}+\frac{\left| B_{1}B_{8}\right| }{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+q+1)}\right] \end{array}\right)\left\| y-x\right\|_{Z}.$$

Donc,

$$\left\| D^{p}\Phi y-D^{p}\Phi x\right\|_{\infty}\leq T_{3}\left\| y-x\right\|_{Z}.$$

Grâce aux trois étapes ci-dessus, nous pouvons conclure que:

$$\| \Phi x - \Phi y \|_Z \leq T \| x - y \|_Z .$$

D'après le principe de contraction de Banach on conclut que Φ admet un point fixe unique, ce qui permet de dire que le problème de type Duffing (2) admet une solution unique sur I. □

3.2.2 Des solutions au moins

Le deuxième résultat est basé sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théorème 3.4. *[76]Supposons que les hypothèses* (HD_2)*et* (HD_3) *sont satisfaites. Alors le problème de type Duffing (2) admet au moins une solution sur* I*.*

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que Φ défini par (3.5) admet des points fixes qui sont des solutions de problème de type Duffing (2).

La preuve sera donnée en quatre étapes.

Etape1: Continuité de Φ sur Z :

Φ est un opérateur continu sur Z puisque les fonctions $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $L : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues (hypothèse(HD_2)).

Etape2: Nous montrons maintenant que l'opérateur Φ est uniformément bornèe sur Z.

En effet, il suffit de montrer que l'image d'un ensemble borné est un ensemble borné.

Supposons que $r > 0$ et considérons $Br := \{z \in Z; \|z\|_Z \leq r\}$.

Ainsi, pour chaque $y \in Br$, on a:

$$\left[\begin{array}{c}
\|\Phi y\|_{\infty} \leq E_L \sup_{t\in I} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+\left|B_1\right| E_L \sup_{t\in I} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \right) t^{\alpha+\beta} \\
+\left|k\right| E_f \sup_{t\in I} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+\left|B_1\right| \left|k\right| E_f \sup_{t\in I} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \right) t^{\alpha+\beta} \\
+E_g \sup_{t\in I} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+\left|B_1\right| E_g \sup_{t\in I} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \right) t^{\alpha+\beta} \\
+E_h \sup_{t\in I} \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\
+\left|B_1\right| E_h \sup_{t\in I} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \right) t^{\alpha+\beta} \\
\|\Phi y\|_{\infty} \leq \left[E_L + \left|k\right| E_f + E_g + E_h\right] \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+\beta+1)} + \left|B_1\right| \frac{1}{\Gamma(2\alpha+\gamma+\beta+1)}\right] < +\infty.
\end{array}\right]$$

Nous avons donc:

$$\|\Phi y\|_{\infty} \leq \left(\left[E_L + \left|k\right| E_f + E_g + E_h\right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+\beta+1)} \\ \\ +\left|B_1\right| \frac{1}{\Gamma(2\alpha+\gamma+\beta+1)} \end{array}\right] \right) < +\infty. \tag{3.6}$$

Aussi, on a:

$$\left[\begin{array}{c} \|D^{\alpha}\Phi y\|_{\infty}=\sup_{t\in I}|D^{\alpha}\Phi y(t)|\leq \sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|L(u)|\,duds \\ +|k|\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|f(u,D^{\alpha}y(u))|\,duds \\ +\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|g(u,y(u),D^{p}y(u))|\,duds \\ +\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|h(v,y(v),J^{q}(y(v)))|\,duds \\ +|B_5|\sup_{t\in I}t^{\beta}\left(\begin{array}{c} \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|L(u)|\,dvduds \\ +|k|\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|f(v,D^{\alpha}y(v))|\,dvduds \\ +\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|g(u,y(u),D^{p}y(u))|\,dvduds \\ +\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}|h(v,y(v),J^{q}(y(v)))|\,dvduds \end{array}\right) \\ +|B_6A_2+B_7A_1-B_5A_3|+|A_2| \end{array}\right]$$

Par conséquent,

$$\|D^{\alpha}\Phi y\|_{\infty}\leq\left(\begin{array}{c} [E_L+|k|\,E_f+E_g+E_h]\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\beta+1)}+|B_5|\,\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\gamma+\beta+1)}\right] \\ \\ +|B_6A_2+B_7A_1-B_5A_3|+|A_2| \end{array}\right)<+\infty. \quad (3.7)$$

D'autre part, on peut montrer que:

$$\left[\begin{array}{c} \left\|D^p\Phi y\right\|_\infty = \sup_{t\in I}\left|D^p\Phi y(t)\right| \leq \sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|L(v)\right| dvduds \\ +\left|k\right|\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|f(v,D^\alpha x(v))\right| dvduds \\ +\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|g(v,x(v),D^p x(v))\right| dvduds \\ +\sup_{t\in I}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left|h(v,x(v),J^q(x(v)))\right| dvduds \\ +\left|B_1B_8\right|\sup_{t\in I} t^{\alpha+\beta-p}\left(\begin{array}{c} \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|L(v)\right| dvduds \\ +\left|k\right|\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|f(v,D^\alpha x(v))\right| dvduds \\ +\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|g(v,x(v),D^p x(v))\right| dvduds \\ +\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left|h(v,x(v),J^q(x(v)))\right| dvduds \end{array}\right) \\ +\left|B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right|+\left|B_4B_9A_2\right|. \end{array}\right]$$

Par conséquent, il peut en résulter que:

$$\left\|D^p\Phi y\right\|_\infty \leq \left(\begin{array}{c} \left[E_L+\left|k\right|E_f+E_g+E_h\right]\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)} \\ \\ +\left|B_1B_8\right|\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)} \end{array}\right] \\ \\ +\left|B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right|+\left|B_4B_9A_2\right| \end{array}\right) < +\infty. \quad (3.8)$$

Ainsi, grâce à (3.6),(3.7) et (3.8) on peut conclure que Φ est uniformément bornèe sur B_r.

Etape3: On montre que Φ est équicontinue dans Z :

Soient $t_1, t_2 \in I = [0,1]$, tel que $t_1 < t_2$ et soit B_r l'ensemble borné ci-dessus de Z.

Alors pour $y \in B_r$ et pour chaque $t \in I$, on a:

$$\left[\Phi y\left(t_1\right)-\Phi y\left(t_2\right)\leq\begin{pmatrix}E_L+\\ \left|k\right|E_f+\\ E_g+E_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\\ -B_1t_1^{\alpha+\beta}\int\limits_0^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\\ -\left(B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right)t_1^{\alpha+\beta}+B_4A_2t_1^{\alpha}+A_1\\ \\ -\int\limits_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\\ +B_1t_2^{\alpha+\beta}\int\limits_0^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\\ +\left(B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right)t_2^{\alpha+\beta}-B_4A_2t_2^{\alpha}+A_1\end{pmatrix}\right]$$

ce qui implique

$$\left[\begin{array}{c}\left|\Phi y\left(t_1\right)-\Phi y\left(t_2\right)\right|\leq\begin{pmatrix}E_L+\\ \left|k\right|E_f+\\ E_g+E_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int\limits_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\\ \\ +\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\end{pmatrix}\\ +\left(\frac{|B_1|}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}+\left|B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right|\right)\left|t_1^{\alpha+\beta}-t_2^{\alpha+\beta}\right|+\left|B_4A_2\right|\left|t_1^{\alpha+\beta}-t_2^{\alpha+\beta}\right|\end{array}\right] \tag{3.9}$$

