UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Filière : Mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option :
Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :
Équation de Langevin impliquant un ordre fractionnaire avec des conditions aux limites à trois points

Présenté par :

AGBOUBI Wassila

Soutenu le 21 juin 2023 devant les membres du jury :

DAHMANI	Zoubir	**Président**	Pr	**U.de Mostaganem**
KAID	Mohamed	**Examinateur**	M C A	**U. de Mostaganem**
BEDDANI	Hamid	**Encadreur**	M C A	**ESGEE d'Oran**
FATOUCHE	Houari	**Co-Encadreur**	M C A	**U. de Mostaganem**

Dédicaces

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A ma très chère mère, qui me donne toujours l'espoir de vivre et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

A mon très cher père, pour ses encouragements, son soutien, surtout pour son amour et son sacrifice afin que rien n'entrave le déroulement de mes études.

A mes frères Abdellah et El hadj et ma belle sœur Tassenim

A mes très chères amies **Saïda, Hasna, Fatima, Wiam**
et toutes mes amies qui m'aiment.

A toute ma famille.

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir accordé la force.
En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance absoule à **ALLAH LE TOUT PUISSANT** de
m'avoir donné la possibilité de terminer ce travail .
Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadrant de mémoire, **Monsieur Beddani Hamid**, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à remercier **Monsieur Fattouch Houari** pour son aide pratique et son soutient moral et ses encouragements.

Je n'oublie pas de remercier également la présidente du jury, **Monsieur Dahmani Zoubir**, Professeur à Université Abdelhamid Ben Badis Mostaganem a accepté de présider mon travail
je lui dit merci beaucoup.

Monsieur Kaid Mohamed, Maître de Conférences A à Université Abdelhamid Ben Badis Mostaganem pour avoir accepté d'examiner mon travail.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous avons étudié une classe d'équations de Langevin non linéaires impliquant un ordre fractionnaire avec des conditions aux limites à trois points. Par le principe de contraction de Banach et théorème du point fixe de Krasnoselskii, l'existence et l'unicité les résultats des solutions sont obtenus.
Mots clés : Équations fractionnaires de Langevin, Théorème du point fixe, Existence et unicité, Dérivation fractionnaire, le principe de contraction de Banach.

ABSTRACT

In this project, we have studied a class of nonlinear Langevin equations involving a fractional order with three-point boundary conditions. By the principle of contraction of Banach and the fixed point theorem of Krasnoselskii, the existence and the uniqueness the results of the solutions are obtained.
Keywords : Fractional Langevin equations, fixed point theorem, existence and uniqueness, Fractional derivation, Banach's principle of contraction.

Table des matières

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
Ω	:	Domaine borné dans$\mathbb{R}$.
$L^p(\Omega)$	:	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω.
$L^\infty(\Omega)$	:	Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.
$C(\Omega)$	:	Espace des fonctions continues sur Ω.
$C^n(\Omega)$	:	Espace des fonctions $g : \Omega \to \mathbb{R}$dérivables n fois et $g^{(n)}$ continues.
$AC(\Omega)$	:	Espace des fonctions absolument continues sur Ω.
$AC^n(\Omega)$	:	Espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n-1$ et elle que $g^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma.
$B(.,.)$	:	La fonction Bêta.
R-L	:	Riemann-Liouville.
$\mathfrak{J}^\rho g$	:	Intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre $\rho > 0$.
$\mathfrak{D}^\rho g$	:	Dérivée fractionnaire au sens de R-L d'ordre $\rho > 0$.
${}^c\mathfrak{D}^\rho g$	:	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre$\rho > 0$.

Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine d'analyse mathématique qui étudie la généralisation de la dérivation et de l'intégration de l'ordre entier n (ordinaire) à l'ordre non entier n (complexe) (fractionnaire). Les fondements du calcul différentiel et intégral ont été construits par Isaac Newton et Leibniz [19] à la fin du $17^{ème}$ siècle, ce qui marque le début de la théorie des dérivées fractionnaires, qui est presque aussi ancienne que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Dans une lettre à Guillaume l'Hôpital [19] datée du 30 septembre 1695, Leibniz publie le symbole $(\frac{d^n g}{dx^n})$ pour symboliser la dérivée de $n^{ème}$ d'une fonction g. Avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, L'Hôpital a répondu : qu'implique $(\frac{d^n g}{dx^n})$ si $n = \frac{1}{2}$? « Cela conduirait à une contradiction dont nous pourrons un jour tirer des conclusions bénéfiques », disait Leibniz [19]. Cette lettre de l'hôpital est aujourd'hui reconnue comme le premier exemple de dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital ait demandé $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a donné naissance au nom de cette branche des mathématiques.

Les modèles d'ordre fractionnaire, qui expliquent les systèmes utilisant des équations différentielles fractionnaires basées sur la dérivée non entière, sont importants pour la communauté scientifique. Au cours des trente dernières années, les ingénieurs n'ont appris à apprécier l'utilisation des équations différentielles d'ordre non entier qu'après avoir réalisé que la dérivée fractionnaire était insuffisante pour décrire avec précision certains systèmes. La conférence initiale, intitulée "Calcul fractionnaire et ses applications", a été donnée en juin 1974 à l'Université de New Haven et a été rédigée par B. Ross.

Beaucoup d'éloges doivent aller à K.B. Oldham et J. Spanier [19], dont l'effort de collaboration sur la présentation des méthodes de calcul fractionnaire et les applications en physique et en ingénierie a commencé en 1968 et a abouti à la publication d'un livre en 1974. Depuis lors, le calcul fractionnaire a gagné popularité et importance en raison des nombreux domaines de la science appliquée et de l'ingénierie où il a été constaté que la dérivée d'ordre fractionnaire, un excellent outil pour décrire de nombreuses propriétés des matériaux et des processus, peut être utilisée pour décrire le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques [2, 6, 16].

Les équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire ont suscité l'intérêt de nombreux chercheurs ces dernières années en raison de leur large éventail d'applications en physique, mécanique des fluides, électrochimie, viscoélasticité, théorie du contrôle non linéaire, systèmes biologiques non linéaires, hydrodynamique et autres domaines de la science et de la science. ingénierie.(cf. [12, 18]), dans tous ces domaines scientifiques, il est crucial d'identifier des réponses précises ou approximatives à ces questions.

Ainsi, les approches pour résoudre les problèmes impliquant des équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire sont très recherchées. Il est parfois trop difficile d'obtenir des solutions précises à ces problèmes à l'aide d'approches conventionnelles en raison de la complexité des caractéristiques non linéaires impliquées.

Ce mémoire est scindé en deux chapitres comme suit :
Dans le premier chapitre nous présentons deux parties, dans la première nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, utilisées dans l'intégrale et la dérivation fractionnaire et dans la deuxième partie, nous examinons plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire.
Dans le deuxième chapitre nous étudions une classe d'équations de Langevin non linéaires impliquant un ordre fractionnaire avec des conditions aux limites à trois points. On fait la preuve de l'existence et l'unicité et aussi celle de l'existence.

$$\begin{cases} {}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}(\mathfrak{D}^{2}+\lambda^{2})u(t)=f(t,u(t)),\ \ t\in[0,1], \\ u(0)=0, \\ u''(0)=0, \\ u(1)=\mu u(\eta). \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires et Calcul Fractionnaire

1.1 Préliminaires

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance $p-ième$ est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.1.1 *([20])Soient* $\Omega = [0,T)\,(0 < T \leq +\infty)$, *un intervalle fini ou infinie de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$.
1. Pour $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $L^p(\Omega)$ *est l'espace des (classes de) fonctions* g *réelles sur* Ω *telles que* g *est mesurable et*

$$\int_0^b |g(t)|^p \, dt < +\infty.$$

2. Si $p = \infty$, *l'espace* $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des classes de fonctions mesurables* g *bornées presque partout (p.p) sur* Ω.

Théorème 1.1.1 *Soit* $\Omega = [0,T)\,(0 < T \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infini de* $\mathbb{R}$
1. Si $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $L^p(\Omega)$*est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|g\|_p = \left(\int_0^b |g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|g\|_\infty = \{\inf M \geq 0 : |g(t)| \leq M \quad p.p \ sur\ \Omega.\}$$

1.1.2 Fonctions continues/absolument continues

Définition 1.1.2 *([13]) Soit $\Omega = [0, T)\,(0 < T \leq +\infty)$ et $n \in \mathbb{N} = \{0.1...\}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions g qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :*

$$\|g\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \left\|g^{(k)}\right\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \max_{t\in\Omega} \left|g^{(k)}(t)\right|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n = 0, C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions g continues sur Ω muni de la norme :

$$\|g\|_{C(\Omega)} = \max_{t\in\Omega} |g(t)|.$$

Définition 1.1.3 *([13]) Soit $\Omega = [0, T)\,(0 < T \leq +\infty)$. On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :*

$$AC(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R} / \exists \psi \in L^1(\Omega) : g(t) = c + \int_0^t \psi(s) ds \right\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω.

Définition 1.1.4 *([13]) Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions h qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles que $g^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :*

$$AC^n(\Omega) = \left\{ g : \Omega \to \mathbb{R}, g^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, ..., n-1\}, g^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\},$$

En particulier, $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Lemme 1.1.1 *([13]) Une fonction $g \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si elle est représentée sous la forme :*

$$g(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g^{(n)}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Ces théorèmes consistent à prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe pour certains opérateurs. On s'intéresse au théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité. Le théorème de Schauder n'assure que l'existence seulement. On présente différents théorèmes d'existence et d'unicité basés sur les théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera des définitions et des notions connues de l'analyse fonctionnelle.

