MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Analyse Fonctionnelle"

présenté par :

Rania KARDAOUI

Croissance des solutions des équations différentielles non homogènes et application

soutenu publiquement le 22 Juin 2023 devant le jury composé de :

Président :	Amina FERRAOUN	*MCB*	Université de Mostaganem
Examinateur :	Houari FETTOUCH	MCA	Université de Mostaganem
Encadrant :	Rabab BOUABDELLI	*MCB*	Université de Mostaganem

Année Universitaire : 2022/ 2023

MASTER

Abstract.

This thesis essentially consists in studying the growth of solutions of non homogenous differential equations by considering their order and using Nevanlinna theory, we summarize the article of Mehra and Chanyal [16]
In the second part of this thesis, we study the results of Beddani [2] concerning the fractionnal differential equation and the order of growth of their solutions

Key words : Complex analysis, Nevanlinna theory, order, growth order, differential equation, fractionnal equation, Liouville-Caputo derivation.

Résumé.

Cette thèse consiste essentiellement à étudier la croissance des solutions des équations différentielles non homogènes en considérant leur ordre et en utilisant la théorie de Nevanlinna, nous détaillons l'article de Mehra et Chanyal [16].
Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous étudions les résultats de Beddani [2] concernant les équations différentielles fractionnaires et l'ordre de croissance de leurs solutions.

Mots clés : Analyse complexe, théorie de Nevanlinna, ordre, ordre de croissance, équation différentielle, équation fractionnaire, Dérivée de Liouville-Caputo.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé, je Lui doit tout.
Je dédie ce travail à mes parents, mes sœurs et frères et à toute ma famille, aussi qu'à tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.
Deuxièmement, je tiens à remercier mon encadrante Mme : RABAB BOUABDELLI pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de ce travail.
Je tiens à exprimer tout mon profond respect et ma reconnaissance à l'ensemble des membres du jury, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir lu ce travail :
Madame : FERRAOUN Amina.
Monsieur : FETTOUCH Houari.
Aussi je remercie tous mes chers enseignants du département mathématiques de l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostagnam.

Table des matières

INTRODUCTION

L'ordre de croissance est défini pour une fonction analytique, à partir de module du maximum $M(r,f) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$, ce principe affirme que le maximum est atteint sur la frontière du disque ce qui n'est pas vrai dans le cas d'une fonction méromorphe sur un disque $|z| \leq r$. Pour contourner ce problème dans le cas méromorphe, le mathématicien finlandais R. Nevanlinna a établi en 1924 une théorie qui porte son propre nom et qui permet d'étudier la croissance d'une fonction méromorphe en se servant d'une fonction $T(r,f)$ qui s'appelle fonction caractéristique de Nevanlinna.

Notre objectif dans ce mémoire est d'étudier les propriétés des solutions des équations différentielles non homogènes en se basant sur l'ordre de croissance et la théorie de Nevanlinna. Plus précisément, le mémoire est réparti sur trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons la formule de Poisson-Jensen qui relie les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe f. Cette formule joue un rôle important dans la théorie de Nevanlinna. Après, nous donnons les définitions des fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ et leurs propriétés. Ensuite, nous énonçons le premier et deuxième théorème fondamental de Nevannlina. Nous définissons en dernier l'ordre de croissance $\rho(f)$, et l'exposant de convergence $\lambda(f)$.

Dans le deuxième chapitre, nous expliquerons comment la théorie de Nevanlinna peut être utilisée pour étudier les équations différentielles non homogènes, en particulier l'ordre de croissance des solutions de ces équations pour but de comprendre les singularités des solutions et leur comportement asymptotique, nous faisons une synthèse de l'article de Mehra et Chanyal [16].
Dans le dernier chapitre, nous présentons une application de la théorie de Nevanlinna aux équations différentielles fractionnaires, qui sont des équations différentielles impliquant des dérivées fractionnaire d'ordre n. Nous donnons des estimations sur les solutions des équations différentielles fractionnaires qui peuvent être étudiées en utilisant la théorie de Nevanlinna, tels que l'équation de Riemann-Liouville et l'équation de Caputo.

Chapitre 1

Théorie de Nevanlinna

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions essentielles pour notre mémoire de la théorie de Nevanlinna, nous citons les propriétés de la fonction caractéristique, le premier et le second théorème fondamental. Puis, nous définissons les éléments de croissance des fonctions méromorphes, tel que l'ordre, l'exposant de convergence des zéros d'une fonction. En dernier, nous donnons une estimation de $S(r,f)$ et les mesures des ensembles.

1.1 Notions préliminaires

Définition 1.1.1 ***(Fonction méromorphes*** *[4]) Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

En pratique, on peut considérer une fonction méromorphe comme le quotient de deux fonctions entières ou encore une fonction ayant un nombre fini de pôles dans un domaine borné.

Exemple 1 : Les fonctions $\frac{\exp z}{z^3}$, $\frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ et $\tan(z)$ sont des fonctions méromorphe.

Définition 1.1.2 ***(Pôle d'une fonction*** *[4]) Un point singulier isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est un pôle si*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Définition 1.1.3 ***(La multiplicité*** *[4]) Soit*

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},(z_0\in\mathbb{C},\ m\in\mathbb{N}),$$

telle que g est analytique au point z_0 et $g(z_0)\neq 0$, alors z_0 est un pôle de multiplicité m. Un pôle de multiplicité 1 est appelé pôle simple.

Exemple 2 : La fonction

$$f(z)=\frac{z+2}{(z-5)^2(z+7)^3},$$

a un pôle de multiplicité 3 en $z=-7$.

Définition 1.1.4 ***(Zéro d'une fonction*** *[4]) On appelle zéros d'une fonction holomorphe f un nombre complexe a tel que $f(a)=0$.*

Exemple 3 : $\sin^2 z$ a un zéro de multiplicité 2 en $z=0$.

1.2 Formule de jensen

La formule de Jensen, également connue sous le nom de formule de la valeur moyenne de Jensen, est un outil clé de la théorie de Nevanlinna. Elle établit une relation entre les zéros d'une fonction méromorphe et les valeurs qu'elle prend en un point spécifique.

Théorème 1.2.1 *([4], [10]) Soit f est une fonction méromorphe telle que $f(0)\neq 0,\infty$, et $a_1, a_2, ...$des zéros de f et $b_1, b_2...$ des pôles de f chacun compté avec son ordre de multiplicité alors :*

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r\exp i\varphi)|\,d\varphi+\sum_{|b_j|<r}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{|a_j|<r}\log\frac{r}{|a_j|}.$$

Cette formule est appelée "Formule de Jensen (1899)".

Remarque 1.2.1 *Cette formule relie la valeur de f en un point donné avec la distribution des zéros de f à l'intérieur d'un cercle centré en ce point. En d'autres termes, elle permet de calculer la valeur moyenne logarithmique de f sur un cercle en termes des zéros de f à l'intérieur de ce cercle.*

1.3 Fonction caractéristique de R.Nevanlinna

Définition 1.3.1 (Fonction a-points) *([4], [14], [10]) Soit f une fonction méromorphe non constante, pour tout nombre complexe a, on définit la fonction a-point de f par*

Si $a \neq \infty$

$$\begin{aligned} N(r,a,f) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt - n(0,a,f)\log r. \\ \overline{N}(r,a,f) &= \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,a,f)-\overline{n}(0,a,f)}{t}dt - \overline{n}(0,a,f)\log r. \end{aligned}$$

Si $a = \infty$

$$\begin{aligned} N(r,\infty,f) &= N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt - n(0,\infty,f)\log r. \\ \overline{N}(r,\infty,f) &= \overline{N}(r,f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)}{t}dt - \overline{n}(0,\infty,f)\log r. \end{aligned}$$

où $n(t,a,f)$ désigne le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et $\overline{n}(t,a,f)$ désigne le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$.
$n(t,\infty,f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z| \leq t$.
$N(r,a,f)$ (respectivement $\overline{N}(r,a,f)$) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Exemple 4 : Soit la fonction $f(z) = \frac{\exp(-z)}{z}$, on cherche à calculer $N(r,f)$.

On a $z = 0$ est un pôle simple, alors

$$\begin{aligned} N(r,f) &= \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\log(r) \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t}dt + \log r \\ &= \log r. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 (Fonction de proximité) *([4], [14], [10]) Soit f est une fonction méromorphe et a un nombre complexe on définit la fonction de proximité de f au point a par*

Si $\underline{a \neq \infty}$

$$m\left(r,a,f\right) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\left|f\left(r\exp i\theta\right) - a\right|}d\theta,$$

Si $\underline{a = \infty}$

$$m\left(r,\infty,f\right) = m\left(r,f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(r\exp i\theta\right)\right| d\theta.$$

où

$$\log^+ x = \max\left\{\log x,0\right\} = \begin{cases} \log x, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Définition 1.3.3 *([4], [14], [10]) Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par*

$$T\left(r,f\right) = m\left(r,f\right) + N\left(r,f\right).$$

avec $0 < r < \infty$.

Exemple 5 : Soit $f\left(z\right) = \exp\left(az\right)$. On a $N\left(r,f\right) = 0$ car f n'admet pas des pôles dans le disque $\{z :\mid z \mid \leq r\}$. On cherche maintenant la fonction de proximité.