Ainsi, on peut écrire:

$$\left[\begin{array}{c} D^{\alpha}\Phi y(t_1) - D^{\alpha}\Phi y(t_2) = \\ \left(\begin{array}{c} \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(u) - kf(u, D^{\alpha}y(u)) \\ -g(u, y(u), D^{p}y(u)) \\ -h(u, y(u), J^{q}(y(u))) \end{array}\right] duds- \\ B_5 t_1^{\beta} \int\limits_0^{1} \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v)- \\ kf(v, D^{\alpha}y(v))- \\ g(v, y(v), D^{p}y(v))- \\ h(v, y(v), J^{q}(y(v))) \end{array}\right] dvduds \\ + \left(B_6A_2 + B_7A_1 - B_5A_3\right) t_1^{\beta} + A_2 \end{array}\right) \\ - \left(\begin{array}{c} \int\limits_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(u) - kf(u, D^{\alpha}y(u)) \\ -g(u, y(u), D^{p}y(u)) \\ -h(u, y(u), J^{q}(y(u))) \end{array}\right] duds- \\ B_5 t_2^{\beta} \int\limits_0^{1} \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v) - kf(v, D^{\alpha}y(v)) \\ -g(v, y(v), D^{p}y(v)) \\ -h(v, y(v), J^{q}(y(v))) \end{array}\right] dvduds \\ + \left(B_6A_2 + B_7A_1 - B_5A_3\right) t_2^{\beta} + A_2 \end{array}\right) \end{array}\right]$$

alors

$$\left[\begin{array}{c} \left|D^{\alpha}\Phi y(t_1) - D^{\alpha}\Phi y(t_2)\right| = \\ \left(E_L + |k|\, E_f + E_g + E_h\right) \left(\begin{array}{c} \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} duds \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} duds \end{array}\right) \\ + \left(\begin{array}{c} \left(E_L + |k|\, E_f + E_g + E_h\right) |B_5| \int\limits_0^{1} \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} dvduds \\ + \left|B_6A_2 + B_7A_1 - B_5A_3\right| \end{array}\right) \left|t_1^{\beta} - t_2^{\beta}\right| \end{array}\right]$$

D'autre part,

$$\left[\begin{array}{c} D^p\Phi y(t_1) - D^p\Phi y(t_2) = \\ \int\limits_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} \left[\begin{array}{c} L(v)- \\ kf(v, D^\alpha y(v))- \\ g(v, y(v), D^p y(v))- \\ h(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array}\right] dvduds \\ \\ -\int\limits_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)} \left[\begin{array}{c} L(v)- \\ kf(v, D^\alpha y(v))- \\ g(v, y(v), D^p y(v))- \\ h(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array}\right] dvduds \\ \\ -\left(\begin{array}{c} B_1B_8 \left[\int\limits_0^{1} \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v)- \\ kf(v, D^\alpha y(v))- \\ g(v, y(v), D^p y(v))- \\ h(v, y(v), J^q(x(v))) \end{array}\right] dvduds\right] t_1^{\alpha+\beta-p} \\ \\ -B_1B_8 \left[\int\limits_0^{1} \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^{s} \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{u} \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v)- \\ kf(v, D^\alpha y(v))- \\ g(v, y(v), D^p y(v))- \\ h(v, y(v), J^q(x(v))) \end{array}\right] dvduds\right] t_2^{\alpha+\beta-p} \end{array}\right) \\ \\ -\left(\left[B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3\right] B_8 t_1^{\alpha+\beta-p} - \left[B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3\right] B_8 t_2^{\alpha+\beta-p}\right) \\ +\left(B_4B_9A_2t_1^{\alpha-p} - B_4B_9A_2t_2^{\alpha-p}\right). \end{array}\right]$$

$\square$

$$\left[\begin{array}{c}
\left|D^{p}\Phi y(t_{1})-D^{p}\Phi y(t_{2})\right|= \\
\begin{pmatrix} E_{L}+ \\ \left|k\right|E_{f}+ \\ E_{g}+E_{h}\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c}\int\limits_{0}^{t_{1}}\frac{\left|(t_{1}-s)^{\alpha-1}-(t_{2}-s)^{\alpha-1}\right|}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}dvduds \\ +\int\limits_{t_{1}}^{t_{2}}\frac{(t_{2}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}dvduds\end{array}\right) \\
+\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix} E_{L}+ \\ \left|k\right|E_{f}+ \\ E_{g}+E_{h}\end{pmatrix}\left|B_{1}B_{8}\right|\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_{0}^{s}\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_{0}^{u}\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}dvduds\right] \\ +\left|B_{2}A_{2}+B_{3}A_{1}-B_{1}A_{3}\right|\left|B_{8}\right|\end{array}\right)\left|t_{1}^{\alpha+\beta-p}-t_{2}^{\alpha+\beta-p}\right| \\
+\left|B_{4}B_{9}A_{2}\right|\left|t_{1}^{\alpha-p}-t_{2}^{\alpha-p}\right|
\end{array}\right]$$

Lorsque $t_1 \rightarrow t_2$, le second membre de l'inégalité précédent tend vers zéro. Ainsi, grâce aux trois étapes ci-dessus, on peut conclure que Φ est équicontinu.

et d'après le théorème d'Ascolli Arzella, Φ est un opérateur complètement continu.

Etape4: On montre que l'ensemble $W := \{z \in Z : z = \eta\Phi(z), 0 < \eta < 1\}$ est borné.

Soit $y \in W$, pour certain $0 < \eta < 1$, on a $y = \eta\Phi(y)$. On a donc:

$$\left\|y\right\|_{\infty} \leq \eta\left(\left[E_L + |k|\,E_f + E_g + E_h\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma+\beta+1)} + |B_1|\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\gamma+\beta+1)}\right]\right)$$

De la même manière, on peut montrer que:

$$\left\|D^{\alpha}\Phi y\right\|_{\infty} \leq \eta\left(\begin{array}{c}\left[E_L + |k|\,E_f + E_g + E_h\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + |B_5|\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\gamma+\beta+1)}\right] \\ +\left|B_6A_2 + B_7A_1 - B_5A_3\right| + |A_2|\,.\end{array}\right)$$

Preuve. Egalement, on a:

$$\left\|D^{p}\Phi y\right\|_{\infty} \leq \eta\left(\begin{array}{c}\left[E_L + |k|\,E_f + E_g + E_h\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-p+1)} + |B_1B_8|\frac{1}{\Gamma(2\alpha+\beta+\gamma+1)}\right] \\ +\left|B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3\right| + \left|B_4B_9A_2\right|\end{array}\right)$$

Grâce à (3.6), (3.7) et (3.8), on peut en déduire $\left\|y\right\|_Z < \infty$. Cela montre que W est borné.

