République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exacts et Informatique
Département Mathématiques

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en

Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Présenté par :
OULD BRAHIM Maroua

Thème

Sur le théorème de transfert pour les ρ-contractions

Devant le jury composé de :

Mme.	Bendahmane Hafida	Université de Mostaganem	Président
Mr.	Berrabah Bendoukha	Université de Mostaganem	Examinateur
Mme.	Soumia Belmouhoub	Université de Mostaganem	Encadreur

Année Universitaire 2022 – 2023

Remerciements

Je tiens à remercier premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la santé, la volonté et la patience qu'il m'a donné pour faire ce travail.

Je dédie ce modeste travail à ma mère et à mon père pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements, et qui ont tant prié à ma réussite, de soutien moral et aidé à devenir ce que je suis.

Je tiens à remercier mes sœurs et mes amis sans oublier mes chers professeurs pour l'achèvement de mon parcours et madame **Belmouhoub Soumia** pour son soutien.

Mes remerciements les plus sincères vont à madame **Bendahmene Hafida** qui m'a honoré en acceptant d'être présidente du jury. Je tiens à adresser mes remerciements à monsieur **Bendoukha Berrabah** pour l'intérêt qu'il a porté pour mon travail en participant à ce jury en tant qu'examinateur.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de la Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique et ma chère amie pour sa motivation, encouragement, et soutien moral pendant toutes ces années.

Table des matières

Table des notations

$\|\cdot\|$	La norme.
$d(.,.)$	La distance.
$< .,. >$	Le produit scalaire.
H	L'espace de Hilbert complexe.
$B(H)$	L'algèbre de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur H.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{K}$	Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I	L'opérateur identité.
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T.
T^*	L'opérateur adjoint de T.
$\sigma(T)$	Spectre de T.
$\sigma_p(T)$	Spectre ponctuel de T.
$\mathbb{D}$	Le disque unité ouvert $(D = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| < 1\})$.
$\overline{\mathbb{D}}$	Le disque unité fermé $(\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| \leq 1\})$.
$B(0,1)$	La boule unitée.
$\mathbb{T}$	Le tore unidimensionnel $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$.
Pr	La projection.
tr	La trace.
$\dim$	La dimension algébrique.
$\ker$	Le noyau de l'opérateur T i.e. $\ker T = \{x \in H : Tx = 0\}$.
$\bigvee H$	La sous-variété linéaire engendrée par H .
A^t	La matrice transposé de A.
$\det(A)$	Le déterminant de la matrice A.
$C(\mathbb{T})$	L'algèbre des fonctions continues complexes sur le tore.

Introduction

Dans la théorie des opérateurs de l'espace de Hilbert, des résultats définitifs ont été obtenus il y a longtemps pour certaines classes d'opérateurs (par exemple auto-adjoints, unitaires $\cdots$) dans différentes branches des mathématiques et de la physique théorique.
Néanmoins, il y a une direction de recherche inaugurée par SZ. Nagy en 1953 (théorème sur la dilatation unitaire des contractions de l'espace de Hilbert) et développée par plusieurs auteurs tels que C. Foias, M. Scheiber, $\cdots$, qui a permit d'établir plusieurs résultats sur les contractions et les ρ-contractions (opérateurs de classe C_ρ) dans un espace de Hilbert [14] dans le cadre des ρ-dilatations unitaires. L'étude de ces opérateurs a été élargi par différents auteurs et dans plusieurs directions. A. Holbrook introduit dans [13] le ρ-rayon numérique $w_\rho(T)$ pour un opérateur T, en prouvant que c'est un outil de base dans l'étude des classes C_ρ surtout le fait que T appartient à C_ρ si et seulement si $w_\rho(T) \leq 1$, ce qui suggère une bonne analogie entre les classes C_ρ et la classe C_1 des contractions. Plus tard, G. Cassier et T. Fack [4] [5] introduisent dans l'étude des opérateurs T à spectre contenu dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$, un noyau opératoriel $K_z^\rho(T)$ défini pour $\rho > 0$ et tout $z \in \mathbb{D}$. Ce noyau est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ à valeur opérateur auto-adjoint. De plus, $K_z^\rho(T) \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{D}$ si et seulement si T appartient à C_ρ. Ainsi la positivité du noyau $K_z^\rho(T)$ s'avère utile dans le calcul fonctionnel des opérateurs de classe C_ρ, dans les théorèmes de stabilité [5].
Dans ce mémoire, on s'intéresse à la stabilité des classes C_ρ par certaines fonctions analytiques dans le disque unité [6] plus précisément on s'intéresse au théorème de transfert des ρ-contractions qui permet d'affirmer que si T est de classe C_ρ alors $f(T)$ est de classe $C_{\rho'}$ avec f dans le disque algébrique et si $f(T) \in C_{\rho'}$, trouver le meilleur ρ' possible.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres.
Le premier chapitre regroupe les rappels de quelques notions de base sur la théorie des opérateurs.
Le chapitre 2 est l'exposition des différents résultats sur les contractions, ρ-contraction et le noyau de Cassier.
Le troisième chapitre est dédié à établir le théorème de transfert pour les ρ-contractions (théorème 3.1) et à traiter un exemple proposé par G. Cassier pour montrer l'optimalité des résultats obtenus.
On finit le mémoire par une conclusion.

1 Préliminaires

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques définitions et résultats préliminaires utilisés dans ce mémoir. [1], [2], [7], [9], [10], [12], [14] et [16].
Ce chapitre est composé de deux sections :
Dans la première section, nous donnons les définitions, propriétés et quelques exemples des opérateurs dans un espace de Hilbert.
La deuxième section contient quelques propriétés des fonctions analytiques.

1.1 Quelques résultats sur la théorie des opérateurs

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1. (Normes) *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur $\mathbb{E}$, une application $\| \cdot \| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^+$, telle que pour tout $x, y \in \mathbb{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a*

(i) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *(séparation)*

(ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$. *(homogénité)*

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$. *(inégalité triangulaire)*

Un espace vectoriel $\mathbb{E}$ muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(\mathbb{E}, \| \cdot \|)$.

Exemple 1.1. *Dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$, l'application $\| \cdot \| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$, donnée par :*

$$\|x\| = |x|, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{C}$$

où $|x|$ le module de x est une norme sur $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2. *Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, l'application $\|\cdot\|_2$, donnée par :*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) &\mapsto \|\cdot\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2} \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1. *Dans un espace normé $\mathbb{E}$, on a pour tout $x, y \in \mathbb{E}$*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\|.$$

Définition 1.2. *Soit $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite dans un espace vectoriel $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. On dit que $\{x_n\}$, suite d'éléments de $\mathbb{E}$ converge (pour la norme $\|\cdot\|$) si et seulement si $\exists L \in \mathbb{E}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - L\| \leq \epsilon$. L est alors appelée limite de la suite (x_n).*

Définition 1.3. *Soit $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite dans un espace vectoriel $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$. On dit que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, si $\|x_n - x_m\| \to 0$ quand $m \to +\infty$ et $n \to +\infty$.*

Définition 1.4. (Espace complet) *Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on dit que $\mathbb{E}$ est complet, si et seulement si toute suite de Cauchy dans $\mathbb{E}$ converge dans $\mathbb{E}$.*

Définition 1.5. (Espace de Banach) *On appelle espace de Banach $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance associée à sa norme, définie par :*

$$d(x, y) = \| x - y \|,$$

pour tout x et y dans $\mathbb{E}$.

Exemple 1.3. *$\mathbb{R}$ est un espaces de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\|x\| = |x|$$

est la valeur absolue de x .
$\mathbb{C}$ est un espaces de Banach par rapport à la norme $\|\cdot\|$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\|z\| = |z|$$

est le module de z.

1.1.2 Espace de Hilbert

Dans cette partie, nous introduisons un type particulier des espaces de Banach.

Définition 1.6. (Produit scalaire) *Soit* $\mathbb{E}$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Un produit scalaire sur* $\mathbb{E}$ *est une application* $\varphi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ *telle que pour tout* $x, x_1, x_2, y \in \mathbb{E}$ *; et pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$*, on a :*

(i) $\varphi(x,x) \geq 0$ *et* $\varphi(x,x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

(ii) $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

(iii) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_1, y)$.

(iv) $\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y)$.

Notation 1.1. *Pour désigner un produit scalaire, nous utiliserons la notation* $\langle x, y \rangle$.

Exemple 1.4. *Soit* $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$ *où* $a < b$*, l'espace des fonctions* $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ *continues et bornées sur* $\mathbb{K}$*. Alors*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

est un produit scalaire dans $C([a,b], \mathbb{K})$.

Définition 1.7. *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.*

Théorème 1.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Dans un espcae* $\mathbb{E}$ *muni d'un produit scalaire, l'inégalité*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$$

est satisfaite pour tout x *et* y *dans* $\mathbb{E}$

Théorème 1.2. *Dans un espace préhilbertien, l'application* $\|\cdot\| : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$*, donnée par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

pour tout $x \in \mathbb{E}$*, est une norme sur* $\mathbb{E}$*, appelée la norme induite par un produit scalaire.*

Preuve. Nous avons pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\|x\| \geq 0$. Et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et pour tout $x \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\left\langle \lambda\overline{\lambda}\left\langle x, x\right\rangle\right\rangle}\\ &= \sqrt{\langle |\lambda|^2 \left\langle x, x\right\rangle\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle}\\ &= |\lambda|\|x\|.\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $x, y \in \mathbb{E}$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + 2Re\left\langle x, y\right\rangle + \langle y, y\rangle\\ &\leq \langle x, x\rangle + 2|\left\langle x, y\right\rangle| + \langle y, y\rangle\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Définition 1.8. (Espace de Hilbert) *On appelle espace de Hilbert tout espace prihilbertien $(H; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.*

Exemple 1.5. *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel donné par*

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}\\ x, y &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

où $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$, est un espace de Hilbert.