Définition 1.1.5 *Soit $\mathcal{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. On dit que $u \in \mathbb{E}$ est un point fixe de $\mathcal{A}$ si :*

$$\mathcal{A}u = u.$$

Définition 1.1.6 *([13]) Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach et $\mathcal{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une application continue, on dit que $\mathcal{A}$ est contractante si $\mathcal{A}$ est lipschitzienne de rapport $k < 1$:*

$$\exists k < 1, \forall u, v \in \mathbb{E} : \left\| \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v) \right\|_{\mathbb{E}} \leq k \left\| u - v \right\|_{\mathbb{E}}.$$

Théorème 1.1.2 *(Théorème du point fixe de Banach [7]) Soient $\mathbb{F}$ un ensemble fermé et $\mathcal{A} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ satisfait*

$$\left| \mathcal{A}u - \mathcal{A}v \right| \leq k \left| u - v \right|, \text{ pour tout } k \in [0, 1[, \text{ et pour } u, v \in \mathbb{F}.$$

Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe dans $\mathbb{F}$.

Théorème 1.1.3 *(Théorème du point fixe de Krasnoselskii [14]) Soit $\mathbb{M}$ un sous-ensemble fermé, borné, convexe et non vide d'un espace de Banach $\mathbb{E}$. Supposons aussi que $\mathcal{A} : \mathbb{M} \to \mathbb{E}, \mathcal{B} : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ des opérateurs tels que*
(i) $\mathcal{A}u + \mathcal{B}v \in \mathbb{M}$ où $u, v \in \mathbb{M}$,
(ii) $\mathcal{A}$ est compact et continu, et
(iii) $\mathcal{B}$ est une application de contraction.
Alors il existe $w \in \mathbb{M}$ tel que $w = \mathcal{A}w + \mathcal{B}w$.

Théorème 1.1.4 *([13]) Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach et $\mathcal{A} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ un opérateur contractant. Alors $\mathcal{A}$ admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! u^* \in \mathbb{E}$ tel que $\mathcal{A}u^* = u^*$.*
De plus, si $u_0 \in E$ et $u_n = \mathcal{A}u_{n-1}$, alors :

$$u^* = \lim_{n \to \infty} u_n.$$

De plus, si $\mathcal{A}^m, m \in \mathbb{N}$ est une suite d'opérateurs définie par $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^m = \mathcal{A}\mathcal{A}^{m-1}, m > 1$, alors pour tout $u_0 \in \mathbb{E}$ la suite $\{\mathcal{A}^m u_0\}_{m=0}^{\infty}$ converge vers le point fixe u^*.

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \mathcal{A}^m u_0 - u^* \right\| = 0.$$

Preuve. Soit k est une constante de contraction $\mathcal{A}$, (nous construirons explicitement un ordre convergent au point fixe). Soit u_n un élement fixé de $\mathbb{E}$. On considère $\{u_n\}$ dans $\mathbb{E}$ définie par :

$$u_n = \mathcal{A}u_{n-1} \forall n \geq 1.$$

Puisque $\mathcal{A}$ est un opérateur contractant, nous obtenons

$$\left\| u_n - u_{n+1} \right\| = \left\| \mathcal{A}u_{n-1} - \mathcal{A}u_n \right\| \leq k \left\| u_{n-1} - u_n \right\| \forall n \geq 1.$$

Ainsi,

$$\left\| u_n - u_{n-1} \right\| \leq k^n \left\| u_0 - u_1 \right\| \forall n \geq 1.$$

Par conséquent, pour tout $m > n$ on a :

$$\left\| u_n - u_m \right\| \leq \left(k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1} \right) \left\| u_0 - u_1 \right\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \left\| u_0 - u_1 \right\|.$$

On en déduit que $\{u_n\}$ est une suite de cauchy dans $\mathbb{E}$. Soit $u_n \to u, u \in \mathbb{E}$, on utilise la continuité de $\mathcal{A}$, on a :

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n-1} = \mathcal{A}u$$

Montrons l'unicité du point fixe dans $\mathbb{E}$, soit alors u, v deux points fixes de $\mathcal{A}$. Alors

$$\|u - v\| = \|\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)\| \leq k\,|u - v|\,.$$

Comme $0 < k < 1$ on a donc $u = v$. □

Théorème 1.1.5 *(Ascoli-Arzelà)([11])Soient J un espace compact et $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace normée. L'espace $C(J, \mathbb{E})$ des fonctions continues de J dans $\mathbb{E}$, muni de la norme uniforme, est un espace normée.*
Une partie $\mathcal{A}$ de $C(J, \mathbb{E})$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout point x de J :
1) L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné. i.e il existe une constante $k > 0$ tel que :

$$\|g(x)\| \leq k \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } g \in A,$$

2) $\mathcal{A}$ est équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|g(t_1) - g(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et } g \in \mathcal{A}$$

1.2 Calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonction Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Fonction Gamma

Définition 1.2.1 *([20])Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.2.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0^+) = +\infty$, Γ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

Une propriété importante de la fonction Gamma Γ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \tag{1.2.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z). \qquad (1.2.3)$$

La fonction Gamma généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \epsilon \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (1.2.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6, \end{aligned}$$

par récurrence nous obtenons $\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$.

Formule de multiplication

La fonction Gamma vérifie également la formule de duplication :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

La formule de duplication est un cas particulier du théorème de multiplication :

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2-mz}}\Gamma(mz).$$

Cette fonction apparaît également dans des formules incluant la fonction Zêta de Riemann.

Valeurs particulières

Cette section indique quelques valeurs particulières de la fonction Gamma

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4},\ \text{et} \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Mais aussi négatifs car la fonction Gamma est prolongeable sauf en $0, -1, -2....$ On a :

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Le développement asymptotique de $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\frac{163879}{209018880z^5}+O\left(\frac{1}{z^6}\right)\right].$$

Fonction Bêta

Définition 1.2.2 *([20])La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes z et w par :*

$$B\left(z,w\right)=\int_{0}^{1}t^{z-1}\left(1-t\right)^{w-1}dt \quad \mathrm{Re}\left(z\right)>0,\mathrm{Re}\left(w\right)>0. \tag{1.2.4}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B\left(z,w\right)=\frac{\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(w\right)}{\Gamma\left(z+w\right)},\ \forall z,w:\mathrm{Re}\left(z\right)>0,\mathrm{Re}\left(w\right)>0. \tag{1.2.5}$$

Remarque 1.2.1 *La fonction Bêta est symétrique i.e.*

$$B\left(z,w\right)=B\left(w,z\right)$$

1.2.2 Intégrale au sens de Riemann-Liouville

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire : au sens de R-L et au sens de Caputo, y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux definitions.
La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\rho\in\mathbb{C}(\mathrm{Re}(\rho)>0)$, selon l'approche de R-L, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété $n-$fois.

Définition 1.2.3 *([13, 20]) Soit g une fonction continue sur l'intervalle $[0,T],T>0$. Une primitive de g est donnée par l'expression :*

$$\mathfrak{I}^{1}g(t)=\int_{0}^{t}g(x)dx.$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{2}g(t) &= \int_{0}^{t}\mathfrak{I}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{x}g(s)ds\right)dx=\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{x}\right)g(s)dsdx\\ &= \int_{0}^{t}\left(t-s\right)g(s)ds.\end{aligned}$$

En répétant n fois, on arrive à la n ieme primitive de la fonction g sous la forme :

$$\mathfrak{I}^{n}g(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-1}g(s)ds,\ \ t>0,n\in\mathbb{N}^{*}. \tag{1.2.6}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n)=(n-1)!$, Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.2.6) paurrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.2.4 *([13, 20])Soit $g \in L^1([0,T]), T > 0$. L'intégrale fractionnaire de R-L de la fonction g d'ordre $\rho \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\rho) > 0)$ notée $\mathfrak{J}^\rho$ est définie par :*

$$\mathfrak{J}^\rho g(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-s)^{\rho-1} g(s)ds, \tag{1.2.7}$$

où $\Gamma(\rho)$ est la fonction Gamma, et $0 < t < +\infty$.

Pour $\rho = 0$, on a :

$$\mathfrak{J}^\rho = \mathfrak{J} \text{ (l'opérateur identité)}$$

Pour $\rho = n\epsilon\mathbb{N}^*$, $\mathfrak{J}^\rho$ a coincide avec l'intégrale répétée $n-$fois de la forme :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{J}^\rho g)(t) &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots\ldots \int_0^{t_{n-1}} g(t_n)\, dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g(s)\, ds. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Théorème 1.2.1 *([13, 20]) Si $g \in L^1([0,T]), T > 0$, alors $\mathfrak{J}^\rho g$ existe pour presque tout $t \in [0,T]$ et de plus $\mathfrak{J}^\rho g \in L^1([0,T])$.*

Preuve. En introduisant (1.2.7) puis nous utilisons le théorème de Fubini, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_0^T |\mathfrak{J}^\rho g(t)|\, dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\rho-1} |g(s)|\, dsdt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^T |g(s)| \left(\int_0^T (t-s)^{\rho-1} dt \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^T |g(s)|\, (T-s)^\rho\, ds \\ &\leq \frac{T^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^T |g(s)|\, ds, \end{aligned}$$

puisque $g \in L^1([0,T])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat. □

Exemple 1.2.1 *Soit $g(t) = t^\delta$ avec $\rho > 0, \delta > -1$, alors*

$$\mathfrak{J}^\rho g(t) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\rho+\delta+1)} t^{\rho+\delta}. \tag{1.2.9}$$

En effet,

$$\mathfrak{J}^\rho g(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-s)^{\rho-1} s^\delta ds.$$