On a

$$\begin{aligned} m\left(r,f\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(r\exp ai\theta\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\exp a\left(\exp i\theta\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\exp ar\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\exp ar\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \exp ar\left(\cos\theta\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|ar\left(\cos\theta\right)\right| d\theta \\ &= \frac{ar}{\pi}, \end{aligned}$$

ainsi, on obtient

$$T\left(r,f\right) = \frac{ar}{\pi}.$$

1.3.1 Propriétés de la fonction caractéstique

Proposition 1.3.1 *([4], [14], [10]) Soient* f_1, f_2, f_3... *des fonctions méromorphes,* a, b, c, *et* d *sont des constantes complexes telles que* $ad - bc \neq 0$ *et* $c \neq 0$, *alors :*

1. $T\left(r, \sum\limits_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right) + \log n.$
2. $T\left(r, \prod\limits_{j=1}^{n}\right) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right).$
3. $T\left(r, f^{(n)}\right) = nT\left(r, f\right).$
4. $T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r, f\right) + O\left(1\right).$

1.4 Premier et deuxième théorème fondamentale de Nevanlinna

1.4.1 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.4.1 *([4], [22]) Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* f *est une fonction méromorphe, soit le développement de laurent de* $f\left(z\right) - a$ *autour de l'origine*

$$f\left(z\right) - a = \sum_{i=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \in \mathbb{C}^*, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\begin{aligned} T\left(r, a, f\right) &= T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\ &= T\left(r, f\right) - \log\left|c_m\right| + \varphi\left(r, a\right). \end{aligned}$$

où

$$\left|\varphi\left(r, \ a\right)\right| \leq \log 2 + \log^+\left|a\right|.$$

Remarque 1.4.1 *Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit : pour tout* $a \in \mathbb{C}$, *on a*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(r, f\right) + O\left(1\right), \ r \to +\infty.$$

1.4.2 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.4.2 *([4], [22]) Soient f une fonction non constante méromorphe telle que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{C}$, des points distincts alors*

$$m(r, f) = \sum_{k=1}^{n} m\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq 2T(r, f) + S(r, f).$$

1.5 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.5.1 *([4], [14], [10]) Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre de f par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

On dit que la fonction f est d'ordre fini si $\rho(f) < \infty$,et on dit que f est d'ordre infini si $\rho(f) = \infty$.

Exemple 6 : Soit $f(z) = \frac{\exp(az^n)}{z}$ $a \in \mathbb{C}$, alors

$$T(r,f) = \frac{|a|\, r^n}{\pi} + \frac{1}{2}\log r,$$

par suite

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} \\ &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{|a|r^n}{\pi} + \frac{1}{2}\log r\right)}{\log r} \\ &= n. \end{aligned}$$

Exemple 7 : Soit $f(z) = \exp z$, alors

$$T(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

et par suite

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 1.$$

Exemple 8 : Pour la fonction $f(z) = \exp(\exp(z))$, on a

$$T(r,f) \backsim \frac{\exp(r)}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, \ r \to \infty$$

alors

$$\rho(f) = +\infty$$

Proposition 1.5.1 *([4]) Soit f et g deux fonctions méromorphes non constantes alors :*

1. $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.
2. $\rho(f \times g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$.
3. *Si $\rho(f) < \rho(g)$ alors $\rho(f+g) = \rho(f \times g) = \rho(g)$.*
4. *Si P est un polynôme de degré n, alors $\rho(\exp(P(z))) = n$.*
5. *Si f est une fonction entière transcendante, alors $\rho(\exp(f(z))) = \infty$.*

Exemple 9 : Soit $f(z) = \frac{5\exp(-z)+3}{2\exp(-z)+7}$. Alors

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T\left(r, \frac{5\exp(-z)+3}{2\exp(-z)+7}\right) \\ &= T(r, \exp -z) + O(1). \end{aligned}$$

Définition 1.5.2 *([4]) Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre inférieur de f par*

$$\mu(f) = \lim_{r\to\infty}\inf \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.5.1 *Une fonction méromorphe f est dite de croissance régulière si $\rho(f) = \mu(f)$.*

1.5.1 L'hyper-ordre

Définition 1.5.3 *([22]) Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

où $M(r,f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 10 : Soit $f(z) = \exp(\exp z^n)$, alors $\rho(f) = \infty$ et $\rho_2(f) = n$.

1.6 Exposant de convergence

1.6.1 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.6.1 *([22]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des zéros (respectivement des zéros distincts) de la fonction f noté $\lambda(f)$ $\left(\text{respectivement } \overline{\lambda}(f)\right)$ est donné par*

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},\\ \overline{\lambda}(f) &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}.\end{aligned}$$

Exemple 11 : $\lambda(\exp z) = \lambda(P) = 0$, où P est un polynôme.

Exemple 12 : Soit $f(z) = \frac{(z-1)^2(z-2)^2}{(z-3)^5}$. On a $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) = 2$, et $\overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) = 0$. Alors $\overline{\lambda}(f) = 0$.

Exemple 13 : Soit $f(z) = \exp(z) - a$. Supposons que $a \neq 0, \infty$, alors

$$\begin{aligned}\exp z &= a \implies z = \log a\\ &= \log|a| + i(Arg(a) + 2k\pi), \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

$$|z| \leq t \iff \sqrt{\log^2|a| + (Arg(a) + 2k\pi)^2} \leq t.$$

Après des simplifications, on trouve

$$-\frac{\sqrt{t^2-\log^2|a|}-Arg\,(a)}{2\pi}\leq k\leq\frac{\sqrt{t^2-\log^2|a|}-Arg\,(a)}{2\pi}.$$

Alors

$$\begin{aligned} n\,(t,a,f) &\backsim 2\frac{\sqrt{t^2-\log^2|a|}}{2\pi} \\ &\backsim \frac{t}{\pi},\ k\rightarrow+\infty, \end{aligned}$$

par suite

$$N\,(t,a,f)=\frac{r}{\pi}+O\,(1)\,,$$

par conséquent $\lambda\,(f)=1=\overline{\lambda}\,(f)\,.$

1.6.2 Exposant de convergence des pôles d'une fonction méromorphe

Définition 1.6.2 *([22]) Soit f une fonction méromorphe. Alors l'exposant de convergence des pôles (respectivement des pôles distincts) de la fonction f noté $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ $\left(\text{respectivement } \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right)$ est donné par :*

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{1}{f}\right) &= \overline{\lim_{r\rightarrow+\infty}}\frac{\log N(r,f)}{\log r}, \\ \bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right) &= \overline{\lim_{r\rightarrow+\infty}}\frac{\log \overline{N}(r,f)}{\log r}. \end{aligned}$$

Remarque 1.6.1 *L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi l'exposant de convergence des pôles.*

Remarque 1.6.2 *Pour toute fonction méromorphe $f\neq0$, on a*

$$\lambda\,(f)\leq\rho\,(f)\,.$$

1.7 Indice de défaut $\delta(a, f)$

En 1929, Nevanlinna a généralisé le théorème de picard et a introduit une quantité notée $\delta(a, f)$ appelée indice de défaut, qui est un corollaire directe du second théorème. L'indice de défaut a pour but de mesurer le degré d'une fonction méromorphe pour lequel cette fonction rate une valeur a.

Définition 1.7.1 *([22]) Soit f est une fonction méromorphe et $a \in \mathbb{C}$, l'indice de défaut est défini par*

$$\begin{aligned}
\delta(a, f) &= 1 - \varliminf_{r \to +\infty} \frac{N(r, \frac{1}{f-a})}{\log r} \\
&= \varliminf_{r \to +\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.7.1 *On a toujours $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$.*

Exemple 14 : Soit la fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \ldots + a_0}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \ldots + b_0}.$$

On a

$$N(r, f) = q \log r,$$

et

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = p \log r.$$

Donc

$$T(r, f) = \max\{p, q\} \log r + O(1).$$

Soit a un nombre complexe. Comme

$$f(z) - a = \frac{(a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} \ldots a_0) - a(b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \ldots + b_0)}{b_q z^q + b_{q-1} z^{q-1} + \ldots + b_0}.$$

On a

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \max\{p, q\} \log r, \ \text{pour } p \neq q,$$

et donc
$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=p\log r,\ \text{pour } p=q,\ a_p\neq ab_q,$$
et par suite
$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=(p-1)\log r,\ \text{pour } p=q,\ a_p=ab_q.$$
Alors, pour les fonctions rationnelles, on obtient les propriétés suivantes :

1. Si $p>q$: ∞ est l'unique valeur de défaut de f .
2. Si $p<q$: 0 est l'unique valeur de défaut de f.
3. Si $p=q$: $\frac{a_p}{b_q}$ est l'unique valeur de défaut de f.

