

**Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique**  
**Département de Physique**  
**Filière : Physique**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES  
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Physique  
Option : **Physique des matériaux**

Présenté par :

**FELLOUH Kheira**

THEME :

**Le spectre du quarkonium charmé dans un modèle de quark  
non relativiste**

**Soutenu le :** 27/06/2023

**Devant le jury composé de :**

M.TERKI HASSAINE Mounir	MCA	Université de Mostaganem	Président
M.BOUATTOU Bezine	MAA	Université de Mostaganem	Examineur
M.BELHOUARI Aissa	MCA	Université de Mostaganem	Encadrant

Année Universitaire 2022-2023

# Dédicace

Je dédie ce mémoire

A moi-même

Je me rappelle à quel point je suis capable de réaliser de grandes choses.

Je me rappelle des heures passées à la recherche et à la rédaction, et de l'immense fierté  
que je ressens en voyant les résultats de mes efforts.

# Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadrant M.BELHOUARI Aissa pour son soutien et sa guidance précieux tout au long de ce travail. Je lui exprime toute ma gratitude pour m'avoir proposé ce sujet et partagé ses nombreuses idées avec moi.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous les membres du jury M.TERKI HASSAINE Mounir et M.BOUATTOU Bezine d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers le chef de département, M.ABBES Charef, pour son soutien constant et ses encouragements tout au long de mes études. Son leadership exemplaire, son dévouement envers les étudiants et sa vision inspirante ont créé un environnement d'apprentissage stimulant.

Enfin, je souhaite remercier ma famille et mes amis Moussa Rim, ABBASSA Battoul et BELACEL Amira qui m'ont soutenu tout au long de ce parcours. Leurs encouragements, leurs discussions stimulantes et leur soutien moral ont été d'une valeur inestimable.

# Sommaire

<b><u>Introduction générale</u></b>	<b>1</b>
<b><u>Chapitre I : les particules élémentaire et processus</u></b>	<b>3</b>
I.1. <u>Introduction</u>	3
I.2. <u>Classifications des particules de la matière</u>	3
I.2.1. <u>Les leptons</u>	4
I.2.2. <u>Les hadrons</u>	5
I.2.3. <u>Les quarks</u>	6
I.3. <u>Le modèle standard de la physique des particules</u>	7
I.3.1. <u>Les particules dans le modèle standard</u>	7
I.3.2. <u>Les interactions fondamentales</u>	9
I.4. <u>Les nouveaux nombres quantiques</u>	10
I.4.1. <u>La couleur</u>	10
I.4.2. <u>les lois de conservations</u>	11
I.5. <u>Les sources des particules élémentaires</u>	13
I.6. <u>L'origine de l'antimatière</u>	15
I.7. <u>Conclusion</u>	16
<b><u>Chapitre II : L'étude du spectre du quarkonium</u></b>	<b>18</b>
II.1. <u>Introduction</u>	18
II.2. <u>Le spectre de quarkonium</u>	18
II.3. <u>La description phénoménologique de QCD</u>	22
II.3.1. <u>Confinement de la couleur</u>	23
II.3.1. <u>Liberté asymptotique</u>	24
II.4. <u>L'approche non-relativiste</u>	28
II.4.1. <u>L'équation de Schrödinger</u>	28
II.4.2. <u>Les modèles des potentiels</u>	33
II.5. <u>Conclusion</u>	34
<b><u>Chapitre III : L'application sur le charmonium</u></b>	<b>35</b>

<a href="#"><u>III.1. Introduction</u></a> .....	35
<a href="#"><u>III.2. La formulation du problème</u></a> .....	35
<a href="#"><u>III.3. La résolution par la méthode matricielle.</u></a> .....	38
<a href="#"><u>III.4. Résultats et discussions</u></a> .....	44
<a href="#"><u>III.5. Conclusion</u></a> .....	48
<b><a href="#"><u>Conclusion générale</u></a></b> .....	<b>49</b>
<b><a href="#"><u>Références</u></a></b> .....	<b>51</b>
<b><a href="#"><u>Annexe A</u></a></b> .....	<b>54</b>
<b><a href="#"><u>Annexe B</u></a></b> .....	<b>55</b>

# Liste des figures

Figure (I-1) : la composition de l'atome .....	3
Figure (I-2): la structure de baryons. ....	5
Figure (I-3): la structure de méson composé d'un pair quark-antiquark. ....	5
Figure (I-4): les particules fondamentales dans le modèle standard .....	8
Figure (I-5): les couleurs des quarks et antiquarks .....	10
Figure (I-6) : la production des particules par les rayons cosmiques .....	14
Figure (II-1) : a) l'interaction forte via un échange de gluons (quarkonium) et (b) l'interaction électromagnétique via un échange de photons (positronium).....	19
Figure (II-2) : Les états de charmonium observés expérimentalement .....	20
Figure (II-3): Les états de bottomonium observés expérimentalement et théoriquement attendus. Les lignes pointillées indiquent des états non observés ou non confirmés (33). ....	21
Figure (II-4) Les nœuds triples et quadruples des gluons .....	23
Figure (II-5) : la propriété de confinement de la couleur : le quark charme et son antiquark n'est pas libéré (36).....	23
Figure (II-6) : L'évolution de la constante de couplage par rapport la distance entre la paire $e + e -$ . ....	25
Figure (II-7): Diagramme de polarisation du vide par QED. ....	25
Figure (II-8) : Mesurer la charge d'un électron (a) Utilisation d'une sonde longue distance,(b) Utilisation d'une sonde à courte distance .....	26
Figure (II-9) : Dépistage de la charge électrique en théorie quantique des champs .....	26
Figure (II-10): Diagrammes contribuant à la polarisation du vide en QCD. Celui du haut comporte l'émission de paires virtuelles quark-antiquarks et ceux du bas `a l'émission de gluons virtuels. Les deux contributions ( $qq$ et gluons) ont des signes opposés .....	27
Figure (II-11) : L'évolution de la constante de couplage par rapport la distance entre la paire $qq$ .....	27
Figure (III-1): Le potentiel $Vnr$ (Total) tracé avec les différents termes qui le composent. Le terme de coulomb, terme linéaire et le terme d'interaction spin-spin avec $S = 1$ . Les valeurs des paramètres utilisées sont $\alpha_s$ $b$ celles du tableau ( III.1). ....	38

Figure (III-2) : Exemples de potentiels tracés avec le potentiel du puits infini de largeur a. .....	40
Figure (III-3) : la variation de la Masse de l'état $J/\psi$ avec $N_{\max}$ pour différentes valeurs de la largeur a. ....	48

# Liste des tableaux

Tableau (I-1) : les masses de leptons chargées .....	4
Tableau (I-2) : les limites expérimentales des masses de neutrino .....	4
Tableau( I-3): les charges et les familles de leptons .....	5
Tableau ( I-4): les charges et les familles des quarks . .....	6
Tableau (I-5) : les masses de quarks .....	7
Tableau ( I-6) : les interactions et les bosons de jauge . .....	10
Tableau (I-7) : la superposition des couleurs. ....	11
Tableau (I-8): les nombres baryonique et léptonique. ....	12
Tableau (I-9) : l'énergie minimale et l'instrument utilisé pour une distance $\Delta x$ .....	15
Tableau (II.1) : la durée de vie de quarkonium. ....	22
Tableau (II-2) : les différences entre la QCD et QED. ....	22
Tableau (III-1): Les paramètres utilisés dans cette analyse.....	45
Tableau (III-2): Les résultats des spectres de masse de charmonium. ....	46
Tableau (III-3) : la masse de l'état $J/\psi$ pour différentes valeurs de $a$ et $N_{max}$ (les nombres ont été arrondis à 6 chiffres). ....	47



# Liste des abréviations

Abréviation	Expression Complète	Page
BNL	Brookhaven National Laboratory	20
CDF	Collider Detector at Fermilab	6
CERN	Organisation européenne pour la recherche nucléaire	9-17
Fermilab	Stonford Linear Accelerator	6-21
QCD	Chromodynamique Quantique	1-9-18-19-22-23-26-34-38-49
QED	Electrodynamique Quantique	9-22-24-25-
SLAC	Stanford linear accelerator centre	6-20

## Introduction générale

Au cours du XXe siècle, les scientifiques ont progressivement dévoilé la structure atomique et nucléaire de la matière. A l'aide de la mécanique quantique, ces développements ont jeté les bases de la physique des particules modernes, qui s'attache à explorer les constituants fondamentaux de l'univers ainsi que les forces qui les régissent. Les électrons ont été les premiers à être identifiés grâce aux travaux de J.J. Thomson et de son célèbre modèle de l'atome. Ensuite, la découverte des protons par Ernest Rutherford grâce à ses expériences de diffusion des particules alpha. Enfin, les neutrons ont été découverts par James Chadwick (1). Parallèlement à ces découvertes, Hideki Yukawa a apporté une explication essentielle sur la stabilité du noyau atomique en introduisant une nouvelle force, connue sous le nom d'interaction forte (2). Peu de temps après, les quarks ont été postulés pour expliquer la structure interne des particules composites. Plus précisément, il y a six types des quarks sont up, down, Strange, Bottom, charme et top se combinent pour formés une catégorie de particule appelée hadrons, elle se présente en deux famille. Les baryons, tels que les protons et les neutrons, sont des hadrons composés de trois quarks. Les mésons, quant à eux, sont des hadrons composés d'un pair quark antiquark (3). Parmi les mésons, on trouve le quarkonium qui est constituée d'un quark lourd et d'un antiquark de même type liés par l'interaction forte (4).

L'histoire du quarkonium remonte à la découverte du charmonium (quarkonium charmée) aux années 1970, il s'agit toute les états liés d'un quark charme-anti charme (5). Sur le plan expérimental, le quarkonium offre de nombreux avantages. Il peut être produit relativement facilement lors de collisions de particules à haute énergie, ce qui permet aux chercheurs d'étudier ses propriétés et tester la chromodynamique quantique QCD, la théorie qui décrit l'interaction forte entre les quarks à travers des expériences contrôlées en laboratoire (6). D'un point de vue théorique, le système de quarkonium joue un rôle important en physique des particules similaire à celui de l'atome d'hydrogène en physique atomique à cause sa nature en tant que méson lourd, permet d'appliquer avec succès des modèles théoriques non relativistes, Tout comme l'hydrogène est utilisé comme un système modèle pour étudier la structure électronique et les transitions énergétiques, les états excités du quarkonium aident d'explorer les interactions entre les quarks et d'en apprendre davantage sur la dynamique de l'interaction forte.

Par ailleurs, l'étude prédictive les états de quarkonium requiert des méthodes mathématiques complexes, qui peuvent être difficiles à maîtriser pour les étudiants non spécialisés. Ces approches mathématiques sophistiquées nécessitent une expérience approfondies pour être correctement appliquées. Il est donc important de rechercher des ressources pédagogiques adaptées afin de faciliter notre compréhension du quarkonium.

Dans la mécanique quantique il faut appliquer l'équation de Schrödinger sur le quarkonium après avoir développé un modèle de potentiel approximatif décrivant l'interaction entre les quarks au sein de ce système . Mais la résolution de cette équation nécessite des compétences en méthodes numériques pour calculer les niveaux d'énergie des états de quarkonium. Pour cela on utilise une technique appelée la mécanique matricielle dans le travail (7), puis de comparer nos résultats avec les valeurs expérimental (8) et avec les résultats d'un autre travail (9). Nous espérons ainsi contribuer à une meilleure compréhension des propriétés et des comportements de cette particule composite, nous pourrons évaluer la validité de notre approche simplifiée et identifier les domaines où des améliorations sont nécessaires.

Nous diviserons ce mémoire en trois chapitres. Tout d'abord, Nous ferons une présentation générale sur la physique des particules, où nous verrons plusieurs choses, notamment comment la force de la nature et des particules sont décrites dans le Modèle Standard qui représente le cadre théorique de cette discipline (10). Cependant, cette théorie n'a pas une connaissance complète de l'interaction forte, c'est pourquoi la recherche et les expériences se poursuivent afin de tester sa précision dans cette description. Le quarkonium offre un laboratoire naturel pour de telles études. Cela nous rend d'adopter une approche phénoménologique dans le deuxième chapitre pour éclairer les propriétés des quarks à l'intérieur des hadrons, tout en mentionnant les outils théorique. Finalement nous allons présenter la méthode matricielle qui permet de résoudre l'équation de Schrödinger numériquement. Cette technique repose sur base de puits infinie pour reproduire les énergies des états liés de charmonium. Nos résultats obtenus par un programme fortran, à partir de ces valeurs, nous déterminerons si nous pouvons généraliser cette méthode à des modèles potentiels complexes.

Le modèle de potentiel choisi dans ce travail a été utilisé dans plusieurs travaux, le travail avec lequel nos résultats seront comparés est l'un de ces travaux qui a appliqué ce modèle mais il a utilisé une méthode de résolution différente de la méthode matricielle.

Chapitre I :  
Les particules élémentaires et  
processus

---

# Chapitre I : Les particules élémentaires et processus

## I.1. Introduction

Les particules élémentaires, ou particules fondamentales, sont les constituants présents dans l'univers qui ne peuvent pas être divisés en parties plus petites. Mais, il est possible qu'à partir de ces particules élémentaires, la matière nucléaire puisse se former. Nous savons maintenant que la matière est un groupe d'atomes et les atomes composés des électrons et d'un noyau contenant des protons et des neutrons. Ainsi, il existe trois particules subatomiques en plus du photon qui représente le rayonnement électromagnétique.

Cependant, ce n'est pas l'image finale ! La structure interne des protons et les neutrons sont également constitués de particules plus petites appelées quarks, puis le développement du domaine de recherche a conduit à la découverte de nombreuses particules dans la nature. L'étude de ces phénomènes nécessite une branche à part qui est la physique des particules. Dans ce chapitre nous allons présenter les types des particules avec une description de leurs caractéristiques. En plus d'expliquer les sources des constituants élémentaires et définir quelques concepts de base.

## I.2. Classifications des particules élémentaires de la matière

La matière se compose de deux constituants fondamentaux : électron et quark .Les électrons appartiennent à la catégorie de leptons. Les quarks sont six types et ils peuvent former des particules appelées hadrons. Nous avons classé les hadrons selon le modèle des quarks et les leptons selon leurs propriétés physiques et certains nombres quantiques.

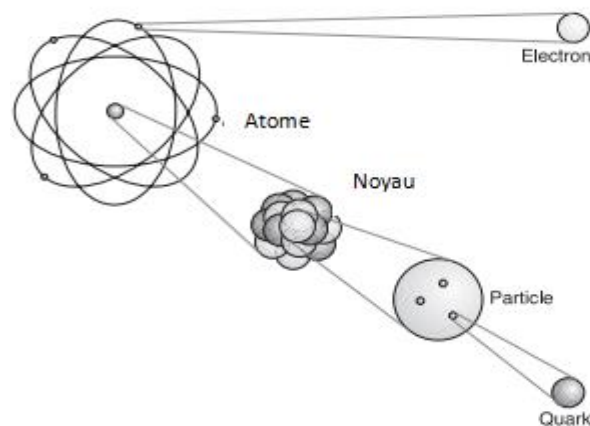


Figure (I-1) : la composition de l'atome (32)

### I.2.1. Les leptons

Les leptons sont des particules fondamentales et l'origine de leur nom lepton remonte aux Grecs, ce qui signifie léger (c'est-à-dire une très petite masse) car les particules qui ont été découvertes à cette époque dans cette catégorie avaient une petite masse par rapport autres catégories. Ce type de particule se caractérise par une charge électrique à multiples de celle d'un électron, qu'il a une charge de la force faible et qu'il n'est pas affecté par les interactions fortes (11). Il existe deux sortes de leptons :

- **Les leptons chargés** : ces sont trois particules ont la même charge électrique, la première particule découverte est l'électron en 1897 qui est un lepton stable et le moins massive, puis le muon et le tau en 1937 ,1975 respectivement (12).

Lepton chargé	Le symbole	La masse (Mev)
L'électron	$e$	0.5
Le muon	$\mu$	106
Le tau	$\tau$	1777

Tableau (I-1) : les masses de leptons chargées (13).

- **Les leptons neutres** : pour chaque lepton chargé, il existe un lepton neutre (de charge électrique nulle) c'est ce qu'on appelle un neutrino( $\nu$ ) (14).