En utilisant le changement de variable et la fonction Bêta nous obtenons :

$$s = tx, 0 \leq x \leq 1, \tag{1.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}^{\rho} g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^1 [t - tx]^{\rho-1} x^{\delta} t^{\delta+1} dx \\
&= \frac{t^{\rho+\delta}}{\Gamma(\rho)} \int_0^1 (1-x)^{\rho-1} x^{\delta} dx.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}^{\rho} g(t) &= \frac{t^{\rho+\delta}}{\Gamma(\rho)} \beta(\rho, \delta+1) \\
&= \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\rho+\delta+1)} t^{\rho+\delta} \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\rho+\delta+1)} t^{\rho+\delta}.
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de R-L de la fonction $g(t) = t^{\delta}$ est donnée par :

$$\mathfrak{J}^{\rho} g(t) = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\rho+\delta+1)} t^{\rho+\delta}. \tag{1.2.11}$$

En particulier, la relation (1.2.11) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de R-L d'ordre ρ d'une constante est donnée par :

$$\mathfrak{J}^{\rho} C = \frac{C}{\Gamma(\rho+1)} t^{\rho}.$$

Théorème 1.2.2 *([13, 20])Si $g \epsilon L^1[0,T]$ et $\rho > 0$, alors $\mathfrak{J}^{\rho} g(t)$ existe pour presque tout $t \epsilon [0,T]$ et on a :*

$$(\mathfrak{J}^{\rho} g) \, \epsilon L^1[0,T]$$

Preuve. Soit $g \epsilon L^1[0,T]$, on a : □

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-x)^{\rho-1} g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t-x) \varphi_2(x) \, dx$$

avec,

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} \frac{u^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} & \text{pour} \quad 0 \leq u \leq T \\ 0 & \text{pour} \quad u \epsilon \mathbb{R}^* - \{T\}, \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} g(u) & 0 \leq u \leq T \\ 0 & \mathbb{R} \backslash [0,T]. \end{cases}$$

Par construction, $\varphi_j \epsilon L^1(\mathbb{R})$ pour $j \epsilon \{1,2\}$, et on a : $\mathfrak{J}^\rho g \epsilon L^1[0,T]$.

Théorème 1.2.3 *([13, 20])Soient $\rho > 0$ et $(g_k)_{k=1}^\infty$ une suite des fonctions continues uniformément convergente sur $[0,T]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de R-L et la limite comme suit :*

$$\left(\mathfrak{J}^\rho \lim_{k\to\infty} g_k\right)(t) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathfrak{J}^\rho g_k\right)(t),$$

en particulier, la suite $(g_k)_{k=1}^\infty$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit g la limite de la suite (g_k), il est clair que g est continue, et on a l'estimation :

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}^\rho g_k(t) - \mathfrak{J}^\rho g(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-x)^{\rho-1} |g_k(x) - g(x)|\, dx \\ &\leq \frac{T^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \|g_k - g\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où, la convergence uniforme lorsque $k \to \infty$, pour $t \epsilon [0,T]$. □

Théorème 1.2.4 *([13, 20]) Soient $\rho, \beta \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}\rho > 0, \operatorname{Re}\beta > 0$, pour toute fonction $g \epsilon L^1$ $[0,T]$, on a :*

$$\mathfrak{J}^\rho \mathfrak{J}^\beta g(x) = \mathfrak{J}^{\rho+\beta} g(x) = \mathfrak{J}^\beta \mathfrak{J}^\rho g(x), \tag{1.2.12}$$

pour presque tout $t \epsilon [0,T]$, et $g \epsilon C[0,T]$, alors (1.2.12) est vrai pour tout $t \epsilon [0,T]$.

Preuve. Supposons d'abord que $g \epsilon L^1[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^\beta \mathfrak{J}^\rho g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x)\, \mathfrak{J}^\rho g(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x) \left(\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^x (x-s)\, g(s)\, ds\right) dx. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.2.3 les intégrales existent et par le théorème de Fubini on a :

$$\mathfrak{J}^\rho \mathfrak{J}^\beta g(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(\int_s^t (t-y)^{\rho-1} (y-s)^{\beta-1}\, dy\right) g(s)\, ds.$$

En utilisant le changement de variable

$$y = s + (t-s)z,$$

où $z = 0$ quand $y = s$ et $z = 1$ quand $y = t$ et $dy = (t-s)dz$, nous obtenons :

$$\mathfrak{I}^{\rho}\mathfrak{I}^{\beta}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\rho\right)\Gamma\left(\beta\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\rho+\beta-1}\left(\int_{0}^{1}\left(1-z\right)^{\rho-1}z^{\beta-1}dz\right)g\left(s\right)ds$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta, nous obtenons :

$$\mathfrak{I}^{\rho}\mathfrak{I}^{\beta}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\rho+\beta\right)}\int_{0}^{t}g\left(z\right)\left(t-z\right)^{\rho+\beta-1}dz=\mathfrak{I}^{\rho+\beta}g\left(t\right).$$

Supposons maintenant que $h\epsilon C[0,T]$, alors (d'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres) $\mathfrak{I}^{\rho}g\epsilon C[0,T]$, et par suite

$$\mathfrak{I}^{\rho}\mathfrak{I}^{\beta}g,\mathfrak{I}_{a}^{\rho+\beta}g\in C[0,T].$$

Ainsi, d'après ce qui précède, les deux fonctions continues $\mathfrak{I}^{\rho}\mathfrak{I}^{\beta}g,\mathfrak{I}_{a}^{\rho+\beta}g$ coïncident presque partout sur $[0,T]$, elles doivent donc coïncider partout sur $[0,T]$. □

1.2.3 Dérivée de Riemann-Liouville

Définition 1.2.5 *([13, 20]) Soit $g\in L^{1}([0,T]),T>0$ une fonction intégrable sur $[0,T]$, la dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction g d'ordre $\rho\in\mathbb{C}(\mathrm{Re}(\rho)>0)$ notée $\mathfrak{D}^{\rho}g$ est définie par :*

$$\mathfrak{D}^{\rho}g(t)=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{I}^{n-\rho}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\rho-1}g(s)ds, \tag{1.2.13}$$

où $n-1<[\mathrm{Re}(\rho)]<n$, et $[\mathrm{Re}(\rho)]$ est la partie entière de $\mathrm{Re}(\rho)$ et $\mathfrak{D}^{n}=\frac{d^{n}}{dt^{n}}$.

Exemple 1.2.2 *En particulier, si $\rho=0$, alors*

$$\mathfrak{D}^{0}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{0}^{t}g(s)ds=\mathfrak{I}g(t). \tag{1.2.14}$$

Si $\rho=n\in\mathbb{N}$, alors

$$\mathfrak{D}^{n}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1}\int_{0}^{t}g(s)ds=g^{(n)}(t). \tag{1.2.15}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de R-L coïncide avec la dérivée classique pour $\rho\in\mathbb{N}$. Si de plus $0<\rho<1$, alors $n=1$, d'où

$$\mathfrak{D}^{\rho}g(t)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\rho\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{-\rho}g(s)ds,t>0.$$

La dérivée de $g(t)=t^{\delta}$ au sens de R-L. Soit $\rho>0$ tel que $n-1<\rho<n$ et $\delta>-1$, d'après (1.2.13) et la relation (1.2.11), (Voir l'Exemple 1.2.1) on a :

$$\mathfrak{D}^{\rho}t^{\delta}=\mathfrak{D}^{n}\mathfrak{I}^{n-\rho}t^{\delta}=\frac{\Gamma\left(\delta+1\right)}{\Gamma\left(n-\rho+\delta+1\right)}\mathfrak{D}^{n}t^{n-\rho+\delta}. \tag{1.2.16}$$

En tenant compte

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^n t^{n-\rho+\delta} &= (\delta+n-\rho)(\delta+n-\rho-1).......(b-\rho+1)t^{\delta-\rho} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+n-\rho+1)}{\Gamma(\delta-\rho+1)}t^{\delta-\rho}.\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

On substitue le resultat (1.2.17) dans la formule (1.2.16) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^\rho t^\delta &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(n-\rho+\delta+1)}\frac{\Gamma(\delta+n-\rho+1)}{\Gamma(\delta-\rho+1)}t^{\delta-\rho} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-\rho+1)}t^{\delta-\rho}.\end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de R-L de la fonction $g(t) = t^\delta$ est donnée par :

$$\mathfrak{D}^\rho t^\delta = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta-\rho+1)}t^{\delta-\rho}. \tag{1.2.18}$$

En particulier, si $\delta = 0$ et $\rho > 0$, la dérivée fractionnaire de R-L d'une fonction constante $g(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$\mathfrak{D}^\rho C = \frac{C}{\Gamma(1-\rho)}t^{-\rho}.$$

Lemme 1.2.1 *Soient $n-1 < \rho < n$ et $n = [\rho]+1$, et h une fonction vérifiant*

$$\mathfrak{D}^\rho g(t) = 0.$$

alors :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\rho+n)}t^{k+\rho-n}, C_k \in \mathbb{R}, n = [\rho]+1.$$

En particulier, si $0 < \rho < 1$, alors

$$g(t) = ct^{\rho-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $\mathfrak{D}^\rho g(t) = 0$, d'après (1.2.13) on a :

$$\mathfrak{D}^\rho g(t) = \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\rho} h(t) = 0.$$

Et par suite :

$$\mathfrak{J}^{n-\rho} g(t) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k t^k. \tag{1.2.19}$$

Maintenant, l'application de l'opérateur $\mathfrak{J}^\rho$ à l'équation (1.2.19) donne :

$$\mathfrak{J}^n g(t) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \mathfrak{J}^\rho t^k.$$

En utilisant la relation (1.2.11) (Voir l'Exemple **1.2.1**), nous obtenons :

$$\mathfrak{I}^{n}g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+\rho+1\right)}t^{k+\rho}. \tag{1.2.20}$$