1.1.3 Opérateurs et propriétés

Définition 1.9. (Opérateur linéaire) *Soit H un espace de Hilbert, une application*
$T : H \to H$ est dit opérateur linéaire si T satisfait :

(i) $T(x+y) = Tx + Ty$ $\forall x, y \in H$. *(additive)*

(ii) $T(\alpha x) = \alpha Tx$ $\forall x \in H$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. *(homogène)*

Définition 1.10. (Opérateur borné) *Un opérateur linéaire T sur H est dit borné, s'il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \qquad \textit{pour tout } x \in H. \tag{1.1}$$

Notation 1.2. *On note par $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert H.*

Proposition 1.1. *La plus petite des constantes M vérifiant la relation 1.1 est appelée norme de T notée $\|T\|$ et donnée par :*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

Preuve. De la relation (1.1), les constantes M s'écrit

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \forall x \in H,\ x \neq 0.$$

On peut remarquer que la plus petite des constantes M notée $\|T\|$ s'écrit comme suit :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

On peut s'écrire aussi

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

d'où

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

D'autre part, on a

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$$

De plus, $\forall x \in H$ avec $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$, on obtient :

$$\|T(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

□

Remarque 1.2. *La norme de l'opérateur T, peut être aussi définie par*

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \;\; \forall x \in H\}.$$

Exemple 1.6. *Soit $\mathbb{E} = (L_2[0,1], \mathbb{R})$. Considérons l'opérateur T, tel que*

$$\begin{aligned} T : L_2[0,1] &\to L_2[0,1] \\ f &\longmapsto Tf \end{aligned}$$

avec

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

est un opérateur linéaire.
Pour montrer qu'il est borné, on procède comme suit : Pout tout $f \in L_2([0,1])$,

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \int_0^1 |Tf(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f(s)|ds \right)^2 dt \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(s)| \cdot 1ds \right)^2 dt, \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\int_0^1 |f(s)| \cdot 1ds \leq \left(\int_0^1 |f(s)|ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|.$$

En reportant dans la formule précédente, on obtient,

$$\|Tf\|^2 \leq \int_0^1 \|f\|^2 dt = \|f\|^2 \int_0^1 dt = \|f\|^2.$$

Ceci, nous prouve que T est borné et $\|T\| \leq 1$. En réalité, on peut montrer que la norme de cet opérateur est égale à 1.

Théorème 1.3. *Pour tout opérateur $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est borné.*

(ii) T *est continu sur* H.

(iii) T *est continu en* x_0 *dans* H.

Théorème 1.4. *Soit S et T deux opérateurs linéaires bornés sur H, on a les propriétés suivantes :*

(i) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $\|T+S\| \leq \|S\| + \|T\|$.

(iii) $\|TS\| \leq \|S\|\|T\|$.

Définition 1.11. *(***Puissance d'un opérateur***) Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H, où*

$$T^n x = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{nfois} x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ et } T^0 = I,$$

T^n est dit ***l'opérateur puissance de*** *T.*

Proposition 1.2. *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H, alors la propriété suivante est vérifiée :*

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.5. (Théorème de représentation de Riesz) *Soit T un opérateur sur $B(H)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors il existe un unique vecteur $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$*

$$T(x) = \langle x, y \rangle .$$

De plus $\|T\| = \|y\|$.

1.1.4 Quelques classes d'opérateurs

Dans cette partie, nous allons définir quelques classes d'opérateurs linéaires bornés d'un espace de Hilbert dans lui même.

Définition 1.12. (Opérateur inversible) *Un opérateur $T \in B(H)$ est un opérateur inversible s'il existe un opérateur S tel que*

$$ST = TS = I.$$

On écrit $S = T^{-1}$ et on l'appelle inverse de T.

Définition 1.13. (Opérateur adjoint) *Soit T un opérateur dans $B(H)$, alors il existe un unique opérateur $T^* \in B(H)$ appelé adjoint de T vérifiant la relation suivante :*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle , \quad \forall x, y \in H.$$

T est dit opérateur auto-adjoint si

$$T^* = T.$$

Remarque 1.3. *Pour la matrice carré $A = a_{ij}$, on a*

$$A^* = \overline{A}^t = \overline{a_{ij}}^t.$$

Proposition 1.3. *Soient T et S deux opérateurs définis sur H. Alors T^* et S^* sont aussi definis sur H, et les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$ *pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

(ii) $(ST)^* = T^* S^*$.

(iii) $(T^*)^* = T$.

(iv) $\|T^*\| = \|T\|$.

(v) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, *si T est inversible.*

Preuve . (i) Soient T, S deux opérateurs dans $B(H)$, et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T + \beta S)^* x, y\rangle &= \langle x, (\alpha T + \beta S) y\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle + \overline{\alpha}\langle x, Sy\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T^* x, y\rangle + \overline{\alpha}\langle S^* x, y\rangle .\end{aligned}$$

Donc $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$.

(ii) Soient T, S deux opérateurs dans $B(H)$. Alors on a

$$\langle (TS)^* x, y\rangle = \langle x, TSy\rangle = \langle T^* x, Sy\rangle = \langle S^* T^* x, y\rangle .$$

Donc $(TS)^* = S^* T^*$.

(iii) Soit T un opérateur dans $B(H)$. On a

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle &= \overline{\langle T^*, x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^* x\rangle} = \langle (T^*)^* x, y\rangle .\end{aligned}$$

d'où $(T^*)^* = T$

(iv) D'aprés l'inégalité de Cauchy Schwartz, on a

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Donc l'application $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H. D'aprés le théorème de representation de Riesz, il existe un unique élément de H, notons le $T^* y$, tel que :

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

T^* est linéaire, en effet pour tous $y, z \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a,

$$\langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle ,$$

et

$$\begin{aligned}\langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle &= \langle Tx, \alpha y\rangle + \langle Tx, \beta z\rangle \\ &= \langle x, T^*\alpha y\rangle + \langle x, T^*\beta z\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^* y + \beta T^* z\rangle .\end{aligned}$$

Par identification, on aura

$$\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle = \langle x, \alpha T^* y + \beta T^* z\rangle .$$

De plus, on a si T auto-adjoint

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{|x|\leq 1; |y|\leq 1} |\langle T^*x, y\rangle| \\ &= \sup_{|x|\leq 1; |y|\leq 1} |\langle x, Ty\rangle| \\ &= \sup_{|x|\leq 1; |y|\leq 1} |\langle Ty, x\rangle| \\ &= \|T\|.\end{aligned}$$

(v) Soit T inversible et soit T^{-1} son inverse, alors

$$TT^{-1} = I$$

on passe à l'adjoint on trouve

$$(TT^{-1})^* = I^* = I$$

d'aprés (iii) on a $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I$ alors $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

□

Corollaire 1.1. *Soit T un opérateur dans $B(H)$, on a*

(i) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

(ii) $T^*T = 0$ *si et seulement si* $T = 0$.

Définition 1.14. (Opérateur isométrique) *Un opérateur $T \in B(H)$ est dit isométrique si*

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle , \quad \textit{pour tout } x, y \in H.$$

Cela veux dire que

$$T^*T = I.$$

Remarque 1.4. *T est un opérateur isométrique si et seulement si il est linéaire et $\|T\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.*

Définition 1.15. (Opérateur nilpotent) *Un opérateur $T \in B(H)$ est dit nilpotent d'ordre n si*

$$T^n = 0 \text{ et } T^{n-1} \neq 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.16. (Opérateur unitaire) *On dit qu'un opérateur $T \in B(H)$ est unitaire s'il est une isométrie surjective.*

Théorème 1.6. *$T \in B(H)$ est un opérateur unitaire si et seulement si, il vérifie*

$$T^*T = TT^* = I,$$

c'est à dire $T^* = T^{-1}$.

Preuve. Supposons T unitaire, on a donc $T^*T = I$.
D'autre part, pour tout $y \in H$, il existe $x \in H$ tel que $y = Tx$, et on déduit que

$$TT^*y = T(T^*Tx) = Tx = y,$$

donc $TT^* = I$.
L'opérateur T est donc iversible et son inverse est T^*. La réciproque est immédiate.

□

Définition 1.17. (Opérateur compact) *Soit $T \in B(H)$ est un opérateur compact ou complètement continu si l'image de chaque ensemble borné de H par T est relativement compact.*

Exemple 1.7. *Considérons $\mathbb{E} = (L_2([0,1]), \|\cdot\|_{[0,1]})$,soit g une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. En effet, on vérifie facilement que pour tout $f \in (L_2([0,1]),$*

$$(Tf)(x) = \int_0^1 g(x,y)f(y)dy, \quad g(x,y) = 1_{[0,x]}(y)f(y)dy.$$

Puisque,

$$\int_0^1 \int_0^1 |g(x,y)|^2 dydx = \int_0^1 \int_0^1 |1_{[0,x]}(y)f(y)|^2 dydx \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(y)|^2 dydx = \|f\|^2 < +\infty$$

alors, T est compact.

Définition 1.18. (Projection) *Un opérateur $T \in B(H)$ est une projection orthogonale si : $T = T^*$ et $T \circ T = T$.*

Définition 1.19. (Trace d'une matrice) *Soit A une matrice carrée de taille n, telle que :*

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n};$$

La trace de A, notée $tr(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de cette matrice

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 1.4. *Soit A, B deux matrices carrées et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a :*

(i) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

(ii) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

(iii) $tr(AB) = tr(BA)$.

(iv) $tr(A^t) = tr(A)$ *où A^t désigne la transposée de A.*

Preuve. (i)

$$\begin{aligned} tr(\alpha A) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha tr(A). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} tr(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (a + b)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + b_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (ab)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (ba)_{ji} = tr(BA). \end{aligned}$$

(iv) evidente car la matrice A est une matrie carrée.

□

Définition 1.20. **(Valeur propre)** *On dit qu'un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de T s'il existe un vecteur $x \in H$, $x \neq 0$ tel que :*

$$(T - \lambda I)x = 0.$$

Exemple 1.8. *Soit A une matrice carré, les valeurs propres de la matrice A sont les solutions λ de l'équation suivante :*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Soit T un opérateur compact auto-adjoint. On sait que les valeurs non nulles du spectre sont toutes des valeurs propres de multiplicité algèbrique finie. De plus, elles constituent un ensemble au plus dénombrable. Cela permet d'énoncer la définition suivante.

Définition 1.21. *La trace de T est la somme de toutes les valeurs propres non nulles, l'ordre de répétition de chacune d'elles étant égal à sa multiplicité algèbrique.*

Proposition 1.5. *Si T est de trace finie et S un opérateur linéaire borné dans H, $T' = S^*TS$ est aussi de trace finie.*

Définition 1.22. *Soit H un espace de Hilbert, la suite $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(H)$ converge vers l'opérateur $T \in B(H)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\|_{B(H)} = 0.$$

1.1.5 Spectre d'un opérateur

Définition 1.23. **(Spectre)** *Soit $T \in B(H)$, le spectre de T noté $\sigma(T)$ est défini par :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible } \}.$$

Proposition 1.6. *Si T est auto-adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Théorème 1.7. *Soit $P(t)$ un polynôme à coefficients complexes, Alors on a*

$$P(\sigma(T)) = \sigma(P(T)).$$

Exemple 1.9. *Soit A un opérateur diagonal défini par*

$$A = diag\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right).$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

D'où

$$\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \right\}.$$

1.1.6 Rayon spectal et rayon numérique

Définition 1.24. (Rayon spectral) *Soit T un opérateur dans $B(H)$. Le rayon spectrale de T noté $r(T)$ est défini par*

$$r(T) = sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Exemple 1.10. *Soit $T : L^2[0,2] \to L^2[0,2]$ défini par*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Il est facile de montrer que le rayon spectral de T est nul i.e., $r(T) = 0$, ce qui implique que $\sigma(T) = \{0\}$.