En conséquence du théorème de point fixe de Schaefer, on déduit que Φ admet des points fixes qui sont des solutions du problème de type Duffing (2). $\square$

3.3 Validation des résultats théoriques

Exemple 3.5. *On considère le problème aux limites de type Duffing suivant:*

$$\begin{cases} D^{0.71}D^{0.69}D^{0.61}z(t) + 0.08f\big(t, D^{0.61}z(t),\big) \\ +g\big(t, z(t), D^{0.5}z(t)\big) + h\big(t, z(t), J^{0.4}z(t)\big) = L(t), \\ z(0) = \pi + \sqrt{2}, D^{0.61}z(0) = -1, J^{0.61}z(1) = \frac{2}{23}.t \in [0,1]\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

On a:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.61, \quad \beta = 0.69, \quad \gamma = 0.71, \\ k &= 0.08, \quad p = 0.5 \quad q = 0.4. \end{aligned}$$

et en choisissant:

$$\begin{aligned} f(t, a_1) &= \frac{\cos(3+t^2)}{\sqrt{1+t^3}} + \frac{4}{9}a_1, \\ g(t, a_1, a_2) &= \frac{\sin(2+t)}{\sqrt{6+t^3}} + \frac{1}{8}a_1 + \frac{6}{998}a_2, \\ h(t, a_1, a_2) &= \frac{1}{80+t^4} + \frac{\sqrt{2\pi-3}}{5}a_1 + \frac{6}{71}a_2, \\ L(t) &= \frac{2t+3}{7}. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$ et pour $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} |f(t, a_1) - f(t, b_1)| &\leq \frac{4}{9}|a_1 - b_1|, \\ |g(t, a_1, a_2) - g(t, b_1, b_2)| &\leq \frac{1}{8}|a_1 - b_1| + \frac{6}{998}|a_2 - b_2|, \\ |h(t, a_1, a_2) - h(t, b_1, b_2)| &\leq \frac{\sqrt{2\pi-3}}{5}|a_1 - b_1| + \frac{6}{71}|a_2 - b_2|. \end{aligned}$$

Puisque,

$$W_1 = \frac{4}{9}, \quad W_2 = \frac{1}{8}, \quad W_3 = \frac{6}{998}, \quad W_4 = \frac{\sqrt{2\pi-3}}{5}, \quad W_5 = \frac{6}{71}.$$

Alors

$$T_1 = 0.531\,60, \quad T_2 = 0.786\,97, \quad T_3 = 0.670\,76.$$

On trouve donc:

$$T = \max(T_1, T_2, T_3) = 0.786\,97 < 1.$$

Puisque l'hypothèse de théorème 3.3 est satisfaite, alors le problème de type Duffing (3.10) admet une solution unique sur $[0,1]$.

Exemple 3.6. *On considère le deuxième problème aux limites de type Duffing suivant:*

$$\begin{cases} D^{0.70}D^{0.58}D^{0.73}z(t) + 0.11f\big(t, D^{0.73}z(t),\big) \\ +g\big(t, z(t), D^{0.6}z(t)\big) + h\big(t, z(t), J^{0.55}z(t)\big) = L(t), \\ z(0) = 3\pi - \sqrt{2}, D^{0.73}z(0) = -1, J^{0.73}z(1) = \frac{5}{18}, t \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.11}$$

En choisissant:

$$\begin{cases} f(t, a_1) = \frac{e^{-3t}}{1+2ta_1^2}, \\ g(t, a_1, a_2) = \frac{\cos(a_1 a_2)}{5+t^2(a_1+a_2)^2}, \\ h(t, a_1, a_2) = \frac{\sin(a_1+a_2)}{\left(\sqrt{2+\pi}+e^{3t}\right)^2}, \\ L(t) = \frac{t+3}{8}. \end{cases}.$$

Il est facile de voir que:

$$\begin{aligned} |f(t, a_1)| &\leq 1 = E_f, \quad |g(t, a_1, a_2)| \leq \frac{1}{5} = E_g, \\ |h(t, a_1, a_2)| &\leq \frac{1}{2+\pi} = E_h \quad \|L(t)\|_\infty = \frac{1}{2} = E_L. \end{aligned}$$

Puisque toutes les hypothèses de théorème 3.4 sont satisfaites, alors le problème (3.11) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

3.4 Etude de stabilité

Dans cette section, nous continuons l'étude du problème de type Duffing (2) en étudiant la stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers généralisée.

Soient $I := [0,1], 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, 1 < \alpha + \beta \leq 2, 1 < \beta + \gamma \leq 2$, ϵ un nombre réel positif et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $h : I \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions données.

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante:

$$D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t))+kf(t,D^{\alpha}z(t))+g(t,z(t),D^{p}z(t))+h(t,z(t),J^{q}(z(t)))=L(t),t\in I \quad (3.12)$$

et les inéquations différentielles fractionnaires suivantes:

$$\left|D^{\gamma}D^{\beta}D^{\alpha}z(t))+kf(t,D^{\alpha}z(t))+g(t,z(t),D^{p}z(t))+h(t,z(t),J^{q}(z(t)))-L(t)\right|\leq\epsilon,t\in I. \quad (3.13)$$

Afin de faciliter les preuves des principaux résultats de cette section, on pose:

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{l}
\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\begin{bmatrix} L(v)-kf(v,D^{\alpha}x(v))- \\ g(v,x(v),D^{p}x(v))- \\ h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{bmatrix}dvduds \\
-B_1\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\left(\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\begin{bmatrix} L(v) \\ -kf(v,D^{\alpha}x(v))- \\ g(v,x(v),D^{p}x(v))- \\ h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{bmatrix}dv\right)du\right)ds\right]t^{\alpha+\beta} \\
-\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\begin{bmatrix} L(v) \\ -kf(v,D^{\alpha}y(v))- \\ g(v,y(v),D^{p}y(v))- \\ h(v,y(v),J^{q}(y(v)))\end{bmatrix}dvduds \\
+B_1\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\left(\int\limits_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(\int\limits_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\begin{bmatrix} L(v) \\ -kf(v,D^{\alpha}y(v))- \\ g(v,y(v),D^{p}y(v))- \\ h(v,y(v),J^{q}(y(v)))\end{bmatrix}dv\right)du\right)ds\right]t^{\alpha+\beta}
\end{array}\right|$$

$$Q_1=\left|\begin{array}{c} x(t)-\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u\frac{(u-v)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\begin{array}{c} L(v)\\ -kf(v,D^{\alpha}x(v))-\\ g(v,x(v),D^{p}x(v))-\\ h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{array}\right]dvduds\\ +B_1\left[\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\left(\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(\int\limits_0^u\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left[\begin{array}{c} L(v)\\ -kf(v,D^{\alpha}x(v))-\\ g(v,x(v),D^{p}x(v))-\\ h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{array}\right]dv\right)du\right)ds\right]t^{\alpha+\beta}\\ \left[B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right]t^{\alpha+\beta}-B_4A_2t^{\alpha}-S_1,\end{array}\right|$$

$$Q2=\left|\begin{array}{c} D^{\alpha}x(t)-\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left[\begin{array}{c} L(u)\\ -kf(u,D^{\alpha}x(u))-\\ g(u,x(u),D^{p}x(u))-h(u,x(u),J^{q}(x(u)))\end{array}\right]duds\\ \\ +B_5t^{\beta}\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left[\begin{array}{c} L(v)\\ -kf(v,D^{\alpha}x(v))-\\ g(v,x(v),D^{p}x(v))-h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{array}\right]dvduds\\ \\ -\left(B_6A_2+B_7A_1-B_5A_3\right)t^{\beta}-A_2\end{array}\right|$$

et

$$Q3=\left|\begin{array}{c} D^{p}x(t)-\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u\frac{(u-v)^{\gamma-p-1}}{\Gamma(\gamma-p)}\left[\begin{array}{c} L(v)-kf(v,D^{\alpha}x(v))\\ -g(v,x(v),D^{p}x(v))\\ -h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{array}\right]dvduds\\ \\ +B_1B_8\left[\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^s\frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^u\frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left[\begin{array}{c} L(v)-kf(v,D^{\alpha}x(v))\\ -g(v,x(v),D^{p}x(v))\\ -h(v,x(v),J^{q}(x(v)))\end{array}\right]dvduds\right]t^{\alpha+\beta-p}\\ \\ +\left[B_2A_2+B_3A_1-B_1A_3\right]B_8t^{\alpha+\beta-p}-B_4B_9A_2t^{\alpha-p}.\end{array}\right|$$