L'application de l'opérateur $\mathfrak{D}^{n}$ à l'équation (1.2.20) donne :

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+\rho+1\right)}\mathfrak{D}^{n}t^{k+\rho}.$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule :

$$\mathfrak{D}^{n}t^{\rho}=\frac{\Gamma\left(\rho+1\right)}{\Gamma\left(\rho-n+1\right)}t^{\rho-n},$$

donnent :

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+\rho+1\right)}\frac{\Gamma\left(\rho+1\right)}{\Gamma\left(\rho-n+1\right)}t^{k+\rho-n}.$$

Finalement nous obtenons :

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k+1-\rho+n\right)}t^{k+\rho-n}.$$

Ceci complète la preuve du Lemme. □

Proposition 1.2.1 *([13, 20]) Soient $n-1<\rho<n$ et $n=[\rho]+1$, si $g\in AC^{n}\left([0,T]\right), T>0$, alors la dérivée fractionnaire $\mathfrak{D}^{\rho}g$ existe presque partout sur $[0,T]$ de plus, elle est representée sous la forme :*

$$\mathfrak{D}^{\rho}g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{\Gamma\left(k-\rho+1\right)}t^{k-\rho}+\frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\rho-1}g^{(n)}(s)ds. \tag{1.2.21}$$

Lemme 1.2.2 *([13, 20])Soient $\rho>0$ et $n=[\rho]+1$, alors pour tout entier $m\in\mathbb{N}^{*}$ on a :*

$$\mathfrak{D}^{\rho}g(t)=\mathfrak{D}^{m}\mathfrak{I}^{m-\rho}g(t), m>\rho. \tag{1.2.22}$$

Théorème 1.2.5 *([13, 20]) Soient $g_1$et g_2 deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de R-L existent, pour $c\in\mathbb{R}$ alors, $\mathfrak{D}^{\rho}\left(cg_1+g_2\right)$ existe et on a :*

$$\mathfrak{D}^{\rho}\left(cg_1+g_2\right)=c\mathfrak{D}^{\rho}g_1+\mathfrak{D}^{\rho}g_2. \tag{1.2.23}$$

2) En général

$$\mathfrak{D}^{\rho}\left(\mathfrak{D}^{\beta}g\right)(t)\neq\mathfrak{D}^{\rho+\beta}g(t).$$

Preuve. Soit g_1,$g_2 \in L^1[0,T]$, et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathfrak{D}^\rho (cg_1 + g_2) = \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\rho} (cg_1 + g_2)$$

Comme la dérivée $n^{ième}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^\rho (cg_1 + g_2) &= \mathfrak{D}^n \left(c\mathfrak{J}^{n-\rho} g_1 + \mathfrak{J}^{n-\rho} g_2 \right) \\ &= c\mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\rho} g_1 + \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\rho} g_2 \\ &= c\mathfrak{D}^\rho g_1 + \mathfrak{D}^\rho g_2. \end{aligned}$$

2)

$$\mathfrak{D}^\rho \left(\mathfrak{D}^\beta g \right)(t) = \mathfrak{D}^{\rho+\beta} g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathfrak{D}^{\beta-k} g(0)}{\Gamma(1-k-\rho)} t^{-k-\rho},$$

et

$$\mathfrak{D}^\beta \left(\mathfrak{D}^\rho g \right)(t) = \mathfrak{D}^{\rho+\beta} g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathfrak{D}^{\rho-k} g(0)}{\Gamma(1-k-\beta)} t^{-k-\beta}.$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\rho = \beta$ et $\mathfrak{D}^{\rho-k} g(0) = 0$, pour tout $k = 1, 2, ..., m$ et $\mathfrak{D}^{\beta-k} g(0)$, pour tout $k = 1, 2, ..., n$. Ce qui complète la preuve. □

Lemme 1.2.3 *([13, 20]) Soient $\rho > 0$ et $g \in L^1[0,T]$, alors l'égalité :*

$$\mathfrak{D}^\rho \mathfrak{J}^\rho g(t) = g(t), \tag{1.2.24}$$

est vraie pour presque tout $t \in [0,T]$.

Preuve. Par définition on a :

$$\mathfrak{J}^\rho \mathfrak{D}^\rho g(t) = \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^{n-\rho} \mathfrak{J}^\rho g(t) = \mathfrak{D}^n \mathfrak{J}^n g(t) = g(t).$$

□

Théorème 1.2.6 *([13, 20])Soient $\rho, \beta > 0$ et $n-1 \leq \rho < n, m-1 \leq \beta < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ alors :*
(1) Si $\rho > \beta > 0$, alors pour $g \in L^1[0,T]$ l'égalité :

$$\mathfrak{D}^\beta \left(\mathfrak{J}^\rho g(t) \right) = \mathfrak{J}^{\rho-\beta} g(t). \tag{1.2.25}$$

est presque partout sur $[0,T]$.
(2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[0,T]$ tel que $g = \mathfrak{J}^\rho \varphi(t)$

$$\mathfrak{D}^\rho \left(\mathfrak{J}^\rho g(t) \right) = g(t). \tag{1.2.26}$$

presque partout sur $t \in [0,T]$.
(3) Pour $\rho > 0, k \in \mathbb{N}^*$. Si les dérivées fractionnaires $\mathfrak{D}^\rho g$ et $\mathfrak{D}^{k+\rho} g$ existes, alors :

$$\mathfrak{D}^k \left(\mathfrak{D}^\rho g(t) \right) = \mathfrak{D}^{k+\rho} g(t). \tag{1.2.27}$$

(4) Si $\beta \geq \rho > 0$ et la dérivée fractionnaire $\mathfrak{D}^{\rho-\beta} g$ existe, alors :

$$\mathfrak{D}^\beta \left(\mathfrak{J}^\rho g(t) \right) = \mathfrak{D}^{\beta-\rho} g(t). \tag{1.2.28}$$

Preuve. Par définition nous obtenons :
(1) Si $\rho > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\rho} g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{n} \mathfrak{J}^{n-\beta}\left(\mathfrak{J}^{\rho} g\left(t\right)\right) \\ &= \mathfrak{D}^{n}\left(\mathfrak{J}^{n+\rho-\beta} g\left(t\right)\right) \\ &= \mathfrak{D}^{n} \mathfrak{J}^{n}\left(\mathfrak{J}^{\rho-\beta} g\left(t\right)\right) \\ &= \mathfrak{J}^{\rho-\beta} g\left(t\right), \end{aligned}$$

est presque partout sur $[0, T]$.
(2) Par la relation 1.2.24, nous obtenons :

$$\mathfrak{J}^{\rho} \mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) = \mathfrak{J}^{\rho}(\mathfrak{D}^{\rho} \mathfrak{J}^{\rho} \varphi\left(t\right)) = \mathfrak{J}^{\rho}(\varphi\left(t\right)) = g\left(t\right).$$

□

Théorème 1.2.7 *(3) On a :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{k}\left(\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{k}\left(\mathfrak{D}^{n} \mathfrak{J}^{n-\rho} g\left(t\right)\right) \\ &= \mathfrak{D}^{k+n} \mathfrak{J}^{n-\rho+k-k} g\left(t\right) \\ &= \mathfrak{D}^{k+n} \mathfrak{J}^{k+n-(\rho+k)} g\left(t\right) \\ &= \mathfrak{D}^{k+\rho} g\left(t\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat.
(4) On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\beta}\left(\mathfrak{J}^{\rho} g\left(t\right)\right) &= \mathfrak{D}^{m} \mathfrak{D}^{m-\beta}\left(\mathfrak{J}^{\rho} g\left(t\right)\right) \\ &= \mathfrak{D}^{m} \mathfrak{J}^{m-(\beta-\rho)} g\left(t\right) \\ &= \mathfrak{D}^{\beta-\rho} g\left(t\right), \end{aligned}$$

existe pour $i-1 < \beta-\rho < i$ et $i \leq m$.

1.2.4 Dérivée de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville ait joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs, dont Caputo $(1967-1969)$, ont réalisé que cette définition devait être révisée [3], car des problèmes de viscoélasticité, de mécanique des solides, et la rhéologie nécessitent des conditions initiales interprétables physiquement par des dérivées classiques telles que $u(0), u'(0)$, etc, ce qui n'est pas le cas.
Malgré le fait que les problèmes de valeur initiale avec de telles circonstances de départ peuvent être traités analytiquement, M. Caputo a présenté la réponse à ce problème dans sa définition, qu'il a adoptée dans le cadre de la théorie de la viscoélasticité avec F. Mainardi [4].
Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles. Soit $[0, T]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$, et soit $\mathfrak{J}^{\rho}$ et $\mathfrak{D}^{\rho}$ les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (1.2.6) et (1.2.13) respectivement.

