MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

Polycopié de cours

Réduction des endomorphismes

Cours et Exercices corrigés

Réalisé par :

Dr. Mansouria SAIDANI

Deuxième année licence mathématiques LMD

Année universitaire : 2021 / 2022

Table des matières

Introduction

Ce modeste travail est un document élémentaire d'algèbre, il est destiné aux étudiants de la deuxième année mathématiques et informatique LMD, ainsi qu'aux étudiants des écoles supérieurs ayant fait dans leurs cursus la matière d'algèbre linéaire. Son objectif est de présenter les notions de bases permettant à l'étudiant de maitriser et manipuler les déférentes méthodes de la réduction des endomorphismes définis sur un espace vectoriel ainsi que leurs matrices associés. Il a aussi pour but de savoir comment des méthodes d'algèbre permettent la résolution des problèmes d'analyse.

Le polycopié est organisé en quatre chapitres. A la fin de chaque chapitre, nous avons inclure des exercices corrigés et d'autres proposés.

Le premier chapitre est consacré aux notions de base de l'anneau des polynômes sur un corps K et ses propriétés qui sont analogues aux propriétés des entiers relatifs.

Le deuxième chapitre présente spécifiquement les éléments propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel : vecteurs propres, valeurs propres, polynôme caractéristique, sous espaces propres en passant par les différentes applications du célèbre théorème du Cayley-Hamilton.

Dans le troisième chapitre, nous traitons la réduction des endomorphismes, c'est la notion qui est applicable pour les matrices en considérant les endomorphismes associés. En basant sur les notions données dans le second chapitre, nous présenterons les différents types de la réduction des endomorphismes, en commençant par la diagonalisation, ensuite la trigonalisation sans oublier la réduction du Jordan.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les différentes applications de la réduction des endomorphismes (ou bien des matrices) au calcul des puissances d'une matrice, exponentielle d'une matrice et aux systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.

Ce manuscrit comprends, également, quelques références de base classiques et récentes utilisés durant la réalisation de ce travail.

Le polycopié est inspiré du cours d'algèbre 3 que j'ai enseigné aux étudiants de la deuxième année mathématiques LMD au sein du département de Mathématiques et Informatique à l'université Abdelhamid Ibn Badis.

Chapitre 1

Anneaux de polynômes

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions concernant l'arithmétique des polynômes. Soit $(\mathrm{B},+,.)$ un anneau commutatif.

2 Polynôme

Définition 1.1 *[7], [8], [13], [14], [15] Étant donner* $(\mathrm{B},+,.)$ *un anneau commutatif et* $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* B *nuls sauf un nombre fini. Toute écriture de la forme*

$$\mathrm{P} = (b_n)_{n\geqslant 0} = (b_0, b_1, ...)$$

est appelée un polynôme à une indéterminée X*, à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Notations

[7], [8], [13], [14], [15] 1. Les scalaire $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de B sont appelés les coefficients du polynôme P.

2. Le plus grand indice n tel que $b_n \neq 0$ est appelé degré de P, noté $\deg \mathrm{P}$ et le terme $b_n \mathrm{X}^n$ est appelé terme dominant de P et b_n est appelé coefficient dominant de P.

3. On convient de noter $\deg \mathrm{P} = -\infty$ pour le polynôme nul (dont les coefficients sont tous nuls).

4. L'anneau commutatif $(\mathrm{B}[\mathrm{X}],+,.)$ représente l'ensemble des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$.

5. L'ensemble des polynômes à une indéterminée X de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathrm{B}_n[\mathrm{X}]$.

6. Les éléments $0_{\mathrm{B}_n[\mathrm{X}]}$ et $1_{\mathrm{B}_n[\mathrm{X}]}$ sont donnés par

$$0_{\mathrm{B}_n[\mathrm{X}]} = (0, 0, ...), 1_{\mathrm{B}_n[\mathrm{X}]} = (1, 0, 0, ...)$$

2.1 Opérations dans $(B[X],+,.)$

[7], [8], [13], [14] Étant donnés deux polynômes $P_1 = (b_n)_{n\geqslant 0}$ et $P_2 = (b'_n)_{n\geqslant 0}$ de $B[X]$. Alors
1. **Égalité**

$P_1 = P_2$ si et seulement si $b_i = b'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
2. **Somme de deux polynômes**

$$P_1 + P_2 = (c_n)_{n\geqslant 0} = (b_n + b'_n)_{n\geqslant 0}$$

3. P_1 et P_2 dans $\mathbb{K}[X]$ sont dits associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ inversible tel que $P_1 = \lambda P_2$.
4. **Produit de deux polynômes**

$$P_1P_2 = (d_n)_{n\geqslant 0}$$

avec $d_n = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{r+s=n} a_r b_s$

Exemple 1.1 *[7] 1.* $P_1 = X^4 - 7X + \sqrt{2}$ *est un polynôme unitaire de degré 4 dans* $\mathbb{R}[X]$.
2. $P_2 = 4$ *est un polynôme constant de degré 0.*
3. $P_3 = (8+i)X + 9$ *est un polynôme dans* $\mathbb{C}[X]$.

Notations [7]
Notons $X = (0,1,0,0,....)$, en utilisant la règle de produit des polynômes, on obtient

$$X^2 = (0,0,1,0,0,....)$$

$$X^3 = (0,0,0,1,0,0,....)$$

comme $b_0, b_1, ...$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, on obtient

$$b_0 = (b_0,0,0,0,....)$$

$$a_1X = (0,b_1,0,0,0,....)$$

$$a_2^2 = (0,0,b_2,0,0,0,....)$$

ainsi de suite. Si presque pas du tout les b_i sont nuls, alors on a

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + ... = (b_0,b_1,b_2,....)$$

ce résultat en tenant compte que $0 = (0,0,....)$
En pratique, la notation $P = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ...$ est souvent utilisée. Pour tout ce qui suit, un polynôme à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est tout expression de la forme $P = b_0 + b_1X + b_2X^2 + ...$ avec coefficients $b_i \in \mathbb{K}$ presque tous nuls sauf un nombre fini.

Proposition 1.1 *[7], [8], [13], [14] Étant donnés deux polynômes non nuls de* $B[X]$. *Alors*

$$\deg(P_1 + P_2) \leq \max(\deg P_1, \deg P_2)$$

et

$$\deg(P_1.P_2) \leq \deg P_1 + \deg P_2.$$

Dans le cas où B *est intègre, alors*

$$\deg(P_1.P_2) = \deg P_1 + \deg P_2$$

Proposition 1.2 *[7], [8], [13], [14]* $B[X]$ *est un anneau intègre si* $(B,+,.)$ *est un anneau intègre.*

Preuve. [14] Supposons que $P_1.P_2 = 0$. Donc $\deg(P_1.P_2) = \deg(0) = -\infty$. Par suite

$$\deg P_1 + \deg P_2 = -\infty.$$

Alors $\deg P_1 = -\infty$ ou $\deg P_2 = -\infty$, d'où $P_1 = 0$ ou $P_2 = 0$. ∎

3 Divisibilité dans l'anneau de polynômes

Dans tous ce qui suit , B désigne un anneau commutatif intègre.

Définition 1.2 *[7], [10], [14], [15] Soient* P_1 *et* P_2 *deux polynômes de* $B[X]$*. On dit que* P_1 *est divisible par* P_2 *s'il existe* $P_3 \in B[X]$ *tel que* $P_1 = P_3.P_2$

Remarque 1.1 *[7], [14] 1. On dit aussi que* P_1 *est multiple de* P_2 *, ou que* P_2 *est un diviseur de* P_1 *ou encore* P_2 *divise* P_1*.*
2. Si P_2 *divise* P_1*, alors* $\deg P_2 \leq \deg P_1$*.*

Exemple 1.2 *[7] 1. Chaque polynôme non nul vérifie* P_1 *divise* P_1*,* 1 *divise* P_1 *et* P_1 *divise* 0*.*

3.1 Division euclidienne dans l'anneau de polynômes

Théorème 1.1 *[7], [10],[14], [15] Étant donnés* P_1 *et* P_2 *deux polynômes de* $B[X]$*. Si le coefficient du terme dominant de* P_2 *est inversible dans* $\mathbb{K}$*, alors il existe deux polynômes* $(P_3, P_4) \in B[X]^2$ *tel que*

$$P_1 = P_2.P_3 + P_4 \quad et \quad \deg P_4 < \deg P_2.$$

Preuve. [14] On décompose la preuve en deux étapes : la preuve de l'existence et la preuve de l'unicité, qui se fait par l'absurde.

1. **Unicité** On démontre l'unicité par l'absurde.

le polynôme $P_4 - P_4'$ est différent de zéro, l'un au moins des deux polynômes P_4 ou P_4' est différent de zéro et on a donc en utilisant les propriétés $\deg P_4 < \deg P_2$ et $(\deg P_4' < \deg P_2)$: $\deg(P_4 - P_4') < \deg(P_2)$.
D'où la contradiction.

On en déduit que $P_3 = P_3'$ et par conséquent $P_4 = P_4'$.

2. **Existence** La méthode de démonstration de l'existence est basée sur une démonstration par récurrence.

Étant donnés P_1 et P_2 deux polynômes de $B[X]$, avec P_2 non nul ; soit n_2 le degré de P_2.

Premier cas : $P_1 = 0$

On a $P_1 = 0P_2 + 0$, avec $P_1 = 0$ et donc il existe des polynômes P_3 et P_4 satisfaisant les conditions de la division euclidienne (le quotient P_3 et le reste P_4 sont tous les deux égaux au polynôme nul). La propriété est donc vraie dans ce cas.

Deuxième cas : On considère que les polynômes P_1 sont différents de zéro.

En faisant une preuve par récurrence sur le degré des polynômes.

Supposons H_{n_1} la propriété : L'identité de la division est satisfaite pour tout polynôme P_1 de degré inférieur ou égal à n_1.

Montrons que pour tout entier n_1 supérieur ou égal à $n_2 - 1$, on a la propriété (Rappel : n_2 est le degré de P_2)

Étape 1 : Preuve de H_{n_2-1}

Supposons que $\deg P_1 \leq n_2 - 1$, alors l'identité de la division euclidienne est satisfaite avec $Q = 0$ et $R = P_1$ car on a $P_1 = 0P_2 + P_1$ et $\deg P_1 \leq \deg P_2$.

Étape 2 : Preuve de $H_{n_1} \Rightarrow H_{n_1+1}$.

Considérons P_1 un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_1 + 1$. S'il est de degré inférieur ou égal à n_1 , l'utilisation de la propriété H_{n_1} donne le résultat. Il suffit donc d'étudier le cas où P_1 est de degré exactement égal à $n_1 + 1$.

En utilisant le lemme démontre que le polynôme $P_3 = P_1 - \frac{a_{n_1+1}}{a'_{n_2}} X^{n_1+1-n_2} P_2$ n'admet plus de terme de degré $n_1 + 1$; il est soit un polynôme nul, soit à un polynôme de degré inférieur ou égal à n_1 .

Alors on a, pour les polynômes P_3 et n_1 , l'identité de la division euclidienne.

Il existe donc Q_1 et R_1 tel que :$P_3 = P_2.Q_1 + R_1$, avec $\deg R_1 < \deg P_2$.

D'où :

$$P_1 = [\frac{a_{n_1+1}}{a'_{n_2}} X^{n_1+1-p} + Q_1] P_2 + R_1$$

avec $\deg R_1 < \deg P_2$.

Ceci est l'identité de la division euclidienne pour les polynômes P_1 et P_2 avec :

$$Q = \frac{a_{n_1+1}}{a'_{n_2}} X^{n_1+1-n_2} + Q_1$$

et $R = R_1$

■ Dans la partie qui suit, on considère $(\mathbb{K}, +, .)$ un corps commutatif.

Définition 1.3 *[7], [8], [10], [14] Étant donnés* $P_1, P_2, ..., P_n$ *n polynômes de* $\mathbb{K}[X]$.

*1.**Le plus grand diviseur commun pgcd***

Il existe un unique polynôme unitaire ou nul A *de plus grand degré divisant tous les polynômes* P_i*, autrement dit*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \mathbb{K}[X] = A.\mathbb{K}[X].$$

Ce polynôme est appelé le plus grand diviseur commun de la famille $P_1, P_2, ..., P_n$ *et noté* $pgcd(P_1, P_2, ..., P_n)$ *ou bien* $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$.

*2.**Le plus petit commun multiple ppcm***

Étant donnés $P_1, P_2, ..., P_n$ *n polynômes de* $\mathbb{K}[X]$. *Il existe un unique polynôme unitaire ou nul* B *tel que :*

le polynôme B *est un multiple des polynômes* $P_1, P_2, ..., P_n$,

chaque polynôme multiple de $P_1, P_2, ..., P_n$ *est un multiple de* B, *autrement dit*

$$\cap_{i=1}^{n} P_i.\mathbb{K}[X] = B.\mathbb{K}[X].$$

On le note $ppcm(P_1, P_2, ..., P_n)$ *ou bien* $P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$, *c'est le plus petit commun multiple des polynômes* $(P_1, P_2, ..., P_n)$.

Caractérisation du pgcd et du ppcm

Théorème 1.2 *[7], [8], [10], [14] Étant donnés* $P_1, P_2, ..., P_n$ *n polynômes de* $\mathbb{K}[X]$.

1. $A = pgcd(P_1, P_2, ..., P_n)$ *si et seulement si A est unitaire ou nul et*

i. $\forall i \in \{1, ..., n\}, A$ *divise* p_i,

ii. $\forall i \in \{1, ..., n\}, (A'$ *divise* $p_i) \Rightarrow$ *(A' divise A).*

2.$B = ppcm(P_1, P_2, ..., P_n)$ *si et seulement si B est unitaire ou nul et*

i. $\forall i \in \{1, ..., n\}, p_i$ *divise* B,

ii. $\forall i \in \{1, ..., n\}, (p_i$ *divise* $B') \Rightarrow (B$ *divise* $B')$.

3.2 Algorithme d'Euclide

[10],[7], [13], [14] Pour chercher le pgcd de deux polynômes il suffit d'utiliser l'algorithme d'Euclide qui est une succession de divisions euclidiennes.

Étant donnés P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Pour chercher le pgcd(P_1, P_2), il suffit d'effectuer la division euclidienne de P_1 par P_2 pour obtenir un reste R_1 tel que

$$P_1 = P_2Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \qquad \deg R_1 < \deg P_2.$$

Si le reste R_1 n'est pas nul, on divise P_2 par R_1 et on obtient

$$P_2 = R_1Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg R_2 < \deg R_1.$$

Si le reste R_1 n'est pas nul, on recommence la division à chaque étape et on continue ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne un reste nul.

3.3 Polynômes premiers entre eux

Définition 1.4 *[8], [10], [14], [15] Étant donnés $R_1, R_2, ..., R_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors*
1. Si

$$pgcd(R_1, R_2, ..., R_n) = 1$$

alors, on dit que $R_1, R_2, ..., R_n$ sont premiers entre eux.
2. Si

$$pgcd(R_i, R_j) = 1 \quad i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\},$$

on dit que $R_1, R_2, ..., R_n$ sont deux à deux premiers entre eux.

Théorème 1.3 ***Théorème de Bézout*** *[7], [8], [14]*
Étant donnés $R_1, R_2, ..., R_n$ n polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes $R_1, R_2, ..., R_n$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existent des polynômes $V_1, V_2, ..., V_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} R_iV_i = 1.$$

Preuve. [7], [14] $\Rightarrow$) Supposons que $R_1, R_2, ..., R_n$ sont premiers entre eux , alors $pgcd(R_1, R_2, ..., R_n) = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} R_i\mathbb{K}[X] = 1.\mathbb{K}[X]$. Ceci nécessite l'existence des polynômes $V_1, V_2, ..., V_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} R_iV_i = 1.$$

$\Leftarrow$) Si $\sum_{i=1}^{n} R_iV_i = 1$. Donc, chaque diviseur commun des polynômes R_i divise 1, par suite $pgcd(R_1, R_2, ..., R_n)$ divise 1, ce qui implique que $pgcd(R_1, R_2, ..., R_n) = 1$. ■

Théorème 1.4 ***Théorème de Gauss*** *[7], [8],[12], [14]*
Étant donnés P, Q, L trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si P divise Q.L et P et Q sont premiers entre eux alors P divise L.

Proposition 1.3 *[7], [8], [14] Étant donnés $P_1, P_2, ..., P_n$, P,Q,R des éléments de $\mathbb{K}[X]$, m_1 et $m_2 \in \mathbb{N}$. Alors*
1. Si $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $pgcd(P_i, P) = 1$, alors

$$pgcd(\prod_{i=1}^{n} P_i, P) = 1.$$

2. Si $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $pgcd(P_i, P) = 1$, alors

$$pgcd(\prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}, P) = 1.$$

quels que soient les entiers $\alpha_i, i \in \{1,2,...,n\}$.
3. Si $pgcd(\mathrm{Q},\mathrm{R}) = 1$, *alors* $pgcd(\mathrm{Q}^{m_1},\mathrm{R}^{m_2}) = 1$.
4. $pgcd(\mathrm{P},\mathrm{Q}).ppcm(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \lambda.\mathrm{P}.\mathrm{Q}$ *pour un certain* $\lambda \in \mathbb{K}$.
5. Si $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ *sont des polynômes tels que P et Q sont premiers entre eux et* P *divise* R *et* Q *divise* R *alors* $\mathrm{P}.\mathrm{Q}$ *divise* R.