Remarque 1.5. *Si $r(T) = 0$ alors on n'a pas forcément $T = 0$.*

Définition 1.25. (Rayon numérique) *Soit T un opérateur défini sur H. Le rayon numérique de T noté $w(T)$ est défini par :*

$$w(T) = \sup \{ | \langle Tx, x \rangle | : x \in H, \|x\| \leq 1 \}.$$

Théorème 1.8. *$w(.)$ est une norme dans $B(H)$ pour tous les opérateurs linéaires bornés $T : H \to H$, i.e*

(i) $w(T) \geq 0$ *et si* $T = 0$ *alors* $w(T) = 0$.

(ii) $w(\lambda T) = |\lambda| w(T)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $w(T + S) \leq w(T) + w(S)$.

et de plus

(iv) $\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$.

(v) $r(T) \leq w(T)$.

1.2 Propriétés des fonctions analytiques

Définition 1.26. (Fonction analytique) *Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une fonction $f : W \to \mathbb{C}$ est dite analytique dans W si elle est développable en série entière*

$$f(z) = \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n=0}^{\infty} C_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(z_1 - a_1)_1^{\alpha} \cdots (z_n - a_n)_n^{\alpha}.$$

Remarque 1.6. *Au voisinage de chaque point $(a_1, \cdots, a_n) \in W$, on a*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} C_\alpha (z - a)^\alpha,$$

avec $z = (z_1, \cdots, z_n)$ et $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

Exemple 1.11. *Soit $f(z) = z$ est une fonction analytique dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.*

Définition 1.27. (Fonction harmonique) *Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $f : W \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2. f est dite harmonique sur W si*

$$\Delta f = 0$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien, i.e.

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Exemple 1.12. *Les fonctions constantes sont harmoniques sur $\mathbb{C}^n$.*

Définition 1.28. (Disque algébrique) *$A(\mathbb{D})$ est l'algèbre du disque de toutes les fonctions à valeurs complexes qui sont analytiques à l'intérieur du disque unité $\mathbb{D}$ et continues sur sa frontière.*

Définition 1.29. (C* algèbre) *Une C^*-algèbre (complexe) est une algèbre de Banach involutive, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur le corps des complexes, muni d'une involution notée $*$, et d'une structure d'algèbre complexe.*

1.2.1 Principe du maximum et du minimum

Théorème 1.9. (Principe du maximum) *Soit f une fonction analytique non constante dans un domaine $\mathcal{D}$ et continue sur sa frontière $\partial\mathcal{D}$. Supposons que*

$$\forall z \in \partial\mathcal{D} : |f(z)| \leq M.$$

Alors

$$\forall z \in \mathcal{D} : |f(z)| < M.$$

Pour la démonstration du théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1. *si $\varphi(x)$ est une fonction continue telle que $\varphi(x) \leq k$, et*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx \geq k, \tag{1.2}$$

alors $\varphi(x) = k$.

Preuve du lemme. si $\varphi(\zeta) < k$, alors il existe un intervalle $]\zeta-\delta, \zeta+\delta[$ ($\delta > 0$) tel que

$$\forall x \in]\zeta-\delta, \zeta+\delta[: \varphi(x) \leq k - \varepsilon (\varepsilon > 0).$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)dx &= \int_a^{\zeta-\delta} \varphi(x)dx + \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta} \varphi(x)dx + \int_{\zeta+\delta}^{b} \varphi(x)dx \\ &\leq k(\zeta-\delta-a) + (k-\varepsilon)(\zeta+\delta-\zeta+\delta) + k(b-k-\varepsilon) = k(b-a) - 2\varepsilon\delta.\end{aligned}$$

ce qui contredit l'inégalité (1.2), donc $\varphi(x) = k$. □

Preuve du théorème 1.9. Supposons que $|f|$ atteint sa plus grande valeur en un point $z_0 \in \mathcal{D}$. Soint $\partial\mathcal{D}$ la circonférence de centre z_0 et de rayon $r > 0$ incluse dans $\mathcal{D}$:

$$\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r, r > 0\} \subset \mathcal{D}.$$

D'aprés la formule intégrale de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \tag{1.3}$$

Posons $z - z_0 = re^{i\theta}$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\frac{f(z)}{f(z_0)} = \rho e^{i\varphi}$ où ρ, φ dépendent de r et de θ. Alors (1.3) s'écrit

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\varphi}}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho e^{i\varphi}d\theta, \tag{1.4}$$

d'où

$$1 \leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho e^{i\varphi}d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\rho e^{i\varphi}\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho d\theta.$$

comme $\rho = \left|\frac{f(z)}{f(z_0)}\right| \leq 1$ alors $\rho = 1$ pour tout θ. En substituant la valeur de ρ dans (1.4), on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\theta = 1$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\theta = 1.$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\theta = 0.$$

Puisque $\cos\varphi \leq 1$, alors d'aprés le Lemme 1.1, on obtient $\cos\varphi = 1$ et par conséquent $\sin\varphi = 0$. Il s'ensuit que

$$\frac{f(z)}{f(z_0)} = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1$$

sur $\partial\mathcal{D}$ et par suite $f(z) = f(z_0)$ sur $\mathcal{D}$, i.e. $f(z) = c$ où c est une constante. C'est une contradiction.

□

Corollaire 1.2. *Si f est une fonction analytique non constante dans un domaine $\mathcal{D}$, alors $|f|$ ne peut atteindre sa plus grande valeur en un point de $\mathcal{D}$.*

Théorème 1.10. (Principe du minimum) *Soit f est une fonction analytique non constante dans un domaine $\mathcal{D}$ et continue sur sa frontiére $\partial\mathcal{D}$ telle que $f(z) \neq 0$ dans $\mathcal{D}$. Alors $|f|$ atteint sa plus petite valeur sur $\partial\mathcal{D}$.*

Preuve. Voir [1] □

Remarque 1.7. *La condition $f \not\equiv 0$ dans $\mathcal{D}$ est nécessaire, par exemple la fonction $f(z) = z$ est analytique dans $|z| \leq 1$ et $f(0) = 0$. On voit que $|f|$ n'atteint pas sa plus petite valeur sur le cercle $|z| = 1$.*

Exemple 1.13. *Soit la fonction $f(z) = (4 - iz)^2$, elle est analystique dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, d'aprés le principe du maximum $|f(z)|$ atteint sa plus grande valeur sur $\mathbb{T}$,*

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

On a

$$\max_{|z|\leq 1}|f(z)| = \max_{|z|=1}|(4 - iz)^2| \leq \max_{|z|=1}(4 + |z|)^2 = 25$$

et pour $z_0 = i$ où $|z| = 1$, on a

$$|f(z_0)| = |(4 - iz_0)^2| = |(4 - i(i))^2| = 25.$$

Donc

$$\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |(4-iz)^2| = 25$$

D'autre part $f(z) = |(4-iz)^2| \neq 0$ *dans* $\mathbb{D}$, *alors*

$$\min_{|z|=1} |f(z)| = \min_{|z|=1} |(4-iz)^2| \geq \min_{|z|=1} |(4-|z|)^2| = 9$$

et pour $z_1 = -i$ *où* $|z_1| = 1$, *on a*

$$|f(z_1)| = |(4-iz_1)^2| = |(4-i(-i))^2| = 9.$$

Donc

$$\min_{|z|\leq 1} |f(z)| = \min_{|z|=1} |(4-iz)^2| = 9.$$

1.2.2 La fonction adjointe

Définition 1.30. *Soit* $f(z)$ *une fonction analytique dans* $\mathbb{D}$, *on définit sa fonction adjointe par*

$$f^*(z) = f(\overline{z}),$$

qui est aussi analytique dans $\mathbb{D}$, *et la transformation* $f(z) \to f^*(z)$ *est évidement involutive.*

Pour les séries entières correspondantes on a

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n, \qquad f^*(z) = \sum_0^\infty c_n \overline{z_n}.$$

1.2.3 Inégalités de Harnack

Les inégalités de Harnach concernent les fonctions harmonique positives.

Théorème 1.11. (Inégalités de Harnack) *Soit* f *une fonction harmonique positive dans un disque* $D(z_0, R)$, *alors pour tout* $r < R$ *et pour tout* $\theta \in R$, *on a*

$$\frac{R-r}{R+r} f(z_0) \leq f(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} f(z_0).$$

1.2.4 Transformations homographiques

Définition 1.31. *La fonction définie par*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - cb \neq 0$$

où a, b, c, d sont des constantes complexes est appelée transformation homographique.

Remarque 1.8. *La condition $ad - cb \neq 0$ signifie que $w \not\equiv Const.$*

En effet

$$w'(z) = \frac{ad-cb}{(cz+d)^2} = 0 \Leftrightarrow ad - cb = 0.$$

1.2.5 Propriétés de la transformation homographique

-Conformité

Théorème 1.12. *La transformation homographique réalise une représentation conforme et biunivoque de plan $(\overline{\mathbb{C}})$ des z sur le plan élargi $(\overline{\mathbb{C}})$ des w.*

Théorème 1.13. *Si une fonction $w = f(z)$ applique conformément le plan élargi $(\overline{\mathbb{C}})$ des z sur le plan élargi $(\overline{\mathbb{C}})$ des w, alors f est homographique.*

-Propriètés du groupe des transformations homographiques

Théorème 1.14. *L'ensemble des transformations homographiques Λ forme une structure de groupe pour la loi de composition des tranformations.*

(i) Associativité : $\forall L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$, on a

$$L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3.$$

(ii) Élément neutre : L'élément neutre est la transformation

$$E : z \longmapsto z.$$

(iii) Élément symétrique : $\forall L \in \Lambda$, il existe $L^{-1} \in \Lambda$ tel que

$$L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = E.$$

Remarque 1.9. *Le groupe des transformations homographiques n'est pas comutatif.*

-Popriété circulaire

Théorème 1.15. *L'image d'un cercle ou une droite par la transformation homographique est un cercle ou une droite.*