Lepton neutre	Le symbole	La masse
Neutrino électronique	$\nu_e$	$< 9\text{eV}$
Neutrino mueonique	$\nu_\mu$	$< 250\text{ keV}$
Neutrino tauonique	$\nu_\tau$	$< 35\text{ MeV}$

Tableau (I-2) : les limites expérimentales des masses de neutrino (15) .

Ainsi, on peut dire qu'il existe six types de leptons, et aussi ces derniers sont divisés en trois familles.

particule	charge	1 <sup>ère</sup> famille	2 <sup>ème</sup> famille	3 <sup>ème</sup> famille
<b>Lepton chargé</b>	-1	Electron	Muon	Tau
<b>Lepton neutre</b>	0	Neutrino électronique	Neutrino muonique	Neutrino tauonique

**Tableau (I-3):** les charges et les familles de leptons (15).

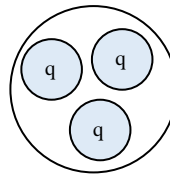
### I.2.2. Les hadrons

Ce sont des particules fondamentales et sont constituées d'autres particules appelées quarks. Les hadrons ont une charge électrique entière et ils interagissent avec des interactions fortes et faibles (11).

Les hadrons ont des états excités appelés résonances. Chaque hadron dans son état fondamental peut avoir plusieurs états excités. La résonance se désintègre très rapidement (environ  $10^{-24}$  secondes) grâce à la force nucléaire forte, faible ou électromagnétique (16).

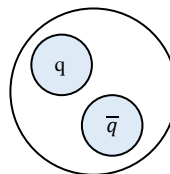
Il en existe deux formes différentes :

- **Les baryons** : Ils sont constitués de trois quarks, et les baryons les plus courants sont le proton (deux quarks up avec un quark down) et le neutron (deux quarks down et un quark up), qui sont aussi les plus stables.



**Figure (I-2):** la structure de baryons.

- **Les mésons** : Un système composé au moins d'un pair quark et antiquark. Par exemple : le méson  $J/\psi$  (contient un quark charme et son antiquark) et le méson  $\pi^0$  (contient un quark up et son antiquark avec un quark down et son antiquark) (17).



**Figure (I-3):** la structure de méson composé d'un pair quark-antiquark.

### I.2.3. Les quarks

Ce sont des particules fondamentales qui ne peuvent pas être isolées, mais se combinent pour former des hadrons. L'idée des quarks a été proposée la première fois par l'hypothèse des deux scientifiques Murray Gelle Mann et George Zweig en 1962 (14). Ils

proposèrent que les hadrons se composent de nouvelles particules et les appelaient quarks, ce nom adapté d'un roman qui porte le titre « three quarks for M.Mark ». Ils ont été effectivement observés indirectement dans l'expérience de SLAC en 1968 à partir de la diffusion inélastique électron-proton (14).

Il existe six types (ou appelée saveurs) de quarks :

- **Up et down** : ces sont des saveurs légères par rapport à leurs frères, ils sont les premiers quarks proposé au début des années 1960 par Murray Gell-Mann et George Zweig pour comprendre et classer tout les hadrons connus à l'époque (14).
- **Strange** : En 1964, Murray Gell-Mann et Georg Zweig ont développé le modèle des quarks après la découverte de méson kaon qui a conduit à l'émergence d'un quark de saveur Strange (étrange) l'a ajouté au modèle des quarks (12).
- **Charme** : En raison de la symétrie, le modèle des quarks montre que pour certains processus, chaque quark de charge  $-1/3$  doit être équilibré par un quark de charge  $+2/3$  (voir le tableau I-5). Donc, on s'attendait à l'existence d'un quatrième quark. En 1974, le méson  $J/\psi$  (contient un quark charme et son antiquark) est découvert par deux expériences de deux équipes différentes. Et ces dernières ont confirmé l'existence du quark charme (18).
- **Bottom** : il a été découvert au Fermilab en 1977. on le nommait aussi quark "beauté" (18).
- **Top** : Pour la même raison que nous attendons un quark charme, il doit y avoir un troisième quark avec une charge de  $+2/3$ . Il a été découvert en 1995 dans les expériences CDF (Fermilab) et baptisé le quark top (19).

Les six saveurs de quarks comme les leptons sont classé en trois générations

	charge	1 <sup>ère</sup> famille	2 <sup>ème</sup> famille	3 <sup>ème</sup> famille
Quarks	$2/3$	Up	Charme	Top
	$-1/3$	Down	Strange	Bottom

Tableau ( I-4): les charges et les familles des quarks .

Les masses des quarks appartiennent à un certain intervalle (le tableau I-5) Parce qu'un quark libre n'a jamais été détecté dans les expériences.



Saveur de quark	Le symbole	La masse(en Mev)
up	u	$2.3 \pm 0.5$
down	d	$4.8 \pm 0.3$
Strange	s	$95 \pm 5$
charme	c	$1275 \pm 25$
top	t	$4180 \pm 30$
Bottom	b	$173,000 \pm 80$

**Tableau (I-5) : les masses de quarks (13).**

Les quarks ont des propriétés suivantes (11):

- Ils sont soumis à l'interaction forte ;
- Ils ont une charge électrique fractionnaire ;
- Ils possèdent un nombre quantique interne appeler couleur (une charge couleur) ;
- Ils portent une charge faible.

### I.3. Le modèle standard de la physique des particules

Après les découvertes successives des particules élémentaires, les physiciens ont été incapables d'expliquer les phénomènes en physique des particules, ce qui les a obligés à construire une nouvelle théorie décrivant les résultats obtenus dans les expériences.

Le modèle standard est une théorie qui permet de décrire les particules de la matière ordinaire et les interactions fondamentales (20).

#### I.3.1. Les particules dans le modèle standard

Dans le modèle standard, il existe deux catégories principales de particules: les fermions et les bosons. La première catégorie représentent les particules de la matière (les leptons et les quarks) car ce sont des particules qui n'ont aucun composant dans leur structure, ce dernier ils ont besoin d'autres type de particule pour se combiner les unes aux autres dans une structure spécifique (21).

##### ✓ Les fermions

Ce sont tout les particules de spin demi entier et ils obéissent la statistique de fermi-Dirac, ceci est reflété sur la fonction d'onde d'un système de fermions identique est antisymétrique :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_i, \vec{r}_j \dots \vec{r}_n, t) = -\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_j, \vec{r}_i \dots \vec{r}_n, t) \tag{I.1}$$

Si on permute les deux particules i et j, le signe de la fonction d'onde change. En conséquence, deux fermions identiques ne peuvent pas occuper le même état quantique (le principe d'exclusion de Pauli).

✓ **Les bosons**

Ce sont des particules de spin entier et ils obéissent la statistique de Bose-Einstein, ceci est reflété sur la fonction d'onde d'un système de bosons identique est symétrique :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots, \vec{r}_i, r_j \dots \vec{r}_n, t) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_j, \vec{r}_i \dots \vec{r}_n, t) \tag{I.2}$$

Dans le cadre du modèle standard les bosons sont les particules responsables de l'interaction entre les leptons et les quarks. Ce type de boson est appelé les bosons de jauge (bosons vecteurs).

A chaque fermion dans le modèle standard est associée une antiparticule aux mêmes propriétés mais avec des nombres quantiques opposés tels que la charge par exemple le l'anti particules de l'électron est positron.

Three Generations of Matter (Fermions)			
	I	II	III
<b>mass</b> →	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV
<b>charge</b> →	2/3	2/3	2/3
<b>spin</b> →	1/2	1/2	1/2
<b>name</b> →	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top
<b>Quarks</b>	4.8 MeV -1/3 1/2 <b>d</b> down	104 MeV -1/3 1/2 <b>s</b> strange	4.2 GeV -1/3 1/2 <b>b</b> bottom
	<2.2 eV 0 1/2 <b>ν<sub>e</sub></b> electron neutrino	<0.17 MeV 0 1/2 <b>ν<sub>μ</sub></b> muon neutrino	<15.5 MeV 0 1/2 <b>ν<sub>τ</sub></b> tau neutrino
	0.511 MeV -1 1/2 <b>e</b> electron	105.7 MeV -1 1/2 <b>μ</b> muon	1.777 GeV -1 1/2 <b>τ</b> tau
<b>Leptons</b>			91.2 GeV 0 1 <b>Z<sup>0</sup></b> weak force
			80.4 GeV ±1 1 <b>W<sup>±</sup></b> weak force
			<b>Bosons (Forces)</b>

Figure (I-4): les particules fondamentales dans le modèle standard (12).

Les bosons de jauge ne sont pas les seules particules dans la classe de bosons, on ajoute aussi le boson de Higgs, ce boson est responsable de la masse des autres particules, il a été détecté au CERN en 2012 (22).

### I.3.2. Les interactions fondamentales

#### ✓ L'interaction électromagnétique

C'est la force qui affecte les particules chargées. Le boson vecteur de cette interaction est le photon qui se déplace à la vitesse la plus rapide dans l'univers car il n'a pas de masse. Elle est décrite par la théorie de l'électrodynamique quantique (QED) (18).

#### ✓ L'interaction forte

L'interaction forte assure la stabilité du noyau atomique où il surmonte la force électromagnétique qui provoque la répulsion entre les protons, en échangeant des mésons  $\pi$  qui font adhérer les protons aux neutrons selon l'hypothèse de Yukawa (23).

Dans le cadre du Modèle Standard, il s'agit d'une interaction qui rassemble des quarks en hadrons par l'absorption ou l'émissions des gluons et elle se manifeste dans la structure des hadrons. La théorie qui décrit les interactions fortes s'appelle la chromodynamique quantique (QCD) (18).

#### ✓ L'interaction faible

Elle est responsable de certain désintégration comme la réaction  $\beta^+$ (I.4) et  $\beta^-$ (I.5). L'interaction faible est moins intense que l'interaction forte et elle transmise par trois bosons : les bosons chargés  $W^+$ ,  $W^-$  et le boson neutre  $Z^0$  (15).



$\bar{\nu}_e$  est l'antineutrino.



$\nu_e$  est le neutrino.

La force faible peut également transformer les particules d'un type à un autre (24), et elle est ressentie par tous les fermions. Dans le modèle standard, cette force est unifiée avec l'interaction électromagnétique par la théorie de l'électrofaible (23).

#### ✓ L'interaction gravitationnelle

La gravité est la force la plus faible de la nature, de sorte que son effet sur les interactions entre les particules est ignoré et elle n'est pas expliqué dans le modèle standard. En outre, la force gravitationnelle est expliquée en s'appuyant sur les prédictions d'Albert Einstein dans sa théorie de la relativité générale en 1916. Selon cette théorie la gravité est des ondes se propagent comme les ondes électromagnétiques et le graviton est le médiateur de l'interaction gravitationnelle (15). Mais son existence n'a pas encore été confirmée.

L'interaction	Le boson	Le spin	La masse	Agit sur
électromagnétique	photon	1	0	Toutes les particules chargées
forte	8 gluons	1	0	Toutes les particules ont la couleur
faible	$Z^0$	1	91 GeV/c <sup>2</sup>	Toutes les particules
	$W^\pm$		80 GeV/c <sup>2</sup>	
gravitationnelle	graviton	2	0	Toutes les particules

Tableau ( I-6) : les interactions et les bosons de jauge.

## I.4. Les nouveaux nombres quantiques

### I.4.1. La couleur

On peut dire que la couleur  $c$  est un nouveau nombre quantique. Après la découverte de la particule  $\Delta^{++}$  (25) :

$$\Delta^{++} = uuu \quad (I.5)$$

En effet ce brayon est constitué trois quarks de même saveur et même spin, puisque les quarks sont fermions, donc cet état est interdit selon le principe d'exclusion de Pauli et le modèle des quarks est incomplet (15). Mais le problème a été résolu en supposant qu'il existe une propriété de charge de couleur où chaque saveur de quark et son antiquark peut provenir de trois couleurs (26) :

$$\begin{pmatrix} u^a \\ d^a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c^a \\ s^a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t^a \\ b^a \end{pmatrix} \quad \text{Où } a = \text{rouge, vert, bleu}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^b \\ \bar{d}^b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{c}^b \\ \bar{s}^b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{t}^b \\ \bar{b}^b \end{pmatrix} \quad \text{Où } b = \text{anti-rouge, anti-vert, anti-bleu}$$

Figure (I-5): les couleurs des quarks et antiquarks

Tout comme les particules s'attirent avec une charge électrique par la force électromagnétique, on suppose également que la charge de l'interaction forte est la couleur (26). Cette dernière explique aussi pourquoi n'y a-t-il pas de quark libre à travers le postulat que toutes les particules observées expérimentalement sont des particules blanches (la couleur naturelle) (27), les quarks de trois couleurs primaires sont regroupés en hadrons sans couleur selon le tableau suivant.

## La superposition

Rouge +Vert+Bleu =	Blanc
Rouge+Anti-rouge =	Blanc
Vert+Anti-vert =	Blanc
Bleu+Anti-bleu =	Blanc

Tableau (I-7) : la superposition des couleurs.

Le tableau montre deux règles de fondamentales pour le regroupement des quarks en hadrons indépendamment de la similitude ou de la différence de saveur :

- La première règle consiste la superposition trois quarks de trois couleurs différentes, et c'est le cas que nous avons appelé baryons dans le modèle des quarks.
- Le deuxième cas est l'assemblage d'une paire de quarks, dont l'un a une charge de couleur normale (bleue, rouge ou verte) et le second est un antiquark, et nous disons techniquement qu'il porte une charge anti-couleur (anti-bleue, anti-rouge, ou anti verte) et ce cas de méson.

Il y a aussi des anti-baryon, c'est une combinaison de trois anti- couleurs. Récemment, des cas en dehors de cette interprétation traditionnelle sont également étudiés, Ces états sont dits exotique et n'appartiennent pas au modèle des quarks (28).

#### I.4.2. Les lois de conservations

On sait que dans toutes les interactions nucléaires, des lois de conservation de certaines grandeurs physiques doivent s'appliquer. Parmi ces lois, on trouve les lois de conservation de l'énergie et de la charge. Ces principes s'appliquent également aux phénomènes subatomiques. Sauf que les propriétés des particules sont plus ambiguës, car nous n'avons pas une connaissance complète de la façon de décomposer les particules et de leur désintégration. Ce qui nécessite l'ajout de nouvelles lois de conservation pour obtenir une compréhension précise et approfondie par l'étude des désintégrations des particules.

A titre d'exemple, considérons la réaction (29):

$$p^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ \quad (I.6)$$

Où le proton (de spin 1/2) peut se transformer en particules plus légères, qui sont le méson (de spin 0) et le positron (de spin 1/2), car cela est compatible avec le principe de

conservation de la charge et de moment angulaire. Mais il n'a pas été observé expérimentalement et aussi pour le processus (29):

$$\mu^- = e^- + \gamma \quad (I.7)$$

Il n'a jamais été remarqué dans l'expérience. Malgré que ces désintégrations soient permises cinématiquement c-à-dire les lois de conservations fondamentales sont vérifiées. L'observation expérimentale a conduit à la formulation des deux nouvelles lois (29):

- La conservation de nombre lépontique (L) ;
- La conservation de nombre baryonique (B).

On peut distribuer les nombres quantiques générés par ces deux lois dans le contexte des classifications de particules de la manière suivante :

Pour les hadrons :

- Chaque baryon possède un nombre baryonique B (B=+1) et l'antibaryon (B=-1) ;
- Chaque méson ne possède pas un nombre baryonique B (B=0).

Pour les leptons :

- l'électron et son neutrino ont un nombre lépontique électron  $L_e$  ( $L_e = 1$ ) ;
- Le muon et son neutrino ont un nombre lépontique muon  $L_\mu$  ( $L_\mu = 1$ ) ;
- Le tau et son neutrino ont un nombre lépontique tau  $L_\tau$  ( $L_\tau = 1$ ) ;
- Le nombre lépontique totale  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ .

Les particules	B	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$	L
<b>Mésons</b>	0	0	0	0	0
<b>Baryons</b>	1	0	0	0	0
<b>Electron</b>	0	1	0	0	1
<b>Neutrino électronique</b>	0	1	0	0	1
<b>Muon</b>	0	0	1	0	1
<b>Neutrino muonique</b>	0	0	1	0	1
<b>Tau</b>	0	0	0	1	1
<b>Neutrino taunique</b>	0	0	0	1	1

Tableau (I-8): les nombres baryonique et lépontique.