Preuve. [14] 1. $\forall i \in \{1,2,...,n\}, pgcd(\mathrm{P}_i,\mathrm{P}) = 1$, alors on peut trouver des polynômes $\mathrm{U},\mathrm{U}_i, i \in \{1,2,...,n\}$ tels que

$$\mathrm{U}.\mathrm{P} + \mathrm{U}_i.\mathrm{P}_i = 1, \forall i \in \{1,2,...,n\}.$$

Alors

$$\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{U}.\mathrm{P} + \mathrm{U}_i.\mathrm{P}_i) = 1$$

d'où P et $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i$ sont premiers entre eux.
2. En utilisant la récurrence dans la première propriété, on obtient le résultat.
3. C'est un résultat qui découle de la propriété précédente.
4. Soit $\mathrm{D} = pgcd(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ et $\mathrm{M} = ppcm(\mathrm{P},\mathrm{Q})$. Par le théorème de Bézout, il existe $(\mathrm{U},\mathrm{V}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$ tel que $\mathrm{U}.\mathrm{P} + \mathrm{V}.\mathrm{Q} = \mathrm{D}$. En multipliant cette égalité par M, on obtient $\mathrm{M}.\mathrm{U}.\mathrm{P} + \mathrm{M}.\mathrm{V}.\mathrm{Q} = \mathrm{D}$. Puisque M est un multiple de Q alors P.M est aussi un multiple de P.Q. D'autre part, puisque M est un multiple de P alors Q.M est un multiple de P.Q. Alors D.M est un multiple de P.Q.
D'après les propriétés des multiples des polynômes, on peut trouver un scalaire λ non nul tel que $\mathrm{D}.\mathrm{M} = \lambda.\mathrm{P}.\mathrm{Q}$.
5. P et Q sont premiers entre eux, alors par le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U_1 et U_2 dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}.\mathrm{U}_1 + \mathrm{Q}.\mathrm{U}_2 = 1$. D'où,

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}.\mathrm{U}_1.\mathrm{R} + \mathrm{Q}.\mathrm{U}_2.\mathrm{R}.$$

Or il existe deux polynômes U'_1 et U'_2 dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{R} = \mathrm{U}'_1.\mathrm{P}$ et $\mathrm{R} = \mathrm{U}'_2.\mathrm{Q}$. Donc, on a

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}.\mathrm{U}_1.\mathrm{U}'_2.\mathrm{Q} + \mathrm{Q}.\mathrm{U}_2.\mathrm{U}'_1.\mathrm{P} = \mathrm{P}.\mathrm{U}_1.\mathrm{U}'_2.\mathrm{Q} + \mathrm{Q}.\mathrm{U}_2.\mathrm{U}'_1.\mathrm{P} = \mathrm{P}.\mathrm{Q}(\mathrm{U}_1.\mathrm{U}'_2 + \mathrm{U}_2.\mathrm{U}'_1)$$

d'où le résultat. ■

Définition 1.5 ***Polynôme irréductible*** *[7], [8], [10], [12], [14]*
Un polynôme P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *est dit polynôme irréductible (ou premier) dans* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *si* $\deg \mathrm{P} \geq 1$ *et s'il n'est divisible que par les polynômes associés à P et à 1, c'est à dire que P soit une constante et que pour tout* $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$, *on ait*

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1.\mathrm{P}_2 \Rightarrow (\deg \mathrm{P}_1 = 0 \quad ou \quad \deg \mathrm{P}_2 = 0)$$

Exemple 1.3 *[7], [14] 1. Chaque polynôme de degré 1 est irréductible, car le produit de deux polynômes non constants est au moins de degré 2.*
2. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$ *est un polynôme réductible car il est divisible par deux polynômes irréductibles* $\mathrm{X} - 1$ *et* $\mathrm{X} + 3$ *dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *et dans ce cas* , $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 3)$.
3. $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + 1$ *est irréductible dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *car on ne peut pas l'écrire comme produit de deux polynômes de degré 1 à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4 *[7], [12], [14] Tous les polynômes de degré 1 dans* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *sont irréductibles.*

Preuve. [14] Il est clair que tout polynôme de degré 1 est irréductible. De plus, en utilisant le théorème de d'Alembert qui nous informe qu'un polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, autrement dit produit de polynômes de degré 1. Par suite, tout polynôme de degré inférieur ou égale 2 est réductible. ■

Remarque 1.2 *[14] 1. Chaque polynôme de degré 1 est irréductible de* $\mathbb{R}[X]$*, de même pour les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.*
Si P est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ *ne l'est pas forcément dans* $\mathbb{P}'[X]$ *où* $\mathbb{K}[X]$ *est un sous corps de* $\mathbb{P}'[X]$ *.*

Proposition 1.5 *[7], [12], [14]*
1. Tout polynôme R irréductible est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas.
2. Un polynôme irréductible R divise un produit $\prod_{i=1}^{n} R_i$ *si et seulement si R divise l'un des facteurs* R_i*.*

Preuve. [14] Étant donnés R et $R_1, R_2, ..., R_n$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
1. On sait que les diviseurs communs à R et à un polynôme R' sont des diviseurs de R, donc sont, soit constants, soit associés à R. Par suite, si R ne divise pas R', les seuls diviseurs commun à R et R' sont les constantes.
2. Supposons que R ne divise aucun des facteurs R_i, dans ce cas R est premier avec chacun d'entre eux et alors avec le produit $\prod_{i=1}^{n} R_i$, d'où R n'est pas un diviseur de ce produit. La réciproque est évidente. ■

3.4 Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles

Proposition 1.6 *[7], [12], [14] Tout polynôme non constant de* $\mathbb{K}[X]$ *se décompose d'une façon unique comme produit d'un scalaire par un produit de polynômes irréductibles unitaires de* $\mathbb{K}[X]$*.*

Preuve. [7], [12], [14] **Existence** En utilisant une démonstration par récurrence, on prouve pour $n \geq 1$ la propriété A_n :" chaque polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n peut se décomposer sous forme d'un produit de polynômes irréductibles."
-A_1 est vérifiée puisque chaque polynôme de degré 1, étant irréductible, est un produit d'un seul polynôme irréductible.
- On suppose que A_n est vraie. Étant donné R un polynôme de degré $n+1$.

- Si R est irréductible, alors c'est un produit d'un seul polynôme irréductible.
- Dans le cas inverse, il existe deux polynômes non constants R' et R" tels que $R = R'.R''$ et donc il est évident que R' et R" ont des degrés strictement inférieurs à celui de R et l'on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui donne une décomposition de R en un produit de polynômes irréductibles.

Pour obtenir la décomposition annoncée, il suffit de mettre en facteur les coefficients dominants de chaque polynôme irréductible.
Unicité Étant donné $R = \alpha.R_1.R_2....R_k$ une telle décomposition d'un polynôme R. Donc, le scalaire α représente le coefficient dominant de R. D'autre part, tout polynôme irréductible unitaire R_i est un diviseur R et inversement si un polynôme irréductible unitaire Q est un diviseur de R, alors c'est un diviseur de l'un des R_i alors, ils sont égaux puisqu'il s'agit de deux irréductibles unitaires. Les facteurs de cette décomposition sont donc tous les diviseurs irréductibles unitaires de R. Supposons donc deux décompositions de R que l'on peut donc écrire

$$R = \alpha.R_1^{\lambda_1}.R_2^{\lambda_2}...R_r^{\lambda_r},$$

avec les R_i sont irréductibles unitaires et deux à deux différents.
Si, pour un entier i, on a $\alpha_i \neq \beta_i$, par exemple $\lambda_i < \beta_i$, alors on a

$$\prod_{j \neq i} R_j^{\lambda_j} = R_i^{\beta_i - \lambda_j} \prod_{j \neq i} R_j^{\beta_i}$$

et donc R_i divise $\prod_{j\neq i} R_j^{\lambda_j}$, ce qui est une contradiction car R_i est premier avec R_j si $j \neq i$. Par suite, $\forall i, \lambda_i = \beta_i$, d'où l'unicité de la décomposition. ■

3.5 Fonction polynôme d'une variable

Définition 1.6 *[7], [12], [14] Étant donné* R *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$.
La fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} \tilde{R}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & X & \longmapsto & \tilde{R}(X). \end{array}$$

est appelée fonction polynôme d'une variable X *associé à R.*

Remarque 1.3 *[7], [14] 1. Un élément* $\lambda \in \mathbb{K}$ *est appelé une racine (ou un zéro) de R si* $\tilde{R}(\lambda) = 0$.
2. Pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ *soit une racine de R, il faut et il suffit que* $X - \lambda$ *divise R.*
3. La dérivée de la fonction polynôme du R est la fonction notée $\tilde{R}'(X)$ *définie par*

$$\tilde{R}'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + ... + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}.$$

Théorème 1.5 *[12], [14] Étant donné* $S \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*
1. En effectuant la division euclidienne de S par $X - \lambda$, *on obtient un reste qui est exactement* $\tilde{S}(\lambda)$.
2.$X - \lambda$ *divise S si est seulement si* λ *est une racine de S .*

3.6 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 1.7 *[7], [12], [14]Soit* $S \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *une racine de S. L'ordre de multiplicité de la racine* λ *de S est le plus grand* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $(X-\lambda)^k$ *divise S.*

- *Si* $k = 1$, λ *est appelé une racine simple de S,*
- *Si* $k = 2$, λ *est appelé une racine double de S,*
- *Si* $k = 3$, λ *est appelé une racine triple de S etc...*

Exemple 1.4 *[14] Le polynôme* $X^3 - 8X^2 + 5X + 50$ *possède une racine simple* $X = -2$ *et une racine double* $X = -5$ *car*

$$X^3 - 8X^2 + 5X + 50 = (X+5)^2(X+2).$$

Théorème 1.6 *[7], [12], [14] Étant donné* $S \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. λ *est une racine simple de S si et seulement si* $\tilde{S}(\lambda) = 0$ *et* $\tilde{S}'(\lambda) \neq 0$.

Preuve. [14] En utilisant la définition d'une racine simple, on a λ est une racine simple si et seulement s'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$S = (X - \lambda).Q$$

et $Q(\lambda) \neq 0$ or

$$\tilde{S}' = \tilde{Q} + (X - \lambda)\tilde{Q}'$$

donc

$$\tilde{S}'(\lambda) = \tilde{Q}(\lambda)$$

d'où le résultat. ■

Remarque 1.4 *[14] Pour montrer que λ est une racine d'ordre m d'un polynôme S il suffit de montrer que*
$$\tilde{S}(\lambda)=0, \tilde{S}'(\lambda)=0, \ldots, \tilde{S}^{(m-1)}(\lambda)=0, \tilde{S}^{(m)}(\lambda)\neq 0.$$

Exemple 1.5 *[7],[14] Le polynôme $P=(X^2-2X-3)^2$ possède deux racines doubles $X=-1$ et $X=3$ car*
$$P=(X+1)^2(X-3)^2.$$

Proposition 1.7 *[7], [12], [14] Étant donné $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_r\in\mathbb{K}$ sont des racines deux à deux différentes de S, d'ordre de multiplicité respectif $m_1,m_2,\ldots,m_r$. Alors $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ divise S.*

Preuve. [14] Pour tout $i\in\{1,\ldots,r\}$, on a $(X-\lambda_i)$ sont des polynômes premiers entre eux car $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r\in\mathbb{K}$ sont des racines deux à deux distincts de S. Alors, $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux. En utilisant la Proposition 5.3, on obtient $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ divise S puisque $(X-\lambda_i)^{m_i}$ divise S. ■

4 Exercices corrigés

Exercice 1.1 *[7], [11], [14] Effectuer la division euclidienne de X^m par X^2-X-2 dans $\mathbb{R}[X]$ en précisant le reste de cette division pour tout $m\in\mathbb{N}$ fixé.*

Solution.[7], [11], [14] En effectuant la division euclidienne, on peut trouver deux polynômes $(P_1,P_2)\in(\mathbb{R}[X])^2$ unique tel que :
$$X^m=(X^2-X-2)P_1+P_2$$
et $\deg(P_2)<2$. Donc, il existe $(i,j)\in(\mathbb{R})^2$ unique tel que $P_2=iX+j$. Puisque
$$X^2-X-2=(X+1)(X-2),$$
on obtient , en remplaçant X par -1 et par 2
$$\begin{cases}(-1)^m &= -i+j\\ 2^m &= 2i+j\end{cases}$$
En résolvant ce système linéaire de deux équations à deux inconnues, par exemple en utilisant les coefficients indiqués, et on trouve
$$3i=2^m-(-1)^m,\quad 3j=2^m+2(-1)^m.$$
Par suite, le reste de la division euclidienne de X^m par X^2-X-2 est
$$P_2=\frac{1}{3}(2^m-(-1)^m)X+\frac{1}{3}(2^m+2(-1)^m).$$

Exercice 1.2 *[7], [11], [14] Préciser l'ensemble des $m\in\mathbb{N}^*$ tels que $(X^4+1)^m-X^m$ soit divisible par X^2+X+1 dans $\mathbb{R}[X]$.*

Solution. [7], [11], [14] On note $K = X^2+X+1$ et $S_m = (X^4+1)^m - X^m$. Puisque $K = (X-l)(X-l^2)$ dans $\mathbb{C}[X]$, K est un polynôme scindé simple sur $\mathbb{C}$, par suite :

$$\mathrm{K} \quad \text{divise} \quad S_m \Leftrightarrow S_m(l) = 0 \quad \text{et} \quad S_m(l^2) = 0).$$

D'autre part, sachant que $S_m \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$S_m(l^2) = S_m(l) = \overline{S_m(l)},$$

donc

$$\mathrm{A} \quad \text{divise} \quad S_m \Leftrightarrow S_m(l) = 0.$$

Et : On déduit que l'ensemble des m demandé est l'ensemble contient tous les multiples de 6 dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 1.3 *[7], [11], [14] Écrire la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes suivants :*
1. Y^6+9Y^3+8,
2. Y^4-2Y^2+9,
3. Y^4+Y^2-6.

Solution. [11],, [7], [14] 1. On peut réécrire le premier polynôme sous forme d'un trinôme en Y^3 :

$$\begin{aligned} Y^6+9Y^3+8 &= (Y^3+1)(Y^3+8) \\ &= (Y+1)(Y^2-Y+1)(Y+2)(Y^2-2Y+4). \end{aligned}$$

Les deux termes du second degré sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puisque le discriminant est strictement négatif.
2. De même que précédemment, les deux termes du second degré sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puisque le discriminant est strictement négatif.

3. En écrivant le polynôme sous forme d'un trinôme bicarré :

$$\begin{aligned} Y^4+Y^2-6 &= (Y^2-2)(Y^2+3) \\ &= (Y-\sqrt{2})(Y+\sqrt{2})(Y^2+3). \end{aligned}$$

Exercice 1.4 *[14] Chercher le pgcd dans $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des polynômes P_1 et P_2 suivants*

$$P_1 = Y^5-2Y^4+Y^3-Y^2+2Y-1$$

et

$$P_2 = Y^3-Y^2+2Y-2.$$

Soit D ce pgcd. Trouver P'_1 et P'_2 tels que

$$P_1 = DP'_1$$

et

$$P_2 = DP'_2.$$

Déterminer le ppcm de P_1 et P_2.

Solution.[14] En utilisant l'algorithme d'Euclide, on peut déterminer le pgcd des polynômes. On obtient

$$P_1 = P_2(Y^2 - Y - 2) + Y^2 + 4Y - 5.$$

Alors, le pgcd de P_1 et P_2 est égal au pgcd des polynômes P_2 et Y^2+4Y-5. En effectuant la division euclidienne de P_2 par Y^2+4Y-5, on trouve

$$P_2 = (Y^2 + 4Y - 5)(Y - 5) + 27Y - 27.$$

Puisque

$$27Y - 27 = 27(Y - 1),$$

ensuite la division euclidienne de Y^2+4Y-5 par $Y-1$, puisque

$$pgcd(P_1, P_2) = pgcd(P_1, \alpha P_2)$$

si α est un scalaire non nul.
Le pgcd des polynômes P_2 et Y^2+4Y-5 est égal au pgcd des polynômes

$$Y^2 + 4Y - 5$$

et

$$Y - 1.$$

Par la division euclidienne de Y^2+4Y-5 par $Y-1$, on déduit le quotient $Y+5$ et le reste 0. Par suite Y^2+4Y-5 est un multiple du polynôme $Y-1$. Alors le polynôme $Y-1$ est le pgcd de Y^2+4Y-5 et $Y-1$. Donc celui de P_2 et Y^2+4Y-5 et donc le pgcd de P_1 et P_2.