Remarque 1.7.2 *Si $\delta(a,f)>0$, alors a est appelée la valeur de défaut de f. Elle est aussi appelée valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna.*

1.8 Dérivée logarithmique

Définition 1.8.1 *([4]) Soit f une fonction transcendante méromorphe, donc*
$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=S\left(r,f\right),$$
où
$$S\left(r,f\right)=O(\log T(r,f)+\log r).$$

Remarque 1.8.1 *Si f est d'ordre fini, alors*
$$S\left(r,f\right)=O\left(\log r\right).$$

Corollaire 1.8.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante et $k\in\mathbb{N}^*$. Alors*
$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)=O\left(\log r\right).$$

Preuve

Le corollaire est vrai pour $k = 1$. On suppose qu'il est vrai à l'ordre k et on montre qu'il est vrai à l'ordre $k+1$, alors

$$\begin{aligned} m\left(r, f^{(k)}\right) &= m\left(\frac{f^{(k)}}{f} f\right) \\ &\leq m(r, f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &\leq m(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Si f admet un pôle d'ordre λ en $z_{0,}$ alors $f^{(k)}$ admet un pôle d'ordre $\lambda + k \leq (k+1)\lambda$ au point z_0. Donc

$$N\left(r, f^{(k)}\right) \leq (k+1) N(r, f),$$

par suite

$$\begin{aligned} T\left(r, f^{(k)}\right) &= m\left(r, f^{(k)}\right) + N\left(r, f^{(k)}\right) \\ &\leq m(r, f) + S(r, f) + (k+1) N(r, f) \\ &\leq (k+1) T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) &= m\left(r, \frac{f^{(k)'}}{f^{(k)}}\right) \\ &= S(r, f) \\ &= O \log\left(T\left(r, f^{(k)}\right) + \log r\right) \\ &= O\left(\log T(r, f) + \log r\right) \\ &= S(r, f). \end{aligned}$$

1.9 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.9.1 *([14])On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt.$$

Exemple 15 : La mesure linéaire d'un ensemble $E = [1, 2] \cup [4, 6] \subset [0, +\infty[$

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^2 dt + \int_4^6 dt = 3.$$

Définition 1.9.2 *([14])On définit la mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty[$ par*

$$lm(H) = \int_0^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt.$$

Exemple 16 : La mesure logarithmique d'un ensemble $H = [1, e[\subset [1, +\infty[$

$$lm(H) = \int_0^{+\infty} \chi_H(t) \frac{dt}{t} = \int_1^{\exp 1} \frac{dt}{t} = 1.$$

1.10 Les densités supérieures et inférieures

Définition 1.10.1 *([14]) Les densités supérieures et inférieures d'un ensemble $E \subset [0, \infty)$ sont données respectivement par*

$$\overline{dens}E = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{m(E \cap [0, r])}{r}, \ \underline{dens}E = \lim_{r \to +\infty} \inf \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 17 : Pour l'ensemble $E = [e, e^2]$, on a la densité supérieure est

$$\overline{dens}E = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{m([e, e^2] \cap [0, r])}{r} = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{m([e, e^2])}{r} = 0.$$

La densité inférieure est

$$\underline{dens}E = \lim_{r \to +\infty} \inf \frac{m([e, e^2] \cap [0, r])}{r} = \lim_{r \to +\infty} \inf \frac{m([e, e^2])}{r} = 0.$$

1.11 Les densités logarithmiques supérieures et inférieures

Définition 1.11.1 *([14]) Les densités logarithmiques supérieures et inférieures d'un ensemble $F \subset [1, \infty)$ sont données respectivement par*

$$\overline{\log dens} F = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{lm\left(F \cap [1, r]\right)}{\log r}, \ \underline{\log dens} F = \lim_{r \to +\infty} \inf \frac{lm\left(F \cap [1, r]\right)}{\log r}.$$

Exemple 18 : Pour l'ensemble $F = [1, 2] \subset [1, \infty)$, on a la densité logarithmique supérieure est

$$\begin{aligned} \overline{\log dens} F &= \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{lm\left([1, 2] \cap [1, r]\right)}{\log r} \\ \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{lm\left([1, 2]\right)}{\log r} &= 1. \end{aligned}$$

Pour l'ensemble $F = [2, \infty)$, on a

$$\underline{\log dens} F = \lim_{r \to +\infty} \inf \frac{lm\left([2, \infty) \cap [1, r]\right)}{\log r} = 1.$$

Proposition 1.11.1 *Pour tout ensemble $H \subset [1, +\infty)$ nous avons les assertions suivantes*

1. *Si $lm\left(H\right) = \infty,$ alors $m\left(H\right) = \infty$.*
2. *Si $\overline{dens} H > 0,$alors $m\left(H\right) = \infty$.*
3. *Si $\overline{\log dens} H > 0,$ alors $lm\left(H\right) = \infty$.*

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les résultats fondamentaux et les notations strandard de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphe, illustrés par des exemples.

Chapitre 2

Solutions des équations différentielles linéaires non homogènes

2.1 Historique

Ce chapitre sera consacré pour l'étude des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients fonctions entières $a_0(z)$, $a_1(z), ..., a_{n-1}(z)$ du type

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + a_1(z)f' + a_0(z)f = 0, \tag{1}$$

et non homogène associée

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + a_1(z)f' + a_0(z)f = H(z). \tag{2}$$

où $H(z)$ est une fonction entière.
Pour l'équation différentielle du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0,$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, l'étude de l'oscillation était très intéressante. En 1996, Kwon ([13]) a étudié l'hyper-ordre des solutions de l'équation précédente et a obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.1.1 *([13]) Soient A, B des fonctions entières telles que $\rho(A) < \rho(B)$ ou $\rho(B) < \rho(A) < \frac{1}{2}$, alors toute solution de l'équation différentielle précédente vérifie $\rho(f) = \infty$ et $\rho_2(f) < \max\{\rho(A), \rho(B)\}$.*

Plusieurs mathématiciens se sont intéressés à étudier l'ordre de croissance de ce type d'équation différentielles en imposant des conditions sur les coefficients, et de généraliser les résultats pour les équations différentielles d'ordre supérieur à deux. Dans cette direction, et en 1950-1960, H Wittich et ses étudiants se sont lancé dans cette l'étude. Un des résultats importants dû à Wittich concernant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires est le suivant : pour l'équation différentielle (1), si les coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions de l'équation précédente sont des fonctions entières d'ordre de croissance fini. Plusieurs mathématiciens ont étendu le résultat ci-dessus, en supposons que les coefficients a_j sont des fonctions entières ou méromorphes. Pour le cas des équations non homogènes (2), Gao a démontré le résultat suivant.

Théorème 2.1.2 *([20]) Soit $a_0, a_1, ...a_{k-1}$ des polynômes, $H(z)$ fonction entière d'ordre finialors toutes les solutions de l'équation (2) sont d'ordre fini.*

Si a_p est le dernier coefficient qui est une fonction entière transcendante, alors au plus p solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) sont d'ordre fini. Ainsi, si au moins un des coefficients est une fonction entière transcendante, alors toutes les solutions des équations (1) et (2) sont d'ordre infini. Soit ρ l'ordre minimal des solutions de l'équation (1), alors il peut exister au plus une solution d'ordre $< \rho$ de l'équation (2). Ainsi, si toutes les solutions non nulles de (1) sont d'ordre infini, il peut exister une solution d'ordre fini de l'équation (2), nous allons l'illustré par l'exemple suivant.

Exemple 1 : Soit l'équation différentielle suivante

$$f'' + zf' + \exp(z) f = \exp(-z)(1-z) + 1.$$

Cette équation admet une solution $f(z) = \exp(-z)$ qui est d'ordre fini.

Exemple 2 ([16]) : Soit $b(z)$ une fonction entière d'ordre fini admettant des composantes de Fatou à connexion multiple (voir [16]). Alors, l'équation

$$f'' - \exp(z) f' + b(z) f = 0,$$

admet des solutions non triviales d'ordre infini (voir [16]). Or l'équation non homogène associée

$$f'' - \exp(z) f' + b(z) f = \exp(-z)(1 + b(z)) + 1,$$

admet une solution d'ordre fini $f(z) = \exp(-z)$.

2.2 Résultats

Gundersen et .Steinbart [9] ont considéré la condition

$$\max\{\rho(a_1),\ \rho(a_2), ..., \rho(a_{n-1}),\ \rho(H)\} < \rho(a_0) < \frac{1}{2},$$

et ont prouvé que toutes les solutions non nulles de l'équation (2) sont d'ordre infini. Hellerstein Mille, and Rossi [11], ont amélioré la condition

$$\max\{\rho(a_1),\ \rho(a_2), ..., \rho(a_{n-1}),\ \rho(H)\} < \mu(a_j) \leq \frac{1}{2}$$

et ont prouvé les mêmes résultats. Récemment, Kumar et Saini [12], ont considéré le cas

$$\max\{\rho(a_i),\ i \neq j,\ \rho(H)\} < \mu(a_j) \leq \frac{1}{2}$$

et ont prouvé la validité des conclusions.

Théorème A ([12]) *Supposons que les coefficients de l'équation (2) vérifient*

$$max\{\rho(a_0),\ \rho(a_1), ...,\ \rho(a_{j-1}),\ \rho(a_{j+1}), ...,\ \rho(a_{n-1}),\ \rho(H(z))\} < \mu(a_j) < \frac{1}{2},\ j = 1, ..., n-1,$$

alors, toutes les solutions non triviales de l'équation (2) sont d'ordre infini .