Le nombre baryonique dans le modèle des quarks est défini comme un nombre résultant d'un triplet tel que chaque quark a un nombre de baryons égal  $\frac{1}{3}$  et chaque antiquark  $-\frac{1}{3}$ . Avec cette définition, on explique également pourquoi les mésons n'ont pas de nombre baryonique.

Le nombre baryonique et leptonique ne sont pas les seuls nombres quantiques en physique des particules, il existe d'autres nombres préservés dans les interactions faibles et fortes.

## I.5. Les sources des particules élémentaires

La production d'électrons et de protons est l'une des choses les plus simples à notre époque, on sait que lorsqu'on chauffe un métal, on peut obtenir des électrons et ensuite les diriger par les champs électriques et magnétiques. Bien sur, des protons peuvent être produits en ionisant l'atome d'hydrogène en négligeant les électrons du fait de sa faible masse. En pratique, un réservoir rempli d'hydrogène est considéré comme un réservoir rempli de protons. D'autre part, il existe trois sources de particules subatomiques (4).

### ✓ La radioactivité

Les noyaux atomiques radioactifs se désintègrent spontanément et dans de telles réactions plusieurs particules sont émises (11).

$n, p, e^-, e^+, \nu_e, \bar{\nu}_e$  dans les réaction  $\beta^+$  et  $\beta^-$ .

### ✓ Les rayonnements cosmiques

Ils ont été découverts en 1912 lors d'un vol en ballon par le physicien Victor Hess pour étudier le taux d'ionisation de l'atmosphère (30). Il a observé que l'ionisation de l'atmosphère augmente avec l'altitude, et cela s'explique par le fait que la matière atmosphérique est constamment bombardée de particules à haute énergie qui se trouvent dans les couches supérieures de l'atmosphère. C'est ce qu'on appelle couramment le rayonnement cosmique. Les particules de rayonnement cosmiques primaires entrent en collision avec les noyaux des gaz atmosphériques successivement, donnant naissance à de nouvelles particules secondaires (4). Au début des années 1930 les techniques expérimentales ont commencé à mesurer les propriétés physiques telles que la masse et la charge électrique des particules résultantes (21).

## Rayon cosmique primaire

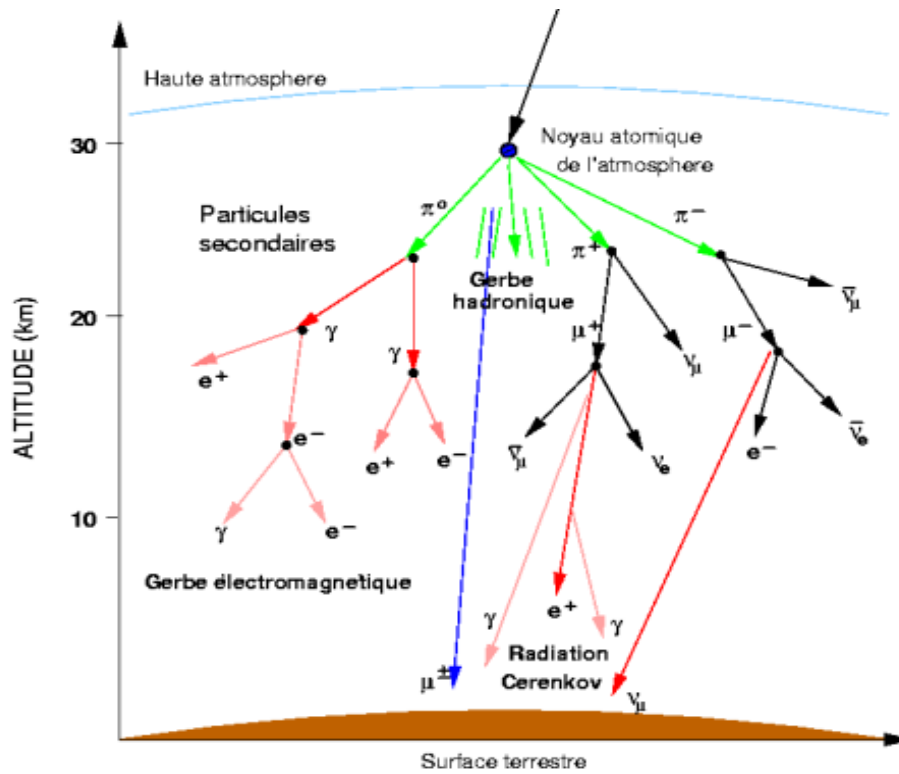


Figure (I-6) : la production des particules par les rayons cosmiques  
(Dessin : Denis Gialis).

### ✓ Les accélérateurs

Malgré le grand intérêt pour la production des particules par le rayonnement cosmique, c'était une méthode aléatoire et il est difficile de déterminer tous les processus. Des accélérateurs ont été créés pour effectuer des expériences contrôlées. Ils sont des instruments qui conduisent des particules chargés tels que des électrons ou des protons à près de la vitesse de la lumière par des champs électromagnétiques et ils les font entrer en collision ou avec une cible (13). Le but de l'augmentation de vitesse est d'augmenter l'énergie cinétique qui est considérée comme une condition nécessaire associée au cadre de la nature Corpusculaire exprimée selon la relation suivante :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{I.8})$$

Où  $h$  la constant de blanck et  $p$  l'impulsion.

Donc pour une meilleure résolution d'analyse de la particule il doit avoir une grande quantité de mouvement (alors plus d'énergie) (15).



Il s'appuie également sur le principe de l'incertitude, la possibilité d'un approfondissement à l'intérieur d'une sonde est compatible avec une plus grande énergie.

$$\Delta x \Delta p_x \simeq \hbar/2 \quad (\text{I.9})$$

Les processus de l'impulsion se produisent sur de petites distances.

$\Delta x$ (cm)	E	Instrument
$10^{-5}$	2ev	Microscopes
$10^{-8}$	2Kev	Rayon X
$10^{-11}$	2Mev	Rayon $\gamma$
$10^{-14}$	2Gev	Accélérateurs
$10^{-16}$	200Gev	Accélérateurs
$10^{-17}$	2Tev	Accélérateurs

Tableau (I-9) : l'énergie minimale et l'instrument utilisé pour une distance  $\Delta x$  (21).

Dans les accélérateurs, l'énergie de collision se transforme en masse et créer une nouvelle particule selon la relation d'Einstein :

$$E = mc^2 \quad (\text{I.10})$$

En effet, les accélérateurs ont joué le rôle de microscopes à très courte distance et ils ont contribué à l'avancement des domaines de la physique nucléaire et des particules. De plus, les accélérateurs sont utilisés dans d'autres applications, comme l'industrie électronique, la physique de la matière condensée, et même la médecine, celle-ci est devenue une discipline indépendante de la physique des particules (4).

## I.6. L'origine de l'antimatière

Comme notre univers se compose de la matière, il existe également l'antimatière résultant de l'antiparticule. Ce concept est apparu en 1928 quand Paul Dirac a pu trouver une équation décrivant le mouvement de l'électron appelé l'équation de Dirac (31):

$$(i\hbar\gamma_\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad (\text{I.11})$$

$\gamma_\mu$  sont les matrices de Dirac ou  $\mu = 0,1,2,3$  et  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

L'équation de Dirac admet une solution d'énergie positive et une autre solution d'énergie négative. En la physique classique les valeurs négatives n'a aucun sens (15), qui fait l'une des deux conclusions soit la théorie de Dirac est fausse, soit cette équation puisse être utilisée pour décrire une autre particule de charge positive. À cette époque le proton était la seule particule connu qui a ce propriété mais la deuxième solution de l'équation ne lui correspond pas à cause sa grande masse par rapport à l'électron.

Pour résoudre ce problème Dirac a proposé la notion de l'antiparticule et donc il y a un autre électron de charge électrique positive dans la nature. Après une année, Carl Anderson a découvert l'antiélectron (positron) dans les rayons cosmiques (18), cela confirme la prédiction de Dirac puis il a reçu le prix Nobel. Depuis le positron, plusieurs antiparticules ont été découvertes, comme l'antiproton et l'antineutron. Il convient de noter qu'un neutron n'a pas de charge électrique, cependant il peut être distingué de son antiparticule à cause il a une structure de quark différente ( $\bar{d}\bar{d}\bar{u}$ ) et un signe de moment magnétique opposé (15). Certaines particules sont des antiparticules à elles-mêmes, tel que les mésons qui sont composés d'un quark et son antiquark qui ont la même saveur (quarkonium).

De nombreuses expériences ont été faites sur le positron pour déterminer les propriétés des antiparticules, et il a été constaté que lorsqu'il interagit avec un électron, l'un d'eux annihile l'autre, et produire une énergie peuvent être calculés par la relation d'Einstein (I.10). Si notre univers était composé d'une quantité égale de matière et d'antimatière, il aurait disparu et il aurait cessé d'exister ! Sans oublier que les mêmes forces qui permettent à un électron et à un proton de former un atome d'hydrogène sont également capables de former un antiproton et un antiélectron dans un atome d'anti hydrogène, cet atome a en fait été produit au CERN (32).

## I.7. Conclusion

En conclusion, nous avons donné une présentation générale sur les notions fondamentales de la physique des particules et nous avons commencé ce chapitre par la classification des particules de la matière et leurs propriétés puis d'une façon détaillée décrire le modèle des quarks qui est la base de notre travail. Selon ce modèle, les hadrons ont été classés en deux classes, à savoir les baryons et les mésons

Le comportement des particules élémentaires repose sur le modèle standard mais nous voyons que cette théorie n'explique pas la gravité et pourquoi on a trois familles des

quarks et leptons dans la nature au temps la matière contient seulement les quarks up, down et un électron ? Ceci-ci sont les limites de la modèle standard et il existe d'autres théorie essayer de répondre les questions ouvertes tel que, la théorie des cordes.

Nous avons évoqué les sources naturelles des particules et les accélérateurs qui sont un utile expérimental pour la production des particules dans les laboratoires. Après avoir défini l'origine de concept l'antiparticule. Dans le deuxième chapitre on verra une étude sur un système d'un pair quark-antiquark ont la même saveur.

# Chapitre II :

## L'étude du spectre du quarkonium

---

## Chapitre II : L'étude du spectre du quarkonium

### II.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, les hadrons ont été décrits comme des particules composées de quarks, cette interprétation n'a pas reçu beaucoup d'attention dans la première période de formulation du modèle des quarks jusqu'en 1974 les doutes sur sa validité sont levés avec l'apparition du premier exemple de quarkonium (33).

Le quarkonium appartient à la classe des mésons lourds et l'étude de ce système repose sur deux approches (6) :

- ✓ L'approche phénoménologique elle est liée à la nature de la force entre les quarks à l'intérieur des hadrons, donc elle tente de construire un modèle non relativiste basé sur les propriétés générale de QCD.
- ✓ L'approche théorique tente de décrire le quarkonium lourd avec des calculs et/ou des approximations basées sur le formalisme théorique de la QCD.

Dans ce chapitre, nous allons introduire le spectre de quarkonium et les deux propriétés principales de QCD. Ensuite, nous allons nous intéresser au modèle non relativiste et nous nous concentrons uniquement sur les bases de l'approche phénoménologique.

### II.2. Le spectre de quarkonium

Avant de discuter le spectre du quarkonium, il faut commencer par un rappel sur les états liés qui ressemblent à l'atome d'hydrogène. C'est un système simple à deux particules où le proton ou l'électron (ou les deux) peuvent être remplacés par d'autres particules. De tels systèmes sont collectivement appelés atomes exotiques. Parmi les nombreuses possibilités, citons : l'hydrogène muonique ( $p^+\mu^-$ ), l'hydrogène pionique ( $p^+\pi^-$ ), le positonium ( $e^+e^-$ ) qui est le plus important de ces systèmes et l'exemple le plus proche du quarkonium (4).



**Figure (II-1) :** a) l'interaction forte via un échange de gluons (quarkonium) et (b) l'interaction électromagnétique via un échange de photons (positronium).

Le positonium est un système composé d'un électron et d'un positron lié par le photon dans le cadre de QED (voir la figure II-1), le suffixe « onium » a été tiré de son nom pour définir les états liés d'un quark lourd et son antiquark on l'appelait quarkonium à cause de la similitude entre les deux systèmes sauf que ce système est décrit par la théorie de QCD c-à-dire les quarks liés par l'interaction forte véhiculée par le gluon au lieu de photon dans la force électromagnétique.

De plus, les hadrons sont caractérisés par des nombres quantiques tels que le spin et le nombre baryonique. Le quarkonium étant un type de méson, il sera classé selon le moment orbital entre le quark et l'anti quark pair  $\vec{L}$ , le spin total du système  $\vec{S}$  (le spin total est déterminé par :  $\vec{S} = \vec{S}_q + \vec{S}_{\bar{q}}$ ) et leur moment cinétique total  $\vec{J}$  ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ) d'où l'on tire aussi la parité  $P$  et la conjugaison de charge  $C$  (17).

La conjugaison de charge et la parité sont des quantités conservées dans les interactions fortes et électromagnétiques des états de quarkonium. De plus, les états observés du quarkonium peuvent être donnés en termes des valeurs  $J^{PC}$  (les figures II.2 et II.3), où la parité du méson est :

$$P = (-1)^{L+1}$$

La conjugaison de charge  $C$  est donné :

$$C = (-1) (-1)^L (-1)^{S+1} = (-1)^{L+S}$$

C'est aussi l'état de spectre de quarkonium est totalement spécifié par la notation spectroscopique :

$$n^{2S+1}L_J$$

Où n est le nombre quantique principal. Par exemple pour n = 1 et L=0, on a les états suivants :

$$1^1S_0 ; S = 0$$

Ou

$$1^3S_1 ; S = 1$$

En physique des particules, deux types d'exemples de système de quarkonium ont été découverts et étudiés. Ils sont les suivants :

➤ **Charmonium**

Un système de quarkonium contenant une paire de quarks charme (c) et anti-charme ( $\bar{c}$ ) est appelé charmonium ( $c\bar{c}$ ), le premier état lié de ce système a été découvert en 1974 dans ce qu'on appelait « la révolution de Novembre » avec la découverte simultanée de résonance se désintégrant à  $e^+e^-$  à travers le processus (5):

$$p + Be \rightarrow (J \rightarrow e^+e^-) + X \rightarrow e^+e^- + X \tag{II.1}$$

Par l'équipe de BNL (ils l'ont nommé J) et à partir de la réaction (5) :

$$e^+e^- \rightarrow \psi \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-, \text{hadron} \tag{II.2}$$

Au SLAC (ils l'appelaient  $\psi$ )

La résonance qui a été nommé J et  $\psi$  par les deux équipes, on l'appelle maintenant le méson  $J/\psi$  il est l'état la plus courant du charmonium car, il a une faible masse et de spin égal 1. Ce qui fait sa production facile dans les expériences (5) .

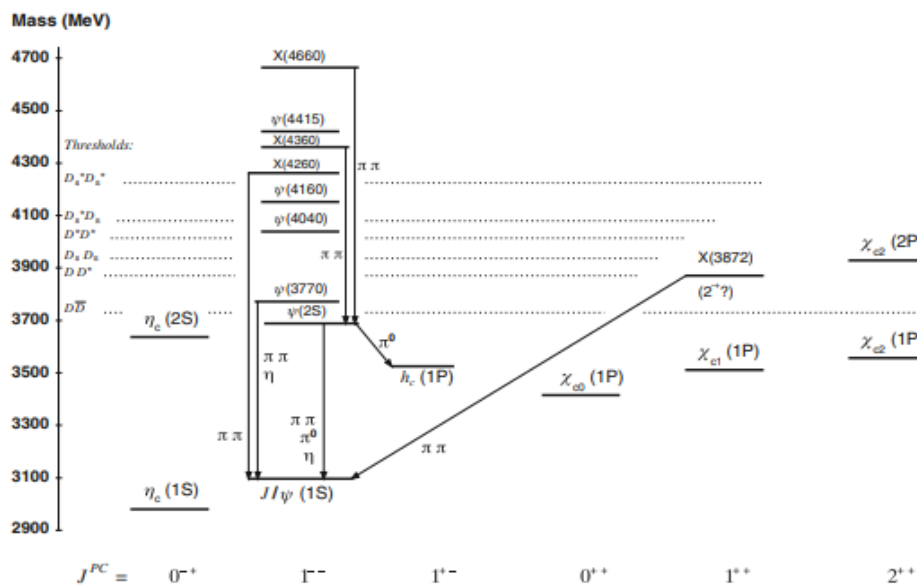


Figure (II-2) : Les états de charmonium observés expérimentalement (34).