2. Étant donné $D = Y - 1$. Pour chercher P'_1 et P'_2 tels que $P_1 = DP'_1$ et $P_2 = DP'_2$, on divise P_1 et P_2 par D. On trouve

$$P_1 = (Y - 1)(Y^4 - Y^3 - Y + 1)$$

et

$$P_2 = (Y - 1)(Y^2 + 2).$$

Pour trouver le ppcm de P_1 et P_2, on fait appelle à la formule (polynômes P_1 et P_2 étant unitaires) :

$$P_1P_2 = pgcd(P_1, P_2) \times ppcm(P_1, P_2).$$

En calculant le produit P_1P_2, puis en divisant le résultat par le pgcd de P_1 et P_2, mais il vaut mieux d'utiliser la question 2.

$$P_1 = DP'_1$$

et

$$P_2 = DP'_2$$

où $P'_1 = Y^4 - Y^3 - YX + 1$ et $P'_2 = Y^2 + 2$.
Comme

$$P_1P_2 = DP'_1DP'_2 = D.ppcm(P_1, P_2)$$

on en déduit que $ppcm(P_1, P_2) = DP'_1P'_2$, comme $P_1 = DP'_1$ et $P_2 = DP'_2$ et l'on pouvait alors calculer un de ces deux produits.

Exercice 1.5 *[1], [14] 1. Prouver que si y_0 est racine commune à $P(y)$ et $Q(y)$, elle l'est également de leur PGCD et inversement.*
2. Déduire les racines multiples de $P = y^5 + y^3 - 4y^2 - 3y - 2$.

Solution.[1], [14] 1. Supposons que A est le PGCD de P et Q, on a

$$P = AA_1$$

et

$$Q = AA_2.$$

Si $A(y_0) = 0$ alors $P(y_0) = A(y_0)A_1(y_0)$ et de même $Q(y_0) = A(y_0)A_2(y_0)$.
Inversement, supposons que y_0 est une racine de $P(y)$ et $Q(y)$,en utilisant le théorème de Bézout, on peut trouver deux polynômes U et V tels que

$$A = PU + QV$$

et

$$A(y_0) = P(y_0)U(y_0) + Q(y_0)V(y_0) = 0.$$

2. Supposons que y_0 est une racine multiple de $P = y^5 + y^3 - 4y^2 - 3y - 2$ alors elle est racine de $P' = 5y^4 + 3y^2 - 8y - 3$.
Trouvons le PGCD de P et P' par l'algorithme d'Euclide : Le polynôme P possède comme racines multiples celles de $y^2 + y + 1$ autrement dit

$$k = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ces racines sont de multiplicité au moins égal à 2 donc P est divisible par $y^2 + y + 1$ qui est de degré 4, P étant de degré 5 il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 1.6 *[3], [14] Prouver que les polynômes P et Q sont premiers entre eux équivaut à dire que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.*

Solution. [3], [14] Si A et B sont premiers entre eux, alors

$$(A + B) \wedge A = 1$$

et

$$(A + B) \wedge B = 1.$$

On a donc :

$$(A + B) \wedge AB = 1$$

Inversement, supposons que $A + B$ et AB sont premiers entre eux. Alors, dans le cas où D divise A et B, alors D divise $A + B$ et AB . Par suite, D est de degré 0.

5 Exercices proposés

Exercice 1.7 *[3], [14] Étant donné $m \in \mathbb{N}$, prouver que le polynôme $Y^2 - Y + 1$ divise*

$$(Y - 1)^{m+2} + Y^{2m+1} \in \mathbb{C}[X].$$

Exercice 1.8 *[3], [14] Préciser tous les polynômes A tels que :*

$$A(2) = 6, A'(2) = 1 \quad et \quad A''(2) = 4$$

et

$$\forall k \geq 3, A^{(k)}(2) = 0.$$

Exercice 1.9 *[11], [14] Donner la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$*, des polynômes suivants :*
1. $(Y^2 - 4Y + 1)^2 + (3Y - 5)^2$,
2. $Y^5 + 1$,
3. $Y^6 - 1$.

Exercice 1.10 *[1], [14] Étant donnés* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *des entiers naturels. Considérons les deux polynômes*

$$A = Y^{4\alpha_1+3} + Y^{4\alpha_2+2} + Y^{4\alpha_4+1} + Y^{4\alpha_4}$$

et

$$B = Y^3 + Y^2 + Y + 1.$$

Montrer que B divise A.

Exercice 1.11 *[14] Déterminer le PGCD des deux polynômes* $X^6 - 5X^4 + 4X^3 - 10X^2 + 3X - 2$ *et* $X^3 + 2X^2 + 4X + 11$.

Chapitre 2

Éléments propres d'un endomorphisme

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons les premiers éléments de la théorie spectrales représentés par les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices carrées (respectivement d' endomorphismes) et nous citons l'énoncé du théorème du Cayley-Hamilton qui jouent un rôle très important dans les réductions de ces dernières à une forme canonique.

2 Valeurs propres et vecteurs propres

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $\mathcal{F}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

Définition 2.1 *[1] Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **valeur propre** de ψ s'il existe un vecteur v **non nul** de $\mathcal{F}$ tel que $\psi(v) = \alpha.v$*

*On dit alors que v est un **vecteur propre** de ψ associé à la valeur propre α.*

Remarque 2.1 *[1], [9], [15] 1. L'ensemble de valeurs propres de ψ est appelé **spectre de** ψ et est noté $\mathrm{S}_p(\psi)$ ou bien $spec(\psi)$.*

2. La somme de deux vecteurs propres associés à la valeur propre α représente un nouveau vecteur propre associé à cette valeur propre α .

3. Soit v est un vecteur propre associé à la valeur propre α, alors "$c.v$" représente un vecteur propre associé à la valeur propre α pour tout $c \in \mathbb{K}$.

4. Le scalaire α définit une valeur propre de ψ équivaut à dire que l'application $\psi - \alpha\mathrm{I}d_{\mathbb{K}}$ n'est pas injectif, ce qui implique que 0 est une valeur propre de ψ équivaut à dire que ψ n'est pas injectif.

Exemple 2.1 *[1], [6] Considérons l'espace vectoriel E formé des fonctions g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ g & \mapsto & \psi(g) = g' \end{array}$$

est un endomorphisme de E. Pour tout α réel, on a

$$g'(x) = \alpha g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = ke^{\alpha x}$$

ceci dit que

$$\psi(g(x)) = \alpha k e^{\alpha x}$$

On remarque que l'endomorphisme possède tout nombre α *pour valeur propre.*

Exemple 2.2 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \psi(a,b) = (a,b) \end{array}$$

est un endomorphisme et $\alpha = 1$ *est une valeur propre de* ψ.

Définition 2.2 *[8], [9], [15] Étant donné* ψ *un endomorphisme de* $\mathcal{F}$*, et* α *une valeur propre de* ψ*. On appelle* ***sous espace propre*** *de* ψ *associé à* α*, noté* $\mathcal{F}_\alpha(\psi)$*, le sous espace vectoriel* $\ker(\psi - \alpha \mathrm{I}_{\mathcal{F}})$ *de* $\mathcal{F}$ *formé de tous les vecteurs u de* $\mathcal{F}$ *vérifiant* $\psi(u) = \alpha.u$*. Autrement dit*

$$\mathcal{F}_\alpha(\psi) = \{u \in \mathcal{F}; \psi(u) = \alpha.u\} = \ker(\psi - \alpha \mathrm{I}d_{\mathcal{F}}).$$

Ainsi $\mathcal{F}_\alpha(\psi)$ *est formé de* 0 *et des vecteurs propres de* ψ *associés à* α.

Proposition 2.1 *[9] Étant donné* ψ *un endomorphisme de* $\mathcal{F}$ *et* α *une valeur propre de* ψ*. Alors, le sous espace vectoriel propre* $\mathcal{F}_\alpha(\psi)$ ***est stable par*** ψ.

Preuve. [9] Il s'agit de montrer que $\psi(\mathcal{F}_\alpha(\psi)) \subset \mathcal{F}_\alpha(\psi)$. Considérons $u \in \mathcal{F}_\alpha(\psi))$, alors

$$\psi(u) = \alpha.u,$$

ce qui implique

$$\psi(\psi(u)) = \psi(\alpha.u) = \alpha.\psi(u)$$

c'est à dire que $\psi(u)$ qui est un élément de $\psi(\mathcal{F}_\alpha(\psi))$, et est un vecteur propre de ψ associé à α ce qui signifie que $\psi(u) \in \mathcal{F}_\alpha(\psi))$ ■

Théorème 2.1 *[9] Soient* ψ *un endomorphisme de* $\mathcal{F}$ *et* $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ *une famille de vecteurs propres associés respectivement à des valeurs propres* $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ *de* ψ *deux à deux distinctes. Alors, les vecteurs* $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ ***sont linéairement indépendants****.*

Preuve. [9] Nous allons réaliser la preuve par la méthode de récurrence. 1. Si $i = 1$, en utilisant la définition de la valeur propre, on trouve que le seul vecteur x_1 qui n'est pas nul, donc il est libre.
2. Supposons que le résultat est vérifier pour $i < k - 1$ c'est à dire que $(x_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ sont libres et montrons qu'il reste vraie pour $i = k$. Supposons que

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = 0_{\mathcal{F}} \tag{2.1}$$

et montrons que

$$\beta_i = 0, pour 1 \leq i \leq k.$$

Donc

$$0_{\mathcal{F}} = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \psi(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i x_i. \tag{2.2}$$

On retranche α_k(2.1) à (2.2), on obtient

$$0_F = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \alpha_i x_i - \alpha_k \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i (\alpha_i - \alpha_k) x_i. \tag{2.3}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve que

$$\beta_i(\alpha_i - \alpha_k) = 0, \forall 1 \leq i \leq k-1$$

et comme les scalaires $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ de ψ sont deux à deux distinctes, on obtient

$$\beta_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k-1$$

par suite, l'équation (2.1) implique que

$$\beta_k x_k = 0$$

ce qui donne

$$\beta_k = 0$$

car $x_k \neq 0_F$. On conclut que $\beta_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k$ d'où l'indépendance linéaire des vecteurs $(x_i)_{1\leq i\leq k}$. ■

Remarque 2.2 *Étant donné α_1 et α_2 deux valeurs propres distinctes de l'endomorphisme ψ de F. Alors, l'intersection des espaces propres $F_{\alpha_1}(\psi)$ et $F_{\alpha_2}(\psi)$ est réduite à $\{0_E\}$.*

Preuve. Admettons $w \in F_{\alpha_1}(\psi) \cap F_{\alpha_2}(\psi)$. Si $w \in F_{\alpha_1}(\psi) \cap F_{\alpha_2}(\psi)$ alors, $\psi(w) = \alpha_1.w = \alpha_2.w$, donc $(\alpha_1 - \alpha_2).w = 0$. Comme $\alpha_1 - \alpha_2$ est non nul, on a $w = 0_F$. ■

Corollaire 2.1 *[8], [9] Étant donné ψ un endomorphisme de F et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes. Alors, les sous espaces vectoriels propres $(F_{\alpha_i}(\psi)_i)_{1\leq i\leq k}$ sont en **somme directe**.*

Preuve. [8], [9] Soient $(x_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de vecteurs propres associés respectivement à des valeurs propres $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$. En utilisant le théorème 2.1, l'équation $\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$ est vérifiée si chaque vecteur x_i est nul, et comme $x_i \in F_{\alpha_i}(\psi)_i$, alors la somme

$$\sum_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}(\psi)_i$$

est directe. ■

Corollaire 2.2 *[8], [9] Étant donné ψ un endomorphisme de F. Si $\dim F < \infty$, alors la dimension de l'espace F est supérieure ou égal au cardinal de l'ensemble spec(ψ).*

Preuve. [8], [9] Supposons que le spectre de ψ n'est pas vide et il contient les valeurs propres $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ qui sont distinctes deux à deux, et chaque valeur α_i possède un vecteur propre x_i non nul. On remarque que les vecteur $x_1, x_2, ..., x_k$ sont libres, en utilisant les propriétés des espaces vectoriel, on déduit que la dimension de l'espace F est supérieure ou égal au cardinal de l'ensemble spec(ψ). ■

Puisque il existe une bijection entre l'espace vectoriel des applications linéaires et l'espace des matrices, on peut donc penser à définir les éléments propres, i.e. les valeurs propres et vecteurs propres pour une matrice carrée (en fait, tous les résultats qui sont vrais pour les endomorphismes sont vrais pour les matrices et réciproquement).

Définition 2.3 *[4] Étant donné ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$, $\dim \mathcal{F} = n < \infty$, B une base de $\mathcal{F}$ et $\Lambda = \mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}, \mathrm{B}) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On appelle* ***vecteur propre*** *de α tout vecteur non nul $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\alpha\mathrm{X}$ soit colinéaire à X.*
On appelle ***valeur propre*** *de $\mathcal{F}$ toute élément α de $\mathbb{K}$ tel que la matrice $(\Lambda - \alpha \mathrm{I}_{\mathcal{F}})$ ne soit pas inversible, autrement dit tel que $\det(\Lambda - \alpha\mathrm{I}_{\mathcal{F}}) = 0$.*

Étant donné une matrice $\Lambda \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, ou bien , un endomorphisme ψ d'un espace vectoriel $\mathcal{F} \neq \{0_{\mathcal{F}}\}$.
Deux questions naturelles se posent .
1. Comment peut -on déterminer les valeurs propres de ψ (ou de son matrice associée Λ) ?
2. D'autre part, une telle valeur propre α étant fixée, comment déterminer l'espace propre correspondant ?

Si la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ est finie, nous verrons que la première question se ramène à la recherche des racines d'un certain polynôme, la seconde question se ramène à la résolution d'un système linéaire.

3 Polynôme caractéristique

[1] Étant donné $\mathbb{K}$ un corps, $\mathcal{F}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, $\mathrm{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ et ψ un endomorphisme représentée par une matrice carrée d'ordre n.

Les scalaires α tels que $\ker(\psi - \alpha\mathrm{I}_{\mathcal{F}}) \neq \{0_{\mathcal{F}}\}$ définissent les valeurs propres de ψ autrement dit sont les solutions de l'équation

$$\det(\psi - \alpha\mathrm{I}_{\mathcal{F}}) = \det(\Lambda - \alpha\mathrm{I}_n) = 0.$$

Supposons

$$\Lambda = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & m_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

puisque le déterminant est indépendant de la base choisie dans $\mathcal{F}$, alors $\det(\Lambda - \alpha\mathrm{I}_n)$ s'écrit

$$\mathrm{P}_{\Lambda}(\alpha) = \begin{vmatrix} m_{11}-\alpha & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22}-\alpha & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn}-\alpha \end{vmatrix}.$$

En effet, on retranche α aux éléments diagonaux m_{ij} de la matrice α.

En développant ce déterminant suivant une ligne ou une colonne choisie, on montre que $\mathrm{P}_{\Lambda}(\alpha)$ est un polynôme de degré n.

Ce polynôme s'appelle **le polynôme caractéristique** de l'endomorphisme ψ, ou de la matrice Λ qui a pour racines les valeurs propres de ψ.

Dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est réel, alors ψ possède au maximum n valeurs propres, distincts ou confondues.

mais si $\mathbb{K}$ est complexe, tout endomorphisme de F possède n valeurs propres, distinctes ou confondues.

On peux citer maintenant la définition du polynôme caractéristique.

3.1 Polynôme caractéristique

Définition 2.4 *[8] Étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$. Le* ***polynôme caractéristique*** *de A est le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ donné par $P_A(X) = \det[A - XI_n]$.*

Remarque 2.3 *[8] 1. Une matrice et sa matrice transposée ont le même polynôme caractéristique.*

2. Si $A' = P^{-1}AP$, on a

$$A' - XI = P^{-1}(A - XI_n)P$$

donc

$$P_{A'}(X) = \det P^{-1} \det[A - XI_n] \det P = P_A(X)$$

cela veut dire que le polynôme caractéristique de A est indépendant du choix de la base B, il ne dépend que de X, on conclut donc que les matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

3. $P_A(0) = (-1)^n \det A$.

Proposition 2.2 *[9] Étant donné $n \geq 1$ et une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ associée à ψ. Alors, en général le polynôme caractéristique du ψ (ou de A) est de la forme*

$$P_A(x) = P_\psi(x) = \det[A - xI_n] = (-1)^n.x^n + (-1)^{n-1}Tr(A).x^{n-1} + ... + \det A$$

où

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

Exemple 2.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & e \\ f & z \end{pmatrix}.$$

Alors, le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\alpha) = \begin{vmatrix} a-\alpha & e \\ f & z-\alpha \end{vmatrix} = (a-\alpha)(z-\alpha) - e.f$$

d'où

$$P_A(\alpha) = \alpha^2 - (a+z)\alpha + a.z - e.f = (-1)^2.\alpha^2 + (-1)^1 Tr(A).\alpha + \det A.$$

Définition 2.5 *[8] Étant donné ψ un endomorphisme de F, $\dim F = n < \infty$, B une base de F et $A = M(\psi, B)$. On appelle* ***polynôme caractéristique*** *de ψ le* ***polynôme caractéristique de la matrice*** *de ψ dans une base B choisie et on le note P_ψ qui ne dépends pas du choix de la base B.*

Proposition 2.3 *[8] Étant donné ψ un endomorphisme de F, $\dim F = n < \infty$. Un scalaire α est valeur propre de ψ si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique de ψ autrement dit*

$$\det[\psi - \alpha I_F] = 0.$$

Preuve. [8] Suivant la définition, α est valeur propre de ψ si et seulement si $[\psi - \alpha I_F \in \mathscr{L}(F)]$ n'est pas injectif. Comme la dimension de F est fini, alors dire $[\psi - \alpha I_F] \in \mathscr{L}(F)$ n'est pas injectif revient à dire que $[\psi - \alpha I_F] \in \mathscr{L}(F)$ n'est pas bijectif, cela équivalent à dire que le déterminant de $\psi - \alpha I_F$ est nul. ■

Exemple 2.4 *[1] Cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de Λ en α est

$$P_\Lambda(\alpha) = \begin{vmatrix} 4-\alpha & 1 \\ 3 & 2-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0.$$

Ce polynôme admet deux racines $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 1$.
Considérons un vecteur propre associé à α_1 qui a pour matrice $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ nous obtenons

$$\begin{cases} -c+d = 0, \\ 3c-3d=0. \end{cases}$$

D'où la droite vectorielle $c = d$, sous espace propre associé à α_1. D'une manière similaire, on obtient pour $\alpha_2 = 1$ la droite vectorielle $3c + d = 0$.