Démonstration. Étudions tout d'abord la transformation linéaire $w = az + b$ $(a \neq 0)$. cette transformation est la composée de trois transformations l'homothétie, la rotation et la translation : $w_1(z) = z + b$, $w_2(z) = e^{i\varphi}z$, $w_3(z) = kz$

$$\begin{aligned} w(z) &= (w_1 \circ w_2 \circ w_3)(z) = (w_1 \circ w_2)(\circ w_3(z)) \\ &= (w_1 \circ w_2)(kz) = w_1(w_2(kz)) \\ &= w_1(ke^{i\varphi}z) = ke^{i\varphi}z + b, \quad a = ke^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Par suite la transformation linéaire transforme un cercle en un cercle et une droite en en droite. Dans le cas où la transformation homographique $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $(c \neq 0)$ n'est pas linéaire, on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} w &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \\ &= A_1 + \frac{B_1}{z + C_1}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $A_1 = \frac{a}{c}$, $B_1 = \frac{bc-ad}{c^2}$, $C_1 = \frac{d}{c}$. Donc la transformation (1.5) est la composée de trois transformations :

$$w_1 = A_1 + B_1 z, \;\; w_2 = \frac{1}{z}, \;\; w_3 = z + C_1, \tag{1.6}$$

d'où

$$\begin{aligned} w(z) &= (w_1 \circ w_2 \circ w_3)(z) = (w_1 \circ w_2)(\circ w_3(z)) \\ &= (w_1 \circ w_2)(z + C_1) = w_1(w_2(z + C_1)) \\ &= w_1\left(\frac{1}{z + C_1}\right) = A_1 + \frac{B_1}{z + C_1}. \end{aligned}$$

La première et la troisième transformation dans (1.6) vérifient la propriété circulaire car elles sont linéaires. Il reste à démontrer que la transformation

$$w = \frac{1}{z}$$

vérifie la propriété circulaire. L'équation d'un cercle ou d'une droite dans le plan xOy s'écrit sous la forme

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0 \tag{1.7}$$

Si $\alpha=0$, alors (1.7) est l'équation d'une droite. Écrivons l'équation (1.7) sous la forme complexe. Puisque $x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$, $x^2+y^2=z\overline{z}=|z|^2$, alors l'équation (1.7), s'écrit

$$\alpha|z|^2+\beta\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)+\gamma\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+\delta=0$$

ou bien

$$\alpha|z|^2+\left(\frac{\beta-i\gamma}{2}\right)z+\left(\frac{\beta+i\gamma}{2}\right)\overline{z}+\delta=0. \tag{1.8}$$

Posons $\lambda=\frac{\beta-i\gamma}{2}$. Alors (1.8) devient

$$\alpha|z|^2+\lambda z+\overline{\lambda}\overline{z}+\delta=0. \tag{1.9}$$

En remplacant $z=\frac{1}{z}$ dans (1.9), on obtient

$$\alpha\frac{1}{|w|^2}+\frac{\lambda}{w}+\frac{\overline{\lambda}}{w}+\delta=0,$$

ou bien

$$\delta|w|^2+\overline{\lambda}w+\lambda\overline{w}+\alpha=0.$$

Donc l'image du cercle (1.9) (droite si $\alpha=0$) par la transformation $w=\frac{1}{z}$ est un cercle (droite si $\delta=0$).

$\square$

Remarque 1.10. *La transformation de Möbius est un exemple de transformations homographiques.*

2 Les ρ-contractions

Dans ce chapitre, nous allons présenter la notion des ρ-contractions ainsi que les différentes propriétés liées à ces opérateurs. On donne la définition et la caractérisation des opérateurs de classe C_ρ au sens de Nagy-Foias [14], ensuite celle au sens de G.Cassier [5], après avoir introduit le noyau $K_{r,t}$ dit noyau de Cassier qui va faciliter le calcul fonctionnel et le théorème de transfert établi au chapitre 3. [5] [6] [13] [14] [15]

2.1 Contraction

2.1.1 Contraction

Définition 2.1. *Par une contraction d'un espace de Hilbert H, nous entendons un opérateur $T \in B(H)$, telle que*

$$\|Tx\| \leq \|x\|, \qquad \forall x \in H, \tag{2.1}$$

c'est-à-dire que $\|T\| \leq 1$.

Remarque 2.1. *Comme $\|T\| = \|T^*\|$, T^* sera alors aussi une contraction dans H.*

Remarque 2.2. *Si T est une contraction dans H, alors T_α est aussi une contraction dans H telle que*

$$T_\alpha = (T - \alpha I)(I - \overline{\alpha} T)^{-1}, \qquad (|\alpha| < 1).$$

Définition 2.2. (Dilatation) *Soient T et S deux opérateurs linéaires bornés respectivement dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. On dit que S est une dilatation de T lorsque*

$$T^n = Pr\, S^n, \quad \text{pour } n = 1, 2 \cdots .$$

Théorème 2.1. [14] *Soit H un espce de Hilbert, toute contraction T dans H admet une dilatation isométrique V dans $\mathcal{H}_+$ contenant H comme un sous-espace, et qui est de plus minimale dans le sens que*

$$\mathcal{H}_+ = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} V^n H.$$

Cette dilatation isométrique minimale est déterminée à isomorphisme près, donc on peut l'appeler la dilatation isométrique minimale de T. L'espace H est invariant pour V^*, et on a

$$T^* = V^*|H.$$

Preuve. Voir [14] □

Théorème 2.2. *Soit H un espace de Hilbert, toute contraction T dans H admet une dilatation unitaire U dans $\mathcal{H}$ contenant H comme un sous-espace, et qui est de plus minimale dans le sens que*

$$\mathcal{H} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n H.$$

Cette dilatation unitaire minimale est déterminée à isomorphie prés, donc on peut l'appeler la dilatation unitaire minimale de T.

Preuve . Voir [14].

□

2.1.2 Inégalité de von Neumann

Proposition 2.1. (Inégalité de von Neumann) *Pour tout contractions T dans $\mathcal{H}$ et pour tout polynôme $p(\lambda)$ on a*

$$\|p(T)\| \leq \max_{|\lambda|\leq 1} |p(\lambda)|. \tag{2.2}$$

2.2 ρ-Contraction

On donne tout d'abord la définition des ρ-contractions donnée par Sz-Nagy et C. Foias.

2.2.1 ρ-contractions au sens de Nagy-Foias

Définition 2.3. **(ρ-Contraction)** *Soit H un espace de Hilbert ρ une une constante positive fixée, T un opérateur dans $B(H)$ appartient à la classe $C_\rho(H)$ si et seulement s'il existe un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ contenant H et un opérateur unitaire $U \in B(\mathcal{H})$ tel que*

$$T^n = \rho \cdot Pr\, U^n | H, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{2.3}$$

U sera alors appelée une $\rho-$dilatation unitaire de T. Pour $T \in C_\rho$ on a évidemment

$$\|T^n\| \leq \rho, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Les résultats suivants donne une caractérisation des classes C_ρ.

Théorème 2.3. *Soit H un espace de Hilbert, $T \in B(H)$. Pour que T appartienne à la classe C_ρ où $0 < \rho < \infty$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) $\|x\|^2 - 2\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) Re\,\langle zTx, x\rangle + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) \|zTx\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in H,\ |z| \leq 1.$

(ii) Le spectre de T est contenu dans le disque unité fermé.

Remarque 2.3. *Pour $\rho \leq 2$, (ii) est une conséquence de (i).*

Preuve. Pour la preuve de théorème, voir [14]. □

Théorème 2.4. *Soit H un espace de Hilbert, $T \in B(H)$. Pour que T appartienne à la classe C_ρ où $0 < \rho < \infty$, il faut et il suffit que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} T_\rho(n) \geq 0$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 \leq r < 1$, est absolument convergente, i.e.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \|T_\rho(n)\| < \infty$$

Remarque 2.4.

- *La classe C_1 coïncide avec la classe de toutes les contractions dans H.*
- *Pour que T appartient à la classe C_2, il faut et il suffit que $w(T)$ soit inferieur où égale à 1.*

Soit $T \in C_\rho(H)$ et $U \in B(H)$ est la $\rho-$dilatation unitaire minimale de T. Notamment (2.3) entraïne pour tout polynôme $p(z)$ à coefficients complexes

$$p(z) = \rho \cdot Pr\; p(U) + (1-\rho)p(0_H). \tag{2.4}$$

Comme U est unitaire, il s'ensuit la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Soit $T \in C_\rho$, pour tout polynôme $p(z)$ de la variable $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\|p(T)\| \leq \max_{|z|\leq 1} |\rho \cdot p(z) + (1-\rho) \cdot p(0)|.$$

on peut compléter cette proposition par la suivante :

Proposition 2.3. *Soit $q(z)$ un polynôme tel que $q(0) = 0$ et $|q(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$. Pour tout $T \in C_\rho$ on a alors $q(T) \in C_\rho$ où $0 < \rho < \infty$.*

Preuve. Soit U une $\rho-$dilatation unitaire de T. En appliquant (2.4) à $p(z) = q(z)^n$ où $n = 1, 2, \cdots$. On obtient

$$q(T)^n = \rho \cdot Pr\; q(U)^n, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{2.5}$$

Puisque $|q(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$ et d'aprés l'inégalité de von Neumann, $q(U)$ est une contraction.
Par conséquence il existe un opérateur unitaire V tel que

$$q(U)^n = Pr\; V^n, \quad n = 0, 1, \cdots , \tag{2.6}$$

(2.5) et (2.6) entraînent que

$$q(T)^n = \rho \cdot Pr\; V^n, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

ce qui prouve que $q(T) \in C_\rho$ ·

□

Dans le cas $\rho = 2$ ce résultat peut être formulé, en vertu de la proposition 2.4, aussi dans la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Lorsque $w(T) \leq 1$, on a aussi $w(q(T)) \leq 1$ pour tout polynôme $q(z)$ tel que $q(0) = 0$ et $|q(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$. En particulier, $w(T) \leq 1$ entraîne $w(T^n) \leq 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$.*

Définition 2.4. *Pour toutE fonction $f \in C(\mathbb{T})$ on peut définir l'opérateur $f(T)$ par :*

$$f(T) = \rho \cdot Prf(U) + (1-\rho)\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{dt}{2\pi}.$$

Nous définissons également la fonction φ_T à valeur de $B(H)$ sur $C(\mathbb{T})$, en fixant pour $f \in C(\mathbb{T})$

$$\varphi_T(f) = Pr \circ f(U) = \frac{1}{\rho}f(T) + \left(1+\frac{1}{\rho}\right)\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{dt}{2\pi}.$$

2.2.2 le noyau des ρ-contractions

Ce noyau a été défini par Gilles Cassier.