➤ **Bottomonium**

Le bottomonium désigne un méson sans saveur dont les constituants sont le quark Bottom ( $b$ ) et de son antiquark ( $\bar{b}$ ) il a été observé pour la première fois au Fermilab en 1977, dans la réaction (5):

$$p + N \rightarrow (\bar{b} \rightarrow \mu^+ + \mu^-) + X \tag{II.3}$$

Ce nouvel état a été nommé  $\Upsilon$  connu aujourd'hui sous le nom  $\Upsilon(1S)$ .

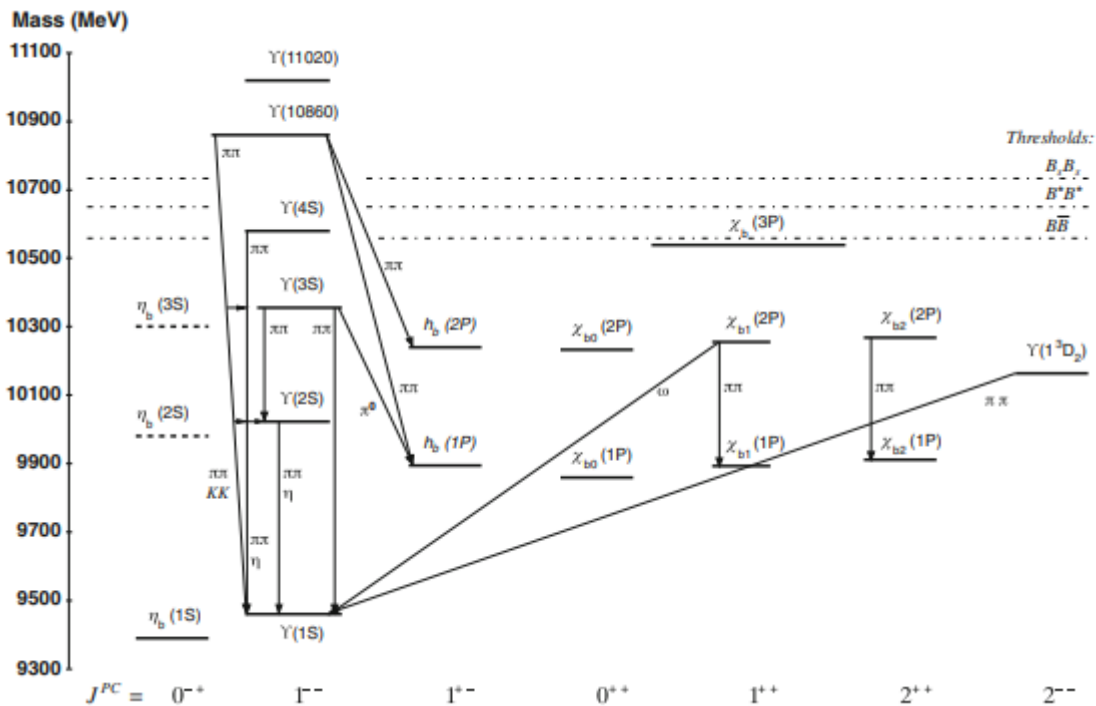


Figure (II-3): Les états de bottomonium observés expérimentalement et théoriquement attendus. Les lignes pointillées indiquent des états non observés ou non confirmés (34).

. Il convient de noter que l'histoire avec le charmonium, et même avec le bottomonium ne se répétera probablement pas avec le topquonium : le quark  $t$  lui-même à un  $174,2 \text{ GeV}/c^2$  le ( $t\bar{t}$ ) l'état devrait avoir une masse d'environ  $344,4 \text{ GeV}/c^2$  le quark top se désintégrera beaucoup plus rapidement que le  $J/\psi$  et le  $\Upsilon$  donc avant de produire des mésons et il se peut bien qu'il se comporte pratiquement comme une particule virtuelle, qui par définition ne peut pas être détectée directement (4).



Le quarkonium	La durée de vie (s)
<b>Charmonium</b>	$7,2 \cdot 10^{-21}$
<b>Bottomonium</b>	$1,3 \cdot 10^{-20}$
<b>Topponium</b>	Il n'existe pas

Tableau (II-1) : la durée de vie de quarkonium.

### II.3. La description phénoménologique de QCD

La théorie quantique des champs est une théorie qui combine la mécanique quantique et la relativité restreinte pour étudier les interactions entre les particules élémentaires, le modèle standard de la physique des particules est une unification des théories construites dans ce cadre (11).

Sur cette base, la chromodynamique quantique QCD est une théorie de champs a été développée pour décrire les interactions fortes à l'image de l'électrodynamique quantique QED. Malgré les similitudes entre ces deux, il existe des différences qui peuvent être clarifiées dans le tableau suivant (35) :

	QED	QCD
La charge des fermions	La charge électrique	La charge de couleur
Le nombre de médiateur	Un seul photon	8 gluons
La charge de médiateur	Le photon est neutre électriquement	Les gluons sont des particules colorées
Le couplage entre les médiateurs	Non	oui

Tableau (II-2) : les différences entre la QCD et QED.

La différence la plus importante illustrée est les gluons portent une charge de couleur, permettant aux gluons d'interagir les uns avec les autres. Ce qui rend les gluons couplés entre eux sous une forme triple ou quadruple, cela affecte la croissance de la constante de couplage. Ce dernier est à l'origine des deux propriétés essentielles de QCD : le confinement de la couleur et la liberté asymptotique (35).

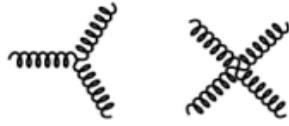


Figure (II-4) Les nœuds triples et quadruples des gluons.

### II.3.1. Confinement de la couleur

Nous avons déjà évoqué que toutes les particules que l'on voit expérimentalement sont blanches (sans charge de couleur) et nous ne puissions pas voir les quarks individuels en raison de la propriété de la couleur, ils restent confinés à l'intérieur des baryons et des mésons mais pourquoi ne pouvons-nous pas les séparer des hadrons ? Dans tous les cas la production de n'importe quelle particule dans les accélérateurs dépend de l'énergie, qui doit être directement proportionnelle à sa masse. Par exemple si nous ajoutons une énergie équivalente à la masse des quarks dans le méson  $J/\psi$  ( $c\bar{c}$ ), nous pouvons obtenir deux composés de quark charme et son antiquark séparément (36). Dans la QCD il n'est jamais possible d'obtenir ces deux particules, et il y aura un processus de hadronisation, c'est-à-dire la formation de nouveaux hadrons (37).

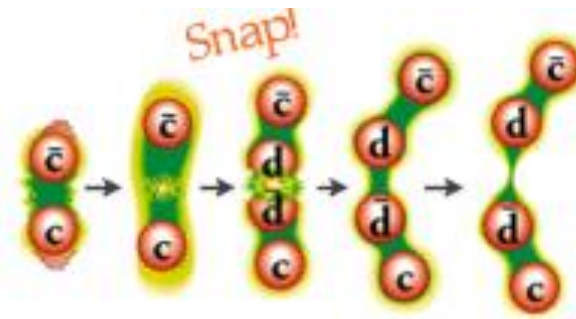


Figure (II-5) : la propriété de confinement de la couleur : le quark charme et son antiquark n'est pas libéré (36).

Le quark et l'antiquark sont liés par un gluon, et on peut l'imaginer comme un ressort. Lorsque l'énergie augmente, le gluon se dilate jusqu'à ce qu'il atteigne son degré maximum, il se brise et l'énergie produite par le crash forme des mésons. On conclue que quand la distance est grande entre les particules soumises à la force nucléaire forte, elles interagissent fortement les unes avec les autres. Ce phénomène est appelé confinement des couleurs. Jusqu'à présent il n'a pas été expliqué mathématiquement bien que cette propriété est essentielle pour déterminer le modèle de potentiel de quarkonium.

### II.3.2. Liberté asymptotique

Ce qui se passe dans le confinement des couleurs, on obtient son contraire dans le phénomène de liberté asymptotique. Il a été trouvé mathématiquement par Gross, Wilczek et Politzer après le résultat d'une opération mathématique liée à la fonction bêta, qui étudie l'évolution de l'énergie d'interaction et de la constante de couplage est exprimé (36):

$$\beta_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi} \left( -\frac{11N}{6} + \frac{n_f}{3} \right)$$

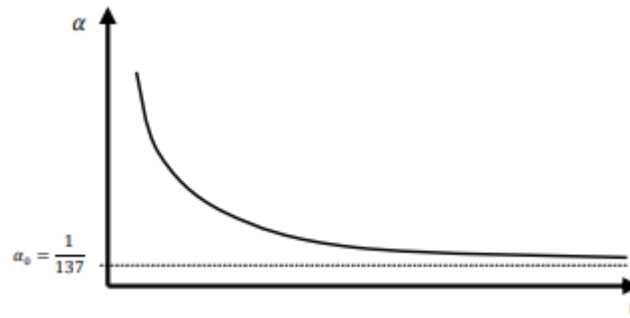
La fonction bêta est liée aux nombres des couleurs, et il est symbolisé par  $N$  en théorie, qui est le nombre de charges nucléaires différentes. Contrairement à l'électromagnétisme, qui contient une charge, l'interaction forte contient trois types de charges appelées couleurs (vert, bleu, rouge). Donc

$$N = 3$$

Dans l'équation la fonction bêta est également liée au nombre de saveurs et il est notée  $n_f$ , qui est le nombre de types de quarks présents dans la théorie. Nous savons que la nature contient six types de quarks, qui sont t, b, c, s, d et u. Alors

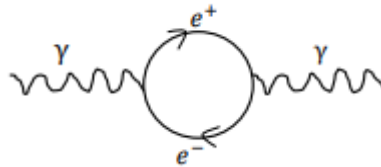
$$n_f = 6$$

En substituant dans l'équation, on trouve que la fonction bêta est négative ! Ce résultat a conduit à la conclusion que la constante de couplage tend vers zéro à des énergies d'interaction plus élevées et donc pour de courtes distances (36). Autrement dit le quark et son antiquark peuvent être considérés comme deux particules libres et ne sont soumis à aucune force lorsque la distance entre eux est petite, car l'interaction forte disparaît en l'absence de constante de couplage ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Ceci est incompatible avec nos croyances antérieures que nous avons apprises à propos de QED (dans la figure II.6), la constante de couplage augmente à courte distance, c'est-à-dire que l'intensité de l'interaction électromagnétique est plus grande. Cette propriété vient de la polarisation d'un vide. En physique des solides, cette situation est connue dans les milieux diélectriques sous le nom d'effet d'écrantage (27).



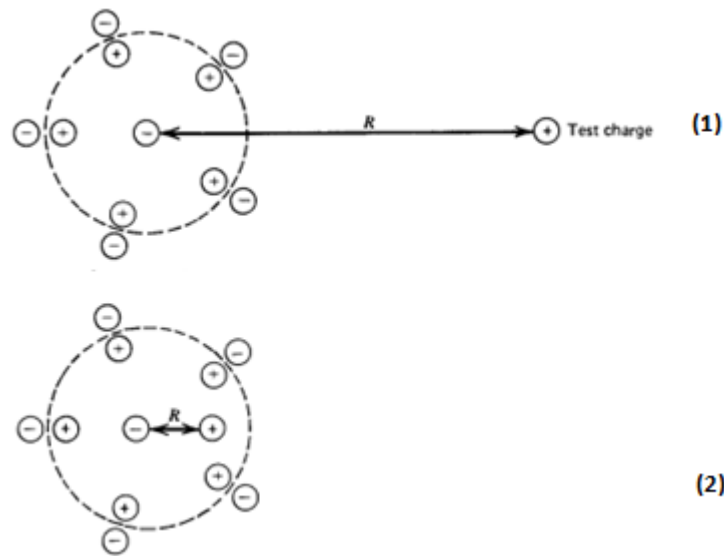
**Figure (II-6) :** L'évolution de la constante de couplage par rapport la distance entre la paire  $e^+e^-$ .

Dans la théorie quantique des champs, un électron n'est pas simplement un électron, il peut soudainement émettre un photon, ou il peut émettre un photon qui s'annihile ensuite en une paire électron-positon, et ainsi de suite (27).



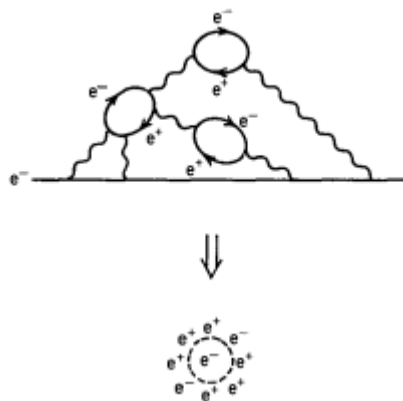
**Figure (II-7):** Diagramme de polarisation du vide par QED (35).

Le vide est autour de l'électron originale (la charge centrale) est un nuage de paires électron-positron. En effet les charges opposées s'attirent et donc les positrons seront plus proches de l'électron. Quant aux charges négatives, elles s'éloigneront. Le comportement des charges de vide créera un champ électrique et rappeler que la charge de l'électron étudiée doit également avoir un champ électrique opposé au champ des charges virtuelles donc le champ total diminuera à mesure que nous nous éloignerons de la charge centrale à cause de la polarisation du vide (27).



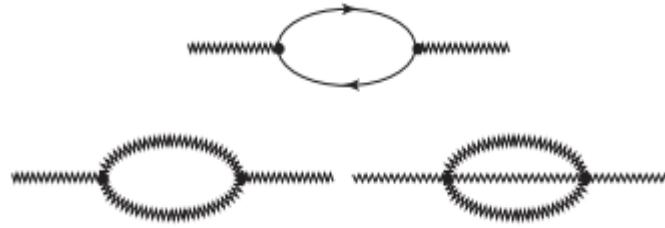
**Figure (II-8) :** Mesurer la charge d'un électron (a) Utilisation d'une sonde longue distance,(b) Utilisation d'une sonde à courte distance (27).

Supposons que nous voulions déterminer la charge de l'électron de la figure (II-8). En mesurant la force électromagnétique subie par une charge d'essai. L'endroit où nous plaçons la charge de test détermine le résultat, il est possible de pénétrer l'effet d'écrantage des positons, si la charge de test est placée à une distance plus proche de la charge d'origine. Ce résultat est dû au fait le vide entourant l'électron est devenu un milieu polarisable qui présenté sous forme d'image sur la figure (II-9).



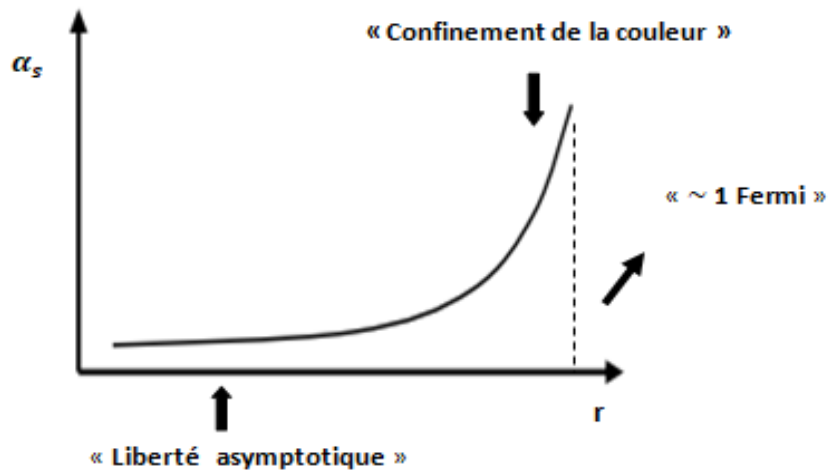
**Figure (II-9) :** Dépistage de la charge électrique en théorie quantique des champs (27).

Maintenant prenons cette idée avec nous et revenons à l'interaction forte. Le quark prend la place de l'électron dans QCD, le vide aussi est un milieu polarisable parce qu'il y a des paires virtuelles quark-antiquark qui sont émises qui produisent l'effet l'écrantage (27) D'autre part, il y a aussi l'émission de gluons virtuels dans le sens opposé (17)(voir la figure II-10).