Exemple 2.5 *Même question pour la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de Λ est de degré 3 en α et égal à

$$\begin{vmatrix} 4-\alpha & 6 & 0 \\ -3 & -5-\alpha & 0 \\ -3 & -6 & -5-\alpha \end{vmatrix} = (5+\alpha)(2+\alpha)(\alpha-1).$$

Ce dernier possède trois racines dans $\mathbb{R}$: $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$ ce qui implique trois valeurs propres distinctes pour ψ.
Pour trouver $\ker(\psi - \alpha_1 I)$, il suffit de déterminer les vecteurs $w = (l, m, n)$ tels que $(\psi - \alpha_1 I)(v) = 0$, c'est-à-dire tels que $\psi(w) = -5w$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} 9l + 6m = 0, \\ -3l = 0, \\ -3l - 6m = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ces trois équations sont dépendantes et la résolution du système conduit à $\ker(\psi) = Vect(w_1)$ avec $w_1 = (0,0,1)$.
D'une manière similaire, on détermine $\ker(\psi - \alpha_2 I) = \ker(\psi + 2I)$ avec le système :

$$\begin{cases} 6l + 6m = 0, \\ -3l - 3m = 0, \\ -3l - 6m - 3n = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

qui implique que $\ker(\psi + 2I) = Vect(w_2)$ avec $w_2 = (1, -1, 1)$.
Enfin, on obtient $\ker(\psi - \alpha_3 I) = \ker(\psi - I) = Vect(w_3)$ avec $w_3 = (-2, 1, 0)$.

Remarque 2.4 *Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont les éléments diagonaux car le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.*

3.2 Ordre de multiplicité

Définition 2.6 *[4], [9] Étant donné ψ un endomorphisme de F, $\dim F < \infty$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une valeur propre de ψ. On appelle **ordre de multiplicité** de α sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de ψ et est noté $mul(\alpha)$.*

Exemple 2.6 *Soit*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, le polynôme caractéristique de Λ est

$$P_{\Lambda}(\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)^2.$$

Alors, la multiplicité de $\alpha_1 = 1$ est 1 et la multiplicité de $\alpha_2 = 2$ est 2.

Endomorphisme scindé

On rappel qu'un polynôme est dit scindé s'il s'écrit sous forme produit de facteurs de degré un.

Définition 2.7 *[4], [9] Étant donné $\mathbb{K}$ un corps, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et ψ un endomorphisme de F. Un endomorphisme ψ est dit **scindé** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 2.5 *[4] Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme défini sur F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, est scindé.*

Proposition 2.4 *[4] Étant donné $\mathbb{K}$ un corps, F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, ψ un endomorphisme de F, α une valeur propre de ψ et $F_{\alpha}(\psi)$ l'espace propre de ψ associé à (α). Alors*

$$1 \leqslant \dim F_{\alpha}(\psi) \leqslant mul(\alpha)$$

.

Preuve. [4] Si on note $n = \dim F_{\alpha}(\psi)$; alors comme le sous espace propre $F_{\alpha}(\psi)$ n'est pas réduit à 0 alors il est de dimension supérieure ou égal à 1. D'autre part, on sait que cet espace propre est stable par ψ, de plus le polynôme caractéristique de ψ_1 (ψ_1 représente l'endomorphisme induit par ψ sur $F_{\alpha}(\psi)$) est $(X-\alpha)^n$, ce dernier divise $P_{\psi}(\alpha)$ par suite $n \leqslant mul(\alpha)$. ■

3.3 Polynôme d'endomorphismes et Théorème de CAYLEY-HAMILTON

[4], [9] Pour allez plus loin dans la théorie de la réduction des endomorphismes, il faut penser au théorème du Cayley-Hamilton et la théorie des polynômes annulateurs.

L'idée principale de cette théorie consiste à décomposer l'espace sous forme une somme de sous -espaces sur lesquels un endomorphisme plus simple est induit par l'endomorphisme étudié.

Définition 2.8 *[8] Étant donné $\psi \in \mathscr{L}(F)$, $\dim F = n < \infty$. Alors, ψ est dit **nilpotent** s'il existe un entier naturel $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\psi^p \equiv 0$.*
*Dans ce cas ; le nombre q, appelé **indice de nilpotence** de ψ, est le nombre défini par $q = \inf\{p \in \mathbb{N}^* : \psi^p \equiv 0\}$*

Proposition 2.5 *[5]*
*Soit $\psi \in \mathscr{L}(F)$ un endomorphisme et B une base de F. Alors ψ est **nilpotent** si et seulement si $\Lambda = \mathrm{M}(\psi, \mathrm{B})$ **est nilpotente.***

Preuve. [5]

$$\begin{aligned} \psi \text{ est nilpotent} &\iff \exists q \in \mathbb{N} : \psi^q = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{N} : \mathrm{M}(\psi^q, \mathrm{B}) = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{N} : [\mathrm{M}(\psi, \mathrm{B})]^q = 0 \\ &\iff \exists q \in \mathbb{N}, \Lambda^q = 0. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.7 *[5] 1)*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \longmapsto & \psi(a,b,c) = (b,c,0) \end{array}$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \psi & \neq & 0 \textit{ car } \psi(0,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \\ \psi^2(a,b,c) & = & \psi\left(f(a,b,c)\right) \\ & = & \psi(b,c,0) = (c,0,0). \\ \psi^3(a,b,c) & = & \psi(c,0,0) = (0,0,0) \end{array}$$

Par suite ψ est nilpotent d'indice de nilpotence $q = 3$.
2) ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\Lambda = \mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}_c)$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λ est nilpotente d'indice 2.

Remarque 2.6 *[5] $*$ Tout endomorphisme nilpotent admet une seule valeurs propre $\lambda = 0$*
$*$ Un endomorphisme nilpotent n'est jamais diagonalisable.

Proposition 2.6 *[5]*

Étant donné $\psi \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(F)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :
1) ψ est un endomorphisme nilpotent.
2) Le polynôme caractéristique de ψ est $\mathrm{P}_\psi(x) = x^n$.
3) On peut construire une base de F suivant laquelle la matrice de ψ est triangulaire supérieure.

Preuve. [5] - Supposons que ψ est un endomorphisme nilpotent, par suite le polynôme X^r est un polynôme annulateur de ψ. Donc, cet endomorphisme est trigonalisable et, par suite scindé, de spectre réduit à $\{0\}$. Son polynôme caractéristique et donc X^n.
-Supposons que $\mathrm{P}_f(\mathrm{X})$ est X^n, l'endomorphisme ψ est scindé et on peut donc construire une base dans laquelle la matrice de ψ est triangulaire supérieure. Sachant que les éléments diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres, donc, cette matrice est triangulaire supérieure stricte.
-Supposons qu'il existe une base pour laquelle la matrice Λ associée à l'endomorphisme ψ est triangulaire supérieure stricte, dans ce cas, on déduit que $\Lambda^n = 0$, et par suite $\psi^n = 0$, par simple calcul. ■

Définition 2.9 *[1],[9] Étant donné $\mathbb{K}$ un corps, $\digamma$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, ψ un endomorphisme de $\digamma$.*
L'ensemble de ***polynômes annulateurs*** *de ψ, noté I_ψ, est l'ensemble $\left\{\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] : \mathrm{Q}(\psi) = 0_{\mathscr{L}(\digamma)}\right\}$.*

Remarque 2.7 *[1],[4], [9]*
1. L'ensemble I_ψ est un ensemble non vide puisque P_ψ le polynôme caractéristique est un élément de I_ψ. En effet,

$$\mathrm{P}_\psi(\psi) = \mathrm{P}_\Lambda(\Lambda) = \det(\Lambda - \Lambda.\mathrm{I}_n) = 0.$$

2. Il existe au moins $m_\psi \in \mathrm{I}_\psi$ tel que pour tout polynôme P de I_ψ et $\deg m_\psi \le \deg \mathrm{P}$, m_ψ est appelé ***polynôme minimal*** *de ψ. Alors,*

- le polynôme minimal est un polynôme annulateur de ψ c'est-à-dire $m_\psi(\psi) = 0_{\mathscr{L}}(\mathrm{E})$,

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\alpha.m_\psi(x)$ est aussi un polynôme minimal de ψ,

- Les racines de m_ψ sont les mêmes de P_ψ autrement dit le polynôme m_ψ divise P_ψ.

-Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal (mais la réciproque n'est vraie en général, c'est à dire on peut trouver des matrices possédant le même polynôme minimal mais elles ne sont pas nécessairement semblables.

Proposition 2.7 *[4], [9] Admettant $\psi \in \mathscr{L}(\digamma)$, $\dim \digamma < \infty$ et B une base de $\digamma$. Alors ψ possède le même polynôme minimal de son matrice associée dans la base B.*

Preuve. [4], [9] Soit $\Lambda = \mathrm{M}(\psi, \mathrm{B})$. Mettons $m_\psi(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$. Alors

$$m_\psi(\psi) = a_0.\mathrm{I}_\digamma + a_1.\psi + ... + a_n.\psi^n = 0$$

et

$$\begin{aligned} m_\psi(\Lambda) &= a_0.\mathrm{I}_n + a_1.\Lambda + ... + a_n.\Lambda^n \\ &= a_0.\mathrm{M}(\mathrm{I}_\digamma, \mathrm{B}) + a_1.\mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}) + ... + a_n.\mathrm{M}(\psi^n, \mathrm{B}) \\ &= \mathrm{M}(a_0.\mathrm{I}_\digamma + a_1.\psi + ... + a_n.\psi^n, \mathrm{B}) \\ &= \mathrm{M}(m_\psi(\psi), \mathrm{B}) \\ &= \mathrm{M}(0, \mathrm{B}) = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$m_\psi(\Lambda) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}.$$

On suppose maintenant l'existence d'un polynôme $\mathrm{S} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{S}(\Lambda) = 0_{\mathscr{L}(\digamma)}$. On a

$$\mathrm{S}(\psi) = b_0.\mathrm{I}_\digamma + b_1.\psi + ... + b_n.\psi^n$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\mathrm{S}(\psi), \mathrm{B}) &= b_0.\mathrm{M}(\mathrm{I}_\digamma, \mathrm{B}) + b_1.\mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}) + ... + b_n.\mathrm{M}(\psi^n, \mathrm{B}) \\ &= b_0.\mathrm{M}(\mathrm{I}_\digamma, \mathrm{B}) + b_1.\mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}) + ... + b_n.(\mathrm{M}(\psi, \mathrm{B}))^n \\ &= \mathrm{S}(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{M}(\mathrm{S}(\psi), \mathrm{B}) = \mathrm{S}(\Lambda) = 0$, de plus $\mathrm{S}(\psi) = 0_{\mathscr{L}(\digamma)}$ ce qui donne $\mathrm{S} \in \mathrm{I}_\psi$ et donc $\deg m_\psi \le \deg \mathrm{Q}$. La preuve est ainsi achevée. ∎

Proposition 2.8 *[4], [9] Supposons $\psi \in \mathscr{L}(\mathcal{F})$, $\dim \mathcal{F} < \infty$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Alors*

$$(Q(\psi) = 0_{\mathscr{L}(\mathcal{F})}) \Leftrightarrow Q(x) \textit{ est divisible par } m_\psi(x).$$

Preuve. [4], [9] $\Leftarrow$) Supposons que $Q(x)$est divisible par $m_\psi(x)$. Alors, on peut trouver un polynôme $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(x) = m_\psi(x).Q_1(x)$, ce qui implique

$$Q(\psi) = m_\psi(\psi).Q_1(\psi) = 0_{\mathscr{L}(E)}.Q_1(\psi) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Par suite $Q(\psi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
$\Rightarrow$) Supposons que $Q(\psi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $Q(x) = m_\psi(x).Q_1(x) + R(x)$ avec

$$0 \leq \deg R \leq \deg m_\psi. \tag{2.6}$$

Il suffit de montrer que $R(x) = 0$. Supposons que $R(x) \neq 0$. On a

$$R(\psi) = Q(\psi) - m_\psi(\psi).Q_1(\psi) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

on obtient donc $R \in I_\psi$, dans ce cas $\deg m_\psi \leq \deg R$ ce qui contredit (2.6). Par suite $R(x) = 0$.
■

Corollaire 2.3 *[4] Soient $\psi \in \mathscr{L}(\mathcal{F})$, $\dim \mathcal{F} < \infty$. Le polynôme caractéristique de ψ est divisible par le polynôme minimal m_ψ, de plus il possède les mêmes racines de P_ψ.*

Exemple 2.8 *Préciser le polynôme minimal de Λ donnée par*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de Λ est

$$P_\Lambda(\alpha) = (5-\alpha)(1-\alpha)(9-\alpha).$$

Comme les racines de $P_\Lambda(\alpha)$ sont tous simples, alors $m_\psi(\alpha) = P_\psi(\alpha)$.

Exemple 2.9 *La même question pour la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice associée à $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Alors, le polynôme caractéristique de Λ est

$$P_\Lambda(\alpha) = (1+\alpha)^2(3-\alpha).$$

Donc, soit $m_\psi(\alpha) = (1+\alpha)(3-\alpha)$, soit $m_\psi(\alpha) = P_{m_\psi}(\alpha)$. Il suffit de vérifier que $m_\psi(\Lambda) = 0$. Comme

$$(I+\Lambda)(3I-\Lambda) = 0_{M_3}(\mathbb{R}),$$

alors $m_\psi(\alpha) = (1+\alpha)(3-\alpha)$.

Théorème 2.2 *[9] Soient $\psi \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{F}_1$ un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}$ stable par ψ. Étant donné l'application*

$$\begin{array}{rccl} \psi_1 : \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 \\ x & \longmapsto & \psi_1(x) = \psi(x). \end{array}$$

Alors $m_\psi(x)$ est divisible $m_{\psi_1}(x)$.

Preuve. [9] Il suffit de montrer $m_{\psi_1}(\psi_1) = 0_{\mathscr{L}(F)}$. On pose $m_{\psi}(x) = a_0 + a_1.x + ... + a_n.x^n$. Donc $m_{\psi_1}(\psi_1(x)) = a_0.x + a_1.\psi_1(x) + ... + a_n.\psi_1^n(x)$.

$$\begin{aligned} m_{\psi_1}(\psi_1(x)) = a_0.x + a_1.\psi_1(x) + ... + a_n.\psi_1^n(x) &= a_0.x + a_1.\psi(x) + ... + a_n.\psi^n(x) \\ &= m_{\psi}(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où $m_{\psi_1}(x) = 0_{\mathscr{L}(F)}$. ∎

4 Théorème de CAYLEY-HAMILTON

Théorème 2.3 ***Théorème de CAYLEY-HAMILTON*** *[1],[4]*
Chaque endomorphisme (ou matrice) annule son polynôme caractéristique.

Preuve. [1],[4] Admettons $u \in F$. On note F le sous espace $\mathbb{K}[\psi](u)$ (dont la base est $\{x, \psi(x), ..., \psi^q(x)\}$, q est le dgré du polynôme minimale) et P le polynôme annulateur de u. Sachant que F est stable par ψ qui admet une matrice associée à P ; par suite a comme polynôme caractéristique P.
On sait qu'il existe un polynôme Q vérifiant $P_{\psi} = P_{\psi F}Q$ car le sous espace F est stable par ψ.
On déduit donc

$$P_{\psi} = PQ$$

et

$$P_{\psi}(\psi)(x) = (Q(\psi) o P(\psi))(x) = 0$$

comme $P_{\psi}(x) = 0$.
On obtient donc pour tout u, l'endomorphisme $P_{\psi}(\psi) = 0$. ∎

5 Exercices corrigés

Exercice 2.1 *[6] Considérons l'endomorphisme $f : E \to E$, E un espace vectoriel. Supposons que f admet deux vecteurs propres U et U′ associés aux deux valeurs propres distinctes α et β . Montrer que la somme de ces vecteurs propres ne peut pas être un vecteur propre de l'endomorphisme f.*

Solution. [6] On a U un vecteur propre associé à la valeur propre α, alors $U \neq 0$ et $f(U) = \alpha U$, de même U' un vecteur propre associé à la valeur propre β, alors $U' \neq 0$ et $f(U') = \beta U'$. Donc,

$$f(U + U') = f(U) + f(U') = \alpha U + \beta U'.$$

Supposons qu'il existe un scalaire λ vérifiant $f(U + U') = \lambda.(U + U')$, par suite

$$\begin{aligned} f(U + U') = \lambda.(U + U') = \alpha U + \beta U' &\Rightarrow (\alpha - \lambda).U + (\beta - \lambda)U' = 0 \\ &\Rightarrow \alpha - \lambda = 0 \ et \ \beta - \lambda = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = \beta \end{aligned}$$

ce qui contradiction car α et β sont distinctes.