Définition 3.7. *Le problème de type Duffing (2) est stable au sens d'Ulam-Hyers, s'il existe un nombre réel $A > 0$, telle que pour chaque $\epsilon > 0$,pour tout $t \in I$, et pour toute $x \in Z$ solution de l'inéquation (3.13), il existe une solution $y \in Z$ de l'équation (3.12), (avec les mêmes conditions qu'au problème de type Duffing (2), tel que:*

$$\|x(t) - y(t)\|_Z \leq A\epsilon, t \in I.$$

Définition 3.8. *Le problème de type Duffing (2) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée, s'il existe une fonction croissante $N \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $N(0) = 0$, telle que pour tout $\epsilon > 0$, et pour toute $x \in Z$ solution de l'inéquation (3.13) il existe une solution $y \in Z$ de l'équation (3.12), (avec les mêmes conditions qu'au problème de type Duffing (2), tel que:*

$$\|x(t) - y(t)\|_Z \leq N(\epsilon), t \in I$$

Théorème 3.9. *On suppose que les hypothèses du théorème 3.3 sont vérifiées. Alors, le problème de type Duffing (2) est stable au sens d'Ulam-Hyers dans Z.*

Preuve. Soit $x \in Z$ une solution de l'inégalité (3.13). Alors, on a:

$$Q_1 \leq \frac{\epsilon t^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}.$$

Grâce aux hypothèses du théorème 3.3, il existe une solution unique du problème de type Duffing(2), donné par:

$$y(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v) - kf(v, D^\alpha y(v)) - \\ g(v, y(v), D^p y(v)) - \\ h(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array}\right] dvduds$$

$$-B_1 \left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} \left(\int_0^s \frac{(s-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^u \frac{(u-v)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left[\begin{array}{c} L(v) - kf(v, D^\alpha y(v)) - \\ g(v, y(v), D^p y(v)) - \\ h(v, y(v), J^q(y(v))) \end{array}\right] dv\right) du\right) ds\right] t^{\alpha+\beta}$$

$$- [B_2A_2 + B_3A_1 - B_1A_3]\, t^{\alpha+\beta} + B_4A_2t^\alpha + A_1.$$

Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, on a: $$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\epsilon t^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \Delta_1$$

ce qui implique que:

$$\|x - y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + T_1\|x - y\|_Z. \tag{3.14}$$

Par conséquent, on peut écrire que:

$$Q_2 \leq \frac{\epsilon t^{\beta+\gamma}}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}.$$

Aussi, on peut montrer que:

$$\|D^\alpha x - D^\alpha y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} + T_2\|x-y\|_Z. \tag{3.15}$$

De même, nous avons:

$$Q_3 \leq \frac{\epsilon t^{\alpha+\beta+\gamma-P}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-P+1)},$$

ainsi que:

$$\|D^p x - D^p y\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-P+1))} + T_3\|x-y\|_Z. \tag{3.16}$$

En utilisant (3.14),(3.15) et (3.16), on a:

$$\|x-y\|_Z \leq \max\left(\frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-P+1))}\right) + T\|x-y\|_Z.$$

Donc, $$\|x-y\|_Z \leq \left[\frac{\max\left(\frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-P+1))}\right)}{1-T}\right]\epsilon.$$

Il existe alors, un nombre réel $$A = \frac{\max\left(\frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}, \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right)}{1-M} > 0.$$

Par conséquent, le problème de type Duffing (2) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

□

Corollaire 3.10. *On suppose que les hypothèses du théorème 3.9 sont vérifiées. Alors, le probleme de type Duffing (2) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée.*

Exemple 3.11. *On considère le problème de type Duffing suivant:*

$$\begin{cases} D^{0.56}D^{0.74}D^{0.68}z(t)) + (2.02)\, f(t, D^{0.68}z(t)) + g(t, z(t), D^{0.51}z(t)) + h(t, z(t), J^{1.3}(z(t))) = L(t), \\ z(0) = 100 \in \mathbb{R}, D^{0.68}z(0) = 10 \in \mathbb{R}, J^{0.68}z(1) = 1000 \in \mathbb{R}, t \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Dans cet exemple, on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.68, \quad \beta = 0.74, \quad \gamma = 0.56, \quad k = 2.02, \quad p = 0.51, \quad q = 1.3, \\ A_1 &= 100, A_2 = 10, A_3 = 1000. \end{aligned}$$

En choisissant:

$$\begin{aligned} f(t, x_1,) &= \frac{\sin(3-t)}{\exp(t-1)} + \frac{1}{205} x_1, \\ g(t, x_1, x_2) &= \frac{2}{\cos(t)} + \frac{1}{22} x_1 + \frac{8}{63} x_2. \\ h(t, x_1, x_2) &= \frac{Ln(1+t^2)}{2+t} + \frac{4}{19} x_1 + \frac{7}{64} x_2, \\ L(t) &= \frac{1}{4}(t^2 - 1). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que, pour chaque $t \in [0,1]$ *et pour tout* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, y_1)| &\leq \frac{1}{205} |x_1 - y_1|, \\ |g(t, x_1, x_2) - g(t, y_1, y_2))| &\leq \frac{1}{22} |x_1 - y_1| + \frac{8}{63} |x_2 - y_2|, \\ |h(t, x_1, x_2) - h(t, y_1, y_2)| &\leq \frac{4}{19} |x_1 - y_1| + \frac{7}{64} |x_2 - y_2|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$W_1 = \frac{1}{205}, \quad W_2 = \frac{1}{22}, \quad W_3 = \frac{8}{63}, \quad W_4 = \frac{4}{19}, \quad W_5 = \frac{7}{64}.$$

et alors,

$$T_1 = 0.393\,45, \quad T_2 = 0.614\,23, \quad T_3 = 0.525\,08.$$

Par conséquent, on obtient:

$$T = \max(T_1, T_2, T_3) = 0.614\,23 < 1.$$

Il résulte du Théorème 3.9 le problème de type Duffing (3.17) est stable au sens d'Ulam-Hyers. De plus, par le corollaire 3.10, la stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée est obtenue.

CHAPITRE 4

Problème différentiel fractionnaire non linéaire avec dérivée au sens de Caputo-Hadamard

Dans ce chapitre, nous discutons de l'existence et de l'unicité du problème différentiel fractionnaire non linéaire suivant:

$$\begin{cases} {}_H^C D^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = \eta, t \in J = [1, e], \\ x(1) = \eta, x(\theta) = g(x), 1 < \theta < e, 1 < \alpha \leq 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

où ${}_H^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues données.

4.1 Représentation intégrale

Nous présentons ici quelques notations, définitions et lemmes nécessaires qui seront utilisés dans ce chapitre.

Définition 4.1. *Une fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est dite une solution du problème (3) si x satisfait l'équation:*

$$ {}_H^C D^\alpha x(t) + f(t, x(t)) = \eta. \tag{4.2}$$

sous les conditions:

$$\begin{cases} x(1) = \eta, x(\theta) = g(x), \\ 1 < \theta < e, 1 < \alpha \leq 2, \\ t \in J = [1, e]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Lemme 4.2. *[40, 42] Soit $\alpha > 0$ et $u \in C_\delta^n([a, b], \mathbb{R})$. Alors*

$$ {}_H I^\alpha \left({}_H^C D^\alpha u \right)(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\log t)^i, c_i \in \mathbb{R},$$

où $C_\delta^n([a, b], \mathbb{R}) = \left\{ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R} : \delta^{n-1}\varphi \in C([a, b], \mathbb{R}) \right\}$.

On démontre le lemme suivant qui est important pour établir la solution intégrale du problème (3).