**Figure (II-10):** Diagrammes contribuant à la polarisation du vide en QCD. Celui du haut comporte l'émission de paires virtuelles quark-antiquarks et ceux du bas à l'émission de gluons virtuels. Les deux contributions ( $q\bar{q}$  et gluons) ont des signes opposés (23).

D'où les charges virtuelles des quarks et de leurs antiquarks font diminuer le champ nucléaire. Par contre les gluons portent une charge de couleur alors ils auront un effet inverse sur le champ nucléaire résultant, ça le fait augmenter (un effet anti-écranage). Peut-être que la charge du quark central diminue à de petites distances et c'est ce dont nous avons discuté dans la fonction bêta (sachant que la constante de couplage est proportionnelle à la charge du quark), où il a montré que l'effet des gluons est le plus fort. Il n'est pas possible de se débarrasser de la propriété de liberté asymptotique sauf quand cette fonction nous donne des valeurs positives et il est atteint s'il y a plus de seize saveurs.



**Figure (II-11) :** L'évolution de la constante de couplage par rapport la distance entre la paire  $q\bar{q}$ .

Des conséquences de la liberté asymptotique ont été observées dans des expériences de diffusion inélastique électron proton profonde, où les quarks se comportent comme des particules quasi libres à l'intérieur des hadrons en raison du fait que ces processus ont un grand transfert de quantité de mouvement.

## II.4. L'approche non-relativiste

La proposition de l'approche relativiste pour résoudre le problème du système quarkonium est due à la grande masse des quarks (c et b). Il est bien connu que la masse relativiste a l'influence sur la vitesse. En mécanique classique, la deuxième loi de Newton indique que la force nécessaire pour accélérer un objet est directement proportionnelle à sa masse. Cette loi peut s'appliquer à particules élémentaires, et cela signifie que pour accélérer une particule de grande masse à une vitesse spécifique, elle nécessite beaucoup d'énergie, tandis qu'une particule de petite masse a besoin de moins d'énergie pour atteindre de grande vitesse.

En général, le terme non relativiste désigne des situations dans lesquelles les vitesses des objets sont très inférieures à la vitesse de la lumière (estimée à  $3 \cdot 10^8$ ), ce qui nous fait négliger les effets de la relativité restreinte tels que la dilatation du temps et la contraction de la longueur.

Cependant, l'énergie cinétique s'avère ne pas être très faible par rapport à la masse au repos des quarks, ce qui nous a fait utiliser une correction relativiste dans son calcul (38). L'expression de l'énergie cinétique relativiste pour une particule de masse  $m$  est donnée dans l'équation suivante :

$$T = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^4} \quad (\text{II.5})$$

Pour les petites impulsions, l'équation précédente peut être étendue comme suite :

$$T = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(p^2)^2}{8mc^2} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (\text{II.6})$$

Il convient de se demander quelle l'utilité d'une approche de mécanique quantique non relativiste à la spectroscopie du quarkonium ? Nous attendons d'elle qu'elle serve de base à une phénoménologie féconde (39).

### II.4.1. L'équation de Schrödinger

La mécanique quantique non relativiste est incarnée dans l'équation de Schrödinger, qui permet à quiconque d'étudier l'évolution de n'importe quel système et elle peut aussi être généralisée à plusieurs systèmes qu'il s'agisse d'un cristal, d'un atome ou d'une particule qui se déplace de manière non relativiste (33).

Elle a été appliquée avec succès aux hadrons et en particulier au quarkonium en raison de la nécessité théorique de calculer les niveaux d'énergie. Les propriétés des interactions ont été déterminées en adoptant les modèles de potentiel applicables dans cette

équation. Si le potentiel ne dépend que des positions relatives (le module de position), on peut étudier le problème dans le système du centre de masse

L'équation liée au potentiel central peut être écrite en détail en partant de l'équation de Schrödinger générale à deux corps (ici, dans le cas du quarkonium, les deux particules sont le quark et son antiquark).

$$H\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{II.7})$$

Avec

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) \quad (\text{II.8})$$

L'équation devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r)\right]\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{II.9})$$

Le Laplacien en coordonnées sphériques est donné par :

$$\Delta = \Delta_{radial} + \Delta_{angulaire} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Avec les expressions du module du moment cinétique dans ce système est :

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Donc

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \frac{L^2}{r^2}$$

On trouve :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = E_n \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) \quad (\text{II.10})$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, nous supposons que la fonction d'onde est un produit de 2 fonctions :

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_n(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$



$R_n(r)$  est la partie radiale, elle dépendant de  $r$  et la partie angulaire  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  (harmoniques sphériques) en termes de  $\theta, \varphi$  et elle s'expriment en fonction des polynômes de Legendre :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$C_l^m$  est une constante de normalisation à déterminer,  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  sont appelées les harmoniques sphériques et elle peut être résolu numériquement facilement, il reste seulement la partie radiale.

L'équation de Schrödinger en coordonnées sphérique s'écrit :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = E_n R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{II.11})$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_{nl}(r)) Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{L^2}{2\mu r^2} Y_l^m(\theta, \varphi) R_{nl}(r) + V(r) R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = E_n R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{II.12})$$

Avec

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_{nl}(r)) Y_l^m(\theta, \varphi) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} Y_l^m(\theta, \varphi) R_{nl}(r) + V(r) R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = E_n R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

En simplifiant par  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_{nl}(r)) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R_{nl}(r) + V(r) R_{nl}(r) = E_n R_{nl}(r) \\ \Rightarrow & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R_{nl}(r)) + \left[ \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] (r R_{nl}(r)) = E_n (r R_{nl}(r)) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

On pose  $u_{nl}(r) = r R_{nl}(r)$  l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + V_{eff}(r) u_{nl}(r) = E_n u_{nl}(r)$$

Où

$$\begin{aligned} V_{eff}(r) &= V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} u_{nl}''(r) + V_{eff}(r) u_{nl}(r) &= E_n u_{nl}(r) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$  est de carré sommable  $\Rightarrow$  elle est finie en tout point. Les fonctions d'onde doivent être normalisables. C'est à dire :

$$\iiint \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) \psi_{nlm}^*(r, \theta, \varphi) d^3r = 1 \quad (\text{II.15})$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R(r) R^*(r) Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi &= 1 \\ \Rightarrow \int_0^\infty |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi &= 1 \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi &= 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |u_{nl}(r)|^2 dr = 1 \quad (\text{II.16})$$

Par conséquent  $\lim_{r \rightarrow +\infty} R(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 0$ , d'un autre coté  $R(r)$  doit être finie au point 0 donc  $\lim_{r \rightarrow 0} r R(r) = \lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0$

L'un des résultats les plus importants de l'équation de Schrödinger nous montrons que plus la masse constituante est grande, plus un état lié spécifié est bas dans un potentiel donné. Cela est dû à la théorie Feynman—Hellman .Après avoir introduit notre formulation, nous dériverons le théorème de Feynman-Hellmann sur la variation de la

valeur propre de l'énergie avec les paramètres de l'interaction, résultat que nous appliquerons fréquemment. Nous écrivons l'équation de Schrödinger sous forme (39):

$$H(\lambda)|\psi\rangle = E(\lambda)|\psi\rangle \quad (\text{II.17})$$

La variation de l'énergie de l'état lié avec le paramètre  $\lambda$  est donnée par :

$$\partial E / \partial \lambda = \langle \partial H / \partial \lambda \rangle \quad (\text{II.18})$$

Où  $\lambda$  est tout paramètre caractérisant l'interaction

Avec  $E = \langle H \rangle$  la variation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{\partial \langle \psi |}{\partial \lambda} H | \psi \rangle + \left\langle \psi \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi \right\rangle + \langle \psi | H \frac{\partial | \psi \rangle}{\partial \lambda} \quad (\text{II.19})$$

En utilisant (II.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \langle \psi |}{\partial \lambda} E | \psi \rangle + \left\langle \psi \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi \right\rangle + \langle \psi | E \frac{\partial | \psi \rangle}{\partial \lambda} \\ \Rightarrow \partial E / \partial \lambda &= E (\langle (\partial \psi / \partial \lambda) | \psi \rangle + \langle \psi | (\partial \psi / \partial \lambda) \rangle) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

En vertu de (II.15), Le terme proportionnel à E peut être reconnu comme :

$$E \frac{\partial}{\partial \lambda} \langle \psi | \psi \rangle = E \frac{\partial}{\partial \lambda} (1) \quad (\text{II.21})$$

Les premières applications de ce théorème concernaient des situations physiques telles que des configurations moléculaires pour lesquelles  $\mu$  est un paramètre du potentiel. La variation d'énergie de l'état lié avec une masse réduite est l'un des cas importants. D'après (II.8) l'hamiltonien pour des états liés dans un potentiel tridimensionnel est :

$$H(\mu) = T(\mu) + V(r) = -(\hbar^2 \nabla^2 / 2\mu) + V(r) \quad (\text{II.22})$$

On dérive  $H$  par rapport  $\mu$  :

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -\frac{1}{\mu} \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2\mu} \right) = -\frac{1}{\mu} (H - V(r)) \quad (\text{II.23})$$

Le théorème de Feynman—Hellmann (II.18) donne maintenant

$$\frac{\partial E}{\partial \mu} = -\frac{1}{\mu} (E - \langle V \rangle) < 0 \quad (\text{II.24})$$

Ce qui montre que comme  $\mu$  augmente, l'énergie d'un état lié spécifié diminue.

Plus précisément, le théorème de Feynman-Hellmann est une relation importante en mécanique quantique qui permet de calculer comment l'énergie d'un système quantique change lorsque l'on modifie certains paramètres. Ce théorème peut être utilisé pour étudier et comprendre les propriétés énergétiques du quarkonium. Par exemple on peut calculer comment l'énergie du quarkonium varie en fonction de certains paramètres, tels que la masse des quarks, les constantes d'interaction, etc. Cela permet d'explorer les états excités du quarkonium et de prédire leurs propriétés, telles que les spectres d'énergie.

#### II.4.2. Les modèles des potentiels

Dans la littérature scientifique spécialisée en physique des particules, Il existe plusieurs modèles des potentiels utilisés pour décrire l'interaction entre le quark et l'antiquark à l'intérieur du quarkonium car il n'existe pas de modèle unique qui puisse expliquer tous les aspects de l'interaction entre les quarks de manière précise et exhaustive. Chaque modèle de potentiel propose une approximation différente de l'interaction réelle, en utilisant des paramètres et des hypothèses spécifiques. Le potentiel logarithmique est l'un des nombreux modèles des potentiels plus couramment utilisé dans le contexte des quarkonium, mais les détails spécifiques de l'expression du potentiel logarithmique peuvent varier d'une référence à l'autre et peut avoir des implications différentes sur les propriétés et le comportement de ces systèmes de particules. Parmi ces expressions, mentionnons la formule utilisée dans une recherche (39) :

$$V(r) = C \ln(r/r_0)$$

Dans cette expression,  $C$  est une constante supplémentaire,  $r$  est la distance entre les quarks et  $r_0$  est le paramètre de distance caractéristique du potentiel logarithmique. Le paramètre  $r_0$  peut être lié aux propriétés de confinement et d'écrantage des quarks. Un autre type de modèle qui a été proposé dans la littérature est de forme coulombienne + linéaire, ce potentiel combine un terme qui est inversement proportionnel à la distance entre les quarks, avec un terme linéaire, qui est proportionnel à la distance elle-même. Voici son expression générale (39):

$$V(r) = -\frac{A}{r} + Br$$

Où  $A$  est un paramètre de couplage supplémentaire et  $B$  est le coefficient de confinement.

La première partie représente l'échange d'un gluon, analogue à l'échange d'un photon et le second terme correspond à un confinement linéaire.

Il y a des autres modèles potentiels, chacun avec ses propres expressions associées (33). En utilisant ces modèles, il est possible de calculer les niveaux d'énergie et les fonctions d'onde des quarkonium, ce qui permet de prédire leurs spectres d'énergie et de comparer les résultats avec les données expérimentales. L'ajustement des paramètres du potentiel à partir des données expérimentales peut également aider à améliorer la précision des modèles. Alors la validité et l'applicabilité des modèles de potentiels dépendent du contexte et des propriétés spécifiques du quarkonium étudié. Cependant, il est important de souligner que la modélisation du quarkonium reste un domaine de recherche actif, et de nouveaux modèles et approches continuent d'être développés pour améliorer notre compréhension de ce système fascinant.

## **II.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini le spectre du quarkonium et nous en avons donné deux exemples, ainsi que les propriétés principales de la théorie QCD qui sont représentées par le confinement de couleur ce qui rend les quarks confinés dans les hadrons à les longues distances. À l'inverse les quarks se comportent comme des particules quasi-libres à l'intérieur des hadrons à les courtes distances on parle alors de liberté asymptotique.

Ces propriétés aident à proposer des modèles potentiels qui décrivent le quarkonium en appliquant les résultats de la mécanique quantique non relativiste comme nous l'avons vu dans le potentiel logarithmique et le potentiel coulombienne + linéaire et même les autres modèles que nous n'avons pas abordés .

Pour une étude plus rigoureuse et précise du quarkonium, il est préférable d'utiliser des approches basées sur les approximations QCD ou l'utilisation de modèles de potentiels plus complexes, souvent difficiles à analyser et nécessitant des méthodes numériques pour les résoudre c'est ce que nous essaierons de faire dans le dernier chapitre .

# Chapitre III :

## L'application sur le charmonium

---

## Chapitre III: L'application sur le charmonium

### III.1. Introduction

L'étude théorique du quarkonium est d'un grand intérêt pour tenter de comprendre les propriétés des mésons en particulier et des hadrons en général. Vu la grande masse du système quarkonium il peut être étudié dans un cadre théorique non relativiste. Il se trouve que dans la limite non relativiste la description classique repose sur le concept de potentiel. La formulation est basée sur le choix d'un seul modèle de potentiel, puis résoudre l'équation de Schrödinger pour obtenir les valeurs des niveaux d'énergie.

Dans cette partie du mémoire nous allons construire une formulation pour un exemple de quarkonium, qui est le charmonium et pour lequel l'équation de Schrödinger n'a pas de solutions analytiques. Nous allons le résoudre numériquement par la méthode matricielle (7). Cette méthode est inspirée de la méthode de Rayleigh (40), puis nous comparons les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux et les résultats d'une recherche précédente (9).

### III.2. La formulation du problème

Le système d'un quark et son anti quark en mécanique quantique est considérée comme un problème de deux particules. Les fonctions d'onde mésonique sont illustrées par les fonctions propres de l'équation de Schrödinger.

$$H\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \quad (\text{III.1})$$

Le problème tridimensionnel général se réduit à la résolution de l'équation radiale unidimensionnelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} U(r) + \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right) U(r) = EU(r) \quad (\text{III.2})$$

Dans ce travail, On utilise un modèle hamiltonien non relativiste qui est composé par la partie de l'énergie potentielle et la partie d'énergie cinétique.

$$H_{nr} = T_{nr} + V_{nr} \quad (\text{III.3})$$

### ➤ Le terme cinétique

L'expression non relativiste du terme d'énergie cinétique dans un système d'unités naturel (voir annexe A) pour charmonium est :

$$T_{nr} = m_q + m_{\bar{q}} + \frac{p^2}{2\mu} \quad (\text{III.4})$$

$m_q$  et  $m_{\bar{q}}$  ont respectivement les masses constitutives du quark et de l'anti quark et la masse réduite de système  $\mu = \frac{m_q m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}}$ .

On s'attend à ce qu'un tel terme donne de bons résultats pour le quarkonium lourd. Le premier terme a été ajusté par les masses constitutives pour que les calculs des propriétés du Quarkonium puissent être effectués et comparés aux expériences pour voir comment notre modèle fonctionne. De plus, le mouvement du centre de masse est pris en compte dans l'expression T.

### ➤ Le modèle de potentielle

Il y a des raisons théoriques, pour croire que la force entre le quark et l'antiquark est créée par l'interaction forte de sous la forme de loi de Coulomb

$$V_{coulomb}(r) = -C \frac{\alpha_s}{r}$$

$\alpha_s$  est la constante de couplage de l'interaction forte et C est un facteur constant lié à la configuration de couleur des quarks. On prend dans le cas de quarkonium  $C = 3/4$  et il est le facteur de couleur approprié :

$$V_{linéaire}(r) = br$$

Où b est le facteur de force expérimental du potentiel linéaire.