Exercice 2.2 *[9] Chercher le polynôme caractéristique, le polynôme minimale et les espaces propres des matrices suivantes :*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Solution.[9] En calculant le déterminant $\det(\Lambda - x\mathrm{I}_n)$, on obtient

$$\mathrm{P}_{\Lambda}(x) = -(x-2)^2(x+1).$$

La matrice Λ admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 1$ de multiplicité 1.
Précisant les sous espaces propres :
Pour déterminer le sous espace propre $\mathcal{F}_2(\Lambda)$, il suffit de résoudre le système $\Lambda \mathrm{X} = 2\mathrm{X}$ qui est équivalent à la seule équation $l + m + n = 0$, on trouve que les deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent le sous espace propre $\mathcal{F}_2(\Lambda)$.
Pour le deuxième sous espace $\mathcal{F}_{-1}(\Lambda)$, cet espace est traduit par le système linéaire homogène

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2l - m - n & = & 0, \\ -l + 2m - n & = & 0, \\ -l - m + 2n & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

qui est de rang 2. Cet espace est de dimension 1, de plus, il est engendré par le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme minimale de la matrice Λ est donné par $m_{\Lambda}(x) = -(x-2)(x+1)$ car

$$(\Lambda - 2\mathrm{I}_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})})(\Lambda + \mathrm{I}_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}) = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$$

Pour la matrice Λ', on obtient

$$\mathrm{P}_{\Lambda'}(x) = (x-2)(x-1)^2.$$

ce polynôme admet deux racines (valeurs propres) : $\alpha_1 = 2$ valeur propre simple et $\alpha_2 = 1$ valeur propre de multiplicité égal à 2.
Précisant les sous espaces propres : Pour déterminer le sous espace propre $\mathcal{F}_1(\Lambda)$, il suffit de résoudre le système $\Lambda'\mathrm{X} = 2\mathrm{X}$ qui montre que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendre le sous

espace propre $F_1(A)$.
Pour le deuxième sous espace propre $F_2(A)$, il est traduit par le système linéaire homogène

$$\begin{cases} -l+m-n &= 0, \\ l-m+n &= 0, \\ l &= 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

il est engendré par le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme minimale de la matrice A est donné par $m_A(x) = (x-2)(x-1)$ car

$$(A - 2\mathrm{I}_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})})(A - \mathrm{I}_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}) = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$$

Exercice 2.3 *[4] Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Donner les polynômes minimales de cette matrice.

Solution.[4] 1. En utilisant les propriétés du déterminant, on obtient

$$\mathrm{P}_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-1 & 2 \\ -2 & -2 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{P}_A(x) = (x-1)(x+1)^2.$$

Les racines de ce polynôme qui sont les valeurs propres de A sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.
Pour déterminer le sous espace propre $F_1(A)$, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 0l+2m-2n &= 0, \\ 2l+0m-2n &= 0, \\ 2l+2m-4n &= 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

qui admet comme solution $l = m = n$ ce qui implique $m_1(A) = vect(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Pour le deuxième sous espace propre $F_{-1}(A)$, il suffit aussi de résoudre le système

$$\begin{cases} 2l+2m-2n &= 0, \\ 2l+2m-2n &= 0, \\ 2l+2m-2n &= 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

qui est équivalant à $2l+2m-2n = 0$, on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m+n \\ m \\ n \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $F_{-1}(\Lambda) = vect(u_2, u_3)$ avec

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le polynôme minimal de Λ est

$$m_\Lambda(x) = (x-1)(x+1).$$

Exercice 2.4 *[1] Admettons* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* k *dont les éléments sont complexes satisfaisant* $AB = BA$ *et toutes les valeurs propres de* A *sont distinctes.*
Prouver que chaque vecteur propre de A *est aussi vecteur propre de* B.

Solution. [1] 1. Supposons u un vecteur propre de la matrice A, dans la base canonique, associé à la valeur propre γ vérifiant $Au = \gamma u$, donc en utilisant l'hypothèse de l'exercice, on obtient

$$BAu = B.\gamma u$$

et

$$A.Bu = \gamma.Bu$$

ceci dit que le vecteur Bu représente un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre γ. Puisque toutes les valeurs propres de A sont distinctes alors tout sous espace propre de A est une droite vectorielle contenant Bu et u et donc on peut trouver un scalaire δ vérifiant $Bu = \delta u$ ce qui implique que u est un vecteur propre de B associé à δ.
On en déduit que chaque vecteur propre de A est aussi vecteur propre de B.

Exercice 2.5 *[4] Considérons la matrice* Λ *de type* n *dont les scalaires sont complexes et*

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice de type $2n$ *et scalaires complexes.*
Donner le polynôme caractéristique de Λ' *en fonction de celui de* Λ.

Solution.[4] En effectuant un calcul du déterminant de $YI_{2n} - \Lambda'$ en faisant une transformation par des propriétés élémentaires par blocs. Pour la première étapes, on multiplie les n premières colonnes par Y puis en remplaçant la colonne C_i par la colonne $C_i + C_{i+n}$, on obtient

$$P_{\Lambda'}(Y) = \begin{vmatrix} YI_n & -\Lambda \\ -I_n & YI_n \end{vmatrix} = \frac{1}{Y^n} \begin{vmatrix} Y^2 I_n & -\Lambda \\ -YI_n & YI_n \end{vmatrix} = \frac{1}{Y^n} \begin{vmatrix} Y^2 I_n - \Lambda & -\Lambda \\ 0 & YI_n \end{vmatrix}.$$

On déduit donc

$$P_{\Lambda'}(Y) = P_\Lambda(Y^2)$$

ce qui implique que α est une valeur propre de la matrice Λ' équivaut à dire que le carré de α est une valeur propre de Λ. De plus, $m_{\Lambda'}(\alpha) = m_\Lambda(\alpha^2)$ pour tout $\alpha \in S_p(\Lambda' - \{0\})$, et $m_{\Lambda'}(0) = 2m_\Lambda(0)$ si $0 \in S_p(\Lambda')$.

Exercice 2.6 *[9] Étant donné H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n sur lequel on définit l'endomorphisme ψ. Supposons que l'espace H admet une décomposition sous forme une somme directe de sous espaces propres stables sous la forme*

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_p.$$

Sachant que sur chaque sous-espace H_j, l'endomorphisme ψ induit un endomorphisme ψ_j dont le polynôme caractéristique est donné par $P_{\psi_j}(x)$. Montrer que

$$P_\psi(x) = P_{\psi_1}(x)....P_{\psi_p}(x)$$

Solution. [9] Notons pour tout $j \in \{1,...p\}$, $k_j = \dim H_j$ et B_j une base de H_j qui forment une partition de la bas de H dans laquelle l'endomorphisme est représenté par la matrice bloc diagonale

$$M = Diag(M_{\psi_1}, M_{\psi_2}, ..., M_{\psi_p})$$

où M_{ψ_j} représente la matrice associée à ψ_j dans la base B_j, par suite

$$\det(M - xI_n) = \det(M - xI_{k_1}).\det(M - xI_{k_2})...\det(M - xI_{k_p})$$

d'où le résultat.

Exercice 2.7 *[9] Étant donné g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $(x, y, z) \to g(x, y, z) = (y + z, x + z, z)$.*
Notons $M = M(g, B_c)$ où B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de g.*
2. *Donner l'expression de M^{-1}, M^3 en fonction de M, M^2 et I_3.*

Solution. [9]

En déterminant la matrice associée à g on obtient $M = M(g, B)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Admettons $x \in \mathbb{R}$, alors $P_g(x) = P_M(x)$

$$\begin{aligned} P_M(x) &= \det(M - xI_3) \\ &= -x^3 + x^2 + x - 1 \\ &= (1 - x)(x^2 - 1) \end{aligned}$$

Donc, le polynôme caractéristique de la matrice M est de degré 3, admet deux racines $\alpha_1 = -1$ simple et $\alpha_2 = 1$ double. Par suite, le spectre de la matrice M est $S_p(M) = \{-1, 1\}$.
2. En utilisant le polynôme caractéristique de M, on obtient $P_M(0) = -1 \neq 0$. Alors, la matrice M admet un inverse. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\begin{aligned} P_M(M) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -M^3 + M^2 + M = I_{\mathbb{R}^3}, \\ &\Rightarrow \quad M^{-1} = -M^2 + M + I_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Pour trouver la matrice M^3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\begin{aligned} P_M(M) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -M^3 + M^2 + M - I_{\mathbb{R}^3} = 0, \\ &\Rightarrow \quad M^3 = M^2 + M - I_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

6 Exercices proposés

Exercice 2.8 *[6] Étant donné f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Prouver que spectre de f est $\{0, 1\}$.*

Exercice 2.9 *[6] Étant donné M une matrice vérifiant $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$.*
1. Préciser les valeurs propres de M.
2. Déterminer toutes les matrices M d'ordre 2 satisfaisant $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$.

Exercice 2.10 *[6] Trouver le valeurs propres et les vecteurs propres de*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $0 < \varphi < 2\pi$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

Exercice 2.11 *[6] Prouver qu'une matrice nilpotente n'a que des valeurs propres nulles.*

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

1 Introduction

Quand on veut décrire un endomorphisme ψ d'un espace vectoriel, on se base à chercher une base de $\mathcal{F}$ suivant laquelle la matrice associée à cet endomorphisme soit simple que possible.

2 Endomorphismes diagonalisables

Définition 3.1 *[4] L'endomorphisme ψ est dit diagonalisable si $\mathcal{F}$ possède une base dans laquelle la matrice associée à ψ est diagonale.*

Cette base est appelée une base de diagonalisation de ψ.

Remarque 3.1 *[9] Pour diagonaliser un endomorphisme il faut chercher une base de vecteurs propres de ψ dans laquelle ψ est représente par une matrice diagonale*

$$\mathrm{D} = diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

α_i définie une valeur propres de ψ.
Les vecteurs propres $u_1, \ldots, u_n$ associés aux $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ forment des vecteurs colonnes d'une matrice inversible P. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{D}$$

avec $\mathrm{M} = \mathrm{M}at_{\mathrm{B}}\psi$

Remarque 3.2 *[9] Un endomorphisme n'est pas forcément diagonalisable.*
1. A titre d'exemple, puisque une matrice diagonale nilpotente est nécessairement nulle alors un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais diagonalisable.
2. Les matrices de type n et de scalaires dans le corps $\mathbb{K}$ dont le polynôme caractéristique est $(x-\alpha)^n$ ne sont pas diagonalisables.
Autrement dit, supposons que α est la seule valeur propre d'une matrice M, alors si cette dernière est diagonalisable, elle possède donc une matrice inversible P vérifiant $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \alpha \mathrm{I}_n$ c'est-à-dire $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\alpha\mathrm{I}_n)\mathrm{P}^{-1} = \alpha\mathrm{I}_n$.
Dans la cas générale, on vas voir que le problème revient à l'ordre de multiplicité des valeurs propres.

2.1 Condition de diagonalisation

Proposition 3.1 *[9] Étant donné ψ un endomorphisme de l'espace $\mathcal{F}$. Si le polynôme caractéristique de ψ est scindé sur $\mathbb{K}$ et ses racines sont tous simples alors ψ est diagonalisable.*

Preuve. [9] Supposons que $spec(\psi) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ est le spectre de ψ, alors

$$P_\psi(x) = (-1)^n (x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)$$

avec α_j sont deux à deux distinctes. Admettons $(u_1, u_2, ..., u_n)$ les n vecteurs propres associés, alors, d'après le théorème 2.1, ces vecteurs sont linéairement indépendants donc ils forment une base à l'espace $\mathcal{F}$. Par suite, la matrice associé à l'endomorphisme ψ est semblable à la matrice diagonale $Diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, d'où le résultat. ■

Remarque 3.3 *[9] Sous ces conditions, on remarque que l'espace $\mathcal{F}$ est une somme directe des sous espaces propres $\mathcal{F}(\alpha_j)$, $j \in (1, ..., n)$ qui sont tous des droites, car chaqu'un d'eux contient la droite $\mathbb{K}_{u_j}$, on en déduit donc*

$$\mathcal{F} = \mathbb{K}_{u_1} \oplus ... \oplus \mathbb{K}_{u_n} \subseteq \mathcal{F}(\alpha_1) \oplus ... \oplus \mathcal{F}(\alpha_n) = \mathcal{F}$$

ce qui signifie $\mathcal{F}(\alpha_j) = \mathbb{K}_{u_j}$

Dans cette étape, on résume tous les résultats obtenus et on déduit le théorème fondamental sur la diagonalisation :

Théorème 3.1 *[1],[4], [8] [9] Étant donné ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$. Les énoncés suivant sont équivalents :.*
1. L'endomorphisme ψ (ou la matrice associée à ψ dans une base de $\mathcal{F}$) est diagonalisable.
2. Le polynôme caractéristique de ψ est scindé sur $\mathbb{K}$ et chaque sous espace propre de ψ ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
3. $\mathcal{F}$ est la somme directe des sous espaces propres de ψ.

Preuve. [4], [8] [9] (3) ⇒ (1) est trivial.
(1) ⇒ (2). Supposons $B = \{u_1, ..., u_n\}$ une base de $\mathcal{F}$ dans laquelle la matrice associée à l'endomorphisme ψ est diagonale de type

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 I_{l_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_p I_{l_p} \end{array}\right),$$

où les scalaires α_i sont distincts deux à deux, $l_1 + ... + l_p = \dim \mathcal{F}$.
En effectuant un calcul simple, on obtient le polynôme caractéristique de ψ sous la forme

$$P_\psi(x) = (-1)^n (x - \alpha_1)^{l_1} ... (x - \alpha_k)^{l_p}$$

Comme la matrice D est diagonale, alors chaque sous espace propre contient exactement l_i vecteurs de la base B, c'est-à-dire que

$$\dim \mathcal{F}(\alpha_i) = l_i.$$

(2) ⇒ (3). Nous savons que la somme des sous espaces propres est directe et comme la dimension de chaque espace propre $\mathcal{F}(\alpha_{i)}$ égale à l_i et que la somme de l_i égale à la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ alors, on déduit que ce dernier est la somme directe des sous-espaces propres $\mathcal{F}$. D'où la preuve. ■

Remarque 3.4 *[9] On peut remarquer qu'une matrice carrée peut être diagonalisable sur le corps complexe mais ne l'être pas sur le corps réel car si le corps $\mathbb{K}$ est complexe alors chaque polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé ce qui n'est pas vrai si le corps $\mathbb{K}$ est réel.*

2.2 La méthode pratique de la diagonalisation

[4], [9]

Considérons une matrice $\mathcal{A}$ de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à l'endomorphisme ψ défini sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ (rapporté à une base $B = \{u_1, ..., u_n\}$.

Pour étudier la diagonalisation d'un endomorphisme ψ, on procédera en général de la façon suivante :

1.En premier lieu, on calcule le polynôme caractéristique de l'endomorphisme ψ.

2. Si le polynôme caractéristique $P_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n(x-\alpha_1)^{l_1}...(x-\alpha_k)^{l_p}$ est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ c'est à dire que les scalaires α_i étant deux à deux distincts et $l_1 + ... + l_p = n$, alors on doit chercher le rang des matrices $\mathcal{A} - \alpha_{I_n}$ (pour savoir si la matrice $\mathcal{A}$ est diagonalisable) c'est-à-dire il faut chercher que

$$\forall i \in [1, ..., p], rg(\mathcal{A} - \alpha_i I_n) = n - l_i.$$

3. Si cette propriété est vérifiée, en déduit que la matrice $\mathcal{A}$ est semblable à la matrice diagonale

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 I_{l_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha_p I_{l_p} \end{array}\right).$$

4. Pour chercher la matrice de passage P, il faut résoudre les systèmes linéaires homogènes $\mathcal{A} - \alpha_i I_n)X = 0_n$ d'inconnue X afin de préciser les sous espaces propres $\mathcal{F}(\alpha_i) = \ker(\psi - \alpha_i I_{\mathcal{F}})$ et de trouver une base B_α de chaque espace propre et la base propre sera formée de vecteurs propres $(W_{i,1}, ..., W_{i,l_i})$ c'est- dire- que c'est la réunion de bases B_{α_i} .