Lemme 4.3. *Soient $f \in C(J)$, $t \in J = [1, e]$, $1 < \alpha \leq 2$. Alors la solution du problème*

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}D^{\alpha}x(t) + f(t, x(t)) = \eta, \ t \in J, \\ x(1) = \eta, \ x(\theta) = g(x), \ 1 < \theta < e, 1 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

est donnée par l'équation intégrale suivante:

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta \left[\frac{(\log t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\log t}{\log \theta} \left(\frac{(\log \theta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) + 1 \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds + \frac{\log t}{\log \theta} g(x) \\ &\quad + \frac{\log t}{\log \theta \Gamma(\alpha)} \int_1^{\theta} (\log \frac{\theta}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Preuve. En appliquons le lemme 4.2, la solution générale de l'équation (4.2) est donnée par:

$$x(t) = \eta \frac{(\log t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds + c_0 + c_1 \log(t), \tag{4.5}$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1$.

En utilisant les conditions (4.3), on trouve:

$$c_0 = \eta \ \text{ et } c_1 = \frac{1}{\log \theta} \left[g(x) - \eta \left(\frac{(\log \theta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\theta} (\log \frac{\theta}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, x(s))}{s} ds \right].$$

En remplaçant c_0 et c_1 dans (4.5) on obtient l'équation intégrale (4.4) □

Notons par $X = C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J en $\mathbb{R}$ avec la norme: $\|y\|_{\infty} = \sup \{|y(t)| : t \in J = [1, e]\}$.

Soit l'espace $AC_{\delta}^{n}([a, b], \mathbb{R}) = \{h : [a, b] \to \mathbb{R} : \delta^{n-1}h(t) \in AC([a, b], \mathbb{R})\}$,

où $\delta = t\frac{d}{dt}$ est la dériveée d'Hadamard et $AC([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

Alors, nous définissons l'opérateur Φ: $X \to X$ comme suit:

$$\begin{aligned} \Phi y(t) &= \eta \left(\frac{(\log t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\log t}{\log \theta} \left[\frac{(\log \theta)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1 \right] + 1 \right) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds \\ &\quad + \frac{\log t}{\Gamma(\alpha) \log \theta)} \int_1^{\theta} (\log \frac{\theta}{s})^{\alpha-1} \frac{f(s, y(s))}{s} ds + \frac{\log t}{\log \theta} g(y). \end{aligned}$$

De plus, nous considérons les hypothèses suivantes:

(A1): Il existe des constantes positives k_1 et k_2 telle que pour chaque $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq k_1 |x-y|, \\ |g(x) - g(y)| &\leq k_2 |x-y|. \end{aligned}$$

(A2): La fonction $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(A3): Il existe une constante $M > 0$ telle que pour chaque $t \in J, u \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,u)| \leq M.$$

(A4): La fonction g satisfait $\|g\|_\infty = L$.

Maintenant, nous présentons nos principaux résultats.

4.1.1 Unicité de solutions

Notre premier résultat principal est donné par le théorème suivant:

Théorème 4.4. *Supposons que $(A1)$ est satisfaite et supposons que: $\frac{k_1(1+\log\theta)}{\Gamma(\alpha+1)\log\theta} + \frac{k_2}{\log\theta} < 1$. Alors le problème (3) admet une solution unique sur J.*

Preuve. En appliquant le principe de contraction de **Banach**. Nous allons montrer que Φ est un opérateur contractant.

Soient $x, y \in X$, alors pour chaque $t \in J$, on a:

$$\begin{aligned} |\Phi(x(t)) - \Phi(y(t))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t\in[1,e]} \int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|}{s} ds \\ &+ \sup_{t\in[1,e]} \left(\frac{\log t}{\Gamma(\alpha)\log\theta}\right) \int_1^\theta (\log\frac{\theta}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|}{s} ds \\ &+ \sup_{t\in[1,e]} \left(\frac{\log t}{\log\theta}\right) |g(x) - g(y)|. \end{aligned}$$

En raison de (A1), on obtient:

$$\begin{aligned} |\Phi x(t) - \Phi y(t)| &\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)} |x-y| + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)\log\theta} |x-y| + \frac{k_2}{\log\theta} |x-y|. \\ &\leq \left[\frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{1}{\log\theta}\right) + \frac{k_2}{\log\theta}\right] |x-y|. \\ &\leq \left[\frac{k_1(1+\log\theta)}{\Gamma(\alpha+1)\log\theta} + \frac{k_2}{\log\theta}\right] |x-y|. \end{aligned}$$

par conséquent on a: $\quad \left\Vert \Phi x-\Phi y\right\Vert _{\infty }\leq \left[\frac{k_{1}\left(1+\log \theta \right) }{\Gamma (\alpha +1)\log \theta }+\frac{k_{2}}{\log \theta }\right] \left\Vert x-y\right\Vert _{\infty }.$

On en déduit que Φ admet un unique point fixe qui est la solution du problème (3). $\square$

4.1.2 Existence de solutions

Notre deuxième résultat principal est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.5. *On suppose que (A2), (A3) et (A4) sont satisfaites. Alors le problème (3) admet au moins une solution sur* $J=\left[1,e\right]$.

Preuve. La démonstration de ce résultat est basée sur l'application du théorème du point fixe de **Schaefer** en suivant quatre étapes.

Etape1: On montre que Φ est un opérateur continu sur X:

Cette étape est triviale (il suffit d'utiliser (A2)).

Etape2: On montre maintenant que Φ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans X.

Soit $Br=\left\{ x\in X:\left\Vert x\right\Vert _{X}\leq r\right\}$. Pour $y\in Br$, on a:

$$\begin{aligned}
\left\vert \Phi y\left(t\right) \right\vert &\leq \left\vert \eta \right\vert \sup_{t\in \lbrack 1,e]}\left[\left\vert \frac{\left(\log t\right) ^{\alpha }}{\Gamma \left(\alpha +1\right) }\right\vert +\left\vert \frac{\log t}{\log \theta }\right\vert \left\vert \frac{\left(\log \theta \right) ^{\alpha }}{\Gamma \left(\alpha +1\right) }+1\right\vert +1\right] \\
&+\sup_{t\in \lbrack 1,e]}\frac{1}{\Gamma (\alpha)}\int_{1}^{t}(\log \frac{t}{s})^{\alpha -1}\frac{\left\vert f\left(s,y\left(s\right) \right) \right\vert }{s}ds \\
&+\sup_{t\in \lbrack 1,e]}\left\vert \frac{\log t}{\log \theta }g\left(y\right) \right\vert +\sup_{t\in \lbrack 1,e]}\left\vert \frac{\log t}{\Gamma (\alpha)\log \theta }\right\vert \int_{1}^{\theta }(\log \frac{\theta }{s})^{\alpha -1}\frac{\left\vert f\left(s,y\left(s\right) \right) \right\vert }{s}ds
\end{aligned}$$

En utilisant (A3) et (A4) , on peut écrire:

$$\left\Vert \Phi y\left(t\right) \right\Vert _{\infty }\leq \left\vert \eta \right\vert \left(\frac{1}{\Gamma \left(\alpha +1\right) }+\frac{1}{\log \theta }\left[\frac{\left(\log \theta \right) ^{\alpha }}{\Gamma \left(\alpha +1\right) }+1\right] +1\right) +\frac{L}{\log \theta }+\frac{M}{\Gamma \left(\alpha +1\right) }\left(1+\frac{1}{\log \theta }\right)$$

donc $\qquad \left\Vert \Phi y\left(t\right) \right\Vert _{\infty }<\infty$

Par conséquent, Φ est uniformément borné sur Br.

Etape3: On prouve que Φ est complètement continu dans X.