En [16], Mehra et Chanyal ont remplacé l'ordre inférieur par l'ordre supérieur et ont montré le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *([16]) Supposons que les coefficients dans l'équation (2) vérifient*

$$\max\left\{\rho\left(a_0\right),\ \rho\left(a_1\right),...\rho\left(a_{j-1}\right),\ \rho\left(a_{j+1}\right),...,\ \rho\left(a_{n-1}\right),\ \rho\left(H\left(z\right)\right)\right\} < \rho\left(a_j\right) < \frac{1}{2},$$

alors, toutes les solutions non nulles de l'équation (2) sont d'ordre infini.

Exemple 3 : Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + A\left(z\right) f' + B\left(z\right) f = H\left(z\right), \tag{3}$$

où $A(z)$, $B(z)$ et $H(z)$ sont des fonctions entières. Soit f une solution non triviale de l'équation (3) satisfaisant

$$\rho(A) < \rho(B) < \rho(f) < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Soit α, β et γ sont des constantes telles que

$$\rho(A) < \alpha < \beta < \rho(B) < \gamma < \rho(f) < \frac{1}{2}.$$

Par définition de l'ordre de croissance, nous avons

$$|A(z)| < \exp\left(|z|^{\alpha}\right). \tag{5}$$

Soit $\mu(B) = \rho(B)$, alors d'après le Lemme 2.3.5 pour $z \in \Gamma$, nous avons

$$|B(z)| > \exp\left(|z|^{\beta}\right). \tag{6}$$

Comme $\rho(f) < \frac{1}{2}$ et en utilisant le Lemme 2.3.3 pour $S \subset [0, \infty)$ ayant une densité supérieure positive, nous obtenons

$$|f(z)| > \exp\left(|z|^{\gamma}\right). \tag{7}$$

En utilisant l'équation (17), (5) et (6), pour $z \in \Gamma$, $|z| \in S \setminus F$ et $z \to \infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{B\left(z\right)}\frac{f''}{f} + \frac{A\left(z\right)}{B\left(z\right)}\frac{f'}{f} + 1\right| &\leq \frac{1}{\left|B\left(z\right)\right|}\left|\frac{f''}{f}\right| + \left|\frac{A\left(z\right)}{B\left(z\right)}\right|\left|\frac{f'}{f}\right| + 1 \\ &\leq \exp\left(-\left|z\right|^{\beta}\right)\left|z\right|^{2} + \exp\left(\left|z\right|^{\alpha} - \left|z\right|^{\beta}\right)\left|z\right| + 1 \\ &\leq o\left(1\right) + 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Des équations (3), (7) et (2.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} |H(z)| &= |f(z)|\,|B(z)| \left| \frac{1}{B(z)} \frac{f''}{f} + \frac{A(z)}{B(z)} \frac{f'}{f} + 1 \right| \\ &> \exp\left(|z|^{\gamma} + |z|^{\beta} \right) (o(1) + 1) \\ &> \exp\left(|z|^{\gamma} (o(1) + 1) \right) (o(1) + 1). \end{aligned}$$

Ainsi, $\rho(H) \geq \gamma$, comme γ est arbitraire et γ est proche de l'ordre de f alors $\rho(H) \geq \rho(f)$. Or d'après l'équation (3) et le fait que $\rho(A) < \rho(B) < \rho(f) < \frac{1}{2}$, on obtient $\rho(H) \leq \rho(f)$. Ainsi $\rho(H) = \rho(f)$. Alors on obtient $\rho(A) < \rho(B) < \rho(H) < \frac{1}{2}$ et f est une solution d'ordre fini de l'équation (3). Cet exemple montre que les conditions du Théorème 2.2.1 sont nécessaires.

Dans le Théorème 2.2.1 , il y a la restriction sur $\rho(H)$ qu'il soit inférieur à $\frac{1}{2}$ et aussi inférieur à $\rho(a_j)$, $i \neq j$. La question se pose donc : est-il nécessaire d'avoir toujours que toute solution non nulle de l'équation (2) d'ordre infini, lorsque

$$\max \left\{ \rho(a_0), \rho(a_1), \ldots \rho(a_{j-1}), \rho(a_{j+1}), \ldots, \rho(a_{n-1}) \right\} < \rho(a_j) < \frac{1}{2} \leq \rho(H)?$$

Nous allons construire un exemple pour répondre à cette question.

Exemple 4 : Soit f une solution non triviale de l'équation (3) telle que

$$\rho(A) < \rho(B) < \frac{1}{2} \leq \rho(f). \tag{9}$$

Soit $\mu(f) = \rho(f)$. Soit α, β et γ sont des constantes telles que

$$\rho(A) < \alpha < \beta < \rho(B) < \frac{1}{2} < \gamma \leq \rho(f).$$

Alors d'après le Lemme 2.3.5, $z \in \Gamma$, nous avons

$$|f(z)| > \exp\left(|z|^{\gamma} \right).$$

Comme $\rho(B) < \frac{1}{2}$, et en utilisant le Lemme 2.3.3, alors pour $S \subset [0, \infty)$ ayant une densité supérieure positive, nous avons

$$|B(z)| > \exp\left(|z|^{\beta} \right). \tag{10}$$

En utilisant la même stratégie comme dans l'exemple 3, alors pour $z \in \Gamma$, $z \to \infty$ et $|z| \in S \backslash F$, nous obtenons

$$|H(z)| > \exp\left(|z|^{\gamma}(1+o(1))\right)(1+o(1)).$$

Ainsi, $\rho(H) \geq \gamma$, car γ est arbitraire et proche de $\rho(f)$, $\rho(H) \geq \rho(f)$. Or d'après les équations (3) et (9) ; nous obtenons

$$\rho(H) \leq \rho(f).$$

Ainsi

$$\rho(H) = \rho(f).$$

Par conséquent, nous avons $\rho(A) < \rho(B) < \frac{1}{2} \leq \rho(H)$ et f est une solution d'ordre fini de l'équation (3).

Ainsi, l'exemple 4 montre que nous pouvons obtenir une solution d'ordre fini lorsque $\rho(H) \geq \frac{1}{2}$.

La question qui se pose maintenant : si $\rho(H)$ n'est pas inférieur à $\frac{1}{2}$ que pouvons nous dire sur l'ordre de la solution ? Dans le théorème suivant, Mehra et Chanyal ont répondu à cette question en considérant l'exposant de la convergence.

Par le théorème de factorisation d'Hadamard, on sait déjà que si $\lambda(H) < \rho(H) = n$, alors $H(z) = h(z)\exp(p(z))$, où $h(z)$ est une fonction entière et $P(z)$ est un polynôme de degré n, où $\rho(h) < n$.

Théorème 2.2.2 *([16]) Supposons que les coefficients de l'équation (2) vérifient*

$$max\{\rho(a_1), ..., \rho(a_{n-1})\} < \rho(a_0) < \frac{1}{2},$$

et

$$\lambda(H(z)) < \rho(H(z)).$$

Alors, toutes les solutions non triviales de l'équation (2) sont d'ordre infini.

La question qui se pose maintenant : Que se passerait-il lorsque

$$max\left\{\rho(a_0),\rho(a_1),...,\rho(a_{j-1}),\rho\left(a_{j+1}\right)...,\rho\left(a_{n-1}\right),\rho\left(H\left(z\right)\right)\right\}<\rho(a_j),\tag{11}$$

et $\rho\left(a_j\right)\geq\frac{1}{2}$? Toutes les solutions non nulles de l'équation (2) sont-elles d'ordre infini ?

Exemple 5 : $f\left(z\right)=\exp\left(-z^2\right)$ est une solution d'ordre fini de l'équation différentielle linéaire

$$f''-\left(\frac{1}{z}-2z\right)f'+z\exp\left(z^2\right)f=z.$$

En comparant cette équation avec l'équation

$$f''+A\left(z\right)f'+B\left(z\right)f=H\left(z\right),$$

on a $\rho(A)=\rho(H)<\rho(B)$ et elle admet une solution d'ordre fini. Ainsi, cet exemple montre que l'équation (2) avec la condition de l'équation (3) peut avoir une solution d'ordre fini.

Mehra et Chanyal ont traité cette situation dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.3 *([16]) Supposons que les coefficients de l'équation (2) vérifient*

$$max\left\{\rho(a_1),\ \rho(a_2),...,\ \rho(a_{n-1}),\ \rho(H)\right\}<\rho(a_0),$$

et

$$\lambda(a_0)<\rho(a_0).$$

Alors, toutes les solutions non triviales de l'équation (2) sont d'ordre infini.

Exemple 6 : Soit f une solution non triviale de l'équation (3)d'ordre fini vérifiant

$$\rho(A)<\rho(B)<\rho(f),\tag{12}$$

telle que $B(z)$ a des singularité de Fabry (voir [16]). Soient α, β et γ des constantes telles que $\rho(A)<\alpha<\beta<\rho(\beta)<\gamma<\rho(f)$. D'après le Lemme 2.3.6, pour $|z|\in H$ tel que $H\subset(1,\infty)$ de densité logarithmique supérieure positive, on a

$$|B(z)|>\exp\left(|z|^{\beta}\right).\tag{13}$$

Soit f une solution qui satisfait $\mu(f) = \rho(f)$. Alors, d'après le Lemme 2.3.5, $z \in \Gamma$ et $z \to \infty$, on a

$$|f(z)| > \exp(|z|^{\gamma}). \tag{14}$$

En utilisant le même raisonnement comme dans l'exemple 3, pour $z \in \Gamma$, $z \to \infty$ et $|z| \in H \backslash F$, on obtient

$$|H(z)| > \exp(|z|^{\gamma}(1 + o(1)))(o(1) + 1).$$

Ainsi , $\rho(H) \geq \gamma$, car γ est arbitraire et proche de $\rho(f)$, $\rho(H) \geq \rho(f)$. Or d'après les équations (3) et (12), on a

$$\rho(H) \leq \rho(f),$$

ainsi

$$\rho(H) = \rho(f).$$

Par conséquent, nous avons $\rho(A) < \rho(B) < \rho(f)$ et f est une solution d'ordre fini de l'équation (3). Cet exemple montre qu'on peut avoir des solutions d'ordre fini si

$$max\{\rho(a_1),\ \rho(a_2), ...,\ \rho(a_{n-1})\} < \rho(a_0) < \rho(H).$$

En 2002, Belaïdi [3] a étudié l'ordre des solutions des équation différentielles linéaires homogènes (1), et a obtenu le théorème suivant.