Définition 1.2.6 *([13]) La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\rho \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}\rho)$ d'une fonction g sur $[0,T]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de R-L par :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) = \mathfrak{D}^{\rho}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^{k}\right) \tag{1.2.29}$$

où

$$n = [\operatorname{Re}\rho] + 1 \text{ pour } \rho \notin \mathbb{N}, \quad n = \rho \text{ pour } \rho \in \mathbb{N}. \tag{1.2.30}$$

Si $\rho = 0$, alors :

$$^{c}\mathfrak{D}^{0} g\left(t\right) = g(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$, la relation (1.2.29) prend la forme :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) = \mathfrak{D}^{\rho}\left(g\left(t\right) - g(0)\right).$$

On a

Théorème 1.2.8 *([13]) Soit $\operatorname{Re}\rho > 0$ et soit n donné par (1.2.30). Si $g \in AC^{n}([0,T])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right)$ existe presque partout sur $[0,T]$.*
1) Si $\rho \notin \mathbb{N}$, alors $^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right)$ est donnée par

$$\begin{aligned} ^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)} \int_{0}^{t} \left(t-x\right)^{n-\rho-1} g^{(n)}\left(x\right) dx, t > 0 \\ &= \mathfrak{J}^{n-\rho} g^{(n)}\left(t\right). \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

En particulier, lorsque $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$ et $g \in AC^{n}([0,T])$, alors :

$$\begin{aligned} ^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\rho\right)} \int_{0}^{t} \left(t-x\right)^{-\rho} g'\left(x\right) dx, t > 0 \\ &= \mathfrak{J}^{1-\rho} g'\left(t\right). \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

2) Si $\rho \in \mathbb{N}$, alors :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) = g^{(n)}\left(t\right).$$

Preuve. D'après Définitions 1.2.6 et 1.2.5 on a :

$$\begin{aligned} ^{c}\mathfrak{D}^{\rho} g\left(t\right) &= \mathfrak{D}^{\rho}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^{k}\right) \\ &= \mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\rho}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^{k}\right). \end{aligned}$$

Par

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\rho} g(t) &= \mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n-\rho} g(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \int_{0}^{t} \left(t-s\right)^{n-\rho-1} g(s) ds, t > 0, \end{aligned}$$

nous posons :

$$G(t) = \mathfrak{J}^{n-\rho}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right).$$

D'après (1.2.7), on a :

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\rho-1}\left(g\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right)ds.$$

En intégrant par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\rho-1}\left(g\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\left\{-\frac{\left(t-s\right)^{n-\rho}}{\left(n-\rho\right)}\left(g\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=t}\right. \\
&\quad \left. + \int_{0}^{t}\frac{\left(t-s\right)^{n-\rho}}{\left(n-\rho\right)}\left(g\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right)' ds\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho+1\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-\rho+1-1}\left(g\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}s^{k}\right)' ds \\
&= \mathfrak{J}^{n-\rho+1}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right)'.
\end{aligned}$$

En répétant ce procédé n fois, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathfrak{J}^{n-\rho+n}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right)^{(n)} \\
&= \mathfrak{J}^{n}\mathfrak{J}^{n-\rho}\left(g\left(t\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}\right)^{(n)}.
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}$ est un polynôme de degré $n-1$, par conséquent

$$G(t) = \mathfrak{J}^{n}\mathfrak{J}^{n-\rho}g^{(n)}\left(t\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
{}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g\left(t\right) &= \mathfrak{D}^{n}G\left(t\right) \\
&= \mathfrak{D}^{n}\mathfrak{J}^{n}\mathfrak{J}^{n-\rho}g^{(n)}\left(t\right) \\
&= \mathfrak{J}^{n-\rho}g^{(n)}\left(t\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\rho\right)}\int_{0}^{t}\left(t-x\right)^{n-\rho-1}g^{(n)}\left(x\right)dx.
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. $\square$

Théorème 1.2.9 *([13]) Soit* $\operatorname{Re}\rho > 0$ *et soit* n *donnée par (1.2.30) et* $g \in C^n([0,T])$*. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo* ${}^c\mathfrak{D}^\rho g(t)$ *est continue sur* $[0,T], T > 0$*.*
1) Si $\rho \notin \mathbb{N}$*, alors* ${}^c\mathfrak{D}^\rho g(t)$ *est donnée par (1.2.31). En particulier, elle prend la forme (1.2.32) pour* $0 < \rho < 1$*.*
2) Si $\rho \in \mathbb{N}$*, alors :*

$$ {}^c\mathfrak{D}^\rho g(t) = g^{(n)}(t). $$

Définition 1.2.7 *([13]) La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre* $\rho \in \mathbb{C}(\operatorname{Re}\rho > 0)$ *sur* $[0,T]$ *d'une fonction* g *est donnée par :*

$$ {}^c\mathfrak{D}^\rho g(t) = \mathfrak{J}^{n-\rho} g^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_0^t (t-x)^{n-\rho-1} g^{(n)}(x)\, dx, t > 0, \tag{1.2.33} $$

avec $n - 1 < \rho \leq n, n \in \mathbb{N}^*$*.*

Exemple 1.2.3 *Soit* $g(t) = t^\gamma$ *avec* $\gamma > 0$*, pour* $(0 < \rho \leq 1)$ *et utilisant le changement de variable (1.2.10) on a :*

$$ \begin{aligned} {}^c\mathfrak{D}^\rho g(t) &= \mathfrak{J}^{1-\rho} g'(x) = \gamma \mathfrak{J}^{1-\rho}(x-a)^{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\rho)} \int_a^t (t-s)^{-\rho} s^{\gamma-1} ds \\ &= \frac{\gamma t^{-\rho+\gamma}}{\Gamma(1-\rho)} \int_0^1 s^{\gamma-1}(1-s)^{-\rho} ds \\ &= \frac{t^{-\rho+\gamma}}{\Gamma(1-\rho)} \beta(\gamma, 1-\rho) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\rho+\gamma)} t^{-\rho+\gamma}. \end{aligned} $$

Donc la dérivée fractionnaie au sens de Caputo de la fonction $g(t) = t^\gamma$ *est donnée par :*

$$ {}^c\mathfrak{D}^\rho g(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\rho+\gamma)} t^{-\rho+\gamma}. \tag{1.2.34} $$

En particulier, l'utilisation de la formule (1.2.29) ou (1.2.31) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\rho > 0$ *d'une constante* $C \in \mathbb{R}$ *exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :*

$$ {}^c\mathfrak{D}^\rho C = 0. $$

Corollaire 1.2.1 *([13, 20]) Soient* $\rho \geq 0$ *et* $n = [\rho] + 1$*, si* ${}^c\mathfrak{D}^\rho g$*,* $\mathfrak{D}^\rho g$ *est existents, on suppose que* $\mathfrak{D}^k g(0) = 0$ *pour tout* $k \in \{0, 1, ...n-1\}$ *alors :*

$$ {}^c\mathfrak{D}^\rho g(t) = \mathfrak{D}^\rho g(t). \tag{1.2.35} $$

Théorème 1.2.10 *([13, 20]) Si $g \in C[0,T]$ et si $\rho > 0(n-1 < \rho \leq n)$, alors :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\mathfrak{J}^{\rho}g\left(t\right) = g\left(t\right). \tag{1.2.36}$$

Preuve. Soit $g = \mathfrak{J}^{\rho}g$ et par le corollaire precédent ($\mathfrak{D}^{k}g\left(a\right) = 0$, pour $\kappa \in \{0, 1, ..., n-1\}$) et d'après l'égalité (1.2.35), on a :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\mathfrak{J}^{\rho}g =^{c} \mathfrak{D}^{\rho}g = \mathfrak{D}^{\rho}g =^{c} \mathfrak{D}^{\rho}\mathfrak{J}^{\rho}g = g.$$

□

Proposition 1.2.2 *([13, 20])On suppose que $n-1 < \mathrm{Re}(\rho) < n$, $m, n \in \mathbb{N}$ et soit la fonction g telle que $^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g$ existe, alors :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(\mathfrak{D}^{m}g\left(t\right)\right) =^{c} \mathfrak{D}^{\rho+m}g\left(t\right) \neq \mathfrak{D}^{m}\left(^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g\left(t\right)\right).$$

Théorème 1.2.11 *([13, 20]) Soient $g_1$et g_2 deux fonctions définies sur $[0,T]$, telles que $^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g_1$ et $^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g_2$ existent presque partout. De plus, soit $c \in \mathbb{R}$ alors, $^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(g_1 + cg_2\right)$ existe presque partout sur $[0,T]$, et on a :*

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(g_1 + cg_2\right) =^{c} \mathfrak{D}^{\rho}g_1 + c\left(^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g_2\right).$$

Preuve. On a d'après (1.2.31)

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(g_1 + cg_2\right) = \mathfrak{J}^{n-\rho}\mathfrak{D}^{n}\left(g_1 + cg_2\right).$$

Comme la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} ^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(g_1 + cg_2\right) &= \mathfrak{J}^{n-\rho}\mathfrak{D}^{n}\left(g_1 + cg_2\right) \\ &= \mathfrak{J}^{n-\rho}\left(\mathfrak{D}^{n}g_1 + c\mathfrak{D}^{n}g_2\right) \\ &= \mathfrak{J}^{n-\rho}\mathfrak{D}^{n}G_1 + c\mathfrak{J}^{n-\rho}\mathfrak{D}^{n}g_2 \\ &= {}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g_1 + c\left(^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g_2\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.2.5 Lois de composition

L'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de R-L, mais il ne l'est pasà droite car :
Si g est une fonction continue sur $[0,T]$ on a :

$$^{c}\mathfrak{D}^{\rho}\left(\mathfrak{J}^{\rho}g\left(t\right)\right) = g(t), \mathfrak{J}^{\rho}\left(^{c}\mathfrak{D}^{\rho}g\left(t\right)\right) = g(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^{k}. \tag{1.2.37}$$

L'avantage principal de l'approche Caputo et que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