Soient $t_{1},t_{2}\in J:t_{1}<t_{2}$ et soit Br un ensemble borné de X. Alors pour $y\in Br$, on peut dire que pour chaque $t\in J$, on a:

$$
\begin{aligned}
\left|\Phi y\left(t_1\right)-\Phi y\left(t_2\right)\right| &= |\eta|\left|\begin{array}{c}\left(\frac{(\log t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{\log t_1}{\log\theta}\left[\frac{(\log\theta)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+1\right]\right)\\ -\left(\frac{(\log t_2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{\log t_2}{\log\theta}\left[\frac{(\log\theta)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+1\right]\right)\end{array}\right|+\left|\frac{\log t_1}{\log\theta}-\frac{\log t_2}{\log\theta}\right|\left|g\left(y\right)\right| \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left[(\log\frac{t_1}{s})^{\alpha-1}-(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\right]\frac{\left|f\left(s,y\left(s\right)\right)\right|}{s}ds \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(\log\frac{t_2}{s})^{\alpha-1}\frac{\left|f\left(s,y\left(s\right)\right)\right|}{s}ds \\
&\quad +\left|\frac{\log t_1}{\Gamma(\alpha)\log\theta}-\frac{\log t_2}{\Gamma(\alpha)\log\theta}\right|\int_1^{\theta}(\log\frac{\theta}{s})^{\alpha-1}\frac{\left|f\left(s,y\left(s\right)\right)\right|}{s}ds
\end{aligned}
$$

Lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$, le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro indépendamment de y. Alors grâce aux trois étapes ci- dessus, on peut conclure que Φ est équicontinu et d'après le théorème **d'Ascolli-Arzella**, Φ est un opérateur complètement continu.

Etape4: Il nous reste maintenant à montrer que l'ensemble.

$E=\{y\in X : y=\lambda\Phi\left(y\right), 0<\lambda<1\}$ est borné dans X.

Soit $y\in E$, alors $y=\lambda\Phi\left(y\right)$ pour $0<\lambda<1$. Comme

$$
\left\|\Phi y\left(t\right)\right\|_\infty \leq |\eta|\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{\log\theta}\left[\frac{(\log\theta)^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+1\right]+1\right)+\frac{L}{\log\theta}+\frac{M}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(1+\frac{1}{\log\theta}\right)
$$

Ainsi, on peut écrire:

$$
\left\|y\right\|_\infty \leq \lambda\left[|\eta|\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{1}{\log\theta}\left[\frac{(\log\theta)^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+1\right]+1\right)+\frac{L}{\log\theta}+\frac{M}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(1+\frac{1}{\log\theta}\right)\right]
$$

Par conséquent $\left\|y\right\|_\infty<\infty$. Cela montre que E est borné.

Grâce au théorème du point fixe de Schaefer, on en déduit que Φ a au moins un point fixe, qui est une solution du problème (3).

□

4.1.3 Exemples illustratifs

Exemple 4.6. *On considère le problème différentiel fractionnaire non linéaire suivant:*

$$
\begin{cases} {}_H^C D^{\frac{5}{3}} x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t\right)\right)=1,\ t\in J=\left[1,e\right], \\ x\left(1\right)=1,\ x\left(\frac{e}{2}\right)=g\left(x\right) \end{cases} \tag{4.6}
$$

On a:

$$\alpha = \frac{5}{3}, \eta = 1, \theta = \frac{e}{2}$$

et en choisissant:

$$\begin{aligned} f\left(t, x\left(t\right)\right) &= \frac{2x\left(t\right) + 1}{e^{t-1} + 14}, \\ g(x) &= \frac{x - 2}{8} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in J = [1, e]$ et pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} \left|f(t, x) - f(t, y)\right| &\leq \frac{1}{7}\left|x - y\right|, \\ \left|g(x) - g(y)\right| &\leq \frac{1}{8}\left|x - y\right| \end{aligned}$$

Puisque,

$$k_1 = \frac{1}{7} \qquad et \qquad k_2 = \frac{1}{8}$$

alors on a:

$$\begin{aligned} \frac{k_1\left(1 + \log\theta\right)}{\Gamma(\alpha+1)\log\theta} + \frac{k_2}{\log\theta} &= \frac{\frac{1}{7}\left(1 + \ln\frac{e}{2}\right)}{\Gamma(\frac{5}{3}+1)\ln\frac{e}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{\ln\frac{e}{2}} \\ &= 0.811\,74 < 1 \end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse du théorème 4.4 est satisfaite, alors le problème (4.6) admet une solution unique sur $J = [1, e]$.

Exemple 4.7. *On considère maintenant le deuxième problème différentiel fractionnaire non linéaire suivant:*

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}D^{\frac{4}{3}}x\left(t\right) + f\left(t, x\left(t\right)\right) = 2,\ t \in J = \left[1, e\right], \\ x\left(1\right) = 2,\ x\left(\frac{2e}{3}\right) = g\left(x\right) \end{cases} \tag{4.7}$$

On a:

$$\alpha = \frac{4}{3}, \eta = 2, \theta = \frac{2e}{3}$$

et en choisissant:

$$\begin{aligned} f\left(t, x\left(t\right)\right) &= \frac{e^{-t^2}}{x^2 + \ln\left(t\right) + 1}, \\ g(x) &= \frac{1}{6 + \cos\left(x\right)} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que:

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &\leq \frac{1}{2}, \\ \|g\|_\infty &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Puisque toutes les hypothèses du théorème 4.5 sont vérifiées, alors le problème (4.7) admet au moins une solution sur $J = [1, e]$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au calcul fractionnaire en présentant l'étude de trois problèmes fractionnaires. Dans la partie 1, nous avons commencé par établir l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel singulier non linéaire de type Lane Emden en appliquant le théorème de point fixe de Schauder et le principe de la contraction de Banach, en utilisant à la fois l'intégrale de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo. Notons que pour le problème singulier étudié, nous nous sommes intéressés à des conditions anti périodiques. Deux exemples illustratifs ont été discutés en détail pour montrer l'applicabilité des résultats obtenus. Ensuite nous avons étudié deux types de concepts de stabilité, la stabilité Hyers-Ulam et la stabilité Hyers-Ulam généralisée.

Dans la deuxième partie, nous avons proposé un nouveau problème fractionnaire de type Duffing. Le problème introduit avec ses paramètres, qui ne satisfont pas les propriétés de commutativité et de semi-groupe, permet notamment d'obtenir la forme standard de l'équation de Duffing. Sous certaines conditions, nous avons prouvé un résultat d'existence et d'unicité, puis sous d'autres conditions suffisantes, nous avons établi un autre résultat qui traite de l'existence d'au moins une solution. Des exemples illustratifs ont également été discutés. Il est à noter que les exemples proposés n'ont ni commutativité ni propriété de semi-groupe pour les trois paramètres de différenciation, mais leur somme est proche de la valeur réelle deux. Ensuite nous avons étudié la stabilité Hyers-Ulam et celle de Hyers-Ulam généralisée pour le problème fractionnaire de type Duffing.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'étude d'un autre problème différentiel non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard. Un résultat sur l'unicité de solution est démontré après avoir déterminé l'équation intégrale équivalente. Puis un autre théorème sur l'existence de solutions est prouvé. et enfin, des exemples sont discutés.

Comme perspective, nos travaux dans le futur seront consacrés à pour les études suivantes:

■ Extension de l'etude du problème intégro-différentiel séquentiel (α, β, γ) de type Lane-Emden.

■ Extension des définitions actuelles et certains résultats similaires sur la stabilité Hyers-Ulam et la stabilité Hyers-Ulam généralisée pour les équations différentielles fractionnaires aléatoires.