Plus le terme spin-spin (ou hyperfin) est un ingrédient essentiel, il contribue également aux dédoublements des niveaux d'énergies des nucléons et du système quarkonium.

$$V_{spin-spin} = \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \delta_{\sigma}(r) \vec{S}_q \vec{S}_{\bar{q}}$$



$\vec{S}_q$  et  $\vec{S}_{\bar{q}}$  sont les spins individuels du quark et de l'antiquark. On peut montrer facilement que :

$$\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}} = (S(S+1) - 3/2)$$

Avec  $S=0$  ou  $1$  est le spin total du système.

La fonction delta  $\delta_\sigma$  représente les interactions de contact qui sont des interactions à portée nulle (il n'est différent de zéro que lorsque les particules sont à la même position) suggérant que les quarks sont des objets ponctuels. Cet effet de taille finie est incorporé dans le potentiel par maculage la fonction delta. Dans un calcul pratique, l'interaction spin-spin ponctuelle est étalée en remplaçant la fonction delta par l'expression.

$$\delta_\sigma = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \exp(-\sigma^2 r^2)$$

Où  $\sigma$  représente le facteur de maculage.

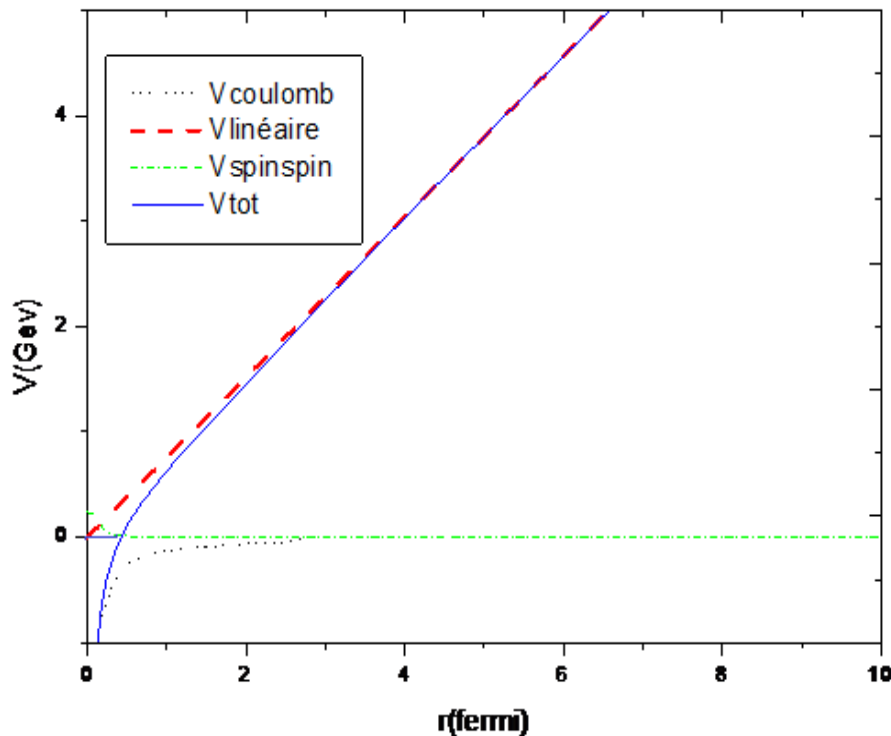
D'autres composantes dépendantes du spin incluent les termes d'interaction spin-orbite et tensorielle :

$$\frac{1}{m_q m_{\bar{q}}} \left( \frac{2\alpha_s}{r^3} - \frac{b}{r} \right) \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{4\alpha_s}{m_q m_{\bar{q}} r^3} \left( 3 \left( \frac{(\vec{S}_q \vec{r})(\vec{S}_{\bar{q}} \vec{r})}{r^2} \right) - \vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}} \right)$$

Ces termes induisent une difficulté technique du fait du comportement singulier de  $\frac{1}{r}$  pour  $r \rightarrow 0$ , on obtient des intégrales divergentes. Dans le travail (41) cette question a été résolue en incluant une coupure distance  $r_c$  avec  $r \in [0, r_c]$ . Ces termes sont peu importants pour les caractéristiques globales des spectres et ne sont pas pris en compte dans cette analyse. Donc le modèle de potentiel s'écrit (42) :

$$V_{nr} = \frac{-4\alpha_s}{3r} + br + \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \delta_\sigma(r) \vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}} \quad (\text{III.5})$$

Ce modèle de potentiel s'appelle le potentiel de Cornell .



**Figure (III-1) :** Le potentiel  $V_{tot}$  (Total) tracé avec les différents termes qui le composent. Le terme de coulomb, terme linéaire et le terme d'interaction spin-spin avec  $S = 1$ . Les valeurs des paramètres utilisées sont  $\alpha_s$ ,  $b$  celles du tableau ( III-1).

### III.3. La résolution par la méthode matricielle

Notre objectif dans ce travail est de calculer les niveaux d'énergie en résolvant l'équation de Schrödinger non relativiste, mais en suivant cette équation ne peut pas être résolue analytiquement et pour atteindre cet objectif, différentes techniques numériques ont été utilisées : Algorithme de Numerov (43), méthode de tir (44), QCD sur réseau (45) et méthode de grille de Fourier (46).

Il est possible de s'appuyer sur le résultat obtenu dans le travail (7) pour l'atome d'hydrogène et d'utiliser la même méthode appliquée au système quarkonium pour calculer ses différents niveaux d'énergie en raison de la grande similitude entre les deux systèmes. Nous avons appliqué la méthode de la mécanique matricielle pour résoudre l'équation radiale du système charmonium.

La méthode de mécanique matricielle est inspirée de la méthode de Rayleigh Ritz. La méthode de Rayleigh-Ritz est une technique utilisée dans la mécanique quantique pour obtenir des approximations des états propres d'un système quantique. Elle simplifie le calcul en utilisant des fonctions de test, appelées fonctions de base, pour représenter les états du système. Supposons que nous ayons un hamiltonien  $H$  pour notre système

quantique et que nous souhaitons trouver les états propres et les énergies associées (40). La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à approximer la fonction d'onde du système, notée  $\psi$ , comme une combinaison linéaire de fonctions de base  $\varphi_i$  multipliées par des coefficients  $a_i$  :

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$$

Les fonctions de base  $\varphi_i$  sont choisies en fonction de la nature du système étudié. En substituant cette approximation dans l'équation de Schrödinger  $H\psi = E\psi$ , nous obtenons une équation du type :

$$H \sum a_i \varphi_i = E \sum a_i \varphi_i$$

En résolvant ce système d'équations, nous pouvons obtenir les valeurs approchées des coefficients  $a_i$  ainsi que les énergies  $E$  propres du système. Ces approximations dépendent du choix des fonctions de base et de la taille de la base utilisée. Une base plus grande et un choix approprié de fonction de base conduisent à des résultats plus précis.

Avec cette idée, la méthode matricielle a été construite, qui repose sur le puits infini comme une base. Elle a été utilisée pour résoudre de nombreux problèmes de potentielle centrale par exemple potentielle de Yukawa, coulomb.

On suppose que le charmonium se déplace à l'intérieur d'un puits infini de la largeur  $a$  qui est défini comme :

$$V_{inf}(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < a \\ \infty, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous utilisons un ensemble simple d'états de base qui sont simplement les états propres du puits infini. Elles sont bien connues :

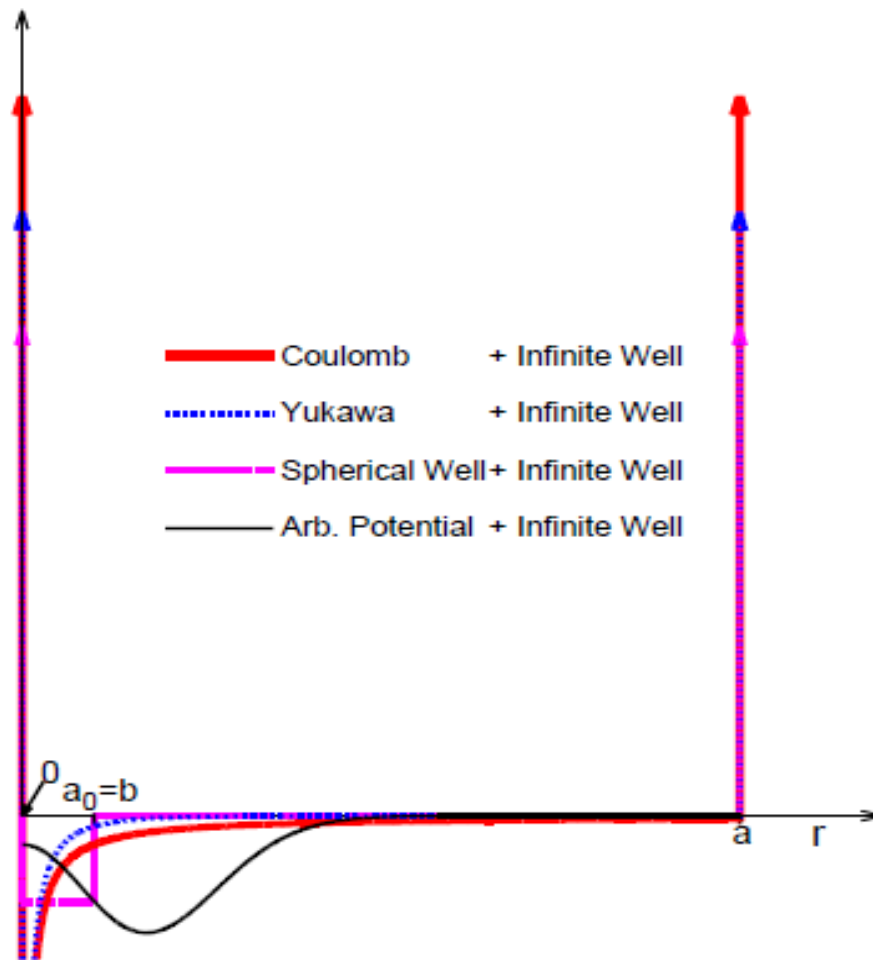
$$\psi_n(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right)$$

Avec les valeurs propres :

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu a^2}$$

Et

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{inf}(r)$$



**Figure (III-2) :** Exemples de potentiels tracés avec le potentiel du puits infini de largeur  $a$  (7).

Le potentiel de puits infini est un modèle théorique pour les systèmes confinés dans un domaine spécifique, par exemple le gaz d'électrons libres dans les métaux qui est modélisé par les électrons de conduction se déplaçant librement dans une boîte qui signifie un potentiel de puits infini tridimensionnel. Le but de son utilisation pour le charmonium est d'utiliser une base discrète simple dans l'espace de Hilbert, qui permet l'expression du problème aux valeurs propres sous la forme d'une matrice. Dans ce cas il est facile à résoudre par rapport aux équations différentielles si une base continue a été choisie comme états propres  $|\vec{r}\rangle$  de l'opérateur de position. Après avoir plongé le potentiel du système dans un puits infini (voir la figure III-2) l'équation (III.2) dans la région  $0 < r < a$  l'équation radiale s'écrit :

$$\left( H_0 + \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right) \right) U(r) = EU(r) \quad (\text{III.6})$$

La fonction  $U(r)$  peut s'écrire :

$$U(r) = \sum_n c_n \psi_n(r)$$

La matrice  $H_{nm}$  de l'hamiltonien  $H$  est construite par rapport à la base.

$$H_{nm} = \langle \psi_n | H | \psi_m \rangle$$

Où

$$H = H_0 + V_{eff}$$

Avec

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r)$$

On exprime l'équation radiale en termes de  $V_{eff}$

$$(H_0 + V_{eff})U(r) = EU(r) \quad (\text{III.7})$$

On écrit cette équation dans la notation de Dirac

$$[H_0 + V_{eff}]|U\rangle = E|U\rangle \quad (\text{III.8})$$

Où  $H_0$  l'énergie cinétique et le potentiel et donc

$$H_0|\psi_n\rangle = E_n^0|\psi_n\rangle$$

Si nous développons  $|U\rangle$  en termes d'un ensemble complet d'états de base

$$|U\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} C_m |\psi_m\rangle \quad (\text{III.9})$$

$|\psi_m\rangle$  est l'ensemble de base défini par :

$$\psi_m(r) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right)$$

On remplace (III.9) dans (III.8), on obtient

$$\begin{aligned}
(H_0 + V_{eff}) \sum_{m=1}^{\infty} C_m |\psi_m\rangle &= E \sum_{m=1}^{\infty} C_m |\psi_m\rangle \\
\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} C_m H |\psi_m\rangle &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m E |\psi_m\rangle \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \langle \psi_n | H &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \langle \psi_n | E \\
\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} C_m \langle \psi_n | H | \psi_m\rangle &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \langle \psi_n | E | \psi_m\rangle
\end{aligned} \tag{III.9}$$

Sachant que :

$$\langle \psi_n | H | \psi_m\rangle = H_{nm}$$

Et

$$\langle \psi_n | E | \psi_m\rangle = E \langle \psi_n | \psi_m\rangle = E \delta_{nm}$$

Où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker.

Ce qui implique

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m H_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m E \delta_{nm}$$

On a

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \delta_{nm} = C_n$$

Le problème aux valeurs propres (III.2) devient :

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m H_{nm} = E C_n \tag{III.10}$$

Où les éléments de la matrice sont donnés par :

$$H_{nm} = \langle \psi_n | H | \psi_m\rangle = \langle \psi_n | H_0 | \psi_m\rangle + \langle \psi_n | V_{eff}(r) | \psi_m\rangle$$

On remarque que le problème des valeurs propres est infini dans l'équation mais après la sommation dans cette l'équation (III.9) est tronqué à une grande coupure  $N_{max}$ :

$$\sum_{m=1}^{N_{max}} C_m H_{nm} = E C_n \tag{III.11}$$

On peut déterminer le spectre de masse du système de quarkonium  $M_{q\bar{q}}$  qui est lié à la valeur propre E par la relation :

$$M_{q\bar{q}} = E + m_q + m_{\bar{q}} \tag{III.12}$$

En commençant par construire la matrice  $H$  avec une certaine dimension  $N_{max}$ , on effectue la solution de l'équation radiale de Schrödinger en suivant la même stratégie utilisée dans la réf (7).

$$\begin{aligned} H_{nm} &= \langle \psi_n | H | \psi_m \rangle = \langle \psi_n | H_0 | \psi_m \rangle + \langle \psi_n | V_{eff}(r) | \psi_m \rangle \\ &= E_n^0 \delta_{nm} + \langle \psi_n | V_{eff}(r) | \psi_m \rangle \\ \langle \psi_n | V_{eff}(r) | \psi_m \rangle &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) V_{eff}(r) \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) dr \end{aligned} \quad (III.13)$$

Cette intégration dans l'équation se fera facilement numériquement. Nous utilisons des relations trigonométriques pour le simplifier, puis nous nous appuyons sur la méthode des trapèzes dans le calcul en utilisant un programme Fortran. D'abord nous effectuons les étapes analytiques nécessaires, En substituant le modèle de potentielle, on obtient

$$V_{eff}(r) = \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V_{nr}(r) \right) = \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{-4\alpha_s}{3r} + br + \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \delta_\sigma(r) \vec{S}_q \vec{S}_{\bar{q}} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | V_{eff}(r) | \psi_m \rangle &= \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) V_{eff}(r) \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) dr \\ &= \frac{2}{a} \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \left(\frac{1}{r^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) dr \right. \\ &\quad + \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \left(\frac{-4\alpha_s}{3r} + br\right) \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) dr \\ &\quad \left. + \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \vec{S}_q \vec{S}_{\bar{q}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) \delta_\sigma(r) \sin\left(\frac{m\pi r}{a}\right) dr \right) \end{aligned}$$

On pose :  $x = \frac{r}{a} \Rightarrow r = ax$  alors  $dr = adx$  avec  $\begin{cases} r \rightarrow 0 \\ r \rightarrow a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} \int_0^1 \sin(n\pi x) \frac{1}{a^2 x^2} \sin(m\pi x) adx \\ &\quad + \int_0^1 \sin(n\pi x) \left(\frac{-4\alpha_s}{3ax} + bax\right) \sin(m\pi x) adx \\ &\quad + \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \vec{S}_q \vec{S}_{\bar{q}} \int_0^1 \sin(n\pi x) \delta_\sigma(x) \sin(m\pi x) adx \end{aligned}$$