Théorème B ([3]) *Soit E un ensemble de nombres complexes vérifiant* $\overline{dens}\{|z| \ : \ z \in E\} > 0$ *et soient* $a_0(z), ..., a_{n-1}(z)$ *des fonctions entières telles que* $\max\{\rho(a_i), i = 1,\ ..., n-1\} \leq \rho(a_0) = \rho < +\infty$, *et pour des constantes réelles* α, β : $0 \leq \beta \leq \alpha$, *on a*

$$|a_0| \geq \exp\left(\alpha |z|^{\rho-\epsilon}\right),$$

et

$$|a_i| \leq \exp\left(\beta |z|^{\rho-\epsilon}\right),\ i = 1, ..., n-1,\ \text{quand } z \to \infty,\ z \in E.$$

Alors toute solution $f \neq 0$ de l'équation (1) vérifie

$$\rho(f) = +\infty \text{ et } \rho_2(f) = \rho(a_0).$$

En 2021, Pramanic et Biswas [19], ont amélioré le résultat de Belaidi, pour les équations différentielles du type

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + a_1(z)f' + a_0(z)f = b\left(z\right)f + c\left(z\right),$$

et ont montré le résultat suivant.

Théorème C ([19]) *Soit E un ensemble de nombres complexes vérifiant $\overline{dens}\{|z| : z \in E\}$ et soient $b(z)$, $a_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$ et $c(z)$ des fonctions entières telles que pour des constantes $0 \leq \alpha < \beta$ et $\xi > 0$ nous avons $|b(z)| \geq \exp\left(\beta|z|^{\xi}\right)$ et $|a_i\left(z\right)| \leq \exp\left(\alpha|z|^{\xi}\right), i = 0, 1, ..., n$ et $|c(z)| \leq \exp\left(\alpha|z|^{\xi}\right)$ quand $z \to +\infty$ pour $z \in E$. Alors, toute solution $f \neq 0$ de l'équation*

$$f^{(n)} + a_{n-1}\left(z\right)f^{(n-1)} + ...a_1\left(z\right)f' + a_0\left(z\right)f = b\left(z\right)f + c\left(z\right),$$

est d'ordre infini.

En [16], Naveen Mehra and S. K. Chanyal ont amélioré ces résultats et ont démontré le résultat suivant.

Théorème 2.2.4 *([16]) Soient $a_i; 0 \leq i \leq n-1$ et $H(z)$ une fonction entière telles que pour des constantes $0 \leq \alpha < \beta$ et $\xi > 0$ nous avons*

$$|a_j(z)| \geq \exp\left(\beta|z|^{\xi}\right),$$

et

$$a_i\left(z\right)| \leq \exp\left(\alpha|z|^{\xi}\right), \text{ pour } i \neq j$$

et

$$|H(z)| \leq \exp\left(\alpha|z|^{\zeta}\right),$$

où $z \to \infty$ et $z \in E$, où E est un ensemble de densité supérieure positive. Alors, toutes les solutions non triviales de l'équation (2) sont d'ordre infini.

2.3 Lemmes préliminaires

Pour démontrer les théorèmes et les exemples précedants, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.3.1 *([7]) Soit f une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini et $(k,\, j)$ un couple d'entièrs vérifiant $k > j \geqslant 0$. Soit $\epsilon > 0$ une constante donnée. Alors, les trois cas suivants sont valides.*

1. *Il existe un ensemble $E_1 \subset [0{,}2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que : si $\psi_0 \in [0{,}2\pi) \backslash E_1$, il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 0$ telle que pour tous les z vérifiant $\arg z = \psi_0$ et $|z| \geqslant R_0$ et pour tous $(k,\, j) \in \Gamma$*
$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)}. \tag{15}$$
2. *Il existe un ensemble $E_2 \subset (1{,}\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z avec $|z| \notin E_2 \cup [0{,}1]$ et pour tout $(k,\, j) \in \Gamma$, l'inégalité (15) reste vraie.*
3. *Il existe un ensemble $E_3 \subset [0{,}\infty)$ de mesure linéaire finie, tel que pour tout z avec $|z| \notin E_3$ et pour tout $(k,\, j) \in \Gamma$*
$$\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho+\epsilon)}. \tag{16}$$

Remarque 2.3.1 *([7]) Si $A(z)$ une fonction entière est d'ordre fini qui satisfait $\lambda(A(z)) < \rho(A(z))$, elle peut être écrite sous la forme $A(z) = h(z) \exp p(z)$, où $h(z)$ est une fonction entière, $P(z)$ est un polynôme de degré n et $\rho(h) < \deg(P)$. Soit $P(z)$ $=a_n z^n + ... + a_0$ et $z = r \exp i\theta$ alors la notation φ est donnée par*

$$\varphi(P,\theta) = \mathrm{Re}\left(a_n e^{in\theta}\right).$$

Lemme 2.3.2 *([1])Supposons $g(z) = h(z) \exp z$ est une fonction entière pour $z = r \exp i\theta$ vérifiant $\lambda(g) < \rho(g) = n$, où $P(z)$ est un polynôme de degré n. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $E \subset [0{,}2\pi)$ de mesure linéaire zéro satisfaisant*

1. *Pour $\theta \in [0{,}2\pi) \setminus E$ avec $\delta(P,\theta) > 0$, il existe $R > 1$ tel que*
$$\exp\left((1-\epsilon)\,\varphi(P,\theta)\, r^n\right) \leq |A(r \exp i\theta)| \leq \exp\left((1+\epsilon)\,\varphi(P,\theta)\, r^n\right), \text{ pour } r > R.$$
2. *Pour $\theta \in [0{,}2\pi) \diagdown E$ avec $\delta(P,\theta) < 0$, il existe $R > 1$ tel que*
$$\exp\left((1+\epsilon)\,\varphi(P,\theta)\, r^n\right) \leq |A(r \exp i\theta)| \leq \exp\left((1-\epsilon)\,\varphi(P,\theta)\, r^n\right), \text{ pour } r > R.$$

Le lemme suivant donne une estimation d'une fonction entière ayant un ordre de croissance strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et il est donné par Besicovitch [5].

Lemme 2.3.3 *([5]) Soit f une fonction entière d'ordre fini ρ où $0 < \rho < \frac{1}{2}$ et $\epsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $S \subset [0,2\pi)$ de densité supérieure d'au moins $1 - 2\rho$ telle que $|f(z)| > \exp\left(|z|^{\rho-\epsilon}\right)$ pour tous les z tels que $|z| \in S$.*

Lemme 2.3.4 *([18]) Soit f une fonction entière transcendante, alors il existe un ensemble $F \subset (0,\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout z tels que $|z| = r \in F$ et $|f(z)| = M(r,f)$ nous avons*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq 2r^m,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Preuve

Si f est une fonction entière d'ordre de croissance inférieur positif $\mu(f) > 0$, il existe alors une courbe Γ qui va d'un point fini à ∞ pour laquelle

$$\min\left(\frac{1}{2},\mu(f)\right) \leq \varliminf_{z\to\infty} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}$$

Soit z un point sur le cercle $|z| = r$ tel que $|f(z)| = M(r, f)$ alors, d'après la théorie de Wiman-Valiron ([22]),.il existe un ensemble $F \subset (0, \infty)$ avec une mesure logarithmique finie telle que

$$f^{(m)}(z) = \left(\frac{v(r,f)}{z}\right)^m (1 + o(1)) f(z), \ m \in \mathbb{N},$$

pour tout $r \notin F$. On remarque que $v(r, f) \geq 1$ donc, cette équation implique que

$$\left|\frac{f(z)}{f^m(z)}\right| \leq \frac{|z|^m}{v(r,f)} (1 + o(1)) \leq 2r^m, \ m \in \mathbb{N},$$

pour tout $r \notin F$.