Définition 2.5. (Noyau de Cassier) *Soit A une C^*-algèbre, et $T \in A$ un élément de A dont le qpectre de T est contenu dans $\overline{\mathbb{D}}$. Pour tout $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on définit le noyau de Cassier par*

$$K_{r,t}(T) = (I - re^{-it}T)^{-1} + (I - re^{it}T^*)^{-1} - I.$$

Notons que $I - re^{-it}T$ et $I - re^{it}T^*$ sont des éléments inversibles dans A, car $\sigma(rT)$ est contenu dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Le noyau de Cassier $K_{r,t}$ satisfait certaines propriétés pour tout T d'une C^*-algèbre A tel que $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$, à savoir : − $K_{r,t}(T)$ vérifie la propriétée de normalisation

$$\int_0^{2\pi} K_{r,t}(T)\frac{dt}{2\pi} = I.$$

− Pour toute fonction f dans $A(\mathbb{D})$, on a

$$f(rT) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})K_{r,t}(T)\frac{dt}{2\pi}. \tag{2.7}$$

− Pour tout fonction f dans $A(\mathbb{D})$ et $0 \leq r < 1$, on a le noyau $K_{r,t}(T)$ est symétrique, i.e

$$K_{r,t}(T^*) = K_{r,-t}(T), \quad \forall t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

− Si $X = (I - re^{-it}T)^{-1}$, alors

$$K_{r,t}(T) = X^*(I - r^2T^*T)X = X(I - r^2TT^*)X^*.$$

− Le noyau $K_{r,t}(T)$ est positif si et seulement si rT est une contraction, et on a pour tout $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, les inégalités suivantes

$$\frac{1-r}{1+r}I \leq K_{r,t}(T) \leq \frac{1+r}{1-r}I.$$

2.2.3 Opérateur de classe C_ρ au sens de Cassier

Définition 2.6. *Un opérateur T dans $B(H)$ est dit de classe C_ρ (où $\rho > 0$) si son spectre est contenu dans $\overline{\mathbb{D}}$, et si pour tout $z \in \mathbb{D}$:*

$$K_z(T) \geq (1-\rho)I, \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{D}.$$

Proposition 2.5. *si $T \in C_\rho(H)$, alors $T^n \in C_\rho(H)$, pour tout $n \geq 1$.*

2.2.4 Noyau perturbé

Le noyau de Cassier noté $K_{r,t}(T)$ peut être perturbé pour étudier les opérateurs de classe C_ρ. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, tel que $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on pose

$$K_{r,t}(T) = K_z(T).$$

Définition 2.7. *Pour tout $T \in C_\rho$, nous appellons le noyau associé à l'opérateur T le noyau $\boldsymbol{K}_z^\rho(T)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ défini par :*

$$\boldsymbol{K}_z^\rho(T) = K_z(T) + (\rho-1)I = (I-\overline{z}T)^{-1} + (I-zT^*)^{-1} + (\rho-2).$$

Puisque le ρ-noyau peut être exprimé comme

$$\mathbf{K}_z^\rho(T) = (I-zT^*)^{-1}[\rho I + 2(1-\rho)Re(\overline{z}T) + (\rho-2)|z|^2T^*T] \times (I-\overline{z}T)^{-1}, \tag{2.8}$$

alors on voit que T est une ρ-contraction si et seulement si

(i) $\mathbf{K}_z^\rho(T) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(ii) $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

2.2.5 Les propriétés principales de $K_z^\rho(T)$

Proposition 2.6. *Soit $T \in B(H)$. Supposons que $T \in C_\rho$ où $(\rho \geq 1)$ et dénotons par $\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T)$ le ρ-noyau.*

(i) $\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T)$ est une fonction continue au point t satisfaisant

- *$\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T)$ est positif, $\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T) \geq 0$.*
- *$\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T)$ est symétrique, pour tout $0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i.e.*

$$\boldsymbol{K}_{r,t}^\rho(T^*) = \boldsymbol{K}_{r,-t}^\rho(T).$$

– $\boldsymbol{K}^{\rho}_{r,t}(T)$ *vérifie la propriété de normalisation*

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{K}^{\rho}_{r,t}(T)\frac{dt}{2\pi} = \rho I. \tag{2.9}$$

.

(ii) pour tout $0 \leq r < 1$ *et tout* $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*, on a*

$$\frac{\rho(1-r)}{1+r} I \leq \boldsymbol{K}^{\rho}_{r,t}(T) \leq \frac{\rho(1+r)}{1-r} I.$$

(iii) Pour toute fonction $f \in A(\mathbb{D})$*, on a*

$$f(rT) = (1-\rho)f(0)I + \int_0^{2\pi} f(e^{it})\boldsymbol{K}^{\rho}_{r,t}(T)\frac{dt}{2\pi}, \quad \forall 0 \leq r < 1.$$

Preuve. (i) Soit $\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) = (I - re^{-it}T)^{-1} + (I - re^{it}T^*)^{-1} + (\rho - 2)$ c'est une fonction continue en t, alors

– $\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T)$ est positif car les termes $(I - re^{-it}T)^{-1}$, $(I - re^{it}T^*)^{-1}$ et $(\rho - 2)$ sont pofitifs.

– $\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T)$ est symétrique car

$$\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T^*) = (I - re^{-it}T^*)^{-1} + (I - re^{it}T)^{-1} + (\rho - 2) = \mathbf{K}^{\rho}_{r,-t}(T).$$

– Propriété de normalisation

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T)\frac{dt}{2\pi} = \rho I$$

est la formule de la moyenne.

(ii) Considérons la fonction $h(z) = \langle \mathbf{K}^{\rho}_{z}(T)x, x\rangle$, h est une fonction harmonique et positive dans le disque unité ouvert, pour tout $x \in H$ et $0 \leq r < 1$. D'après les inégalités de Harnack [6]

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}\|x\|^2 \leq h(z) \leq \frac{r+|z|}{r-|z|}\|x\|^2,$$

Soit $0 \leq |z| < r < 1$, si on prend $r \to 1^-$, on a

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\|x\|^2 \leq h(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\|x\|^2, \tag{2.10}$$

Maintenant si on pose $z = re^{it}$ alors (2.10) devient

$$\frac{1-r}{1+r}\|x\|^2 \leq h(z) \leq \frac{1+r}{1-r}\|x\|^2,$$

ce qui donne

$$\frac{1-r}{1+r} I \leq \mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) \leq \frac{1+r}{1-r} I,$$

(iii) Soit $f \in A(\mathbb{D})$. D'aprés la proporiété 2.7 on a

$$f(rT) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) K_{r,t}(T) \frac{dt}{2\pi}, \tag{2.11}$$

et on sait que

$$\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) = K_{r,t}(T) + (\rho - 1)I$$

alors (2.11) devient :

$$f(rT) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \left(\mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) + (1-\rho)I \right) \frac{dt}{2\pi} \tag{2.12}$$

d'où

$$f(rT) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) \frac{dt}{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(e^{it})(1-\rho) I \frac{dt}{2\pi},$$

et d'après la formule de Cauchy, on trouve

$$f(rT) = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathbf{K}^{\rho}_{r,t}(T) \frac{dt}{2\pi} + (1-\rho) f(0) I.$$

□

2.2.6 ρ-rayon numérique

Définition 2.8. *Le ρ-rayon numérique d'un opérateur T noté $w_\rho(T)$, est donné par la formule*

$$w_\rho(T) = \inf \left\{ \gamma : \gamma > 0, \frac{1}{\gamma} T \in C_\rho(H) \right\},$$

tel que $w_\rho(T)$ est une fonction non croissante, finie, continue au point ρ.

Remarque 2.5. *Pour $\rho = 1$ le ρ-rayon numérique de T égale à la norme de T, et pour $\rho = 2$ se réduit au rayon numérique de T, et $\lim\limits_{\rho \to \infty} w_\rho(T) = r(T)$.*

Proposition 2.7. *Le ρ-rayon numérique $w_\rho(T)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $w_\rho(T) < \infty$.

(ii) $w_\rho(T) > 0$ *sauf si* $T = 0$, *en fait* $w_\rho(T) \geq \frac{1}{\rho} \|T\|$.

(iii) $w_\rho(\lambda T) = |\lambda| w_\rho(T)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(iv) $w_\rho(T) \leq 1 \Leftrightarrow T \in C_\rho$.

Remarque 2.6. *Pour la preuve de* (iii) *et* (iv)*, on a besoin du résultat suivant :*
Si $T \in B(H)$ *un opérateur* T *de classe* C_ρ *alors* λT *est aussi de classe* C_ρ *pour* $z = e^{i\theta}$ *tel que* $|z| \leq 1$*. Alors d'après la définition 2.3, on a*

$$(zT)^n = \rho \, Pr(zU)^n$$

où U *un opérateur unitaire, mais si* $|z| = 1$ *alors* $\|zU\| \leq 1$*, d'où* $zU \in C_1$*.*

Preuve. Pour prouver (i)., il suffit de montrer que pour tout $u \geq 0$ on a $uT \in C_\rho$.
Or si $z = re^{it}$ avec $0 \leq r < 1$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} (uT)_\rho(n) = I - \frac{2}{\rho} Re \sum_{n=1}^{\infty} (zuT)^n \geq \left(1 - \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (u\|T\|)^n\right) I \geq 0$$

à condition que $u\|T\|$ soit suffisamment petit. D'après le théorème 2.4, on trouve $uT \in C_\rho \; \forall u$.
(ii). Une fois qu'on observe que si $0 < u < \frac{1}{\rho}$, on a $\|\frac{1}{u}T\| > \rho$, tel qu'on ne peut pas avoir

$$\frac{1}{u} T = \rho Pr \, U$$

(iii). D'après le théorème 2.4, et la remarque 2.6 on a

$$\begin{aligned}
|z| w_\rho(T) &= r \left\{ \inf \left\{ \frac{1}{u} T \in C_\rho, u : u > 0 \right\} \right\} \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{ru} rT \in C_\rho ru : u > 0 \right\} \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{ru} re^{i\theta} T \in C_\rho ru : u > 0 \right\} \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{u} zT \in C_\rho u : u > 0 \right\} \\
&= w_\rho(zT).
\end{aligned}$$

(iv).
$(\Leftarrow)$ est immédiate d'après la définition.
$(\Rightarrow)$ supposons que $w_\rho \neq 0$ et supposons $u_n > 0$ tel que $\frac{1}{u_n} T \in C_\rho$. En utilisant le théorème 2.3, on a $\lim \left(\frac{1}{U_n}\right) T \in C_\rho$, i.e. $\frac{T}{w_\rho(T)} \in C_\rho$, et si $w_\rho(T) \leq 1$, on conclut que $T = w_\rho(T) \left(\frac{T}{w_\rho(T)}\right) \in C_\rho$. Enfin, si $w_\rho(T) = 0$, alors d'aprés (ii), on trouve $T = 0$.