5. Finalement, la matrice P est donnée par

$$[W_{1,1}, ..., W_{1,l_1}, ...W_{i,1}, ..., W_{i,l_i}, ..., W_{p,1}, ..., W_{p,l_p}]$$

d'où

$$P^{-1}\mathcal{A}P = D.$$

Exemple 3.1 *[4] Considérons la matrice*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $P_{\mathcal{A}}(x) = (x-2)^2(x-1)$ *qui admet deux valeurs propres* $\alpha_1 = 1$ *une valeur simple et* $\alpha_2 = 2$ *une valeur propre double.*

Pour déterminer le sous espace propre $\mathcal{F}_1(\mathcal{A})$*, il suffit de résoudre le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -l+3m+2n & = & 0, \\ -2l+4m+2n & = & 0, \\ 2l-3m-n & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

qui est équivalant à $l = y = -n$*, ainsi* $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}) = vect(u_1)$ *avec*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et l'étude de sous espace propre $F_2(\Lambda)$, conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2l+3m+2n &=& 0, \\ -2l+3m+2n &=& 0, \\ 2l-3m-2n &=& 0. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

qui est équivalant à $2l-3y-2n=0$, ainsi $F_2(\Lambda)=vect(u_2,u_3)$ avec

$$u_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \text{ et } u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La somme des dimensions des sous espaces propres égale à 3, par suite la matrice Λ est diagonalisable et la famille (u_1,u_2,u_3) forme une base de diagonalisation, dans ce cas la matrice de passage de la base canonique à la base propre est donnée par

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

dont la matrice inverse P^{-1} est donnée par

$$\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&2&1\\2&-3&-1\end{pmatrix}$$

et la matrice diagonale de l'endomorphisme Λ est $diag(1,2,2)$. On en déduit la matrice Λ s'écrit sous la forme

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&2&1\\2&-3&-1\end{pmatrix}.$$

Remarque La diagonalisation d'une matrice nous permettre de calculer la puissance nième de cette dernière

Exemple 3.2 *On reprend l'exemple précédent pour calculer Λ^n*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^n &=& \left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)^n=\left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)\mathrm{PDP}^{-1}\ldots\left(\mathrm{PDP}^{-1}\right) \\ &=& \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^n &=& \mathrm{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}\mathrm{P}^{-1} \\ &=& \begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&-2\\-1&2&1\\2&-3&-1\end{bmatrix} \\ &=& \begin{bmatrix}2-2^{n+1}&3(-1-2^n+2^{n+1})&-2-2^{n+1}\\2-2^{n+1}&-3-2^{n+1}&-2-2^{n+1}\\-2+2^{n+1}&3(-1-2^n)&2-2^n\end{bmatrix} \end{array}$$

Proposition 3.2 *[1] Un endomorphisme est diagonalisable équivaut à dire que son polynôme minimum n'ait que des racines simples.*

3 Endomorphismes trigonalisables

On considère toujours $\mathbb{K}$ un corps, $\mathcal{F}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
Si le polynôme caractéristique de l'endomorphisme ψ est scindé sur le corps et la diagonalisation de l'endomorphisme ψ est impossible, on peut penser à sa trigonalisation.

Définition 3.2 *[4] L'endomorphisme ψ est dit trigonalisable si $\mathcal{F}$ possède une base dans laquelle la matrice associée à ψ est triangulaire supérieure.*
Autrement dit si la matrice associée à ψ est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque 3.5 *[1], [4], [8] 1. La trigonalisation d'un endomorphisme ψ (ou sa matrice associée) est de trouver une base de $\mathcal{F}$ dans laquelle ψ se présenté par une matrice triangulaire supérieure, cette base est appelée "base de trigonalisation".*
2. La diagonalisation est un cas particulier de la trigonalisation.
3. Dans le cas où la matrice de ψ dans la base $(u_1, ..., u_n)$ est triangulaire supérieure, alors sa matrice dans la base inversé $(u_n, ..., u_1)$ est triangulaire inférieure.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Théorème 3.2 *[8], [9] Étant donné ψ un endomorphisme de l'espace $\mathcal{F}$. ψ est trigonalisable si est seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.*
Les valeurs propres (dont les vecteurs propres associés est une base de $\mathcal{F}$ dans laquelle la matrice de ψ est triangulaire supérieure) représentent les valeurs diagonaux de la matrice triangulaire.

3.1 La méthode pratique de la trigonalisation

[1]
Considérons une matrice Λ de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à l'endomorphisme ψ défini sur un espace $\mathcal{F}$ (rapporté à une base $\mathrm{B} = \{u_1, ..., u_n\}$.)
Pratiquement, pour trigonaliser la matrice Λ, on suit les procédures suivantes :
1. Cherchons les valeurs propres et les sous espaces propres,
2. Choisissons une base de vecteurs propres pour les sous espaces propres qui sont de dimension égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propres associée,
3. Pour les sous espaces propres qui admettent une bases incomplète, on doit la compléter par des vecteurs non propres, souvent par des vecteurs de la base canonique.

Exemple 3.3 *[1] Considérons la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est $\mathrm{P}_\Lambda(\alpha) = -(\alpha+1)^2(\alpha-3)$ qui admet deux valeurs propres $\alpha_1 = 3$ une valeur propre simple et $\alpha_2 = -1$ une valeur propre double.
Pour chercher le sous espace vectoriel associé à la valeur propre $\alpha_1 = 3$, qui a de dimension une, on résout le système

$$(\Lambda - 3\mathrm{I})\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2l-3m+4n & = & 0, \\ 4l-10m+8n & = & 0, \\ 6l-7m+4n & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

qui équivaut à $2l = m = n$*, on obtient* $F_3(\Lambda) = vect(v_1)$*, avec* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$*, de même le sous espace propre associé à la valeur propre* $\alpha_2 = -1$*, qui est de dimension une, on résout le système*

$$(\Lambda + \mathrm{I}) \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2l-3m+4n & = & 0, \\ 4l-6m+8n & = & 0, \\ 6l-7m+8n & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

qui équivaut à $n = l, m = 2l$*, on obtient* $F_3(\Lambda) = vect(v_2)$*, avec* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Ce sous espace propre étant de dimension inférieure à 2, l'ordre de multiplicité de la valeur propre* $\alpha_2 = -1$*, donc la matrice* Λ *n'est pas diagonalisable.*
On pense maintenant à la trigonalisation de la matrice Λ*, pour cela, considérons la base* v_1, v_2, v_3 *avec* v_3 *est un vecteur quelconque ne dépend pas de* v_1 *et* v_2*, on aura la matrice triangulaire*

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

semblable à Λ*. Pour Trouver les valeurs a et b ainsi que la matrice de passage, on peut prendre* v_3 *par exemple le vecteur* e_1 *de la base canonique car*

$$det(v_1, v_2, e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \neq 0.$$

On peut remarquer qu'on peut choisir $v_3 = e_2$ *(par contre on ne peut pas choisir* $v_3 = e_3$ *car* $v_1 = e_3 + v_2$*). Par suite, la matrice de passage est donnée par*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\Lambda' = \mathrm{P}^{-1} \Lambda \mathrm{P}.$$

Précisons les valeurs de aet b. On a

$$\psi(e_1) = a.v_1 + b.v_2 - e_1 = (1, 4, 6)$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b-1 & = & 1, \\ 2a+2b & = & 4, \\ 2a+b & = & 6. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

d'où

$$a = 4, b = -2$$

et

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.6 *[1] Il existe un nombre infini de changement de base permettant de trigonaliser une matrice.*

Proposition 3.3 *[4] Un endomorphisme est trigonalisable équivaut à dire il possède un polynôme annulateur non nul scindé.*

4 Réduction de Jordan

[5] Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs "presque" diagonaux.

4.1 Blocs et matrices de Jordan

[5]

Définition 3.3 *Toute matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

est appelée ***bloc de Jordan*** *avec* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $P \geqslant 1$

C'est donc une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients α sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale, puis des 0 encore au-dessus.

Exemple 3.4 *[5]*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J(2),$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = J(-1),$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = J(-1).$$

Définition 3.4 ***Matrice du Jordan***[5] *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$. *On appelle* ***matrice du Jordan*** *toute matrice* ***diagonale J*** *de la forme*

$$\begin{aligned} J &= \textit{diagonale}(J(\lambda_1), J(\lambda_2), ..., J(\lambda_k)) \\ &= \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & 0 & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où $J(\lambda_i)$ *soit des* ***blocs de Jordan.***

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, et les valeurs $\lambda \in \mathbb{K}$ sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales). La notation 0 désigne une matrice nulle (elles peuvent être de tailles différentes).

Théorème 3.3 *[5]* ***Théorème de la réduction à la forme du Jordan***
Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ *a son polynôme caractéristique scindé sur* $\mathbb{K}$, *alors* A *est semblable à une matrice de Jordan, appelée* ***réduite de Jordan de*** A, *il existe donc* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *inversible telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & 0 & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

où $J(\lambda_k)$ *sont des blocs de Jordan.*

Autrement dit

Théorème 3.4 *[5] On dit que* $f \in \mathscr{L}(E)$ *admet* ***une réduction du Jordan*** *s'il existe une base de* E *dans laquelle* ***la matrice est de la forme du Jordan.***

$$\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & 0 & \\ & J(\lambda_k) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* f.

[5]Cette réduction est bien pratique (seule la diagonale et la sur diagonale de la matrice dans la nouvelle base contiennent des scalaires non nuls).

- La forme diagonale est un cas particulier de la forme du Jordan où tout les blocs de Jordan sont d'ordre 1, associé à une seule valeur propre.

- La forme du Jordan est un cas particulier de la forme Triangulaire.

- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la matrice réduite de Jordan le représentant est diagonale.

- Les λ_i qui apparaissent dans les blocs de Jordan sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.

– Une même valeur λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.

– En particulier, ce théorème s'applique à toutes les matrices complexes.

– Unicité. Cette décomposition est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f). Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

– Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre E_λ.

– La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

– La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

Théorème 3.5 ***Théorème du Jordan :(les conditions) :***
[5]Soit E *un* $k.e.v$ *et soit* f *un endomorphisme de* E, $\dim E = n$ *. Alors,* f *admet* ***une réduction de Jordan*** *si et seulement si* f ***est un endomorphisme scindé de*** E**.**

[5]Voici une méthode basique pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi qu'une matrice de passage :
• Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
• Pour chaque valeur propre λ, calculer le sous-espace propre $E_\lambda = Ker(A-\lambda In)$ et trouver une base de E_λ. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $dimE_\lambda$
. • Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ., on construit le bloc de Jordan associé :
- Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A-\lambda In)v_2 = v_1$.
- Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A-In)v_3 = v_2$.
- On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.
- On a $Av_1 = \lambda v_1$, puis $Av_2 = v1 + \lambda v2, ..., Av_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.
- Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, ..., v_p)$, la matrice associée à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan.
-On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).

Exemple 3.5 *[5] Trouver la forme de Jordan de la matrice suivante (dans* $\mathbb{R}$).
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
Soit $\lambda \in S_p(A)$.

$$P_A(\lambda) = (1+\lambda)^2(2-\lambda) = (1+\lambda)(1+\lambda)(2-\lambda).$$

et toutes les valeurs propres sont dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *donc A admet une réduction du Jordan.*
1. Pour $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
E_A(2) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{3}z = y, \frac{4}{3}z = x \right\} \\
&= \left\{ z\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right), z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle v_1 \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow B_1 = \{v\}$ *est une base de* $E_A(2)$. <u>*pour* $\lambda = -1$</u>

$$\begin{aligned}
E_A(-1) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 4z = -x, -y + 2z = -y, -x + 2y + 2z = -z \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, z = 0 \right\} \\
&= \left\{ (2y, y, 0), y \in \mathbb{R} \right\} = \langle v_2 = (2,1,0) \rangle
\end{aligned}$$

par suite $\dim E_A(-1) = 1 < mul\,(\lambda = -1)$ *. D'après la décomposition spectrale.*

$\mathbb{R}^3 = \ker(A - 2I_3) \oplus \ker(A + I_3)^2$ *et donc il existe une base de* $\mathbb{R}^3$, $B = B_1 \cup B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$\begin{aligned}
J &= M(f, B) = \begin{bmatrix} J(2) & 0 \\ 0 & J(-1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{l}\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\end{array}
\end{aligned}$$

D'après la définition

$$\left\{ \begin{array}{c} Av_1 = 2v_1 \\ Av_2 = 1v_2 \\ Av_3 = 0v_1 + v_2 - v_3 \end{array} \right. \quad ....(I)$$

(pour la troisième colonne de la matrice $J(-1)$*, on ne peut pas choisir la deuxième composante égale à 0, car si c'est le cas, on obtient le vecteur* v_3 *un vecteur propre de la valeur propre (-1), ce qui n'est pas vrai).*

Il reste à chercher $v_3(x,y,z)$*. Pour ce faire, on a d'après le système (I), on a*

$$\begin{aligned}
Av_3 &= v_2 - v_3 \Longleftrightarrow Av_3 = (2,1,0) - (x,y,z) \\
&\Rightarrow Av_3 = (2 - x, 1 - y, -z) \\
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + 4z = 2 - x \\ -y + 2z = 1 - y \\ -x + 2y + 2z = -z \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = \frac{1}{2} \\ x = 2y + \frac{3}{2}, y \in \mathbb{R} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

d'où $v_3 = \left(2y + \frac{3}{2}, y, \frac{1}{2}\right); y \in \mathbb{R}$.

Définition 3.5 ***Indice d'un endomorphisme****[4]*
Étant donner ψ un endomorphisme de $\digamma$. On appel l'indice de ψ l'unique entier naturel k vérifiant

$$\{0\} = \ker(\psi^0) \subsetneq \ker(\psi^1) \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(\psi^k) = \ker(\psi^{k+1}) = \ldots + \ker(\psi^{k'}) = \ldots$$

C'est aussi le plus petit entier naturel tel que $\ker(\psi^k) = \ker(\psi^{k+1})$.

5 Exercices corrigés

Exercice 3.1 *[4] Montrer que la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable puis donner sa matrice diagonale.

Solution. [4] D'après l'exercice 2.3 du chapitre précédent, nous avons

$$P_\Lambda(x) = (x-1)(x+1)^2$$

qui a pour racines 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2, $m_1(\Lambda) = vect(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\digamma_{-1}(\Lambda) = vect(u_2, u_3)$ avec

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\dim \digamma_1(\Lambda) + \dim \digamma_{-1}(\Lambda) = 3$, donc la matrice Λ est diagonalisable et la famille $H = \{u_1, u_2, u_3\}$ représente une base de diagonalisation dans laquelle l'endomorphisme ψ_Λ associée à la matrice Λ est donnée par

$$\Lambda = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

d'où P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et P^{-1} est donnée par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.2 *[4] Réduire la matrice suivante puis donner son polynôme minimal*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Solution. [4]1. En utilisant les propriétés du déterminant , on obtient

$$\mathrm{P}_A(x) = (x+1)^3.$$

La racine de ce polynôme qui est la valeur propre de A est -1 de multiplicité 3.
Pour déterminer le sous espace propre $F_{-1}(A)$, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 4l + 0m + 8n &= 0, \\ 3l + 0m + 6n &= 0, \\ 2l + 0m - 4n &= 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

qui est équivalant à $l + 2n = 0$, par suite $\dim F_{-1}(A) = 2$, alors cette matrice n'est pas diagonalisable.
Admettons $A' = A + \mathrm{I}_3$, on peut vérifier que $A' \neq 0$ et $A'^2 = 0$; ce qui implique que le polynôme minimale de A est $m_A(x) = (x+1)^2$.

On remarque que le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un élément de $F_{-1}(A)$ de plus, le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ qui appartient à $F_{-1}(A)$ représente l'image de u_3 par l'endomorphisme $\psi_{A'}$ associé à A'.

D'autre part, on remarque que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $F_{-1}(A)$et donc (u_1, u_2) forme une base de $F_{-1}(A)$.
Finalement, la famille $\mathrm{H} = \{u_1, u_2, u_3\}$ représente une base dans laquelle la matrice associée à l'endomorphisme ψ_A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.3 *[4] Considérons la matrice A de type n dont les scalaires sont complexes et*

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice de type $2n$ et scalaires complexes.
Étudier la diagonalisation de A' en en fonction celle de A.

Solution.[4] Supposons $\alpha \in \mathrm{S}_p(A')$ et soit $u_1 = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ un élément de $F_\alpha(A')$ alors

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $Am = \alpha m$ et $l = \alpha m$ ce qui équivalent à $Am = \alpha^2 m$ et $l = \alpha m$. On en déduit que le vecteur m est un élément de sous-espace propre $F_{\alpha^2}(A)$ et que l'application :

$$m \mapsto \begin{pmatrix} \alpha m \\ m \end{pmatrix}$$

induit un isomorphisme de $F_{\alpha^2}(A)$ sur $F_\alpha(A')$. De plus, ces deux espaces ont la même dimension pour tout $\alpha \in S_p(A)$. On peut distinguer deux cas :
1. Dans le cas où 0 est une valeur propre de A, en utilisant la proposition 2.4, nous avons

$$1 \leqslant \dim F_0(A) \leqslant mul_A(0)$$

et comme $\dim F_0(A') = \dim F_0(A)$ et $mul_{A'}(0) = 2mul_A(0)$, on déduit donc que $\dim F_0(A') < mul_{A'}(0)$, ce qui implique que la matrice A' n'est pas diagonalisable.
2. Dans le cas où 0 n'est pas une valeur propre de A, on trouve que $mul_{A'}(\alpha) = mul_A(\alpha^2)$ et $\dim F_\alpha(A') = \dim F_{\alpha^2}(A)$ pour tout $\alpha \in S_p(A')$, ce qui implique $\dim F_\alpha(A') = \dim F_\alpha(A)$ pour chaque $\alpha \in S_p(A')$ équivaut à $\dim F_{\alpha'}(A) = mul_A(\alpha')$ pour chaque $\alpha' \in S_p(A)$.
Par suite A' est diagonalisable si est seulement si A est diagonalisable.