Lemme 2.3.5 *([6]) Si f est une fonction entière verifiant $\mu(f) > 0$, il existe alors une courbe Γ qui va d'un point fini à ∞ pour laquelle*

$$\min\left(\frac{1}{2},\,\mu(f)\right) \leq \underset{\substack{z\to\infty \\ z\in\Gamma}}{\underline{\lim}} \frac{\log\log|f(z)|}{\log|z|}.$$

Lemme 2.3.6 *([15]) Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$ une fonction entière d'ordre fini avec des singuralités de Fabry, et $f(z)$ une fonction entière avec$\rho(f) \in (0,\infty)$. Alors, pour tout $\epsilon \in (0,\rho(f))$, il existe un ensemble $H \subset (1,\infty)$ satisfaisant $\overline{logdense}\,(H) \geq \xi$, où $\xi \in (0,1)$ est une constante telle que pour tout $|z| = r \in H$, on a*

$$\log M(r,h) > r^{\rho(f)-\epsilon},\ \log m(r,g) > (1-\xi)\log M(r,g),$$

où

$$M(r,\ h) = \max\{|g(z)| : |z| = r\},\ m(r,g) = \min\{|g(z)| : |z| = r\}$$

$$M(r,g) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}.$$

2.4 Preuve des théorèmes

2.4.1 Preuve du Théorème 2.2.1

Supposons que f est une solution non nulle de l'équation (2) d'ordre fini.
Alors, d'après le Lemme 2.3.1, il existe un ensemble $F \subset [1,\infty]$ de mesure linéaire finie telle que pour tout $|z| \notin F \cup [0,1]$, on a

$$\left|\frac{f^{(g)}(z)}{f^{(h)}(z)}\right| \leq |z|^{(g-h)\ (\rho-1+\epsilon)},\ h < g. \tag{17}$$

comme f est une fonction entière transcendante, alors il existe un ensemble $G \subset (0,\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in G$ et $|f(z)| = M(r,f)$, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq 2r^m, \tag{18}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit ω et τ des constantes telles que

$$\max\{\rho(a_0),\,\rho(a_1),\,....\rho(a_{j-1}),\rho(a_{j+1}),\,...,\,\rho(a_{n-1}),\,\rho(H(z))\} < \omega < \tau < \rho(a_j).$$

Il existe donc une constante $R > 0$ telle que

$$|a_j(z)| \leq \exp\{|z|^\omega\}, \, i = 0, 1..., \; j-1, j+1, ..., n-1, \tag{19}$$

et

$$|H(z)| \leq \exp\{|z|^\omega\}. \tag{20}$$

En utilisant le Lemme 2.3.3, il existe un ensemble $S \subset [0, \infty)$ de densité supérieure est au moins $1 - 2\rho(a_j)$ telle que $|z| \in S$ satisfaisant

$$|a_j| > \exp\left\{|z|^\delta\right\}. \tag{21}$$

On a

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z) f^{(n-1)}(z) ... + a_j(z) f^{(j)}(z) + ... + a_0(z) f = H(z),$$

d'après les équations (2), (17),(18), (19) et (20), et pour $|z| \in (G \cup S) \diagup F$ et $|f(z)| = M(r,f)$, on obtient

$$\frac{1}{a_j(z)}\frac{f^{(n)}}{f^{(j)}} + \frac{a_{n-1}(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(n-1)}}{f^{(j)}} + ... + \frac{a_{j-1}(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(j-1)}}{f^{(j)}} + 1 + \frac{a_{j+1}(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(j+1)}}{f^{(j)}} ... + \frac{a_0(z)}{a_j(z)}\frac{f}{f^{(j)}} = \frac{H(z)}{a_j(z)}\frac{1}{f^{(j)}},$$

alors

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{a_j(z)}\frac{f^{(n)}}{f^{(j)}} - \frac{a_{n-1}(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(n-1)}}{f^{(j)}} - ... - \frac{a_{j-1}(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(j-1)}}{f^{(j)}} - ... - \frac{a_0(z)}{a_j(z)}\frac{f}{f^{(j)}} + \frac{H(z)}{a_j(z)}\frac{1}{f^{(j)}} \\
&= \sum_{k=1}^{j-1}\frac{a_k(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}} + \sum_{k=j+1}^{n}\frac{a_k(z)}{a_j(z)}\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}} + \frac{H(z)}{a_j(z)}\frac{1}{f^{(j)}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{j-1}\left|\frac{a_k(z)}{a_j(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| + \sum_{k=j+1}^{n}\left|\frac{a_k(z)}{a_j(z)}\right|\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(j)}}\right| + \left|\frac{H(z)}{a_j(z)}\right|\frac{1}{|f^{(j)}|} \\
&\leq 2r^m\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\exp\{|z|^\omega\}}{\exp\{|z|^\delta\}}|z|^{k(\rho-1+\epsilon)} + \sum_{k=j+1}^{n}\frac{\exp\{|z|^\omega\}}{\exp\{|z|^\delta\}}|z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)} + \frac{\exp\{|z|^\omega\}}{\exp\{|z|^\delta\}}\frac{1}{|f^{(j)}|} \\
&\leq 2r^m n\exp\left\{|z|^\omega - |z|^\delta\right\}|z|^{n(\rho-1+\epsilon)} + \exp\left\{|z|^\omega - |z|^\delta\right\}\frac{1}{|f^{(j)}|} \\
&\leq \exp\left\{|z|^\omega - |z|^\delta\right\}\left(2n|z|^{m+n(\rho-1+\epsilon)} + \frac{1}{|f^{(j)}|}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\exp\{|z|^\omega - |z|^\delta\} \to 0$, alors $1 \leq \exp\left\{|z|^\omega - |z|^\delta\right\}\left(2n|z|^{m+n(\rho-1+\epsilon)} + \frac{1}{|f^{(j)}|}\right) \to 0$, qui est une contradiction.

2.4.2 Preuve du Théorème 2.2.2

Supposons que f est solution non nulle d'ordre fini de l'équation (2).

Alors, en utilisant le Lemme 2.3.1, on obtient qu'il existe un ensemble $F \subset [0, \infty]$ de mesure linéaire finie telle que pour tout $|z| \notin F$, nous obtenons (17).

Soit ω et τ des constantes telles que $max\{\rho\left(a_1\right), ..., \rho(a_{n-1})\} < \rho(a_0) < \frac{1}{2}$. Il existe donc $R > 0$ une constante telle que

$$|a_i(z)| \leq \exp|z|^{\omega}, \ i = 1, ..., \ n-1. \tag{22}$$

Étant donné que $H(z)$ est une fonction entière d'ordre fini satisfaisant $\lambda(H) < \rho(H)$, alors on peut réécrire $H(z) = h\left(z\right) \exp P\left(z\right)$, où $h(z)$ est une fonction entière, $P(z)$ est un polynôme de degré m et $\rho(h) < degP$. Ainsi, en utilisant Lemme 2.3.2, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$de mesure linéaire nulle tel que $\varphi(P, \theta) > 0$,

$$|H(z)| \leq \exp\left((1+\epsilon)\varphi(P, \ \theta)r^m\right). \tag{23}$$

En utilisant le Lemme 3.3.3, il existe un ensemble $S \subset [0, \infty)$ de densité supérieure au moins $1 - 2\rho\left(a_0\right)$ tel que pour $|z| \in S$, on a

$$|a_0(z)| > \exp|z|^{\delta}. \tag{24}$$

Des équations (), (17), (22), (23) et (24), et pour $|z| \in S \cap F$, et $\theta \in [0{,}2\pi)\diagdown E$ avec $\varphi(P, \theta) > 0$, on obtient

$$f^{(n)} + a_{n-1}\left(z\right) f^{(n-1)}\left(z\right) ... + a_j\left(z\right) f^{(j)}\left(z\right) + ... + a_0\left(z\right) f = H\left(z\right),$$

alors

$$\frac{1}{a_0\left(z\right)}\frac{f^{(n)}}{f} + \frac{a_{n-1}\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + \frac{a_{j-1}\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\frac{f^{(j-1)}}{f} + ... + 1 = \frac{H\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\frac{1}{f}$$

et par suite

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{a_0\left(z\right)}\frac{f^{(n)}}{f} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\frac{f^{(k)}}{f} + \frac{H\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\frac{1}{f} \\ &\leq \frac{1}{|a_0\left(z\right)|}\left|\frac{f^{(n)}}{f}\right| + \sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{a_k\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\right|\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \left|\frac{H\left(z\right)}{a_0\left(z\right)}\right|\left|\frac{1}{f}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\exp\{|z|^{\omega}\}}{\exp\{|z|^{\tau}\}}|z|^{n(\rho-1+\epsilon)} + \frac{\exp\left(1+\epsilon\right)\varphi(P,\theta)r^m}{\exp\{|z|^{\tau}\}}\left|\frac{1}{f}\right| \\ &\leq \exp\{|z|^{\omega} - |z|^{\tau}\}\, n|z|^{n(\rho-1+\epsilon)} + \exp\{(1+\epsilon)\,\varphi(P,\theta)r^m - |z|^{\tau}\}\frac{1}{|f|} \to 0. \end{aligned}$$

Qui est une contradiction.

2.4.3 Preuve du Théorème 2.2.3

Supposons que f est une solution non nulle de l'équation (2) d'ordre fini.

Alors, d'après le Lemme 2.3.1, il existe un ensemble $F \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie telle que pour tout $|z| \notin F$ satisfaisant (7).

Soit ω toute constante fixe telle que $max\{\rho(a_1), \rho(a_2), ..., \rho(a_{n-1}), H(z)\} < \omega < \rho(a_0)$. Il existe donc une constante $R > 0$ telle que les équations (22) et (20) sont vérifiées.