Et

$$\delta_\sigma(x) = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \exp(-\sigma^2(ax)^2)$$

Or

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] = \left( \frac{1 - \cos(a+b)}{2} - \frac{1 - \cos(a-b)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2} [\cos(n\pi x - m\pi x) - \cos(n\pi x + m\pi x)]$$

$$\Rightarrow \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2} [\cos[\pi x(n - m)] - \cos[\pi x(n + m)]]$$

$$\Rightarrow \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = \frac{1 - \cos[\pi x(n+m)]}{2} - \frac{1 - \cos[\pi x(n-m)]}{2}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | V_{eff} | \psi_m \rangle = & \frac{2}{a} \left\{ \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu a} \left[ \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left( \frac{1 - \cos[\pi x(n+m)]}{2} - \frac{1 - \cos[\pi x(n-m)]}{2} \right) dx \right] \right. \\ & + \int_0^1 \left( \frac{-4\alpha_s}{3x} + ba^2 x \right) \left( \frac{1 - \cos[\pi x(n+m)]}{2} - \frac{1 - \cos[\pi x(n-m)]}{2} \right) dx \\ & + \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}} a} \vec{S}_q \vec{S}_{\bar{q}} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \left[ \int_0^1 \exp(-\sigma^2(ax)^2) \left( \frac{1 - \cos[\pi x(n+m)]}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 - \cos[\pi x(n-m)]}{2} \right) dx \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

En posant que :

$$L_1(k) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu a} \int_0^1 \frac{1 - \cos(\pi x k)}{2x^2} dx \quad (\text{III.14})$$

$$L_2(k) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos(kx)) \left( \frac{-4\alpha_s}{3x} + a^2 bx \right) dx \quad (\text{III.15})$$

$$L_3(k) = \frac{16\pi\alpha_s}{9m_q m_{\bar{q}}} \left( S(S+1) - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_0^1 (1 - \cos(kx)) \exp(-\sigma^2(ax)^2) dx \quad (\text{III.16})$$

On trouve

$$\begin{aligned} H_{nm} = & E_n^0 \delta_{nm} + \frac{2}{a} \{ [L_1(n+m) - L_1(n-m)] + [L_2(n+m) - L_2(n-m)] + \\ & [L_3(n+m) - L_3(n-m)] \} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Cette méthode ne nécessite pas de mathématiques difficiles, tandis qu'une certaine familiarité avec l'utilisation d'un logiciel de diagonalisation numérique est nécessaire. La matrice H est diagonalisée avec la routine de Jacobi (voir le code Fortran correspondant en annexe B). Nous avons adopté l'unité d'énergie naturelle dans le problème (voir l'annexe A).



### III.4. Résultats et discussions

Le tableau (III-1) montre les paramètres potentiels pour le système considéré. Les mêmes valeurs de la référence (9) ont été utilisées pour comparer les résultats. Les valeurs optimales pour ces paramètres ont été déterminées numériquement dans la (9) en minimisant une fonction  $\chi^2$  définie par :

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{M_{exp}^{(i)} - M_{th}^i}{\Delta_i} \right)^2$$

Dans cette formule, la sommation s'exécute sur un échantillon sélectionné de  $N$  états.  $M_{exp}^{(i)}$  sont les valeurs de masse expérimentales tandis que  $M_{th}^i$  est la masse théorique correspondante en fonction de ces paramètres. La quantité  $\Delta_i$  est l'incertitude expérimentale sur la masse.

Parameters	Valeur
$m_c = m_{\bar{c}}(\text{GeV})$	1.4399
$\alpha_s$	0.4827
$b(\text{GeV}^2)$	0.1488
$\sigma(\text{GeV})$	1.2819

**Tableau (III-1):** Les paramètres utilisés dans cette analyse.

Les résultats de notre détermination des spectre de masse du système charmonium sont présentés dans le tableau (III-2) avec  $a = 10$  Fermi et  $N_{max} = 300$ . La première colonne représente les états que nous obtenons par la notation spectroscopique ( $n^{2s+1}L_J$ ) où  $J$  est lié au module du moment angulaire total tel que  $|\vec{J}|^2 = J(J+1)$  et  $|L-S| \leq J \leq |L+S|$ . Pour cela nous remarquerons qu'il existe des états avec le même résultat. En tout les cas, Le calcul numérique que nous avons fait n'est pas lié à  $J$ , mais plutôt contrôlé par des valeurs de  $n$ ,  $l$  et  $s$ . Nos résultats dans la colonne 4 sont comparés aux valeurs expérimentales (colonne 3) et à d'autres résultats théoriques (dernière colonne). Aux fins de comparaison, les nombres ont été arrondis pour conserver le même nombre de chiffres cités pour les résultats dans la référence (9).

On remarque que nos résultats sont en bon accord avec les résultats de la référence (9), où l'algorithme de la méthode de Numerov a été utilisé pour résoudre l'équation

radiale. Les valeurs expérimentales sont bien reproduites surtout pour les états S ( $L = 0$ ). Néanmoins, de petites différences apparaissent pour les états P ( $L = 1$ ) et D ( $L = 2$ ), car les termes d'interaction spin-orbite et tenseur ont été négligés dans notre analyse et dans celle de la référence (9).

Etat	Nom	Résultats expérimentaux (8)	Nos résultats	Résultats de (9)
$1^3S_1$	$J/\psi$	$3.09687 \pm 0.0004$	3.0958	3.0955
$1^1S_0$	$\eta_c(1S)$	$2.9792 \pm 0.0013$	2.9884	2.9881
$2^3S_1$	$\psi'(2S)$	$3.68609 \pm 0.0004$	3.6655	3.6652
$2^1S_0$	$\eta'_c(2S)$	$3.637 \pm 0.0004$	3.6176	3.6171
$3^3S_1$	$\psi_c(3S)$	$4.039 \pm 0.001$	4.0704	4.0699
$3^1S_0$	$\eta_c(3S)$		4.0359	4.0352
$4^3S_1$	$\psi_c(4S)$	$4.421 \pm 0.0004$	4.4123	4.4115
$4^1S_0$	$\eta_c(4S)$		4.3844	4.0352
$1^3P_2$	$\chi_2(1P)$	$3.5562 \pm 0.00009$	3.5055	3.5054
$1^3P_1$	$\chi_2(1P)$	$3.51066 \pm 0.00007$	3.5055	3.5054
$1^3P_0$	$\chi_0(1P)$	$3.41475 \pm 0.00031$	3.5055	3.5054
$1^1P_1$	$h_c(1P)$	$3.52541 \pm 0.000163$	3.4990	3.4989
$2^3P_1$	$\chi_2(2P)$		3.9310	3.9307
$2^3P_1$	$\chi_2(2P)$		3.9310	3.9307
$2^3P_1$	$\chi_2(2P)$		3.9310	3.9307
$2^1P_1$	$h_c(2P)$		3.9233	3.9230
$3^3P_2$	$\chi_2(3P)$		4.2852	4.2847
$3^3P_1$	$\chi_2(3P)$		4.2852	4.2847
$3^3P_0$	$\chi_2(3P)$		4.2852	4.2847
$3^1P_1$	$h_c(3P)$		4.2771	4.2766
$1^3D_3$	$\psi_3(1D)$		3.7810	3.7809
$1^3D_2$	$\psi_2(1D)$	$3.77292 \pm 0.00035$	3.7810	3.7809
$1^3D_1$	$\psi(1D)$		3.7810	3.7809
$1^1D_2$	$\psi_{c2}(1D)$		3.7806	3.7809
$2^3D_3$	$\psi_3(2D)$		4.1489	3.7805
$2^3D_2$	$\psi_2(2D)$	$4.153 \pm 0.0003$	4.1489	4.1488
$2^3D_1$	$\psi(2D)$		4.1489	4.1488
$2^1D_2$	$\psi_{c2}(2D)$		4.1482	4.1480

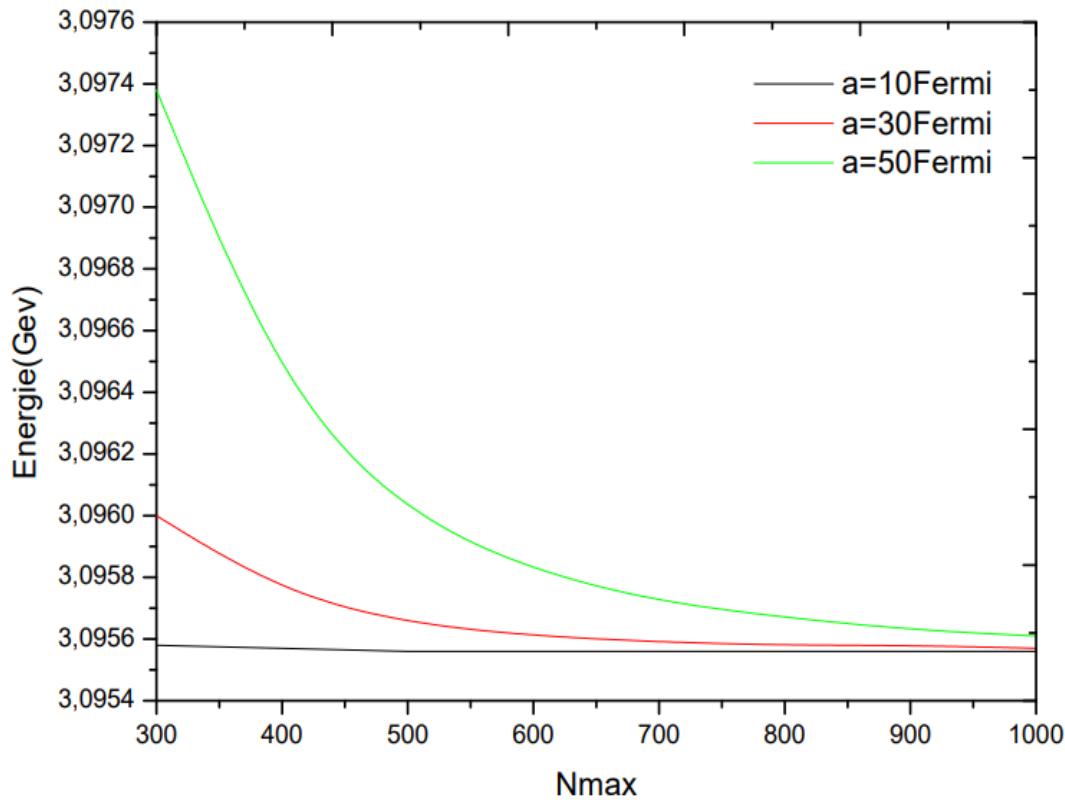
Tableau (III-2): Les résultats des spectres de masse de charmonium.

Pour sonder la sensibilité des résultats à la variation de la largeur  $a$  et  $N_{max}$ , l'énergie (masse) de l'état est calculée pour différentes valeurs de  $a$  et  $N_{max}$ . Les résultats sont présentés dans le tableau (III-3) Enfin, le tracé de la figure (III-3) montre la variation de l'énergie avec  $N_{max}$  pour des valeurs fixes de la largeur  $a$ .

$N_{max}$	$a = 10$ Fermi	$a = 20$ Fermi	$a = 50$ Fermi
300	3.09558	3.09600	3.09738
400	3.09557	3.09575	3.09640
500	3.09556	3.09565	3.09600
600	3.09556	3.09561	3.09582
700	3.09556	3.09559	3.09572
800	3.09556	3.09558	3.09567
900	3.09556	3.09558	3.09563
1000	3.09556	3.09557	3.09561

**Tableau (III-3)** : la masse de l'état  $J/\psi$  pour différentes valeurs de  $a$  et  $N_{max}$  (les nombres ont été arrondis à 6 chiffres).

D'après le tableau (III-3) et la figure (III-3), on peut conclure qu'il y a une convergence des résultats mais qu'elle est lente lorsque la valeur de la largeur  $a$  est augmentée. Il faut une plus grande valeur de  $N_{max}$  pour atteindre la même précision obtenue avec des valeurs plus faibles de la largeur  $a$ .



**Figure (III-3)** : la variation de la Masse de l'état  $J/\psi$  avec  $N_{max}$  pour différentes valeurs de la largeur  $a$ .

### III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons choisi un modèle de potentiel phénoménologique de Cornell proposés pour étudier le spectre de masse des états liés au quarkonium, numériquement, en utilisant la méthode matricielle nous calculons les valeurs propres.

Au début nous avons présenté la formule de l'hamiltonien qui est substituée dans l'équation de Schrödinger qui n'est pas résoluble analytiquement, nous avons donc suivi la méthode matricielle pour résoudre le problème.

Nos résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux et même les résultats de la recherche qui a appliqué une autre méthode, on conclue que la méthode matricielle est valide et efficace pour s'appliquer à un modèle de potentiel complexe tel que le problème de Charmonium.

## Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une étude simple visant à attirer l'attention sur l'une des recherches les plus importantes et actives en physique des particules modernes en adoptant des idées moins complexes que celles utilisées par les experts du domaine. Il s'agit d'une application de la mécanique quantique non relativiste qui tente d'analyser le spectre du quarkonium en résolvant l'équation de Schrödinger à l'aide de la méthode matricielle. Cette méthode a été appliquée à des modèles simples comme le potentiel coulombien. Dans ce travail nous avons cherché à généraliser cette méthode pour un modèle plus complexe. Nous avons trouvé dans le problème du spectre du quarkonium une occasion de tester cet objectif et en même temps de développer nos concepts sur les quarks et leur comportement à l'intérieur des hadrons.

D'abord, pour comprendre les particules et leurs interactions, les physiciens se basent sur le modèle standard, qui est un cadre théorique bien établi. Il est comme tableau périodique des particules qui montre les masses des éléments et toutes les propriétés importantes dans les études. Mais les résultats de cette théorie concernant le modèle des quarks restent incomplets car on ne connaît pas précisément la masse des quarks et il n'y a pas de description satisfaisante de la théorie de l'interaction forte QCD. Cela incite à utiliser le quarkonium comme base expérimentale et théorique pour mettre à jour les valeurs de certains paramètres et fournir une compréhension plus précise de l'interaction des forces. En effet, dans le deuxième chapitre, nous avons vu les propriétés importantes de QCD à savoir la liberté asymptotique et le confinement des quarks qui ont aidé à construire des modèles de potentiel réussis qui expliquent la nature de l'interaction entre les quarks. Nous avons choisi le modèle de Cornell trouvé dans la littérature de physique des particules. Ensuite, nous avons appliqué la méthode matricielle pour résoudre l'équation de Schrödinger et déterminer les niveaux d'énergie de Charmonium, ce qui a donné un accord avec les résultats expérimentaux et les résultats d'autre travail.

A notre connaissance, c'est la première fois que le potentiel de Cornell est étudié dans le but de déterminer le spectre de masse de système de quarkonium à l'aide de la méthode matricielle. Nous pouvons conclure que cette méthode est valide pour le modèle de potentiel qui décrit le quarkonium, et donc elle peut être testée et généralisée sur n'importe quel modèle de potentiel complexe pour obtenir des résultats approximatifs. En utilisant des étapes simples que tout étudiant en physique peut faire avec l'utilisation de

## CONCLUSION GENERALE

programmes de simulation étudiés à l'université tels que Fortran ou Matlab, il est ainsi plus facile pour nous, en tant qu'étudiants, de mener des recherches sur des sujets actifs dont les solutions sont encore en cours de développement, car on peut fournir une description satisfaisante non seulement des niveaux d'énergie des spectres de ces système , mais également fournir une visualisation des fonctions d'onde de leurs états liées. Enfin, il est important de noter que la précision des résultats obtenus par cette technique dépend du choix de la taille de matrice et la largeur de puits infini qui est la base de la méthode matricielle.