Exercice 3.4 *[4] Considérons A une matrice d'ordre n dont les éléments sont des scalaires complexes et*

$$A' = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$$

une matrice d'ordre $2n$ dont les éléments sont des scalaires complexes.
Prouver que A' est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Solution.[4] On note

$$A'' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant un calcul simple, on obtient $P_{A''}(x) = x^2 - 3x + 2$ dont les racines (valeurs propres) sont toutes simples $\alpha = 1$ et $\alpha' = 2$, ce qui signifie que A'' est une matrice diagonalisable.
D'autre part, avec un calcul simple, on peut montrer que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la valeur propre $\alpha = 1$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la valeur propre $\alpha' = 2$ par suite la matrice de passage de la base canonique à une base de diagonalisation de A'' est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc

$$A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

En calculant par blocs, on obtient

$$A' = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice $\begin{pmatrix} 2\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ -3\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ est inversible avec un inverse $\begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 3\mathrm{I}_n & 2\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ alors la matrice Λ' est semblable à $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 2\Lambda \end{pmatrix}$. Dans le cas où on peux diagonaliser la matrice Λ', alors les deux matrices Λ_1 et Λ seront aussi diagonalisables.
Si Λ est diagonalisable alors on peux trouver une matrice inversible P d'ordre n de termes complexes et une matrice diagonale D telles que

$$\Lambda = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 2\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{P} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ainsi Λ_1 et Λ' sont diagonalisables.

Exercice 3.5 *[9] Étant donnée la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

associée à l'endomorphisme ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Étudier la possibilité de diagonalisation de la matrice Λ.

Solution.[9] D'après l'exercice 2.2, la famille $(u_1(0,1,-1), u_2(1,0,-1), u_3(1,1,1))$ forme une base dans laquelle la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3) est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'endomorphisme ψ est représenté par la matrice diagonale

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de plus $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\Lambda\mathrm{P}$.

Exercice 3.6 *[9] Prouver que la matrice*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

n'est pas diagonalisable et qu'elle est trigonalisable .

Solution.[9] D'après l'exercice 2.2, il est clair que la famille (u_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$. En composant la matrice de passage P de la base canonique à la base (u_1, e_2, e_3), on obtient

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

son inverse est donné par
$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$
par suite, on obtient la matrice
$$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Posons $A''=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$. Il est facile à montrer que cette matrice est diagonalisable dont la matrice de passage de la base canonique à la base propre est $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, et son inverse est donné par $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$, et finalement, sa matrice diagonale est
$$A_1^{-1}A''A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

D'où
$$T=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

Exercice 3.7 *[8] Montrer que la matrice*
$$A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix}$$
est trigonalisable en donnant la matrice de passage.

Solution. [8] Un calcul simple du polynôme caractéristique de la matrice A, on obtient $P_{A''}(x)=-(x-3)(x-2)^2$ dont les racines (valeurs propres) sont $\alpha=3$ une racine simple et $\alpha'=2$ une racine double. Pour préciser si la matrice A est diagonalisable ou non, il faut déterminer ses espaces propres.
Pour chercher le sous espace propre associé à la valeur propre $\alpha=3$, on résout le système $Ax=3x$, on trouve le l'espace propre $F_3(A)=vect(u_1)$ avec $u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
De même, le sous espace propre associé à la valeur propre $\alpha=2$, on résout le système $Ax=2x$, on trouve le l'espace propre $F_3(A)=vect(u_2)$ avec $u_2=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$, cet espace est de dimension 1 strictement inférieure à ordre de multiplicité de $\alpha=2$, ceci dit que la matrice A n'est pas diagonalisable. On va donc la trigonaliser. Considérons la base $B=\{u_1,u_2,e_3\}$ et ψ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique. Pour déterminer la matrice triangulaire, il faut calculer les valeurs de ψ sur cette nouvelle base :
$$\psi(u_1)=3u_1,\psi(u_2)=2u_2,\psi(e_3)=-6u_1+u_2+2e_3$$

par suite la matrice de ψ dans la base B est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.8 *[1] Donner la réduction la plus simples de matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

en précisant le polynôme minimal de A' .

Solution.[1] En ce qui concerne le polynôme caractéristique de la matrice A, on obtient $P_A(x) = -(x-2)(x+1)^2$ qui les racines 2 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.
Le sous espace propre $F_1(A)$ est le plan d'équation $x + my + m^2z = 0$ et le sous espace propre $F_2(A)$ est la droite $x = my = m^2z$, par suite A est diagonalisable et sa matrice diagonale est

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et sa matrice de passage est donnée par

$$P_1 = \begin{pmatrix} m & 0 & m^2 \\ -1 & m & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne le polynôme caractéristique de la matrice A' est donné par $P_{A'}(x) = -(x+1)^3$ qui admet une seule valeur propre -1 de multiplicité 3.
Pour préciser le sous espace propre associée à cette valeur propre, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} l-n & = & 0, \\ l-n & = & 0, \\ m-n & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

ce qui donne $l = m = n$ et donc $F_{-1}(A) = vect(v_1)$ avec $v_1 = (1,1,1)$. La réduction convenable de la matrice A' est celle de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour chercher une base de l'espace F, on doit compléter le vecteur $\{v_1 = (1,1,1).\}$ On a

$$\psi(v_2) = v_1 - v_2, \psi(v_3) = v_2 - v_3$$

d'où

$$(\psi+\mathrm{I})(v_2)=v_1, (\psi+\mathrm{I})(v_3)=v_2$$

ce qui demande que v_2, v_3 soient des éléments de l'espace image $\psi+\mathrm{I}$, cet ensemble est donné par

$$(\psi+\mathrm{I})\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l-n \\ l-n \\ m-n \end{pmatrix}$$

c'est un plan d'équation $l-m=0$. On remarque que le vecteur v_1 est un élément de cet espace, en ce qui concerne le vecteur v_2, on peut le choisir tel que $v_2=(c,c,d)$, se sont des coordonnées dans l'ancienne base. En utilisant la relation $\psi(v_2)=v_1-v_2$, on obtient $c-d=1$, alors $v_2=(c,c,c-1)$.
Il nous reste que les coordonnées de $v_3=(e,f,g)$, en utilisant l'équation $\psi(v_3)=v_2-v_3$, on obtient $e=1, f=g=0$.
Donc la matrice de passage suivante contient les vecteurs d'une base de Jordan

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile à vérifier que $\Lambda'=\mathrm{PJP}^{-1}$.
En ce qui concerne le polynôme minimal de la matrice Λ', on sait que ce dernier divise le polynôme caractéristique $\mathrm{P}_{\Lambda'}(x)=-(x+1)^3$, pour cela, on doit chercher le plus petit entier s vérifiant $(\Lambda'+\mathrm{I})^s=0$ ou bien $(\mathrm{J}+\mathrm{I})^s=0$. En effectuant les calcules, on obtient

$$\mathrm{J}+\mathrm{I}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$$

et

$$(\mathrm{J}+\mathrm{I})^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0.$$

On en déduit que $s=3$. Par suite, dans ce cas, le polynôme minimal coïncide avec le polynôme caractéristique.

6 Exercices proposés

Exercice 3.9 *[1] Admettant qu'une matrice carrée Λ d'ordre n possède les valeurs propres $\alpha_i, i=1,\dots,n$.*
1. Déterminer les valeurs propres de la matrice Λ^2.
2. Supposons maintenant que la matrice Λ est symétrique. Préciser la somme des scalaires α_i^2, $i=1,\dots,n$ en fonction des éléments de Λ.

Exercice 3.10 *[1] Étant donné ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$, $\dim\mathcal{F}=n$ dont les valeurs propres sont seulement α_1 , α_2 avec $\alpha_1\neq\alpha_2$.*
Supposons que ψ_1 est le projecteur de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}_1$, parallèlement à $\mathcal{F}_2$ et ψ_2 est le projecteur de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}_2$, parallèlement à $\mathcal{F}_1$ où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont les sous espaces propres associés aux $\alpha_1\neq\alpha_2$ respectivement.
Déterminer les endomorphismes $\psi_1+\psi_2, \psi_1 o\psi_2, \psi_2 o\psi_1$. Puis, donner l'expression du polynôme minimal de ψ.

Exercice 3.11 *[1] Étant donné ψ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $n = 3$.*
Supposons que ψ possède une valeur propre λ double et une autre valeur propre μ, étudier les différentes réductions possibles de ψ, les noyaux et images de $\psi - \lambda \mathrm{I}$ et $\psi - \mu \mathrm{I}$ ainsi que leurs puissances.

Exercice 3.12 *[4] Supposons que ψ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Notons*

$$\begin{array}{rcl} g_\psi : \mathrm{L(E)} & \longrightarrow & \mathrm{L(E)} \\ h & \longmapsto & g_\psi(h) = \psi o h - h o \psi \end{array}$$

1. Étudier la possibilité de la diagonalisable de g_ψ si ψ est diagonalisable puis déterminer ses valeurs propres en fonction de ceux de ψ
2. Prouver que si ψ est nilpotent, alors g_ψ l'est aussi.

Chapitre 4

Applications de la réduction des endomorphismes

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes méthodes d'applications de la réduction des endomorphismes (ou bien des matrices) au calcul des puissances d'une matrice, exponentielle d'une matrice et aux systèmes d'équations linéaires à coefficients constants.

2 Calcul des puissances d'une matrice

[1]
On suppose durant tout ce chapitre que $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathcal{F}$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n, ψ un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
Rappelons que si Λ' est la matrice réduite de la matrice Λ, alors il existe une matrice inversible P vérifiant $\Lambda' = \mathrm{P}^{-1}\Lambda p$ ce qui implique $\Lambda'^n = \mathrm{P}^{-1}\Lambda^n p, \forall n$ entier positif, autrement dit $\Lambda^n = \mathrm{P}\Lambda'^n p^{-1}$. Alors pour calculer la puissance n de la matrice Λ il suffit de calculer Λ'^n. Pour ce faire, on distingue deux cas :

Cas 1. La matrice Λ est diagonalisable[1]
Supposons que la matrice Λ est diagonalisable, dont les valeurs propres sont $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ pas forcément toutes distinctes , autrement dit sa matrice réduite est donnée par

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & ...0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_k \end{pmatrix}$$

alors

$$\Lambda'^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & 0 & ...0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_k^n \end{pmatrix}.$$

Par suite, la matrice $\Lambda^n = P\Lambda'^n P^{-1}$ si l'on connait la matrice de passage P.

Cas 2. La matrice Λ est trigonalisable[1], [8]
Dans ce cas, la matrice Λ' peut s'écrire sous la forme $\Lambda' = D + T$ où D est une matrice diagonale et T est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous nuls, donc T est nilpotente.
Si de plus DT = TD, alors le calcul de la puissance de la matrice Λ devient très facile surtout dans le cas où l'ordre de Λ est petit en utilisant la formule du binôme pour calculer Λ'^n :

$$\Lambda'^n = (D+T)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n D^k T^{n-k},$$

en retirant les termes de la somme pour lesquels i est plus grand que l'indice de nilpotence de la matrice T
Dans le cas contraire (si DT $\neq$ TD), la nilpotence de la matrice T n'est pas utilisable, par suite, la formule du binôme ne s'applique pas.

3 Applications de la réduction des endomorphismes au calcul d'exponentielle d'une matrice

Définition 4.1 *[5] Étant donné $\mathbb{k}$ un corps. On appelle exponentielle de la matrice $\Lambda \in$ $M_n(\mathbb{k})$, la matrice suivante :*

$$exp(\Lambda) = e^{\Lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\Lambda^k.$$

Propriétés [5] Les propriétés suivantes sont satisfaites par l'exponentielle de matrices :
Soient $C, D \in M_n(\mathbb{k})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$
1) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^1} C^k$ est convergente uniformément sut tout compact de $\mathbb{k}$.
2) $e^0 = I_n$, "0" est la matrice nulle,
3)Si C et D satisfaisant CD = DC, alors $e^{C+D} = e^C e^D$,
4) $e^C e^{-C} = I_n$,
5) Pour toute matrice $\Lambda \in M_n(\mathbb{k})$, la matrice $exp(A)$ admet un inverse et $(exp(\Lambda))^{-1} = e^{-\Lambda}$

Méthodes de calculs l'exponentielle d'une matrice
Pour effectuer le calcul de l'exponentielle d'une matrice, on peut revenir aux calculs de l'exponentielle d'une matrice diagonale et une autre matrice nilpotente.

Lemme 4.1 *[5] Étant donné $\Lambda \in M_n(\mathbb{k})$, et P inversible. Alors,*

$$\exp(P^{-1}\Lambda P) = P^{-1}\exp(\Lambda)P.$$

Preuve. [5] En utilisant le résultat : pour tout $k \in (\mathbb{K})$, $P^{-1}\Lambda^k P = (P^{-1}\Lambda P)^k$ ainsi que la définition de l'exponentielle, on obtient

$$\exp(P^{-1}\Lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}\Lambda^k P = P^{-1}(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\Lambda^k).P = P^{-1}\exp(\Lambda)P.$$

■

Comment calculer l'exponentielle d'une matrice
1) Si Λ est diagonale : [5] Soit la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Cas particulier [5]

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.1 *Soit la matrice*

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$et\ \forall\, t \in \mathbb{R};\ e^{t\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

2) Si Λ est nilpotente d'indice p : [5]
Donc $\Lambda^{p-1} \neq 0$ et $\Lambda^p = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} e^{\Lambda} &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\Lambda^k \\ &= \sum_{k=0}^{\mathrm{P}-1} \frac{1}{k!}\Lambda^k \\ &= \mathrm{I}_n + \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}\Lambda^{p-1}. \end{aligned}$$

cas particulier : [5]

$$\begin{aligned} e^{t\Lambda} &= \sum_{k=0}^{\mathrm{P}-1} \frac{\left(t\Lambda^k\right)}{k!} \\ &= \mathrm{I}_n + t\Lambda + \frac{1}{2!}t^2\Lambda^2 + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(\mathrm{P}-1)!}\Lambda^{p-1}. \end{aligned}$$

Exemple 4.2 *Soit la matrice* $\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

N *est nilpotent d'indice* $p = 2$. *Alors*

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{N}} &= \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!}\mathrm{N}^k \\
&= \mathrm{I}_n + \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e^{t\mathrm{N}} &= \mathrm{I}_n + t\mathrm{N} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3) Si **H est une matrice de Jordan :** [5]

Donc, Λ admet toujours une décomposition de Dunford

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathrm{J}(\lambda_1) & & & \\ & \mathrm{J}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{J}(\lambda_r) \end{bmatrix} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$$

D : diagonalisable, N est nilpotente et DN = ND.

Alors : $e^{\Lambda} = e^{\mathrm{D}+\mathrm{N}} = e^{\mathrm{D}}.e^{\mathrm{N}}$.

Cas particulier :

$e^{t\Lambda} = e^{t\mathrm{D}+t\mathrm{N}} = e^{t\mathrm{D}}.e^{t\mathrm{N}}$.

Exemple 4.3 $\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{J}} &= e^{\mathrm{D}+\mathrm{N}} = e^{\mathrm{D}}.e^{\mathrm{N}} \\
&= \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t(D+N)} \\ &= e^{tD}.e^{tN} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

– *Si* A *possède une réduction de Jordan, alors, il existe une matrice* $P \in M_n(\mathbb{k})$ *telle que* $A = PJP^{-1}$.
Alors : $e^{A} = Pe^{J}P^{-1}$.