■ Analyse qualitative des problèmes traités dans cette thèse.

Références

[1] M.A. Abdellaoui and Z. Dahmani: *Solvability for nonlinear systems of differential equations with two arbitrary orders,* New Zealand Journal of Mathematics, Vol. 46, (2016), Pages 115-128.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Singular boundary value problems for superlinear second order ordinary and delay differential equations*, Journal of Differential Equations, 130 (1996).

[3] R.P. Agarwal, D. ORegan and S. Staněk: *Positive solutions for mixed problems of singular fractional differential equations*, Mathematische Nachrichten., Vol. 285, No. 1, (2012), 27-41.

[4] M.A. Alqudah, P.O. Mohammed and T. Abdeljawad: *Solution of Singular Integral Equations via Riemann–Liouville Fractional Integrals.* Mathematical Problems in Engineering. Volume 2020, Article ID 1250970, 8 pages.

[5] E. Akbari Kojabad, S. Rezapour: *Approximate solutions of a sum-type fractional integro-differential equation by using Chebyshev and Legendre polynomials,* Adv. Differ. Equ. 2017, 351 (2017).

[6] Y. Bahous, Z. Dahmani and Z. Bekkouche: *A two parameter singular fractional differential problem of Lane Emden type,* Turkish J. Ineq., 3 (1) (2019), 35-53.

[7] Z. Bai and W. Sun: *Existence and multiplicity of positive solutions for singular fractional BVPs*, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 63, No. 9, (2012), 1369-1381.

[8] D. Baleanu, K. Ghafarnezhad, S. Rezapour, M. Shabibi: *On the existence of solutions of a three steps crisis integro-differential equation,* Adv. Differ. Equ., 2018, 135, (2018).

[9] D. Baleanu, H. Mohammadi, S. Rezapour: *Some existence results on nonlinear fractional differential equations,* Philos. Trans. R. Soc. Lond. A 371, 20120144, (2013).

[10] S. Bayin: *Mathematical Methods in Science and Engineering.* John Wiley Sons, Inc., 2006. 679 p. ISBN 978-0-470-04142-0.

[11] Z. Bekkouche, Z. Dahmani and G. Zhang: *Solutions and stabilities for a 2D-non homogeneous Lane-Emden fractional system,* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 11, No. 2, (2018), 15-24.

[12] D. Bensikaddour and Z. Dahmani: *Inequalities in fractional integrals.* Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 6, No. 1, March 2013.

[13] A. Benzidane and Z. Dahmani: *A class of nonlinear singular differential equations,* Journal of Interdisciplinary Mathematics 22 (6), (2019), 991-1007.

[14] M. Bezziou, I. Jebril and Z. Dahmani: *A New Nonlinear Duffing System With Sequential Fractional Derivatives,* Chaos, Solitons & Fractals 151(2021), 111247.

[15] P. Bizon, D. Maison and A. Wasserman: *Self-similar solutions of semilinear wave equations with a focusing nonlinearity*, Nonlinearity 20 (2007), 2061-2074.

[16] J.Cao,C.Ma,H.Xie and Z.Jiang: *Nonlinear Dynamics of Duffing System With Fractional Order Damping.*Journal of Computational and Nonlinear Dynamics (2010).Vol. 5, 1003-1009.

[17] S. Chandrasekhar: *An introduction to the study of stellar structure*, Dover, New York, 1967.

[18] H. Chen and Y. Li: *Rate of decay of stable periodic solutions of Duffing equations.* J. Differential Equations, 236:493- 503, 2007.

[19] Z. Dahmani, A. Taieb and N. Bedjaoui: *Solvability and stability for nonlinear fractional integro-differential systems of high fractional orders,* Facta Nis Ser. Math. Inform., Vol. 31, No. 3, (2016), 629-644.

[20] Z. Dahmani and M.A. Abdellaoui: *On a three point boundary value problem of arbitrary order,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, 19 (5-6) (2016), 893-906.

[21] Z. Dahmani and A. Anber: *Two Numerical Methods for Solving the Fractional Thomas-Fermi Equation,* Journal of Interdisciplinary Mathematics 18 (1-2), (2015), 35-41.

[22] Z.Dahmani, M.M. Belhamiti: M.Z. Sarikaya: *A three fractional order Jerk equation with anti periodic conditions.* e. Mathematics (2022),10, 3546.

[23] H.T. Davis: *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations,* Dover, New York, 1962

[24] G. Duffing: Forced Oscillations with Variable Natural Frequency and their Technical Signi- ficance (in German),Vieweg, Braunschschweig, 1918.

[25] R. Emden: *Gaskugeln, Teubner,* Leipzig and Berlin. 1907.

[26] C. L. Ejikeme, M.O. Oyesanya, D. F. Agbebaku, and M. B Okofu: Solution to nonlinear: *Duffing Oscillator with fractional derivatives using Homotopy Analysis Method (HAM).* Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2018, pp. 1363-1388.

[27] S Ferraoun and Z Dahmani: *Existence and stability of solutions of a class of hybrid fractional differential equations involving RL-operator*, Journal of Interdisciplinary Mathematics 23 (4), (2020), 885-903.

[28] A. Goswami, J. Singh, D. Kumar, S. Gupta, Sushila: *An efficient analytical approach for fractional equal width equations describing hydro-magnetic waves in cold plasma,* Phys. A, Stat. Mech. Appl. 524, (2019), 563-575.

[29] Y. Gouari, Z. Dahmani and M.Z. Sarikaya: *A non local multi-point singular fractional integro-differential problem of Lane-Emden type,* Mathematical Methods in the Applied Sciences, Mathematical Methods in the Applied Sciences 43 (11), 6938-6949.

[30] V. Govindan, P. Hammachukiattikul, G. Rajchakit,N. Gunasekaran, and R. Vadive: *A new approach to Hyers-Ulam stability of variable quadratic functional equations*, Journal of Function Spaces, 2021, (2021), 6628733.

[31] A.Granas and J.Dugundji: *Fixed point theory,* Springer-Verlas, New York.2003.

[32] G. Guidarelli, J. Nordhaus, L. Chamandy , Z. Chen , E.G. Blackman, A. Frank, J. Carroll-Nellenback and B. Liu: *Hydrodynamic simulations of disrupted planetary accretion discsinside the core of an AGB star*, MNRAS 490, (2019), 1179-1185.

[33] A.H. Hadian-Rasanan, D. Rahmatic, S. Gorgind, K. Paranda: *A single layer fractional orthogonal neural network for solving various types of Lane Emden equation,* New Astronomy, 75, 101307, (2020), 1-14.

[34] P. Hammachukiattikul, B. Unyong, R. Suresh, G. Rajchakit, R. Vadivel, N. Gunasekaran and Chee Peng Lim: *Runge-Kutta Fehlberg method for solving linear and nonlinear Fuzzy Fredholm integro-differential equations*, Appl. Math. Inf. Sci. 15(1), (2021), 43-51.

[35] M. Houas, Z. Dahmani and M. Benbachir: *New results for a boundary value problem for differential equations of arbitrary order*. International Journal of Modern Mathematical Sciences, 7(2), pp. 195-211, 2013.

[36] R. Hilfer: *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, Sigapore 2000.

[37] Hyers, D.H.: *On the stability of the linear functional equation*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 27, 222–224 (1941).

[38] R.W. Ibrahim: *Stability of a fractional differential equation,* International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering., Vol. 7, No. 3, (2013), 300-305.

[39] R.W. Ibrahim: *Existence of nonlinear Lane-Emden equation of fractional order,* Miskolc Mathematical Notes, Vol. 13, No. 1, (2012), 39-52.