## Références

- (1). **B.STILL.** *Particule physics brick by brick.* 2017. p. 10.
- (2). **L.SEMLALA.** These:etude de mésons Hybrides dans le cadre du modèle QGC. s.l., Faculté des sciences : université d'oran, 2010. p. 5.
- (3). **M.GUESMIA et I.BERBACHE.** Mémoire:Diffusion profondément inélastique et structure. s.l., Faculté des Sciences Exactes : Université A.MIRA-BEJAIA, 2017. p. 22.
- (4). **T.Hubsch.** *Physics of Elementary.* 2012. pp. 42-142.
- (5). **E.HOCINE.** thèse:La supersymétrie quantique appliquée aux hamiltoniens dépendant de l'énergie propre du système. Algérie, Faculté de Physique : Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene. p. 87.
- (6). **N. Brambilla, M. Kramer,R. Mussa,A. Vairo.** *Heavy quarkonium physics.* 2005.
- (7). **B.A.JUGDUTT, F. MARSIGLO.** *Solving for three-dimensional central potentials using matrix mechanics.* 2013.
- (8). **K. Nakamura, P. D. Group.** *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics.* 2010, 075021, p. 37.
- (9). **M. S. Ali, A. M. Yasser, G. S. Hassan and Ch. C. Moustakidis.** "Spectra of Quark-Antiquark Bound States via Two Derived QCD Potentials," *Quant. Phys. Lett.* 2016.
- (10). **K.DJAMAA.** Le boson de higgs et les quarks. 2015.
- (11). **L.MARLEAU.** *Introduction à la physique des particules.* Québec : s.n., 2000. pp. 3-10.
- (12). **P.BECHTLE.** Introduction to Elementary Particle Physics. *DESY Summerstudent Lectures.* 2011, pp. 17-60.
- (13). **G.KANE.** *Modern Elementary Particle Physics.* Second . p. 6.
- (14). **M.POIRIER.** Sur la trace des Quarks. 18 Avril 2018. p. 1.
- (15). **J.P. BATON, G. COHEN-TANNOUJJI.** *Particules elementaires et interactions fondamentales.* 1992. pp. 19-25.
- (16). **C.ALMSLER.** [Particle Data Group], *Phys. Lett.* 2008, Vol. 667, 1.
- (17). **A.G.CLARK.** Introduction à la Physique des Particules. Genève : s.n., 2011. pp. 180-204.
- (18). **R.Granier de Cassagnac, H. Bachacou,H.Moutarde.** *Particules élémentaires :entre relativité restreinte et mécanique quantique.* s.l. : Central paris, 2011. pp. 2-131.

- (19). **F.MASSINISSA**. Calcul des sections efficaces de production de paires  $t\bar{t}$  à 13 Tev au LHC. s.l., Faculté des Sciences Exactes, Béjia : Université A. MIRA-BEJALA, 2019.
- (20). **A.HAMMA**. Mémoire de Master:Installation et utilisation de MADGRAPH et MADANALYSIS. s.l., faculté des sciences exactes : université abderrahmane mira de bejaia, 6 Juillet 2022. p. 2.
- (21). **S. Braibant, G.Giacomelli**. *Particles and Fundamental Interactions*. 2012. pp. 1-46.
- (22). **L.VILLAIN**. Le modèle standard de la physique des particules :. 29 novembre 2013.
- (23). **D.SENECHAL**. *PHYSIQUE SUBATOMIQUE*. 2005. pp. 63-132.
- (24). **B.CLEMENT**. *Physique des particules:Introduction aux concepts et au formalisme*. 2e édition. pp. 9-114.
- (25). **G.GOESSENS**. Thèse:Etude de la transition entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique dans le cadre d'un modèle effectif de la QCD " le modèle Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio". *Etude de la transition entre le plasma de quarks et de gluons et la matière hadronique dans le cadre d'un modèle effectif de la QCD : le modèle Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio*. 26 Juillet 2012.
- (26). **A.DAS, T.FERBLE**. *Introduction to Nuclear and particles physics*. Second.
- (27). **F.HALZAN, D.ALAN MARTIN**. *QUARKS AND LEPTONS:An Introductory Course*. pp. 9-12.
- (28). **A.REHMAN**. Diquark-Antidiquark Interpretation of Meson. 2011, p. 7.
- (29). **J.M.FRERE**. Une Introduction à la baryogenèse. *ULB-PhysTh 03/02*. 2003.
- (30). **L.TIBALDO**. *Astroparticules:Physique et Astrophysique des Rayons Cosmiques*. 2018.
- (31). **L.FAVART**. *physique des particules et physique nucléaire*. s.l. : PHYS-F305, 2021. p. 15.
- (32). **F.CLOSE**. *Particle Physics: A Very Short Introduction*. New York : Oxford University Press Inc, 2004. pp. 7-45.
- (33). **H.GROSSE, A.MARTIN**. *PARTICLE PHYSICS AND THE SCHRODINGER EQUATION*. p. 1.
- (34). **J.BERINGER**. Particle Data Group,Review of particle physics (RPP).
- (35). **K.DJEHA**. *Mémoire:Modèles de la constante de couplage l'interaction forte à basses et moyenne énergie spectroscopie des hadrons*. s.l. : USTHB. pp. 9-12.
- (36). **B.YADRI**. *Reality and time fundamental physics*. s.l. : ResearchGate. pp. 254-261.
- (37). **E.D.CARLSON**. *Introduction to particles physics*. 2012.
- (38). **J.M.RICHARD** *An introduction to the quark model*. 2012, p. 20.



- (39). **C. QUIGG, J.L.ROSNER.** Quantum mechanics with applications to quarkonium. Mai 1979. pp. 169-219.
- (40). **A.W.Leissa.** "A Short Theory of the Rayleigh–Ritz Method" Computational Methods in Applied Mathematics. p. 13.
- (41). **W.Jun Deng, H.Liu, L.Cheng Gui, and X.Hui Zhong.** "Charmonium spectrum and electromagnetic transitions with higher multipole contributions" Phys. Rev. . 2017.
- (42). **C. Semay, B.Silvestre-Brac.** "Potential models and meson spectra.", Nucl. Phys. 1997.
- (43). **M.Pillai, J.Goglio.** "Matrix Numerov method for solving Schrodinger's equation Am. J. Phys. 2012.
- (44). **J.Killingbeck.** "Shooting methods for the Schrodinger equation," J. Phys. A: Math. Gen. 1987.
- (45). **C. McNeile, C. T. H. Davies, E. Follana, K. Hornbostel, and G. P. Lepage.,** "Heavy meson masses and decay constants from relativistic heavy quarks in full lattice QCD," Phys. Rev. 2012.
- (46). **Balint-Kurti., C. C. Marston and G. G.** "The Fourier grid Hamiltonian method for bound state eigenvalues and eigenfunctions," J. Chem. Phys. 1989.

## Annexe A

Dans le monde de la physique des particules, l'unité de vitesse de la lumière et la constante de Planck sont redéfinies et elles deviennent :  $c = 1$  et  $\hbar = 1$ . Ceci impose deux contraintes sur les trois unités cinématiques et nous laisse donc le libre choix pour l'une des trois unités cinématiques, sachant que il existe 4 unités SI principales : trois cinématiques (mètre, seconde, kilogramme) et une unité électrique (ampère). Ce système est appelé système d'unités naturelles (naturel pour la physique des particules).

L'unité cinématique choisie est l'énergie, E, et elle est généralement mesurée en eV, Nous fixons  $c = 1$  et  $\hbar = 1$ , alors toutes les autres unités cinétiques peuvent être exprimées en termes d'unité d'énergie. Par exemple :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Avec  $c = 1$ , les unités de masse et de quantité de mouvement sont égales à E

Quantité	Dimensions		Conversions
	unités SI	Unités naturelles	
masse	kg	E	$1\text{GeV} = 1.8 \times 10^{-27}\text{kg}$
longueur	m	1/E	$1\text{GeV}^{-1} = 0.197 \times 10^{-15}\text{m}$
temps	s	1/E	$1\text{GeV}^{-1} = 6.58 \times 10^{-25}\text{s}$
énergie	$\text{kgm}^2/\text{s}^2$	E	$1\text{GeV} = 1.6 \times 10^{-10}\text{Joule}$
impulsion	kg.m/s	E	$1\text{GeV} = 5.39 \times 10^{-19}\text{kg.m/s}$
vitesse	m/s	-	$1 = 2.998 \times 10^8\text{m/s}(= c)$
Moment angulaire	$\text{kg.m}^2/\text{s}$	-	$1 = 1.06 \times 10^{-34}\text{J.s}(= \hbar)$
Section efficace	$\text{m}^2$	$1/E^2$	$1\text{GeV}^{-2} = 0.389\text{mb} = 0.389 \times 10^{-31}\text{m}^2$
force	$\text{kg.m}/\text{s}^2$	$E^2$	$1\text{GeV}^{-2} = 8.19 \times 10^5\text{Newton}$
charge	$C = A.s$	-	$1 = 5.28 \times 10^{-19}\text{Coulomb}; e$ $= 0.303\text{ou}1.6 \times 10^6\text{C}$

Tableau (A-1) : les dimensions dans système d'unités naturelles.

## Annexe B

C'est le programme du code fortran, il est écrit en langage fortran 90 .

```

implicit none
integer:: n,m,i,nbrpt,nmax ,j,nrot,leveln,np=300
double precision,dimension(0:10000)::x
double precision,dimension(np)::d
double precision,dimension(np,np)::s1,s2,s3,s4,s5,s6,delta,v ,sum1,sum2,sum3,integral,a
double precision::pi,mc,pas,aa,L1,L2,L3,L1_0, L2_0, L3_0 ,l,s ,cof
common /data/aa,l,s,mc,pi !new
WRITE(*,*) "l,s,cof,nmax"
read(*,*) l,s,cof,nmax
nbrpt=1000
mc=1.4399d0
pi=3.141592653d0
aa=5.076142132d0
aa=cof*aa
x(0)=0.0d0
pas=1.d0/nbrpt
!write(*,*) pas
x(1)=0.0d0+pas
!write(*,*) x
do n=1,nmax
do m=1,nmax
if(n/=m) then
delta(n,m)=0.0
else
delta(n,m)=(pi*n/aa)**2/mc+2*mc
!write(*,*) delta
endif
L2_0=0.0d0
L1_0=2*n*m*pi**2/(mc*aa)
L3_0=0.d0
!write(*,*) L2_0
x(1)=0.0d0+pas
!write(*,*) x(1)

```

## ANNEXE

```

s1(n,m)=s1(n,m)+(L2(x(1),n+m)+L2_0)*pas/2.
s2(n,m)=s2(n,m)+(L2(x(1),n-m)+L2_0)*pas/2.
s3(n,m)=s3(n,m)+(L1(x(1),n+m)+L1_0)*pas/2.
s4(n,m)=s4(n,m)+(L1(x(1),n-m)+L1_0)*pas/2.
s5(n,m)=s5(n,m)+(L3(x(1),n+m)+L3_0)*pas/2.
s6(n,m)=s6(n,m)+(L3(x(1),n-m)+L3_0)*pas/2.
!write(*,*) s5(1,1)
do i=2,nbrpt
  x(i)=x(0)+i*pas
!write(*,*) x
s1(n,m)=s1(n,m)+(L2(x(i),n+m)+L2(x(i-1),n+m))*pas/2.
s2(n,m)=s2(n,m)+(L2(x(i),n-m)+L2(x(i-1),n-m))*pas/2.
s3(n,m)=s3(n,m)+(L1(x(i),n+m)+L1(x(i-1),n+m))*pas/2.
s4(n,m)=s4(n,m)+(L1(x(i),n-m)+L1(x(i-1),n-m))*pas/2.
s5(n,m)=s5(n,m)+(L3(x(i),n+m)+L3(x(i-1),n+m))*pas/2.
s6(n,m)=s6(n,m)+(L3(x(i),n-m)+L3(x(i-1),n-m))*pas/2.
!write(*,*) s1(n,m) ,s2(n,m), s3(n,m) ,s4(n,m), s5(n,m) ,s6(n,m)
!write(*,*) 'l2',L2(x(i),n+m)+L2(x(i-1),n+m)
enddo
enddo
enddo
!write(*,*) s1
!read*,n
!write(*,*) s2
! read*,n
!write(*,*) s3
! read*,n
!write(*,*) s4
! read*,n
!write(*,*) s5
! read*,n
!write(*,*) s6
sum1=s1-s2
sum2=s3-s4
sum3=s5-s6
!write(*,*) sum1,sum2,sum3
integral=(2./aa)*(sum1+sum2+sum3)

```

ANNEXE

```

!write(*,*) integral
a=delta+integral
n=nmax
call jacobi(a,n,np,d,v,nrot)
call eigsrt(d,v,n,np)
leveln=5
do j=0,leveln
!write(*,*) 'level',j,' ','mass', d(nmax-j)
enddo
!write(*,*) d
End
DOUBLE PRECISION FUNCTION L1(x,k)
INTEGER k
DOUBLE PRECISION pi,aa,mc,L,S ,x
common /data/aa,l,s,mc,pi
L1=(1*(1+1)/mc)*(1-dcos(k*pi*x))/(2.*aa*x**2)
RETURN
END FUNCTION
DOUBLE PRECISION FUNCTION L2(x,k)
INTEGER k
DOUBLE PRECISION pi,mc,aa,alps,b,L,S ,x
common /data/aa,l,s,mc,pi
alps=0.4827d0
b=0.1488d0
L2=(1-dcos(k*pi*x))*(-alps*4./(3.*x)+(aa**2)*b*x)/(2.)
RETURN
END FUNCTION
DOUBLE PRECISION FUNCTION L3(x,k)
INTEGER k
DOUBLE PRECISION pi,aa,mc,sigma,deltr,alps,L,S ,x
common /data/aa,l,s,mc,pi
alps=0.4827d0
sigma=1.2819d0
deltr=(16.*pi*alps)/(9.*mc**2)*(s*(s+1)-3./2.)*((sigma/dsqrt(pi))**3)*dexp(-
(sigma**2)*(aa*x)**2)
L3=deltr*aa*(1-dcos(k*pi*x))/(2.)
RETURN

```



ANNEXE

rst three sweeps.

else

tresh=0. !...thereafter.

endif

do ip=1,n-1

do iq=ip+1,n

g=100.\*abs(a(ip,iq))

!After four sweeps, skip the rotation if the o  
-diagonal element is small.

if((i.gt.4).and.(abs(d(ip))+g.eq.abs(d(ip))).and.(abs(d(iq))+g.eq.abs(d(iq))))then

a(ip,iq)=0.

else if(abs(a(ip,iq)).gt.tresh)then

h=d(iq)-d(ip)

if(abs(h)+g.eq.abs(h))then

t=a(ip,iq)/h

else

theta=0.5\*h/a(ip,iq) !Equation (11.1.10).

t=1./(abs(theta)+sqrt(1.+theta\*\*2))

if(theta.lt.0.)t=-t

endif

c=1./sqrt(1+t\*\*2)

s=t\*c

tau=s/(1.+c)

h=t\*a(ip,iq)

z(ip)=z(ip)-h

z(iq)=z(iq)+h

d(ip)=d(ip)-h

d(iq)=d(iq)+h

a(ip,iq)=0.

do j=1,ip-1 !Case of rotations  $1 \leq j < p$ .

g=a(j,ip)

h=a(j,iq)

a(j,ip)=g-s\*(h+g\*tau)

a(j,iq)=h+s\*(g-h\*tau)

enddo

do j=ip+1,iq-1 !Case of rotations  $p < j < q$ .

g=a(ip,j)

ANNEXE

h=a(j,iq)

a(ip,j)=g-s\*(h+g\*tau)

a(j,iq)=h+s\*(g-h\*tau)

enddo

do j=iq+1,n

!Case of rotations  $q < j . n$ .

g=a(ip,j)

h=a(iq,j)

a(ip,j)=g-s\*(h+g\*tau)

a(iq,j)=h+s\*(g-h\*tau)

enddo

do j=1,n

g=v(j,ip)

h=v(j,iq)

v(j,ip)=g-s\*(h+g\*tau)

v(j,iq)=h+s\*(g-h\*tau)

enddo

nrot=nrot+1

endif

enddo

enddo

do ip=1,n

b(ip)=b(ip)+z(ip)

d(ip)=b(ip) !Update d with the sum of tapq,

z(ip)=0. !and reinitialize z.

enddo

enddo

pause 'too many iterations in jacobi'

return

END

SUBROUTINE eigprt(d,v,n,np)

INTEGER n,np

DOUBLE PRECISION d(np),v(np,np)

INTEGER i,j,k

DOUBLE PRECISION p

do i=1,n-1

k=i

p=d(i)



ANNEXE

```
do j=i+1,n
if(d(j).ge.p)then
k=j
p=d(j)
endif
enddo
if(k.ne.i)then
d(k)=d(i)
d(i)=p
do j=1,n
p=v(j,i)
v(j,i)=v(j,k)
v(j,k)=p
enddo
endif
enddo
return
END
```