Exemple 4.4 *Considérons la matrice suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

On a A *admet une réduction de Jordan avec*

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors, $A = PJP^{-1}$ *et* $e^{A} = Pe^{J}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} e^{A} &= Pe^{J}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4 Système d'équations différentielles

4.1 Système d'équations différentielles homogènes

Théorème 4.1 *[1],[5] Étant donné la matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Alors les solutions du système différentiel homogène* $X' = AX$ *sont les fonctions* $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *définies par* $X(t) = \exp(tA).X_0$ *où* X_0 *est un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *quelconque.*

Preuve. [5] D'abord, en dérivant $\exp(tA)$ on obtient $A\exp(tA)$, ce qui implique que $X(t) = \exp(tA).X_0$ est une solution de l'équation $X' = AX$.
D'autre part, en posant $Z(t) = \exp(-tA)X(t)$, on obtient

$$Z'(t) = \exp(-tA)(X' - AX) = 0.$$

Par suite, Z est une fonction constante que l'on note $X_0 \in \mathbb{R}^n$. D'où $X(t) = \exp(tA).X_0$ pour tout t. ■
On considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{array} \right. \quad (S)$$

où x_k sont des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\mathrm{X}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{X}'(t)=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\left(a_{ij}\right)\in \mathrm{M}_n(\mathbb{k}).$$

Alors, (S) $\Longleftrightarrow \mathrm{X}'(t)=\Lambda \mathrm{X}(t)$, c'est l'écriture matricielle.

a) **Système diagonal**[1], [5] Dans le cas où la matrice Λ est diagonal à coefficients réels de type

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

le système

$$\mathrm{X}'(t)=\Lambda \mathrm{X}(t),$$

s'appelle un système diagonal
Dans ce cas

$$\mathrm{X}'(t)=\Lambda \mathrm{X}(t)=\begin{cases} x_1'(t)=\alpha_1 x_1(t) \\ x_2'(t)=\alpha_2 x_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t)=\alpha_n x_n(t) \end{cases}$$

En résolvant chaque équation $x_j'(t)=\alpha_j x_j(t)$ de ce système indépendamment, on obtient des solutions de la forme $h_j e^{\alpha_j t}, h_j \in \mathbb{R}$. Par suite, les solutions du système (S) sont donc les fonctions

$$\mathrm{X}(t)=\begin{pmatrix} h_1 e^{\alpha_1 t} \\ h_2 e^{\alpha_2 t} \\ \vdots \\ h_n e^{\alpha_n t} \end{pmatrix}$$

b) **Système triangulaire**[1], [5] Étant donné M une matrice triangulaire , dans ce cas le système s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+\ldots+a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t)=a_{22}x_2(t)+\ldots+a_{2n}x_n(t) \\ \quad\vdots \\ x_n'(t)=a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (\mathrm{S})$$

En intégrant la dernière équation, et en reportant sa solution dans l'équation précédent, on obtient une équation de type $x'(t)=l.x(t)+k(t)$ et ainsi on remonte intégrer le reste du système.

Si la matrice M associée au système différentiel admet une réduction sous la forme $\Lambda = PBP^{-1}$ le système s'écrit donc $X^{'} = \Lambda X = P.B.P^{-1}X$.

c) **Système diagonalisable**[1], [5] On cite dans la partie suivante un premier résultat qui donne un relation entre les vecteurs propres de la matrice Λ et les solutions du système différentiel associé.

Proposition 4.1 *[1], [5] Étant donné $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre α dont W est le vecteur propre associé. Alors, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{\alpha t} W \end{array}$$

représente une solution du système différentiel $X'(t) = \Lambda X$.

Preuve. [1], [5] Supposons que $X(t) = e^{\alpha t}W$, donc

$$X'(t) = \alpha e^{\alpha t}W = e^{\alpha t}(\alpha W) = e^{\alpha t}\Lambda W = \Lambda X(t)$$

ce qui affirme que $X(t)$ représente une solution du système différentiel $X'(t) = \Lambda X$. ■

Théorème 4.2 *[1], [5] Étant donné $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$ admet une base de vecteurs propres $(W_1, ..., W_n)$ associés aux valeurs propres $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Alors, l'espace des solutions du système $X'(t) = \Lambda X$ possède une base formée de fonctions $X_i(t) = e^{\alpha_i t}W_i \quad (0 \leq i \leq n)$.*

Preuve. [1], [5]
1. En utilisant la proposition précédente, les fonctions $X_i(t) = e^{\alpha_i t}V_i \quad (0 \leq i \leq n)$ sont des solutions du système $X'(t) = \Lambda X$.
2. Pour montrer que la famille $X_i(t) = e^{\alpha_i t}W_i \quad (0 \leq i \leq n)$ est libre, on considère les réelles $a_1, ..., a_n$ satisfaisant

$$a_1.X_1(t) + ... + a_n.X_n(t) = 0.$$

sachant que cette équation est vérifiée pour tout t réel, en particulier pour $t = 0$ telle que

$$a_1.W_1 + ... + a_n.W_n = 0$$

et comme W_i forment une base de $\mathbb{R}^n$, alors $a_1 = ... = a_n = 0$ d'où l'indépendance linéaire de $X_i(t)$.
3. Si on possède P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $W_1, ..., W_n$, on trouve que la matrice $P^{-1}\Lambda P = D$ est diagonale.
4. Soit $P^{-1}X^{'} = B.P^{-1}X$. En posant $Y = P^{-1}X$, c'est-à-dire $X = PY$ on obtient l'équation $Y^{'} = BY$, P étant la matrice de changement de base, c'est-à-dire que $\Lambda = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $X^{'} = \Lambda X = P.D.P^{-1}X$. Alors, $Y' = P^{-1}X^{'} = P^{-1}\Lambda X = P^{-1}\Lambda PY = DY$. Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \alpha_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \alpha_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \alpha_n y_n(t) \end{cases}$$

Puisque les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs propres $W_1, W_2, ..., W_n$ alors $X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 . t} W_1 + ... + k_n e^{\alpha_n . t} W_n = k_1 X_1 + ... + k_n X_n$.
On a montrer que toute solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$.
Par suite, la famille $(X_1, ..., X_n)$ engendre l'espace des solutions.
On en déduit que : $(X_1, ..., X_n)$ est une base de solutions. ■

Exemple 4.5 *[1], [5] Étant donné le système différentiel*

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) + z(t) \end{cases}$$

avec

$$X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le système se présente sous la forme $X^{'} = MX$ *avec*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

$$X^{'}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice M sont $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 5$ qui sont toutes simples, alors la matrice M est diagonalisable, et les vecteurs propres associés sont

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la solution générales, nous obtenons

$$X_1(t) = e^{\alpha_1 . t} U_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, X_2(t) = e^{\alpha_2 . t} U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, X_3(t) = e^{\alpha_3 . t} U_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = MX$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = \lambda X_1(t) + \beta X_2(t) + \nu X_3(t)$$

avec $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}$. Pour chercher la condition initiale, cherchons la solution satisfaisant en plus $X(0) = X_0$. Or

$$X(0) = \lambda X_1(t) + \beta X_2(t) + \nu X_3(t) = \lambda V_1 + \beta V_2 + \nu V_3 = \begin{pmatrix} \lambda + \beta \\ \lambda + \beta + \nu \\ \lambda + \beta \end{pmatrix}.$$

La condition initiale $X(0) = X_0$. est donnée donc en le système

$$\begin{cases} \lambda + \beta = 1 \\ \lambda + \beta + \nu = 2 \\ \lambda + \beta = 3 \end{cases}$$

On trouve $\lambda = 2, \beta = 1, \nu = -1$. Par suite, la seule solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

d) Si **M est trigonalisable** ou **admet une réduction de Jordan**[1] le système se résout de la même manière de proche en proche en remontant de la dernière à la première équation : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente et ainsi en remontant intégrer tout le système.

Exemple 4.6 *[1] Résolvons le système différentiel suivant*

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 6x(t) - 7y(t) + 7z(t) \end{cases}$$

Solution.*[1] Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions dérivables x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 6x(t) - 7y(t) + 7z(t) \end{cases}$$

Le système se présente sous la forme $X' = MX$ *avec*

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & +7 \end{pmatrix}$$

(S) *est un système homogène ou " sans second membre". Sa matrice associée est la matrice M, elle est réduite à la matrice de Jordan*

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

et la matrice de passage est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a vu que $A = P.J.P^{-1}$, *le système s'écrit donc* $X^{'} = AX = P.J.P^{-1}X$. *Soit* $P^{-1}X^{'} = J.P^{-1}X$. *En posant* $Y = P^{-1}X$, *on obtient l'équation* $Y^{'} = JY$. *Si on pose*

$$Y = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix},$$

l'équation $Y^{'} = JY$ *équivaut au système*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) \ldots .(1) \\ y_1'(t) = -y_1(t) + z_1(t) \ldots (2) \\ z_1'(t) = -z_1(t) \ldots (3) \end{cases}$$

En résolvant la première équation et la dernière équation, on obtient

$$x_1(t) = \alpha e^{3t}, z_1(t) = \gamma e^{-t},$$

avec α, γ *étant des constantes.*
Reste à traiter l'équation (2), on l'a réécrit sous forme $y_1'(t) = -y_1(t) + \gamma e^{-t}$, *on obtient la solution générale de l'équation sans second membre* $y_1'(t) = -y_1(t)$ *qui est donnée par* $y_1(t) = \beta e^{-t}$ *et la solution particulière de l'équation complète sous la forme* $u(t)e^{-t}$ *d'où*

$$(u' - u)e^{-t} + ue^{-t} = \gamma e^{-t}, u' = \gamma, u = \gamma t.$$

Ainsi $y_1 = (\beta + \gamma t)e^{-t}$ *donc*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} \\ (\beta + \gamma t)e^{-t} \\ \nu e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{3t} + (\gamma t + \beta - \gamma)e^{-t} \\ y(t) = 2\alpha e^{3t} + (2\gamma t + \beta - \gamma)e^{-t} \\ z(t) = 2\alpha e^{3t} + (\gamma t + \beta)e^{-t} \end{cases}$$

5 Exercices corrigés

Exercice 1 :[1] Résoudre le système différentiel suivant

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - z(t) \\ z'(t) = y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

Solution.[1]
Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions dérivables x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - z(t) \\ z'(t) = y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

Le système se présente sous la forme $X^{'} = AX$ avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

$$X^{'}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les calculs se présentent sous la forme matricielle. (S) est un système homogène ou " sans second membre". Sa matrice est réduite à la matrice de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a vu que $A = P.J.P^{-1}$, le système s'écrit donc $X^{'} = AX = P.J.P^{-1}X$. Soit $P^{-1}X^{'} = J.P^{-1}X$. En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient l'équation $Y^{'} = JY$. Si on pose $Y = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$, l'équation $Y^{'} = JY$ équivaut au système

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + y_1(t) \ldots .(1) \\ y_1'(t) = -y_1(t) + z_1(t) \ldots (2) \\ z_1'(t) = -z_1(t) \ldots (3) \end{cases}$$

De (3), on obtient

$$z_1(t) = \gamma e^{-t},$$

et l'équation (2) s'écrit

$$\frac{dy_1}{dt} + y_1 = \gamma e^{-t}.$$

On sait que

$$y_0 = ue^{-t}$$

conduit à

$$u' = \gamma, u = \gamma.t$$

donc

$$y_1(t) = (\gamma.t + \beta)e^{-t}.$$

L'équation (1) s'écrit

$$\frac{dx_1}{dt} + x_1 = (\gamma.t + \beta)e^{-t}.$$

On a

$$x_0 = \upsilon.e^{-t}$$

implique que

$$\upsilon' = \gamma.t + \beta, \upsilon = \frac{\gamma}{2}t^2 + \beta t,$$

et

$$x_1 = (\frac{\gamma}{2}t^2 + \beta t + \alpha)e^{-t}.$$

Enfin

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathrm{P}. \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$$

donne

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t) = \left(\frac{\gamma}{2}t^2 + (\beta+\gamma)t + (\alpha+\beta+\gamma)\right)e^{-t} \\ y(t) = \left(\frac{\gamma}{2}t^2 + (\beta+\gamma)t + (\alpha+\beta)\right)e^{-t} \\ z(t) = \left(\frac{\gamma}{2}t^2 + \beta t + \alpha\right)e^{-t} \end{array} \right.$$

α, β, γ étant trois constants.
Exercice 2 :[1] Chercher les solutions du système différentiel

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) - 9z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + 3y(t) - 8z(t) \end{array} \right.$$

Solution. [1]

Le système (S) s'écrit $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}$ avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

On trouve $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$. Les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ sont

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = -2$, on trouve

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A est diagonalisable par la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le système diagonalisé s'écrit avec $X = PY$ sous la forme

$$(S_1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} Y$$

et $Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ Car $X'(t) = AX$, $Y = P^{-1}X$, $Y' = P^{-1}X'$, $X = PY$ donc

$$X'(t) = PDP^{-1}X$$

ce qui donne

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X$$

c'est-à-dire

$$Y'(t) = DY.$$

Alors le système devient

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ y_1'(t) = y_1(t) \\ z_1'(t) = -2z_1(t) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha e^t \\ y_1(t) = \beta e^t \\ z_1(t) = \gamma e^{-2t} \end{cases}$$

Enfin, en revenant à x, y, z, donc aux solutions de (S) par la relation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^t \\ \gamma e^{-2t} \end{pmatrix}$$

qui nous donne

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \gamma e^{-2t} \\ y(t) = (\alpha + 3\beta)e^t + \gamma e^{-2t} \\ z(t) = \beta e^t - \gamma e^{-2t} \end{cases}$$

où α, β, γ sont les trois constantes d'intégration.

Exercice 3 :[5]

Soit la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

.

1. Donner la décomposition de Dunford de A.

2.Posons $B = P^{-1}AP = D + N$: Calculer $exp B$.

Solution. 1. La décomposition de Dunford de A s'écrit sous forme $P^{-1}AP = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}, P-1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

D est bien diagonal, N est nilpotente, car $N^2 = 0$, et $DN = ND$.
On pose $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Posons $B = P^{-1}AP = D + N$: alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a

$$exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t+1 & 3t \\ 0 & -3t & 3t+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$exp(tB) = exp(tD + tN) = exp(tD)exp(tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 : [5] En utilisant les résultats de l'exercice 3, résoudre le système différentielle

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x'(t) = x(t) - 3z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 6z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 5z(t) \end{array} \right).$$

Solution. [5]
D'après l'exercice 3, ce système s'écrit sous la forme $X' = AX$ dont les solutions sont les $X(t) = exp(tA)X_0$. Ici, la condition initiale est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les solutions de $Y' = BY$ sont les $Y(t) = exp(tB)V, V \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, les solutions du système $X' = AX$ sont les

$$X(t) = Pexp(tB)V = \begin{pmatrix} e^t & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t} \\ \frac{1}{2}e^t & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t} \\ 0 & (t+\frac{2}{3})e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix}.V$$

Exercice 5 :[5]
Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

6 Exercices proposés

Exercice 6 :[5]
Déterminer la décomposition de Dunford des matrices de l'exercice 5.

Exercice 7 :
Chercher les solutions du système différentiel

$$(\mathrm{S}_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 4x(t) - 7y(t) + 8z(t) \\ z'(t) = 6x(t) + 7y(t) + 7z(t) \end{cases}$$

$$(\mathrm{S}_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) + w(t) \\ z'(t) = z(t) + w(t) \\ w'(t) = w(t) \end{cases}$$

Bibliographie

[1] **E. Azoulay, J. Avignant**, (1984) *Mathématiques 4. algèbre, cours et exercices,* McGrow-Hill-Paris. 13, 14, 15, 18, 20, 23, 25, 28, 32, 34, 35, 37, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60

[2] **A. Calvo, F. Boschiet**, (1996) *exercices d'algèbre* , 1 er cycle scientifique, 1ere année préparation aux grandes écoles, Armand Colin-collection U, Paris 5.

[3] **C. Deschamps et A. Warusfel**, (2003) *Mathématiques, Tout en un, 1re année , cours et exercices corrigés,* 2édition, nouveau tirage, DUNOD, Paris . 13, 14

[4] **C. Deschamps et A. Warusfel**, (2001) *Mathématiques, Tout en un, 2 année , cours et exercices corrigés,* 2édition, nouveau tirage, DUNOD, Paris . 18, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 31, 32, 33, 35, 37, 41, 42, 43, 48

[5] **Exo7**, *Cours et exercices de maths, Licence Créative Commons-BY-NC-SA-3.0 FR,* exo7.emath.fr . 22, 37, 38, 39, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63

[6] **P.Florant, G.Lauton, M. Lauton**, (1977) *Algèbre linéaire, outils et modèles mathématiques* , Tome III, . 15, 25, 30

[7] **R. Godement**, (1963) *Algebra,* Publishers in Arts and Science, Paris, France . 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

[8] **X. Gourdon**, (1996) *Les mathématiques en tête Algèbre,* INRIA-Rocquencourt, ellipses. 2, 3, 5, 6, 7, 16, 17, 19, 20, 21, 32, 35, 45, 50

[9] **R. Henri**, (2008) *Algèbre linéaire, cours et exercices* , troisième édition revue et augmentée. 15, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 29, 31, 32, 33, 35, 44

[10] **S. Lipschutz**, (1973) *Algèbre linéaire, cours et problèmes,* McGraw-Hill Inc, New York. 4, 5, 6, 7

[11] **J. Marie Monier**, (2008) *Les méthodes et exercices de mathématiques PCSI-PTSI,* Dunod, Paris. 10, 11, 14

[12] **J. Ramis et A. Warusfel**, (2006) *Mathématiques Tout en un pour la licence, niveau L1, cours complet avec 270 exercices corrigés,* Série Ramis, DUNOD. 6, 7, 8, 9, 10

[13] **J. Ramis et A. Warusfel**, (2007) *Mathématiques Tout en un pour la licence, niveau L2, cours complet avec applications et 760 exercices corrigés,* Série Ramis, DUNOD. 2, 3, 5

[14] **M. SAIDANI**, (2019) *Polycopié de cours : Algèbre 1, Cours et Exercices corriés,* Première année licence MI LMD, université de Mostaganem . 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

[15] **L. Schwarts**, (2003) *Algèbre 3 eme année, Cours et exercices avec solutions,* Série Ramis, DUNOD, Paris . 2, 4, 6, 15, 16

[16] **A. Szpirglas**, (2001) *exercices d'algèbre,* Cassini, Paris .