□

Définition 2.9. *Soit T un opérateur non nul appartenant à une certaine classe C_∞, on définit $\rho(T)$ comme :*

$$\rho(T) = \inf\left\{\rho : \rho \in \mathbb{R}_+^*, \text{ et } T \in C_\rho(H)\right\},$$

le nombre $\rho(T)$ est le plus petit $\rho > 0$ tel que $T \in C_\rho$.

2.3 Calcul fonctionnel

Définition 2.10. *Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{D}$ et continue sur sa frontière, telle que $f \not\equiv 0$. Alors f est définie par :*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty. \tag{2.13}$$

Si T est une contraction de H, nous faisons correspondre à la fonction (2.13) l'opérateur

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k, \tag{2.14}$$

cette série à termes opérateurs étant convergente en norme.
Pour T fixé on obtient de cette façon une application

$$f(z) \to f(T)$$

de $A(\mathbb{D})$ dans $B(H)$. Cette application est un homomorphisme d'algèbre, de plus on a

$$f(T)^* = f(T^*).$$

Dans le cas particulier où la contraction T est normale, ayant la décomposition spectrale

$$T^n = \int_{\sigma(T)} z^n dK_z \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{2.15}$$

où dK_z est la mesure spectrale de T, la définition (2.14) de $f(T)$ est équivalente à la définition usuelle

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(z) dK_z, \tag{2.16}$$

conséquence de ce que la série (2.13) converge uniformément dans $\overline{\mathbb{D}}$ et que $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.
La relation

$$T^n = Pr\, U^n, \quad (n \geq 0)$$

entraîne

$$f(T) = Pr\, f(U) \quad (f \in A(\mathbb{D}))$$

d'où l'on obtient l'inégalité de von Neumann

$$\|f(T)\| \leq \sup |f(z)| \quad (z \in \mathbb{D})$$

Cela étant, observons que pour toute fonction $\phi(z)$ holomorphe dans $\mathbb{D}$, les fonctions $\phi_r(z) = \phi(rz)$ pour $0 < r < 1$ est dans $A(\mathbb{D})$.

3 Théorème de transfert pour les ρ-contractions

Il est bien connu que l'ensemble de toutes les contraintes $C_1(H)$ est invariant par la transformation de Möbius [9]. Cette propriété de stabilité de $C_1(H)$ est très utile dans l'étude des contractions (voir par exemple [5]). Par contre, les autres classes $C_\rho(H)$ avec $\rho \neq 1$, ne sont pas nécessairement stables par la transformation de Möbius. D'une façon générale, on se pose les deux questions suivantes :

- Si f est une fonction analytique de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et continue sur sa frontière, et si $T \in C_\rho$, que peut-on dire à propos de f(T) ?
- Si $f(T)$ appartient à une certaine classe $C_{\rho'}(H)$, peut-on déterminer le meilleur ρ' possible ?

On va répondre à ces questions dans ce chapitre par le théorème de transfert (théorème 3.1) et ensuite, en étudiant un exemple proposé par G. Cassier afin de démontrer l'optimalité des résultats obtenus.

3.1 Théorème de transfert

Théorème 3.1. *Soit $T \in C_\infty(H)$ et $f \in A(\mathbb{D})$ tels que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Alors, on a $f(T) \in C_\infty(H)$. Plus précisément, on a*

$$\rho(f(T)) \leq \begin{cases} 1 + (\rho(T) - 1)\frac{1-|f(0)|}{1+|f(0)|}, & si \;\; \rho(f(T)) \leq 1; \\ 1 + (\rho(T) - 1)\frac{1+|f(0)|}{1-|f(0)|}, & si \;\; \rho(f(T)) \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

De plus, ces inégalitées sont les meilleures possibles.

Preuve. Premièrement, remarquons que sous les hypothèses du théorème 3.1 on a $\sigma(f(T)) \subseteq \overline{D}$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $0 \leq r < 1$ et $\alpha \in \mathbb{D}$, la fonction $F(z)=(1-\overline{\alpha}f(z))^{-1}$ est dans $A(\mathbb{D})$.

1/ On montre dans ce qui suit que $f(T)$ appartient à C_∞. Supposons que $T\in C_\rho(H)$. Alors en vertu du calcul fonctionnel de la section 2.3 de chapitre 2, on a

$$(1-\overline{\alpha}f(rT))^{-1}=\frac{(1-\rho)}{1-\overline{\alpha}f(0)}I+\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha}f(e^{it})}K^\rho_{r,t}dm(t), \tag{3.2}$$

où $K^\rho_{r,t}=(I-\overline{z}T)^{-1}+(I-zT^*)^{-1}+(\rho-2)$, $dm(t)=\frac{dt}{2\pi}$.
D'où, pour tout $\gamma>0$ on a

$$K^\gamma_\alpha(f(rT))=(1-\overline{\alpha}f(rT))^{-1}+(1-\alpha f(rT)^*)^{-1}+(\gamma-2)I,$$

d'aprés 3.2, on trouve

$$\begin{aligned}K^\gamma_\alpha(f(rT))=\frac{(1-\rho)}{1-\overline{\alpha}f(0)}I+\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\overline{\alpha}f(e^{it})}K^\rho_{r,t}(T)dm(t)+\frac{(1-\rho)}{1-\alpha\overline{f(0)}}I\\+\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\alpha\overline{f(e^{it})}}K^\rho_{r,t}(T)dm(t)+(\gamma-2)I\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}K^\gamma_\alpha(f(rT))=&\underbrace{\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-\overline{\alpha}f(e^{it})}+\frac{1}{1-\alpha\overline{f(e^{it})}}\right)K^\rho_{r,t}(T)dm(t)}_{A}\\&+\underbrace{\frac{(1-\rho)}{1-\overline{\alpha}f(0)}I+\frac{(1-\rho)}{1-\alpha\overline{f(0)}}I+(\gamma-2)}_{B}\end{aligned}$$

Premièrement, calculons A
On a

$$A=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-\overline{\alpha}f(e^{it})}+\frac{1}{1-\alpha\overline{f(e^{it})}}\right)K^\rho_{r,t}(T)dm(t).$$

En ajoutant et en soustrayant le terme $|\alpha|^2|f(e^{it})|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1-|\alpha|^2|f(e^{it})|^2}{|1-\alpha\overline{f(e^{it})}|^2}\right)K^\rho_{r,t}(T)dm(t)\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1-|\alpha|^2|f(e^{it})|^2}{|1-\alpha\overline{f(e^{it})}|^2}K^\rho_{r,t}(T)dm(t)+\int_0^{2\pi}K^\rho_{r,t}(T)dm(t).\end{aligned}$$

et d'après la propriété de normalisation (2.9) , on trouve :

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1-|\alpha|^2|f(e^{it})|^2}{|1-\alpha\overline{f(e^{it})}|^2} K^{\rho}_{r,t}(T)dm(t) + \rho.$$

Maintenant, on calcule B,

$$B = \frac{(1-\rho)}{1-\overline{\alpha}f(0)}I + \frac{(1-\rho)}{1-\alpha\overline{f(0)}}I + (\gamma-2)I.$$

d'aprés un calcul simple, on trouve :

$$\begin{aligned} B = & \frac{-\rho[2-\alpha\overline{f(0)}+\overline{\alpha}f(0)]}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} + \frac{\overline{\alpha}f(0)+\alpha\overline{f(0)}-|\alpha|^2|f(0)|^2-1}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} \\ & + \frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} + \frac{\gamma|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} B = & \frac{(\gamma-1)|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} + \frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} - \frac{\rho(1-|\alpha|^2|f(0)|^2)}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} \\ & - \frac{\rho|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}, \end{aligned}$$

enfin

$$B = (\gamma-1) + (1-\rho)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2} - \rho.$$

D'où, en sommant A et B on trouve :

(3.3)

$$K^{\gamma}_{\alpha}(f(rT)) = \int_0^{2\pi} \frac{1-|\alpha|^2|f(e^{it})|^2}{|1-\alpha\overline{f(e^{it})}|^2} K^{\rho}_{r,t}(f(rT)) + [(\gamma-1)+(1-\rho)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}]I.$$

Puisque $T \in C_\rho(H)$ et $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{D}$, on remarque que le premier terme de droite de (3.3) est positif.
Il reste donc vérifier la positivité du second terme, pour cela on envisage deux cas :

1^{er} ***cas***. Supposons que $\rho \geq 1$.
Alors la positivité pour tout α dans $\mathbb{D}$ du second terme de coté droite de

(3.3) est équivalente à la condition suivante :

$$(\gamma-1)+(1-\rho)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}\geq 0$$

Ceci implique

$$\gamma\geq 1+(\rho-1)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}$$

d'où

$$\gamma\geq\sup_{\alpha\in\mathbb{D}}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}\right\}$$

Posons $\alpha=re^{i\theta}$ où $\theta=arg f(0)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ et $0\leq r<1$, alors d'après la $2^{éme}$ inégalité triangulaire,

$$|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|\geq|1-r|f(0)||$$

ainsi

$$|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2\geq|1-r|f(0)||^2$$

En utilisant le fait que $1-r^2|f(0)|^2$ et $(\rho-1)$ sont positifs, on obtient

$$1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2}\leq 1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-r|f(0)||^2}$$

alors

$$\sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2}\right\}\leq\sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-r|f(0)||^2}\right\}.$$

Or

$$\sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-r|f(0)||^2}\right\}=\sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1+r|f(0)|}{1-r|f(0)|}\right\}$$

En effet, on pose $F(r)=1+(\rho-1)\frac{1+r|f(0)|}{1-r|f(0)|}$, alors

$$F'(r)=(\rho-1)\frac{2|f(0)|}{(1+r|f(0)|)^2}$$

comme $F'(r)$ est positive alors F est croissante, ainsi le sup est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r (i.e. $r \to 1$), alors

$$\sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-r|f(0)||^2}\right\}=1+(\rho-1)\frac{1+|f(0)|}{1-|f(0)|}.$$

Or

$$\gamma \geq \sup_{0\leq r<1}\left\{1+(\rho-1)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2}\right\}$$

donc

$$\gamma \geq 1+(\rho-1)\frac{1+|f(0)|}{1-|f(0)|}=\rho'.$$

$2^{\text{ème}}$ ***cas***. Supposons que $\rho<1$ et $\gamma<1$, la positivité pour tout α dans $\mathbb{D}$ du second terme de droite de (3.3) est équivalente la condition suivante :

$$(\gamma-1)+(1-\rho)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}\geq 0$$

ceci implique

$$(1-\gamma)\leq(1-\rho)\frac{1-|\alpha|^2|f(0)|^2}{|1-\alpha\overline{f(0)}|^2}.$$