Chapitre 2

Equation differentielle de Langevin impliquant un ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Le calcul fractionnaire a été largement étudié et développé au cours des dernières décennies en raison de son application importante dans de nombreux domaines. C'est devenu un nouveau domaine de recherche en équations différentielles [13, 20]. L'équation de Langevin (formulée pour la première fois par Langevin en 1908) s'avère être un outil efficace pour décrire l'évolution des phénomènes physiques dans des environnements fluctuants [5]. En tant que développement intensif de la dérivée fractionnaire, les équations de Langevin fractionnaires ont été introduites par Mainardi et Pironi [16]. La forme générale des équations de Langevin fractionnaires non linéaires est présentée comme suit

$$^c\mathfrak{D}^\rho(^c\mathfrak{D}^\beta + \gamma)u(t) = f(t, u(t)),$$

où $^c\mathfrak{D}^\rho$ et $^c\mathfrak{D}^\beta$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo $m-1 < \rho \leq m$ et $n-1 < \beta \leq n, m, n \in \mathbb{N}$,$\gamma \in \mathbb{R}$ et f:$[0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, [25].
Récemment, l'existence et l'unicité de la solution pour les équations de Langevin fractionnaires non linéaires impliquant deux ordres fractionnaires ont été étudiées dans [9, 17].
Plusieurs auteurs ont lancé leurs travaux en utilisant divers intervalles unitaires de valeurs pour les deux ordres fractionnaires ρ et β, par exemple, [1, 25] a été étudié le cas $m-1 < \rho \leq m$ et $n-1 < \beta \leq n, m, n \in \mathbb{N}$, [17, 24] a été étudié le cas $0 < \rho, \beta \leq 1$, et [8] a été étudié le cas $0 < \rho \leq 1$ et $1 < \beta \leq 2$.
Dans ce travail, nous considérons l'équation fractionnaire non linéaire de Langevin suivante :

$$^c\mathfrak{D}^\rho(\mathfrak{D}^2 + \lambda^2)u(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in [0,1], \tag{2.1.1}$$

et

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \qquad u(1) = \mu u(\eta), \tag{2.1.2}$$

où ${}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\rho \in (0,1], \mathfrak{D}^{2}$ est la dérivée seconde ordinaire, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable, et $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mu \neq \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda \eta}.$$

Notre intérêt pour l'étude du problème de Langevin 2.1.1 vient de "la possibilité d'application" comme modèle pour des systèmes physiques présentant une diffusion anormale pour sa version classique. En fait, il est bien connu que dans de nombreux cas, la manière la plus pratique de décrire l'évolution temporelle de la vitesse du mouvement brownien est d'utiliser l'équation de Langevin [8]. Il convient de noter que l'équation 2.1.1 peut être considérée comme une forme fractionnaire des équations chaotiques de Jerk mentionnées ci-dessus. Par conséquent, notre travail peut être considéré comme une contribution de classe de développement de circuit électrique chaotique.
Au début de ce chapitre, nous cherchons la représentation intégrale. Ensuite, nous utilisons le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour étudier l'existence et l'unicité de la solution ainsi que l'existence au moins du problème de aux limites à trois points $(2.1.1 - 2.1.2)$, et enfin nous présentons quelleques exemples pour illustrer des résultats principales.

2.2 Représentation intégrale

Pour pouvoir établir cette représentation on rappelle les résultats auxiliaires suivants.

Lemme 2.2.1 ([*13*, *20*]) *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n-1 < \rho \leq n$. *Si* u *une fonction continue sur* $[0,1]$, *alors ona*

$$\mathfrak{J}^{\rho}\left({}^{c}\mathfrak{D}^{\rho} u\right)(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1}.$$

Lemme 2.2.2 *[21]La solution unique de l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}(\mathfrak{D}^{2} + \lambda^{2})u(t) = \theta(t), \qquad n-1 < \rho \leq n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où θ *est une fonction continue sur* $[0,1]$, *donné par*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\theta(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{n-1} c_i s^i\right) ds \\ &\quad + c_n \cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

où c_i, $i = 0, 1, ..., n+1$ *sont des constantes.*

Preuve. Soit

$${}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}(\mathfrak{D}^{2} + \lambda^{2})u(t) = \theta(t), \qquad n-1 < \rho \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.2}$$

Par intégration de Riemann-Liouville d'ordre ρ nous obtenons :

$$\mathfrak{J}^{\rho}[{}^{c}\mathfrak{D}^{\rho}(\mathfrak{D}^2+\lambda^2)u(t)]=\mathfrak{J}^{\rho}\theta(t), \qquad n-1<\rho\leq n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Et d'aprés le lemme 2.2.1, nous trouvons :

$$(\mathfrak{D}^2+\lambda^2)u(t)=\mathfrak{J}^{\rho}\theta(t)+c_0+c_1t+...+c_{n-1}t^{n-1}, \qquad n-1<\rho\leq n, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.2.3}$$

Alors l'équation 2.2.3 est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. Pour sa résolution, nous passons par deux étapes.

• **Étape 1 :** EDO sans second membre.

$$(\mathfrak{D}^2+\lambda^2)u(t)=u''(t)+\lambda^2u(t)=0. \tag{2.2.4}$$

Polynôme caractéristique associé à l'équation 2.2.4 est :

$$r^2+\lambda^2=0\Longrightarrow r=\pm i\lambda.$$

La solution générale s'écrire donc comme suit :

$$u_h(t)=c_n\cos\lambda t+c_{n+1}\sin\lambda t, \qquad \text{avec } c_n, c_{n+1}\in\mathbb{R}.$$

• **Étape 2 :** EDO avec second membre (Méthode de la variation des constantes) comme

$$u_h(t)=c_n(t)\cos\lambda t+c_{n+1}(t)\sin\lambda t, \qquad c_n, c_{n+1}\in\mathbb{R}.$$

Nous posons

$$v_1(t)=\cos\lambda t, \text{ et } v_2(t)=\sin\lambda t.$$

Alors

$$v_1'(t)=-\lambda\sin\lambda t, \text{ et } v_2'(t)=\lambda\cos\lambda t.$$

Ainsi, le système de la variation des constantes devient :

$$\begin{cases} c_n'(t)\cos\lambda t+c_{n+1}'(t)\sin\lambda t=0 \\ c_n'(t)(-\lambda\sin\lambda t)+c_{n+1}'(t)(\lambda\cos\lambda t)=\mathfrak{J}^{\rho}\theta(t)+c_0+c_1t+...+c_{n-1}t^{n-1}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} c_n'(t)=\frac{-\sin\lambda t}{\lambda}(\mathfrak{J}^{\rho}\theta(t)+\sum_{i=0}^{n-1}c_it^i) \\ c_{n+1}'(t)=\frac{\cos\lambda t}{\lambda}(\mathfrak{J}^{\rho}\theta(t)+\sum_{i=0}^{n-1}c_it^i). \end{cases}$$

Nous trouvons que :

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{-1}{\lambda}\int_0^t\sin\lambda s(\mathfrak{J}^{\rho}\theta(s)+\sum_{i=0}^{n-1}c_is^i)ds, \\ c_{n+1}(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t\cos\lambda s(\mathfrak{J}^{\rho}\theta(s)+\sum_{i=0}^{n-1}c_is^i)ds. \end{aligned}$$

Donc la solution générale u_g de l'équation 2.2.3 est :

$$u(t) = c_n(t)\cos\lambda t + c_{n+1}(t)\sin\lambda t + c_n\cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t. \tag{2.2.5}$$

En remplaçant $c_n(t)$ et $c_{n+1}(t)$ dans 2.2.5 nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{-\cos\lambda t}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda s\left(\mathfrak{J}^\rho\theta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i\right)ds + \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\int_0^t \cos\lambda s\left(\mathfrak{J}^\rho\theta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i\right)ds \\ &\quad + c_n\cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t [\sin\lambda t\cos\lambda s - \sin\lambda s\cos\lambda t]\left(\mathfrak{J}^\rho\theta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i\right)ds + c_n\cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\mathfrak{J}^\rho\theta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i\right)ds + c_n\cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation 2.2.2 est donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)(\mathfrak{J}^\rho\theta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i)ds + c_n\cos\lambda t + c_{n+1}\sin\lambda t,$$

où c_i, $i = 0, 1, ..., n+1$ sont des constantes avec

$$\mathfrak{J}^\rho\theta(s) = \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\theta(\tau)d\tau.$$

Ceci complète la preuve. □

Lemme 2.2.3 *[21]Pour la fonction $f \in L^1([0,1], \mathbb{R})$ donnée, alors la solution unique du problème aux limites* $(2.1.1 - 2.1.2)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds \\ &\quad + \frac{\sin\lambda t}{\Delta}\left[\mu\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds\right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \sin\lambda(1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds\right], \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

où

$$\Delta = \lambda(\sin\lambda - \mu\sin\lambda\eta) \neq 0. \tag{2.2.7}$$

Preuve. Pour $0 < \rho \leq 1$, en appliquant le lemme 2.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t + \frac{c_0}{\lambda^2}(1-\cos\lambda t) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

En utilisant les conditions aux limites (2.1.2), nous trouvons que $c_0 = c_1 = 0$, et

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\theta(\tau)d\tau\right)ds \right. \\ &\left. -\int_0^1 \sin\lambda(1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\theta(\tau)d\tau\right)ds\right]. \end{aligned}$$

En enremplaçant les valeurs de c_0, c_1, c_2 dans (2.2.8), nous obtenons (2.2.6). Ceci complète la preuve. □

2.3 Solutions : existence, unicité

2.3.1 Existence et unicité

Soit $\mathbb{E} = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme $||.||$ définie par

$$||u|| = \sup\{|u(t)|, t \in [0,1]\}.$$

Par commodité, nous posons

$$\Phi = \left|\frac{\Delta_1(\lambda+1)+\lambda\mu_1\eta^{\rho+1}}{\lambda\Delta_1\Gamma(\rho+2)}\right|, \tag{2.3.1}$$

où $\mu_1 = |\mu|, \Delta_1 = |\Delta|$ et Δ est donné par (2.2.7). D'après le lemme 2.2.3, nous transformons le problème $(2.1.1 - 2.1.2)$ comme suit

$$u = \mathfrak{T}(u), \tag{2.3.2}$$

où $\mathfrak{T} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est défini par

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}u)(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds \\ &+\frac{\sin\lambda t}{\Delta}\left[\mu\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}f(\tau,u(\tau))d\tau\right)ds\right. \\ &\left.-\int_0^1 \sin\lambda(1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right)f(\tau,u(\tau))d\tau)ds\right]. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Remarquons que le problème $(2.1.1 - 2.1.2)$ a des solutions si l'opérateur (2.3.2) a des points fixes.