[40] F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad: *Caputo-type modification of the Hadamard:fractional derivatives.* Adv. Differ. Equ. 2012, No.1 (2012),1-8.

[41] A.A.Kilbas, H.M. Srivastava, J.J.Trujillo: *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Elsevier Science B.V, Amsterdam (2006).

[42] AA. Kilbas, AA.Titjura: *Hadamard-type fractional integrals and derivatives.* Tr. Inst. Mat., Minsk 11, 79-87 (2002)

[43] V. Kiryakova: *Generalized Fractional Calculus and Applications.* Pitman Research Notes in Mathematics, 301, Longman, Harlow 1994.

[44] I Kovacic and M.J. Brennan: *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillator and their Behaviours.* JohnWilley, 2011.

[45] D. Kumar, J. Singh, S. Dutt Purohit, R. Swroop: *A hybrid analytical algorithm for nonlinear fractional wave-like equations,* Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 14, 304, (2019).

[46] R.A. Kycia: *Perturbed Lane Emden equations as a boundary value problem with singular endpoints*, Journal of Dynamical and Control Systems Vol. 26, (2020) ,333-347.

[47] J.H. Lane: *Am. J. Sci. Arts.* 50, (1870), 57-59.

[48] J.H. Lane: *On the theoretical temperature of the sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and dependingon the laws of gases Known to Terrestrial Experiment.* The American Journal of Science and Arts, 2nd series 50 (1870).

[49] A. C. Lazer and P. J. McKenna: *On the existence of stable periodic solutions of differential equations of Duffing type.* Proc. Amer. Math. Soc., 110:125-133, 1990.

[50] C. Li, A. Chen, J. Ye: *Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation*, Journal of Computational Physics, Elsevier, 2011.

[51] Y.Q. Lou, J. Esimbek : *Lane-emden equation with inertial force and general polytropic dynamic model for molecular cloud cores,* Mon Not R Astron Soc, 473(2), (2018), 2441-2464.

[52] W.X. Ma, M.M. Mousa, M.R. Ali: *Application of a new hybrid method for solving singular fractional Lane Emden-type equations in astrophysics.* Modern Physics Letters B, 2050049, (2019), 1-15.

[53] R. Magin: *Fractional calculus in Bioengineering.* Begell House Publishers Redding, 2006.

[54] B. Marek, G. Litak, and A. Syta: *Vibration of the duffing oscillator : Effects of fractional damping.* Shock and Vibration, 14:29–36, 2007.

[55] S.M. Mechee and N. Senu: *Numerical Study of Fractional Differential Equations of Lane-Emden Type by Method of Collocation,* Applied Mathematics., Vol. 3, (2012), 851-856.

[56] K.S. Miller and B. Ross: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* Wiley, New York, (1993).

[57] P.O. Mohammed: *A Generalized Uncertain Fractional Forward Difference Equations of Riemann-Liouville Type.* The Journal of Mathematics Research. Vol. 11, No. 4; 2019.

[58] P.O Mohammed , T. Abdeljawad , F. Jarad and Yu-Ming Chu: *Existence and Uniqueness of Uncertain Fractional Backward Difference Equations of Riemann–Liouville Type.* Mathematical Problems in Engineering. Volume 2020, Article ID 6598682, 8 pages.

[59] P.O Mohammed and T. Abdeljawad: *Discrete generalized fractional operators defined using h-discrete Mittag-Leffler kernels and applications to AB fractional difference systems.* Journal of mathematical Methods in the Applied sciences. 2020(9),1-26.

[60] A. Mohanapriya, A. Ganesh, G*eg*. Rajchakit, Sandra Pinelas, V. Govindan, Bundit Unyong and Nallappan Gunasekaran: *New generalization of Hermite-Hadamard type of inequalities for convex functions using Fourier intral transform*, Thai Journal of Mathematics, 18(3), (2020), 1051-1061.

[61] J. Niu, R. Liu, Y. Shen and S. Yang: Chaos detection of Duffing system with fractionalorder derivative by Melnikov method. Chaos 29, 123106 (2019).

[62] S.T. Ohlmann, F.K. RÃpke, R. Pakmor, V. Springel: *Constructing stable 3D hydrodynamical models of giant stars*, Astronomy and Astrophysics, (2017), 599-605.

[63] S. A. Okunuga, J. O. Ehigie and A. B. Sofoluwe: *Treatment of Lane-Emden Type Equations via Second Derivative Backward Differentiation Formula Using Boundary Value Technique,* Proceedings of the World Congress on Engineering, IWCE, (2012), July 4-6, 2012, London, U.K.

[64] P. Pirmohabbati, A. H. Refahi Sheikhani, H. Saberi Najafi and A. Abdolahzadeh Ziabari: *Numerical solution of full fractional Duffing equations with Cubic-Quintic-Heptic nonlinearities.* Journal of AIMS Mathematics. 2020, 5(2): 1621-1641.

[65] I. Podlubny: *Fractional Differential Equations.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.

[66] T.Rassias: *On the stability of the linear mapping in Banach spaces.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol.72, no.2, pp-297-297, 1978.

[67] S.G.Samko, A.A.Kilbas and O.I.Marchev: Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.

[68] J. Serrin and H. Zou: *Existence of Positive Solutions of Lane-Emden Systems Atti Del Sem,* Mat. Fis. Univ. Modena., 46 (Suppl.), (1998), 369-380.

[69] M. Talaee, M. Shabibi, A. Gilani, S. Rezapour: *On the existence of solutions for a pointwise defined multi-singular integro-differential equation with integral boundary condition,* Adv. Diff. Eq. 2019:41, (2020).

[70] M.Z. Sarikaya, M. Bezziou and Z. Dahmani: *New operators for fractional integration theory with some applications.* Journal of Mathematical Extension 12 (1), (2018), 87-100.

[71] R.Srebro: *The Duffing oscillator: a model for the dynamics of the neuronal groups comprising the transient evoked potential.* Electroencephalography and Clinical Neurophysiology / Evoked Potentials (1995) Section, 96, 561-573.

[72] H.M Srivastava and P.O.Mohammed: *A Correlation Between Solutions of Uncertain Fractional Forward Difference Equations and Their Paths.* Journal of Frontiers in Applied Mathematics and Statistical physics. Published,8(2020), 1-10.

[73] L. Tabharit & Z. Dahmani: *Solvability of a boundary value problem with caputo derivative,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, 19:5-6, 907-915, 2016, DOI: 10.1080/09720502.2014.881136.

[74] K. Tablennehas, A. Abdenebi, Z. Dahmani and M.M. Belhamiti: *An anti-periodic singular fractional differential problem of Lane-Emden type,* Journal of Interdisciplinary Mathematics, (2021), 1-27.

[75] K. Tablennehas,Z. Dahmani and M.M. Belhamiti and M.Z.Sarikaya: *On a Fractional Problem of Lane-Emden Type: Ulam Type Stabilities and Numerical Behaviours*, Advances in Difference Equations, 2021 (1), 1-19.

[76] K. Tablennehas and Z. Dahmani: *AThree Sequential Fractional Differential Problem of Dufing Type*, Applied Mathematics E-Notes 21(2021), 587-598.

[77] S.M. Ulam: *Problems in Modern Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, U.S.A. (1940).

[78] B. Unyong, V. Govindan, S. Bowmiya, G. Rajchakit, N. Gunasekaran, R. Vadivel, Chee Peng Lim and P. Agarwal: *Generalized linear differential equation using Hyers-Ulam stability approach*, AIMS Mathematics, 6(2), (2021), 1607–1623.

[79] D. Winkler, *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*, Chemistry in Australia, 2005.