Posons $\alpha=re^{i\theta}$ où $\theta=argf(0)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ et $0\leq r<1$, alors d'après l'inégalité triangulaire,

$$|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|\leq 1+r|\overline{f(0)}|$$

et en utilisant le fait que $1-r^2|f(0)|^2$ et $(1-\rho)$ sont positifs, on trouve

$$(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2}\geq(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{(1+r|\overline{f(0)}|)^2}$$

d'où

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{|1-re^{i\theta}\overline{f(0)}|^2}\right\}\geq\inf_{0\leq r<1}\left\{(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{(1+r|\overline{f(0)}|)^2}\right\}$$

Or, on a

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{(1+r|\overline{f(0)}|)^2}\right\}=(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}$$

En effet, posons : $F(r)=(1-\rho)\frac{1-r|f(0)|}{1+r|\overline{f(0)}|}$, alors

$$F'(r)=(1-\rho)\frac{-2|f(0)|}{(1-r|f(0)|)^2}$$

comme $F'(r)$ est négative alors F est décroissante,
ainsi, le inf est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r, $r\to 1$, alors

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{(1-\rho)\frac{1-r^2|f(0)|^2}{(1+r|\overline{f(0)}|)^2}\right\}=(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}$$

Or

$$(1-\gamma)\leq(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}.$$

D'autre part, dans ce cas, on a

$$\gamma\geq 1+(\rho-1)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}$$

et comme $\gamma<1$, alors

$$1+(\rho-1)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}<1 \tag{3.4}$$

et

$$0<1-\gamma<(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}$$

d'où

$$0<(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}. \tag{3.5}$$

Finalement de (3.4) et (3.5), on obtient :

$$0<(1-\rho)\frac{1-|f(0)|}{1+|\overline{f(0)}|}<1,$$

et $\rho' = 1 + (\rho - 1)(1 - |f(0)|)(1 + |f(0)|)^{-1}$ convient.
Par conséquent, on obtient dans les deux cas $f(T) \in C_{\rho'}(H)$, et donc $f(T) \in C_\infty$ et aussi $\rho(f(T)) \leq \gamma$.
En prenant $\rho = \rho(T)$, on obtient les inégalités (3.1).

2/ Maintenant, on montre que les inégalités (3.1) sont les meilleures possibles. Pour cela, nous considérons encore deux cas :

(a) Le cas $\rho(T) < 1$.
Soit $\rho \in]0, 1[$, et l'opérateur $T = \rho_0 I$, où $\rho_0 = \rho[2 - \rho]^{-1}$. Alors, on vérifie facilement que $\rho(T) = \rho$. on note par f_α la transformation de Möbius f définie par :

$$f_\alpha(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \alpha z} \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

où $\alpha \in$]0,1[.
On calcule le $\gamma-$noyau associé à $f_\alpha(T)$ qui est défini par :

$$K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) = (I - \overline{\beta} f_\alpha(rT))^{-1} + (I - \beta f_\alpha(rT)^*)^{-1} + (\gamma - 2)I \tag{3.6}$$

D'où

$$K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) = \frac{I}{I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)} + \frac{I}{I - \beta f_\alpha(rT)^*} + (\gamma - 2)I$$

On rajoute et on retranche le terme $|\beta|^2 |f_\alpha(rT)|^2$, on trouve donc

$$K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) = \frac{I - \beta f_\alpha(rT)^* + I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)}{|I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + \frac{|\beta|^2|f_\alpha(rT)|^2 - |\beta|^2|f_\alpha(rT)|^2}{|I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + (\gamma - 2)I$$

donc, d'aprés un simple calcul

$$\begin{aligned} K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) &= \frac{\overbrace{1 - \overline{\beta} f_\alpha - \beta \overline{f_\alpha} + |\beta|^2 |f_\alpha|^2}^{|1 - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + 1 - |\beta|^2 |f_\alpha|^2}{|I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + (\gamma - 2)I \\ &= I + \frac{I - |\beta|^2 |f_\alpha(rT)|^2}{|I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + (\gamma - 2)I \\ &= \frac{I - |\beta|^2 |f_\alpha(rT)|^2}{|I - \overline{\beta} f_\alpha(rT)|^2} + (\gamma - 1)I \end{aligned}$$

et comme $T = \rho_0 I$, alors (3.6) devient

$$K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) = \left[\frac{1-|\beta|^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-\overline{\beta}f_\alpha(r\rho_0)|^2} + \gamma - 1\right] I, \qquad (\gamma > 0)$$

pour tout $\beta \in \mathbb{D}$ et $0 < r < 1$.
D'une part, si $\gamma = \rho(f_\alpha(T))$, alors $f_\alpha(T) \in C_\gamma(H)$ et cela implique $K_\beta^\gamma(f_\alpha(rT)) \geq 0$.
D'où

$$1-\gamma \leq \frac{1-|\beta|^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-\overline{\beta}f_\alpha(r\rho_0)|^2}$$

donc

$$1-\gamma \leq \inf_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{\frac{1-|\beta|^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-\overline{\beta}f_\alpha(r\rho_0)|^2}\right\}$$

par conséquent

$$1-\gamma \leq \inf_{0<r<1}\left[\inf_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{\frac{1-|\beta|^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-\overline{\beta}f_\alpha(r\rho_0)|^2}\right\}\right]$$

Calculons inf sur $\beta = r'e^{i\phi}$, d'après l'inégalité triangulaire

$$|1-r'e^{-i\phi}f_\alpha(r\rho_0)| \leq 1 + |r'|f_\alpha(r\rho_0)||$$

ainsi

$$|1-r'e^{-i\phi}f_\alpha(r\rho_0)|^2 \leq (1 + r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2$$

En utilisant le fait que $1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2$ est positif, on obtient

$$\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-r'e^{-i\phi}f_\alpha(r\rho_0)|^2} \geq \frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{(1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2}$$

$$\Rightarrow \inf_{0\leq r'<1}\left\{\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-r'e^{-i\phi}f_\alpha(r\rho_0)|^2}\right\} \geq \inf_{0\leq r'<1}\left\{\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{(1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2}\right\}$$

par conséquent

$$\inf_{0<r<1}\left[\inf_{0\leq r'<1}\left\{(\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{|1-r'e^{-i\phi}f_\alpha(r\rho_0)|^2})]\right\}\right] \geq \inf_{0<r<1}\left[\inf_{0\leq r'<1}\left\{\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{(1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2}\right\}\right]$$

De plus on a

$$\inf_{0\le r<1}\left[\inf_{0\le r'<1}\left\{\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{(1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2}\right\}\right]=\inf_{0\le r<1}\left\{\{\frac{1-|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+|f_\alpha(r\rho_0)|}\right\}.$$

En effet, ce dérnier résultat est obtenu comme suit, posons :

$$F(r')=\frac{1-r'|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|}$$

d'où

$$F'(r')=\frac{-2|f(r\rho_0)|}{(1-r'|f(r\rho_0)|)^2}.$$

Comme $F'(r')$ est négative, alors F est décroissante, ainsi, l'inf est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r', $r'\to 1$ alors

$$\inf_{0<r<1}\left[\inf_{0\le r'<1}\left\{\frac{1-r'^2|f_\alpha(r\rho_0)|^2}{(1+r'|f_\alpha(r\rho_0)|)^2}\right\}\right]=\inf_{0<r<1}\left\{\frac{1-|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+|f_\alpha(r\rho_0)|}\right\}.$$

d'où

$$1-\gamma\le\inf_{0<r<1}\left\{\frac{1-|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+|f_\alpha(r\rho_0)|}\right\}. \tag{3.7}$$

Et comme

$$\begin{aligned}\inf_{0<r<1}\left\{\frac{1-|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+|f_\alpha(r\rho_0)|}\right\}&=\frac{\inf\limits_{0<r<1}\{1-|f_\alpha(r\rho_0)|)\}}{\sup\limits_{0<r<1}\{1+|f_\alpha(r\rho_0)|\}}\\&=\frac{1+\inf\limits_{0<r<1}\{-|f_\alpha(r\rho_0)|\}}{1+\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}\\&=\frac{1-\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}\end{aligned}$$

alors, l'inégalité (3.7) devient :

$$1-\gamma\le\frac{1-\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}$$

Comme $f_\alpha(r\rho_0) = \frac{r\rho_0+\alpha}{1+\alpha r\rho_0}$, et posant $t = r\rho_0$, (si $0 \leq r < 1$ alors $0 \leq t < \rho_0$), alors

$$\begin{aligned}\sup_{0<r<1} |f_\alpha(r\rho_0)| = \sup_{0<t<\rho_0} |f(t)| = \sup_{0<t<\rho_0} \left|\frac{t+\alpha}{1+\alpha t}\right| \\ = f_\alpha(\rho_0) = \frac{\rho_0+\alpha}{1+\alpha\rho_0}\end{aligned}$$

En effet, la fonction qui à été associe $\frac{t+\alpha}{1+\alpha t}$ est croissante.
Or,

$$\begin{aligned}1-\gamma \leq \frac{1-\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|}{1+\sup\limits_{0<r<1}|f_\alpha(r\rho_0)|} \\ \Rightarrow 1-\gamma \leq \frac{1-\frac{\rho_0+\alpha}{1+\alpha\rho_0}}{1+\frac{\rho_0+\alpha}{1+\alpha\rho_0}}\end{aligned}$$

et par simplification, on touve

$$1-\gamma \leq \frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}$$

ceci implique

$$\gamma \geq 1-\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}.$$

On utilise le fait que $\rho_0 = \frac{\rho}{2-\rho}$, alors

$$\begin{aligned}\gamma &\geq 1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1-\frac{\rho}{2-\rho}}{1+\frac{\rho}{2-\rho}}\right) \\ &= 1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}(1-\rho).\end{aligned}$$

et vu que $\alpha = |f_\alpha(0)|$, alors

$$\begin{aligned}\gamma &\geq 1-\frac{1-|f_\alpha(0)|}{1+|f_\alpha(0)|}(1-\rho) \\ &= 1-(\rho-1)\frac{1-|f_\alpha(0)|}{1+|f_\alpha(0)|}.\end{aligned}$$

Finalement, avec ce choix de T, on obtient

$$\rho(f_\alpha(T)) = 1+(\rho(T)-1)\frac{1-|f_\alpha(0)|}{1+|f_\alpha(0)|}.$$

Ce qui montre que l'égalité (3.1) est la meilleure possible dans ce cas.
On va maintenant étudier le deuxième cas.