Théorème 2.3.1 *[21] Soit $f : [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la condition*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq K|u_1 - u_2|, \qquad \forall t \in [0,1], u_1, u_2 \in \mathbb{R},$$

où K est la constante de Lipschitz. Alors le probléme $(2.1.1 - 2.1.2)$ a une solution unique si $|f(t,0)| = \sigma$, $r \geq \frac{\sigma\phi}{(1-K\phi)}$ et $\Phi < \frac{1}{K}$, où Φ est donné par (2.3.1).

Preuve. **Première étape** : Pour $\mathfrak{T}$ défini par (2.3.3), on montre que $\mathfrak{T}\mathbb{B}_r \subset \mathbb{B}_r$, où $\mathbb{B}_r = \{u \in \mathbb{E} : \|u\| \leq r\}$. Pour cela, posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = \sigma$, et choisissons $r \geq \frac{\sigma\Phi}{(1-K\Phi)}$, où Φ est donné par (2.3.1). Pour $u \in \mathbb{B}_r$, on a

$$\begin{aligned}
\|(\mathfrak{T}u)(t)\| &= \sup_{t\in[0,1]} \Bigg| \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right) ds \\
&\quad + \frac{\sin\lambda t}{\Delta}\Bigg[\mu\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right) ds \\
&\quad - \int_0^1 \sin\lambda(1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right) f(\tau,u(\tau))d\tau ds\Bigg]\Bigg| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,0)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds\right) \\
&\quad + \frac{1}{|\Delta|}\Bigg[|\mu|\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,0)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds \\
&\quad + \int_0^1\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(|f(\tau,u(\tau))-f(\tau,0)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds\Bigg] \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^t\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(K|u(\tau)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds\right) \\
&\quad + \frac{1}{|\Delta|}\Bigg[|\mu|\int_0^\eta\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(K|u(\tau)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds \\
&\quad + \int_0^1\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}(K|u(\tau)|+|f(\tau,0)|)d\tau\right)ds\Bigg] \\
&\leq (Kr+\sigma)\left(\frac{1}{\lambda}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t + \frac{|\mu|}{|\Delta|}\int_0^\eta + \int_0^1\right)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} d\tau\right) ds \\
&\leq (Kr+\sigma)\left|\frac{\Delta_1(\lambda+1)+\lambda\mu_1\eta^{\rho+1}}{\lambda\Delta_1\Gamma(\rho+2)}\right| = (Kr+\sigma)\Phi \leq r.
\end{aligned}$$

Deuxième étape : Nous montrons que l'opérateur $\mathfrak{T}$ est contractant, alors soit $u_1, u_2 \in \mathbb{E}$

pour chaque $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \|(\mathfrak{T}u_1)(t) - (\mathfrak{T}u_2)(t)\| \\
= & \sup_{t\in[0,1]} |(\mathfrak{T}u_1)(t) - (\mathfrak{T}u_2)(t)| \\
\leq & \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^t \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} |f(\tau,u_1(\tau)) + f(\tau,u_2(\tau))| d\tau \right) ds \right) \right. \\
& + \frac{1}{|\Delta|} \left[|\mu| \int_0^\eta \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} |f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_2(\tau))| d\tau \right) ds \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} |\mu| |f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_2(\tau))| d\tau \right) ds \right] \right\} \\
\leq & K \|u_1 - u_2\| \left(\frac{1}{\lambda} \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t + \frac{\mu_1}{\Delta_1} \int_0^\eta + \int_0^1 \right) \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} d\tau \right) ds \\
= & \Phi K \|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\Phi < \frac{1}{K}$, alors l'opérateur $\mathfrak{T}$ est contractant. Par conséquent, en utilisant le principe de la contraction de Banach, on acheve la preuve. □

2.3.2 Existence au moins

Nous étudions maintenant l'existence au moins d'une solution pour le problème aux limites $(2.1.1 - 2.1.2)$. On rappele le theoreme :

Théorème 2.3.2 *(Théorème du point fixe de Krasnoselskii [14]). Soit Ω un sous-ensemble fermé convexe et non vide d'un espace de Banach $\mathbb{E}$. Soit $\mathbb{F}_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ deux opérateurs tels que*

1. *$\mathbb{F}_1 z + \mathbb{F}_2 w \in \Omega$, où $z, w \in \Omega$,*
2. *$\mathbb{F}_1$ est compact et continu,*
3. *$\mathbb{F}_2$ est une application de contraction.*
   Alors, il existe $w \in \Omega$ tel que $w = \mathbb{F}_1 w + \mathbb{F}_2 w$.

Notre resultat est le suivant :

Théorème 2.3.3 *[21] Supposer que $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et les hypothèses suivantes sont vérifiées :*
($\mathcal{H}_1$) $|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq K|u_1 - u_2|, \forall t \in [0,1], u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,
($\mathcal{H}_2$) $|f(t,u)| \leq \omega(t)$ pour tout $(t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ avec $\omega \in C[0,1]$.
Alors, $(2.1.1 - 2.1.2)$ a au moins une solution definie sur $[0,1]$ si $\Lambda < \frac{1}{K}$, òu Λ est donné par

$$\Lambda = \frac{\mu_1 \eta^{\rho+1} + \Delta_1}{\Delta_1 \Gamma(\rho+2)}, \tag{2.3.4}$$

et $\mu_1 = |\mu|, \Delta_1 = |\Delta|$.

Preuve. Posons $\sup_{t\in[0,1]}|\omega(t)| \leq ||\omega||$ et considérons $\mathbb{B}_r = \{u \in E : \|u\| \leq r\}$ avec ;

$$r \geq \left|\frac{\Delta_1(\lambda+1)+\lambda\mu_1\eta^{\rho+1}}{\lambda\Delta_1\Gamma(\rho+2)}\right| \|\omega\| .$$

Nous définissons les opérateurs $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_1$ sur $\mathbb{B}_r$ comme suit

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{T}_1 u)(t) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right) ds,\\
(\mathfrak{T}_2 u)(t) &= \frac{\sin\lambda t}{\Delta}\,\mu\int_0^\eta \sin\lambda(\eta-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right) ds\Bigg]\\
&\quad -\int_0^1 \sin\lambda(1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right) f(\tau,u(\tau))d\tau ds\Bigg].
\end{aligned}$$

1). Pour $u_1, u_2 \in \mathbb{B}_r$, et d'après (2.3.2) nous obtenons que

$$\|\mathfrak{T}_1 u_1 + \mathfrak{T}_2 u_2\| \leq \left|\frac{\Delta_1(\lambda+1)+\lambda\mu_1\eta^{\rho+1}}{\lambda\Delta_1\Gamma(\rho+2)}\right| \|\omega\| \leq r.$$

Donc, $\mathfrak{T}_1 u_1 + \mathfrak{T}_2 u_2 \in \mathbb{B}_r$.
La continuité de l'opérateur $\mathfrak{T}_1$ vient de la continuité de la fonction f. Aussi, $\mathfrak{T}_1$ est uniformément borné sur $\mathbb{B}_r$ comme suit :

$$\|\mathfrak{T}_1 u\| \leq \frac{\|\omega\|}{\lambda\Gamma(\rho+2)}.$$

2). Pour prouver la compacité de l'opérateur $\mathfrak{T}_1$, supposons alors que $\mathbb{D} = [0,1]\times\mathbb{B}_r \subset \mathbb{E}$ et définissons $\sup_{(t,u)\in\mathbb{D}}|f(t,u)| = H_r$, avec

$$\delta = \min\left\{\left[\frac{\epsilon\lambda\Gamma(\rho+2)}{H_r(\lambda+\rho+1)}\right]^{\frac{1}{\rho}}, \left[\frac{\epsilon\lambda\Gamma(\rho+2)}{H_r(\lambda+2^{\rho+1})}\right]^{\frac{1}{\rho+1}}\right\}, \forall\epsilon > 0.$$

Ainsi, pour tous $u \in \mathbb{B}_r$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$ et $t_2 - t_1 < \delta$

$$\begin{aligned}
&\|(\mathfrak{T}_1 u)(t_2) - (\mathfrak{T}_1 u)(t_1)\|\\
=\ &\left\|\frac{1}{\lambda}\int_0^{t_2}\sin\lambda(t_2-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right)\right.\\
&\left.-\frac{1}{\lambda}\int_0^{t_1}\sin\lambda(t_1-s)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} f(\tau,u(\tau))d\tau\right)\right\|\\
\leq\ &\frac{H_r}{\lambda}\int_0^{t_1}|\sin\lambda(t_2-s)-\sin\lambda(t_1-s)|\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}d\tau\right)ds\\
&+\frac{H_r}{\lambda}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}d\tau\right)ds\\
=\ &\frac{H_r}{\lambda\Gamma(\rho+1)}\left[\lambda\int_0^{t_1} s^\rho\left|\int_{t_1}^{t_2}\cos\lambda(\xi-s)d\xi\right|ds + \int_{t_1}^{t_2} s^\rho ds\right]\\
\leq\ &\frac{H_r}{\lambda\Gamma(\rho+2)}\left[\lambda(t_2-t_1)t_1^{\rho+1} + t_2^{\rho+1} - t_1^{\rho+1}\right],
\end{aligned}$$

qui est indépendant de u et tend vers zéro lorsque $t_2 \longrightarrow t_1$. Il est évident que $t_2 > \delta$ et il ya deux probabilités pour t_1 et δ.