Étant donné $\lambda(a_0) < \rho(a_0)$, alors on peut écrire $a_0(z) = h(z)\exp(P(z))$ où $P(z)$ est un polynôme de degré k et $h(z)$ est une fonction entière satisfaisant $\rho < m$. En utilisant le Lemme 2.2.3 ; on obtient

$$\exp\{(1+\epsilon)\delta(P,\theta)r^k\} \leq |a_o(z)|. \tag{25}$$

En utilisant les équations (2), (17), (20), (22) et (25), nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{a_0}\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_j}{a_0}\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} + \frac{H(z)}{a_0}\frac{1}{f(z)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{a_j}{a_0}\right|\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{a_0}\right|\frac{1}{|f(z)|} \\ &\leq \exp(|z|^\omega - \varphi(P,\theta)r^m)\left(n|z|^{n(\rho+\epsilon)} + \frac{1}{|f(z)|}\right), \end{aligned}$$

puisque $\exp(|z|^\omega - \varphi(P,\theta)r^m) \to 0$, nous obtenons

$$1 \leq \exp(|z|^\omega - \delta(P,\theta)r^m)\left(n|z|^{n(\rho+\epsilon)} + \frac{1}{|f(z)|}\right) \to 0,$$

qui est une contradiction.

2.4.4 Preuve du Théorème 2.2.4

Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Soit f une solution non triviale de l'équation (2) d'ordre fini. En utilisant Lemme 2.3.1, nous avons (17) pour $z \notin F \cup [0, 1]$, où F est un ensemble de mesure logarithmique finie. En utilisant les équations (2), (17) et le fait que

$$|a_i| \leq \exp(\alpha|z|^\xi),$$

$$|a_j| \geq \exp\left(\beta|z|^{\xi}\right),$$

avec $i \neq j$, $i = 0,..., n-1$ et $|H(z)| \leq \exp\left(\alpha|z|^{\xi}\right)$ pour $0 \leq \alpha < \beta$ et $\xi > 0$ où $z \to \infty$ et $z \in E$, où $\overline{dens}\ \{|z| : z \in E\} > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{1}{a_j}\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(j)}(z)} - \sum_{j=1}^{j-1}\frac{a_k}{a_j}\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} + \frac{H(z)}{a_j}\frac{1}{f^{(j)}(z)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{j-1}\left|\frac{a_k}{a_j}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| + \sum_{k=j+1}^{n}\left|\frac{a_k}{a_j}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{a_j}\right|\frac{1}{|f^{(j)}(z)|} \\
&\leq \frac{f}{f^{(j)}}\sum_{j=1}^{j-1}\left|\frac{a_k}{a_j}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{k=j+1}^{n}\left|\frac{a_k}{a_j}\right|\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| + \left|\frac{H(z)}{a_j}\right|\frac{1}{|f^{(j)}(z)|} \\
&\leq 2r^m\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\exp\left\{\alpha|z|^{\xi}\right\}}{\exp\left\{\beta|z|^{\xi}\right\}}|z|^{k(\rho-1+\epsilon)} + \sum_{k=j+1}^{n}\frac{\exp\left\{\alpha|z|^{\xi}\right\}}{\exp\left\{\beta|z|^{\xi}\right\}}|z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)} + \frac{\exp\left\{\alpha|z|^{\xi}\right\}}{\exp\left\{\beta|z|^{\xi}\right\}}\frac{1}{|f^{(j)}(z)|} \\
&\leq 2r^m n\exp\left(2(\alpha-\beta)|z|^{\xi}\right)|z^{|n(\rho-1+\epsilon)} + \exp(\alpha-\beta)\frac{1}{|f^{(j)}(z)|} \\
&\leq \exp\left((\alpha-\beta)|z|^{\xi}\right)\left(2n|z|^{m+n(\rho-1+\epsilon)} + \frac{1}{|f^{(j)}(z)|}\right).
\end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'ordre de croissance des solutions des équations différentielles non homogènes en imposant certaines conditions sur les coéfficients et le second membre.

Chapitre 3

Application : Les équations différentielles fractionnaires dans un domaine complexe

Dans ce chapitre, nous allons explorer l'une des applications de la théorie de Nevanlinna sur les équations différentielles fractionnaires. Ces équations sont des généralisations des équations différentielles ordinaires, où les dérivées d'ordre entier sont remplacées par des dérivées d'ordre fractionnaire. Ces équations jouent un rôle important dans divers domaines, tels que la physique, l'ingénierie et la finance.

Nous étudions les équations différentielles fractionnaires à coefficients fonctions entières, nous considérons l'équation suivante

$$^{c}D_{z}^{\alpha}f'(z) + A(z)^{c}D_{z}^{\alpha}f(z) + B(z)f(z) = 0. \tag{1}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ soit le dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, et z est le nombre complexe, $A(z)$, $B(z)$ sont des fonctions entières.

Notation : Dans ce qui suit on note

$$^{c}D_{z}^{\alpha}f(z) = f^{(\alpha)}(z).$$

La question qui se pose est : quelles conditions sur $A(z)$, $B(z)$ garantiront que chaque solution $f \neq 0$ a un ordre infini ?

Nous donnons d'abord quelques définitions nécessaires avant de répondre à cette question.

3.1 La fonction gamma

Définition 3.1.1 *([2]) La fonction gamma est définie par*

$$\Gamma : z \to \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, dt.$$

Remarque 3.1.1

1. *Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi plan complexe où la partie réelle est strictement positive telle que*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. *Cette fonction peut être prolongée analytiquement en une fonction méromorphe sur l'ensemble des nombres complexes.*

3.1.1 Propriétés de la fonction gamma

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)\sqrt{\pi}}{4^n n}$.
4. $\Gamma(1) = 1$.
5. $\int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}$.

3.2 Le dérivé et l'intégrale fractionnaire

Définition 3.2.1 *([21]) Le dérivé fractionnaire de l'ordre α est définie, pour une fonction $f(z)$, par*

$$D^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^\alpha} d\xi, \ 0 \leq \alpha < 1,$$

lorsque la fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connecté du plan complexe.

Définition 3.2.2 *([21]) L'intégrale fractionnaire de l'ordre α est définie, pour une fonction $f(z)$, par*

$$I^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-\xi)^{1-\alpha} f(\xi)\, d\xi, 0 < \alpha.$$

3.3 Dérivé fractionnaire Liouville-Caputo

Définition 3.3.1 *([2]) On définit la dérivée fractionnaire Liouville-Caputo d'ordre $n-1 < \alpha \leq n, n \in N^*$, pour une fonction $f(z)$ est définie par*

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^z (z-\xi)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\xi)\, d\xi,\ \ n-1 < \alpha \leq n,$$

lorsque la fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connecté du plan complexe contenant l'origine, et la multiplicité de $(z-\xi)^{n-\alpha-1}$ est supprimé en exigeant que le $\log\,(z-\xi)$ *soit réel lorsque $(z-\xi) > 0$.*

3.4 Résultats

En [2] ; Beddani a étudié l'ordre de croissance de l'équation (1) et a montré les théorèmes suivants.

Théorème 3.4.1 *([2]) Soient $A(z)$, $B(z) \neq 0$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles λ, η, θ_1, θ_2 où $\lambda > 0$, $\eta > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$, nous avons*

$$|A(z)| \geq \exp\{(1+o(1))\,\lambda\,|z|^{\eta\alpha}\},$$

$$|B(z)| \leq \frac{|z|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \exp\{(1+o(1))\,\lambda\,|z|^{\eta\alpha}\},$$

quand $z \to \infty$ dans $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée, et soit $S(\varepsilon)$ le secteur d'angle

$$\theta_1 + \varepsilon \leq \arg z \leq \theta_2 - \varepsilon.$$

Si $f \neq 0$, $\max\limits_{\xi\in[0,z]} |f'(\xi)| = |f'(z)|$ *et* $\max\limits_{\xi\in[0,z]} |f''(\xi)| = |f''(z)|$ *est une solution d'équation* (1)*où* $\rho(f) < \infty$, *alors les cas suivant sont vrais :*

1. *Il existe une constante* $b \neq 0$ *telle que* $f(z) \to b$ *quand* $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$. *En outre,*

$$|f(z) - b| \leq \exp\{(1 + o(1))\lambda |z|^{\eta\alpha}\},$$

quand $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$.