Cas1 *:* $\delta \leq t_1 \leq t_2$, le théorème de la valeur moyenne implique qu'il existe $t \in (t_1, t_2)$ tel que

$$t_2^{\rho+1} - t_1^{\rho+1} = (\rho+1)(t_2 - t_1)t^{\rho} < (\rho+1)\delta t^{\rho-1}t < (\rho+1)\delta^{\rho}.$$

Nous obtenons, donc

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{T}_1 u)(t_2) - (\mathfrak{T}_1 u)(t_1)\| &\leq \frac{H_r}{\lambda\Gamma(\rho+1)}(\lambda\delta t_1^{\rho-1}t_1^2 + (\rho+1)\delta^{\rho}) \\ &< \frac{H_r(\lambda+\rho+1)}{\lambda\Gamma(\rho+2)}\delta^{\rho} < \epsilon. \end{aligned}$$

Cas2 *:* $0 \leq t_1 < \delta < t_2 < 1$ et donc $t_2 < 2\delta$. Ceux-ci implique que :

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{T}_1 u)t_2 - (\mathfrak{T}_1 u)t_1\| &\leq \frac{H_r}{\lambda\Gamma(\rho+1)}(\lambda\delta^{\rho+2} + (2\delta)^{\rho+1}) \\ &< \frac{H_r(\lambda+2^{\rho+1})}{\lambda\Gamma(\rho+2)}\delta^{\rho+1} < \epsilon. \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathfrak{T}_1$ est relativement compact sur $\mathbb{B}_r$. D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela, l'opérateur $\mathfrak{T}_1$ est compact sur $\mathbb{B}_{r.}$
3). Par utilisation de $\Lambda < \frac{1}{K}$ nous peuvons facilement montrer que $\mathfrak{T}_2$ est une application contractante**.** Alors soit $u_1, u_2 \in \mathbb{E}$ pour chaque $t \in [0,1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|(\mathfrak{T}_2 u_1)(t) - (\mathfrak{T}_2 u_2)(t)\| \\ = & \sup_{t\in[0,1]} |(\mathfrak{T}_2 u_1)(t) - (\mathfrak{T}_2 u_2)(t)| \\ \leq & \sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Delta_1}\left[\mu_1 \int_0^{\eta}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_2(\tau))|d\tau\right)ds\right. \\ & \left. + \int_0^1\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}|f(\tau,u_1(\tau)) - f(\tau,u_2(\tau))|d\tau\right)ds\right] \\ \leq & K\|u_1 - u_2\|\left(\sup_{t\in[0,1]}\frac{\mu_1}{\Delta_1}\int_0^{\eta} + \int_0^1\right)\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}d\tau\right)ds \\ = & \Lambda K \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

où Λ est donné par :

$$\Lambda = \frac{\mu_1\eta^{\rho+1} + \Delta_1}{\Delta_1\Gamma(\rho+2)},$$

et $\mu_1 = |\mu|, \Delta_1 = |\Delta|.$

Puisque $\Lambda < \frac{1}{K}$, alors l'opérateur $\mathfrak{T}_2$ est une contraction. $\square$
Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème 2.3.3 sont satisfaites, en conséquence du théorème du point fixe de Krasnoselskii, nous concluons que le problème aux limites $(2.1.1 - 2.1.2)$ a au moins une solution dans $[0,1]$. La preuve du théorème 2.3.2 est terminée.

2.4 Exemples

Nous présentons deux exemples pour nos principaux résultats.

Exemple 2.4.1 *Considérons le problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} {}^{c}\mathfrak{D}^{\frac{3}{4}}(\mathfrak{D}^2+9)u(t) = K(\cos(t)u(t)-1), \\ 0<t<1, 0<\rho\leq 1, \\ u(0)=0, \quad u''(0)=0, \quad u(1)=2u(\frac{2}{5}). \end{array}\right. . \tag{2.4.1}$$

Ici, $f(t,u(t)) = K(\cos(t)u(t)-1)$, $\lambda = 3, \mu = 3, \eta = \frac{2}{5}$, *et donc nous obtenons :*

$$|f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))| \leq K|u_1-u_2|,$$

et

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 & = & \left|3\left(\sin 3 - 3\sin\dfrac{6}{5}\right)\right| \simeq 0.03147391022, \ 4\Gamma(\dfrac{11}{4}) \simeq 6.433419688 \\ \Phi & = & \left|\dfrac{\Delta_1(\lambda+1)+\lambda\mu_1\eta^{\rho+1}}{\lambda\Delta_1\Gamma(\rho+2)}\right| = \left|\dfrac{4\Delta_1+9(\frac{2}{5})^{(\frac{7}{4})}}{4\Delta_1\Gamma(\frac{11}{4})}\right| = \dfrac{1.93659977962}{0.20248487366} \simeq 9.56417012599. \end{array}$$

Pour $K < \frac{1}{9.56417012599} = 0.10455690214$*, et d'après le théorème 2.3.1 le problème (2.4.1) admet une unique solution.*

Exemple 2.4.2 *Considérons le problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{c} {}^{c}\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{D}^2+16)u(t) = K\left(t^{\frac{1}{2}} + \sin u(t) + \cos^{-1}(t)\right), \\ 0<t<1, 0<\rho\leq 1, \\ u(0)=0, \quad u''(0)=0, \quad u(1)=2u(\frac{1}{2}). \end{array}\right. . \tag{2.4.2}$$

Ici, $f(t,u(t)) = K\left(t^{\frac{1}{2}} - \sin(t) + \tan^{-1}u(t)\right)$,$\lambda = 4$,$\eta = \frac{1}{2}$, *et donc, nous obtenons :*

$$|f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))| \leq K|u_1-u_2|,$$

avec

$$f(t,u(t)) = K\left(t^{\frac{1}{2}} - \sin(t) + \tan^{-1}u(t)\right) \leq \omega(t) \qquad \text{avec } \omega(t) = K(t^{\frac{1}{2}}+2),$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \left|4\left(\sin 4 - 2\sin 2\right)\right| \simeq 0.00017007864, \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \simeq 1.3293403882\\ \Lambda &= \frac{\mu_1\eta^{\rho+1}+\Delta_1}{\Delta_1\Gamma(\rho+2)} = \frac{2(\frac{1}{2})^{(\frac{3}{2})}+\Delta_1}{\Delta_1\Gamma(\frac{5}{2})} \simeq 312.826456298.\end{aligned}$$

Pour $K < \frac{1}{312.826456298} = 0.003196660576$*, et d'après le théorème 2.3.3 le problème (2.4.2) admet au moins une solution.*

Bibliographie

[1] O. Baghani. On fractional Langevin equation involving two fractional orders, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **42,** (2017), 675–681.

[2] R. L. Bagley et P. J. Torvik. A theoritical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity. Journal of Rheology, 27, (1983), 201–210.

[3] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13, (1967), 529–539.

[4] M. Caputo et F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1, (1971), 161–198.

[5] W. T. Coffey, Y. P. Kalmykov, J. T. Waldron. The Langevin Equation : With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering, World Scientific Publishing Co., River Edge, (2004).

[6] S. Das. Functional fractional calculus for system identification and controls. Springer, New York, (2008).

[7] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis ; Springer : New York, NY, USA, (1985).

[8] H. Fazli, J. J. Nieto. Fractional Langevin equation with anti-periodic boundary conditions, Chaos Solitons Fractals, **114,** (2018), 332–337.

[9] Z. Y. Gao, X. L. Yu, J. R. Wang. Nonlocal problems for Langevin-type differential equations with two fractional-orderderivatives, Bound. Value Probl., **2016**,(2016), 1–21.

[10] A. Granas and J. Dugundji. Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, (2003).

[11] J. Hale and S. Verduyn Lunel. Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, (1993).

[12] A. Kadem et D. Baleanu. Analytical method based on walsh function combined with orthogonal polynomial for fractional transport equation. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 15(3), (2010), 491–501.

[13] A. Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo. Theory and Application of Fractional Differential equations. Elsevier, North-Holland, (2006).

[14] M. A. Krasnoselskii, Two remarks on the method of successive approximations, Uspekhi Mat. Nauk (N.S.), **10,** (1955), 123–127. 3.2.

[15] S. J. Linz, J. C. Sprott. Elementary chaotic flow, Phys. Lett. A, **259,** (1999), 240–245.

[16] F. Mainradi, P. Pironi. The fractional Langevin equation : Brownian motion revisited, Extracta Math., **11,** (1996), 140–154.

[17] T. Muensawat, S. K. Ntouyas, J. Tariboon. Systems of generalized Sturm-Liouville and Langevin fractional differentialequations, Adv. Difference Equ., **2017,** (2017), 1-15.

[18] Z. Odibat et S. Momani. The variational iteration method : An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. Comput. Math. Appl., (2009), 2199–2208.

[19] K. B. Oldham et J. Spanier. The fractional calculus. Academic Press, New York, (1974).

[20] I. Podlubny. Fractional Differential Equations. Academic Press, New York, (1999).

[21] A.Salem, F. Alzahrani, L. Almaghamsi. Langevin equation involving one fractional order with three point boundary conditions, J. Nonlinear Sci. Appl., 12, (2019), 791–798.

[22] J. C. Sprott. Some simple chaotic jerk functions, Amer. J. Phys., **65,** (1997), 537–543.

[23] J. C. Sprott, A new class of chaotic circuit, Phys. Lett. A, **266,** (2000), 19–23.

[24] W. Sudsutad, J. Tariboon. Nonlinear fractional integro-differential Langevin equation involving two fractional orders withthree-point multi-term fractional integral boundary conditions, J. Appl. Math. Comput., **43,** (2013), 507–522.

[25] T. Yu, K. Deng, M. Luo. Existence and uniqueness of solutions of initial value problems for nonlinear Langevin equationinvolving two fractional orders, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **19,** (2014), 1661–1668.