2. *Pour chaque* $K \geq \alpha$, *quand* $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \exp\{-(1 + o(1))\lambda |z|^{\eta\alpha}\}.$$

Théorème 3.4.2 *([2]) Soient* $A(z)$ *et* $B(z) \neq 0$ *des fonctions entières telles que pour les constantes réelles* λ, η, θ_1, θ_2 *où* $\lambda > 0$, $\eta > 0$, *et* $\theta_1 < \theta_2$, *nous avons*

$$|B(z)| \geq \frac{|z|^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \exp\{(1 + o(1))\lambda |z|^{\eta\alpha}\}.$$

et

$$|A(z)| \leq \exp\{o(1)\lambda |z|^{\eta\alpha}\},$$

quand $z \to \infty$ *dans* $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, *si* $\max\limits_{\xi\in[0,z]} |f'(\xi)| = |f'(z)|$ *et* $\max\limits_{\xi\in[0,z]} \left|f''(\xi)\right| = \left|f''(z)\right|$. *Alors, toute solution* $f \neq 0$ *de l'équation* (1) *est d'ordre infini.*

3.5 Lemmes préliminaires

Lemme 3.5.1 *([8]) Soit une fonction entière transcendante d'ordre fini* ρ, *et* $Y = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ *désigne un ensemble fini d'entiers distincts vérifiant* $k_i > j_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$, *et* $\varepsilon > 0$ *une constante. Alors, il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que : si* $\psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E$, *il existe une constante* $R_0 = R_0(\psi_0) > 0$ *telle que pour tout* z *vérifiant arg* $z = \psi_0$ *et* $|z| \geq R_0$, *et pour tout* $(k, j) \in Y$ *on a*

$$\left|\frac{w^{(k)}}{w^{(j)}}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho-1+\epsilon)}.$$

Lemme 3.5.2 *([2]) Soit w une fonction entière, $0 < \alpha \leq 1$, $arg\ z = \theta$. Alors il existe une suite infinie de points $z_n = r_n \exp(i\theta)$ où $r_n \to \infty$, telle que*

$$\left|\frac{w(z_n)}{w^{\alpha}(z_n)}\right| \leq (1 + o(1))\,|z_n|^{\alpha},$$

où $z_n \to \infty$.

Lemme 3.5.3 *([2]) Soit w une fonction analytique sur $arg\ z = \theta$ et $0 < \alpha \leq 1$, et supposons que, pour une certaine constante $k > 1$, on a*

$$\left|\frac{w^{(\alpha)}(z_n)}{w(z_n)}\right| = O\left(|z|^{-k}\right)|z|^{1-\alpha},$$

quand $z \to \infty$ le long de $argz = \theta$. Alors, il existe une constante $c \neq 0$ telle que $w(z) \to c$ quand $z \to \infty$.

3.6 Preuve du théorème 3.3.2

Supposons que $f \neq 0$ et $\sup\limits_{\zeta\in[0,z]} |f''(\zeta)| = |f''(z)|$, est une solution de l'équation (1) d'ordre fini, $\sigma = \sigma(f)$. D'après le Lemme 3.4.1, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, telle que si $\psi_0 \in [0, 2\pi[\diagdown E$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f')^{(\alpha)}(z)}{f(z)}\right| &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\frac{\int_0^z f''(\xi)(z-\xi)^{-\alpha}\,d\xi}{f(z)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\max_{\zeta\in[0,z]}\left|\frac{f''(\zeta)}{f(z)}\right|\left|\int_0^z (z-\xi)^{-\alpha}\,d\xi\right| \\ &\leq \frac{|z|^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| \\ &\leq o(1)\,\frac{|z|^{2\delta+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\end{aligned} \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^{(\alpha)}(z)}{f(z)}\right| &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\frac{\int_0^z f'(\xi)(z-\xi)^{-\alpha}\,d\xi}{f(z)}\right| \qquad (3)\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\max_{\zeta\in[0,z]}\left|\frac{f'(\zeta)}{f(z)}\right|\left|\int_0^z (z-\xi)^{-\alpha}\,d\xi\right|\\
&\leq \frac{|z|^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\\
&\leq o(1)\frac{|z|^{\rho+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

quand $z \to \infty$ et $\arg z = \psi_0$. D'après les équations (1), (3.6.1) et (3.6.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
|B(z)| &\leq \left|\frac{(f')^{(\alpha)}(z)}{f(z)}\right| + |A(z)|\left|\frac{f^{(\alpha)}(z)}{f(z)}\right|\\
&\leq o(1)\frac{|z|^{2\rho+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + |A(z)|\,o(1)\frac{|z|^{\rho+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},
\end{aligned}$$

quand $z \to \infty$, qui est une contradiction.

En conlusion, dans ce chapitre, nous avons abordé une des applications de la théorie de Nevanlinna dans l'étude des équations différentielles fractionnaires. Nous avons souligné que la théorie de Nevanlinna fournit des outils pour analyser le comportement des fonctions méromorphes, ce qui est utile pour étudier les solutions des équations différentielles fractionnaires. Cette application de la théorie de Nevanlinna offre des possibilités d'approfondir notre compréhension des équations différentielles fractionnaires et de leurs propriétés. Pour plus de détails voir [23]

CONCLUSION

Dans notre travail, nous avons utilisé la théorie de Nevanlinna pour étudier quelques propriétés de la solution méromorphe de deux types d'équation différentielle :

$$f^{(n)} + a_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + a_1(z)f' + a_0(z)f = H\left(z\right),$$

qui est une équation différentielle complexe non homogène, et une équation différentielle fractionnaires

$${}^{c}D_z^{\alpha} f'\left(z\right) + A\left(z\right)^{c} D_z^{\alpha} f\left(z\right) + B\left(z\right) f\left(z\right) = 0.$$

Nous avons étudié l'ordre de croissance de ces solutions, nous avons prouvé que cet ordre est infini en imposant certaines conditions sur les coefficients. Ces résultats sont importants car ils nous permettent de montrer la relation entre la solution et le coefficient et d'étudier son comportement.

En résumant, la théorie de Nevanlinna est un outil mathématique important pour comprendre les équations différentielles complexes et leurs solutions, ainsi que pour modéliser et prédire des phénomènes physiques complexes.

Cette théorie continue d'être un sujet actif de recherche en mathématiques aussi. Les chercheurs explorent de nouvelles directions et applications possibles de cette théorie. Certaines perspectives intéressantes comprennent :

1. Analyse des fonctions spéciales : La théorie de Nevanlinna peut être appliquée à l'étude des fonctions spéciales telles que les fonctions elliptiques et les fonctions thêta. Elle permet de mieux comprendre leur comportement asymptotique et leur distribution dans le plan

2. Théorie des nombres : La théorie de Nevanlinna a des liens étroits avec la théorie des nombres, en particulier avec l'étude des fonctions arithmétiques et des propriétés des nombres premiers, et aussi l'analyse p-adique.

Les résultats obtenus dans ce mémoire peuvent aussi nous permettre de réaliser d'autres travaux dans ce domaine et ouvrent des perspectives prometteuses pour l'avenir.

Bibliographie

[1] **Bank, S. Laine, I. Langley, I.**, *On the frequency of zeros of solutions of second order linear differential equation,* Results in Math., 10 (1986), 8–24.

[2] **H. Beddani**, *Orders of Solutions of Fractional Differential Equation in Complex Domain*, Journal of Science and Engineering, CUJSE 19(02) : 070-077 (2022).

[3] **Belaïdi, B.** *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions,* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ, 5 (2002), 1–8.

[4] **B. Belaïdi,** *Fonctions entières et théorie de Nevanlinna,* Editions ALDjazaire, 2017.

[5] **Besicovitch, A. S.** *On integral functions of order < 1,* Mathematische Annalen, 97(1) (1927), 677–695.

[6] **Chang, K.-H.** *Asymptotic values of entire and meromorphic functions*, Scientia sinica, 20.6 (1977), 720–739.

[7] **Gundersen, G. G.**, *Estimates for the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function*, J. London Math. Soc., 37,17 :1 (1988), 88–104

[8] **Gundersen,G. G** *Finite order solutions of second order linear differential equations*,Trans. Amer. Math. Soc., vol. 305,pp. 415-429, 1988.

[9] **Gundersen, G. G. and Steinbart, E. M**. *Finite order solutions of non homogeneous linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), 415–419.

[10] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[11] **Hellerstein, S. Miles, J. and Rossi, J**., *On the growth of solutions of certain linear differential equations,*Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ.Series A I, vol. 17, no. 2 (1992), 343—365,.

[12] **Kumar, D. and Saini, M.** *The growth of solutions of non-homogenous linear differential equations*, Kodai Math. J., 44 (2021), 556–574

[13] **H. Kown ;** *On the growth of entire functions satisfying second order linear differen tial equation*, Bull. Korean. Math. Soc. 3 (1996), 487-496.

[14] **Laine, I.** *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter, 1993.

[15] **Long, J. R.** *Growth of solutions of second order complex linear differential equations with entire coefficients,* Filomat., 32 (2018), 275–284.

[16] **Mehra, N., Pant, G., Chanyal, S. K.** *Growth of solutions of complex differential equations with entire coefficients having a multiply-connected Fatou component*, Indian J Pure Appl Math (2022), https ://doi.org/10.1007/s13226-022-00311-z.

[17] **Naveen Mehra and S. K. Chanyal** ; *Solutions of Non-Homogenous Linear Differential Equations* ; Arxiv ; rXiv :2208.04069, 2022 - arxiv.org.

[18] **Pant, G., Saini, M.** *Infinite order solutions of second order linear differential equations,* (communicated), [arXiv : 2102.11748v1].

[19] **Pramanik, D. C. Biswas M,** *Growth of solutions of non-homogeneous linear differential equations and its applications* Korean Journal of Mathematics 29.1 (2021), 65–73.

[20] **S. Gao,** *On the complex oscillation of solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients,* Comment. Math. Univ. St. Paul., 38 (1989), 11–20.

[21] **H.M. Srivastava and S.Owa**, *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications,* Wiley, New York,1989.

[22] **C. C. Yang and H. X. Yi**, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Kluwer Academic Publishers. 2003.

[23] **I. Podlubny**, *Fractional differential equations*, Academic press, New York, (1999).