(b) le cas $\rho(T) \geq 1$. Soit $\rho \in [1, +\infty[$, et soit l'opérateur T agissant dans C^2 qui est donné par la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\rho(T) = \rho$. pour tout $\alpha \in \mathbb{D}$, désignons par φ_α la transformation de Möbius définie par :

$$\varphi_\alpha = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}),$$

et on pose $T_\alpha = \varphi_\alpha(T) = (T - \alpha I)(I - \overline{\alpha} T)^{-1}$.
On calcule le γ-noyau associé à T_α qui est défini par :

$$K_\beta^\gamma(T_\alpha) = (I - \overline{\beta} T_\alpha)^{-1} + (I - \beta T_\alpha^*)^{-1} + (\gamma - 2)I.$$

Premièrement on calcule T_α, tel que

$$T_\alpha = (T - \alpha I)(I - \overline{\alpha} T)^{-1}$$

on remplace T et I dans T_α, on obtient

$$T_\alpha = \left[\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha}\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

et aprés un calcul simple, on touve

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} -\alpha & -|\alpha|^2\rho + \rho \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Deuxièmement, on calcule T_α^*

$$\begin{aligned} T_\alpha^* &= \begin{bmatrix} -\alpha & -|\alpha|^2\rho + \rho \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} -\overline{\alpha} & 0 \\ -|\alpha|^2\rho + \rho & -\overline{\alpha} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} -\alpha & -|\alpha|^2\rho + \rho \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \text{ et } T_\alpha^* = \begin{bmatrix} -\overline{\alpha} & 0 \\ -|\alpha|^2\rho + \rho & -\overline{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$(I-\overline{\beta}T_\alpha)^{-1} = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \overline{\beta}\begin{pmatrix}-\alpha & -|\alpha|^2\rho+\rho\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}\right]^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}1+\overline{\beta}\alpha & \overline{\beta}|\alpha|^2\rho-\overline{\beta}\rho\\ 0 & 1+\overline{\beta}\alpha\end{bmatrix}^{-1}$$

d'où

$$(I-\overline{\beta}T_\alpha)^{-1} = \frac{1}{(1+\overline{\beta}\alpha)^2}\begin{bmatrix}1+\overline{\beta}\alpha & -\overline{\beta}|\alpha|^2\rho+\overline{\beta}\rho\\ 0 & 1+\overline{\beta}\alpha\end{bmatrix}.$$

et

$$(I-\beta T_\alpha^*)^{-1} = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix}-\overline{\alpha} & 0\\ -|\alpha|^2\rho+\rho & -\overline{\alpha}\end{pmatrix}\right]^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}1+\beta\overline{\alpha} & 0\\ \beta|\alpha|^2\rho-\beta\rho & 1+\beta\overline{\alpha}\end{bmatrix}^{-1}$$

d'où

$$(I-\beta T_\alpha^*)^{-1} = \frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})^2}\begin{bmatrix}1+\beta\overline{\alpha} & 0\\ -\beta|\alpha|^2\rho+\beta\rho & 1+\beta\overline{\alpha}\end{bmatrix}$$

Finalement, en substituant $(I-\overline{\beta}T_\alpha)^{-1}$ et $(I-\beta T_\alpha^*)^{-1}$ dans $K_\beta^\gamma(T_\alpha)$, on obtient :

$$K_\beta^\gamma(T_\alpha) = \frac{1}{(1-\overline{\beta}\alpha)^2}\begin{bmatrix}1+\overline{\beta}\alpha & -\overline{\beta}|\alpha|^2\rho+\overline{\beta}\rho\\ 0 & 1+\overline{\beta}\alpha\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})^2}\begin{bmatrix}1+\beta\overline{\alpha} & 0\\ -\beta|\alpha|^2\rho+\beta\rho & 1+\beta\overline{\alpha}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma-2 & 0\\ 0 & \gamma-2\end{bmatrix} I$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{(1+\overline{\beta}\alpha)} & \frac{-\overline{\beta}|\alpha|^2\rho+\overline{\beta}\rho}{(1+\overline{\beta}\alpha)^2}\\ 0 & \frac{1}{(1+\overline{\beta}\alpha)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})} & 0\\ \frac{-\beta|\alpha|^2\rho+\beta\rho}{(1+\beta\overline{\alpha})^2} & \frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma-2 & 0\\ 0 & \gamma-2\end{bmatrix} I$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{(1+\overline{\beta}\alpha)}+\frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})}+\gamma-2 & \frac{-\overline{\beta}|\alpha|^2\rho+\overline{\beta}\rho}{(1+\overline{\beta}\alpha)^2}+0+0\\ 0+\frac{-\beta|\alpha|^2\rho+\beta\rho}{(1+\beta\overline{\alpha})^2}+0 & \frac{1}{(1+\overline{\beta}\alpha)}+\frac{1}{(1+\beta\overline{\alpha})}\end{bmatrix}$$

d'où

$$K_\beta^\gamma(T_\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2} + \gamma - 1 & \frac{-\overline{\beta}|\alpha|^2+\overline{\beta}}{(1+\overline{\beta}\alpha)^2}\rho \\ \frac{-\beta|\alpha|^2+\beta}{(1+\beta\overline{\alpha})^2}\rho & \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2} + \gamma - 1 \end{bmatrix}.$$

Pour tout $\beta \in \mathbb{D}$ et $\gamma > 0$.
Si $\gamma = \rho(T_\alpha)$ alors $T_\alpha \in C_\gamma(H)$, tel que

$$T_\alpha \in C_\gamma(H) \Leftrightarrow K_\beta^\gamma(T_\alpha) \geq 0$$

Or, $K_\beta^\gamma(T_\alpha)$ est positif si et seulement si sa trace et son déterminant sont positifs. i.e :

$$K_\beta^\gamma(T_\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tr(K_\beta^\gamma(T_\alpha)) \geq 0, & \forall \beta \in \mathbb{D}. \\ \det(K_\beta^\gamma(T_\alpha)) \geq 0, & \forall \beta \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Donc, on a

$$tr(K_\beta^\gamma(T_\alpha)) = 2\left(\gamma - 1 + \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\right) \geq 0.$$

cela nous donne nécessairement

$$\gamma - 1 + \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2} \geq 0$$

ce qui implique

$$\gamma - 1 \geq -\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}$$

d'où

$$\gamma - 1 \geq \sup_{\beta\in\mathbb{D}} \left\{ -\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2} \right\}$$

et cette dernière est équivalente à

$$\gamma - 1 \geq -\inf_{\beta\in\mathbb{D}} \left\{ \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2} \right\}. \tag{3.8}$$

Comme $\beta \in \mathbb{D}$, on le pose $\beta = re^{i\theta}$, où $\theta = arg(\beta)$ $(0 < \theta < 2\pi)$ et $0 \leq r < 1$.
D'aprés l'inégalité triangulaire, on a

$$|1 + \alpha re^{-i\theta}| \leq 1 + |\alpha|r$$

d'où

$$|1+\alpha re^{-i\theta}|^2 \leq (1+|\alpha|r)^2$$

Puis en utilisant le fait que $1-|\alpha|^2r^2$ est positif, on obtient

$$\frac{1-|\alpha|^2r^2}{|1+\alpha re^{-i\theta}|^2} \geq \frac{1-|\alpha|^2r^2}{(1+|\alpha|r)^2}$$

ce qui veut dire,

$$\inf_{0<r<1}\left\{\frac{1-|\alpha|^2r^2}{|1+\alpha re^{-i\theta}|^2}\right\} \geq \inf_{0<r<1}\left\{\frac{1-|\alpha|^2r^2}{(1+|\alpha|r)^2}\right\}.$$

Or

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\alpha|^2r^2}{(1+|\alpha|r)^2}\right\} = \inf_{0<r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|r)}{(1+|\alpha|r)}\right\}.$$

En effet, posons $F(r)=\frac{(1-|\alpha|r)}{(1+|\alpha|r)}$
d'où

$$F'(r)=\frac{-2|\alpha|}{(1+|\alpha|r)^2}$$

Comme $F(r)$ est négative, alors F est décroissante, ainsi l'inf est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r, $r\to 1^-$ alors

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\alpha|^2r^2}{|1+\alpha re^{-i\theta}|^2}\right\} = \frac{1-|\alpha|}{1+|\alpha|}.$$

ainsi, (3.8) est équivalente à

$$\gamma \geq 1-\frac{1-|\alpha|}{1+|\alpha|}$$

par conséquent, on obtient

$$\gamma \geq \frac{2|\alpha|}{1+|\alpha|}.$$

Le déterminant de $K_\beta^\gamma(T_\alpha)$

$$
\begin{aligned}
\det(K_\beta^\gamma(T_\alpha)) &= \begin{vmatrix} \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\gamma-1 & \frac{-\overline{\beta}|\alpha|^2+\overline{\beta}}{(1+\overline{\beta}\alpha)^2}\rho \\ \frac{-\beta|\alpha|^2+\beta}{(1+\beta\overline{\alpha})^2}\rho & \frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\gamma-1 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\gamma-1\right)^2 - \frac{(1-|\alpha|^2)^2|\beta|^2}{|1-\alpha\overline{\beta}|^4}\rho^2 \\
&= \underbrace{\left(\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\gamma-1-\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho\right)}_{(C)} \\
&\qquad \underbrace{\left(\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\gamma-1+\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho\right)}_{(D)}
\end{aligned}
$$

On voit que le terme (D) est positif, car les termes $\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}$, $\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho$ et $\gamma-1$ sont tous positifs.
Donc la positivité du déterminant est équivalente à la condition suivante :

$$\gamma-1+\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho-\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho \geq 0, \quad (\beta\in\mathbb{D})$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
\gamma-1 &\geq -\frac{1-|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}+\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\rho, \quad (\beta\in\mathbb{D}) \\
\Rightarrow \gamma-1 &\geq \sup_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|\rho-1+|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

On calcule ce sup en posant $\beta = re^{i\theta}$, où $\theta = arg(\beta)$ $(0<\theta<2\pi)$ et $0\leq r<1$. Ainsi d'après la $2^{éme}$ inegalité triangulaire, on a

$$|1+\alpha re^{-i\theta}| \geq |1-|\alpha|r|$$

alors

$$|1+\alpha re^{-i\theta}|^2 \geq |1-|\alpha|r|^2$$

en utilisant le fait que $(1-|\alpha|^2)|\beta|\rho-1+|\alpha|^2|\beta|^2$ est positif, on trouve

$$\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho-1+|\alpha|^2r^2}{|1+\alpha re^{-i\theta}|^2} \leq \frac{(1-|\alpha|^2)r\rho-1+|\alpha|^2r^2}{|1-|\alpha|r|^2}$$

d'où

$$\sup_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho-1+|\alpha|^2r^2}{|1+\alpha re^{-i\theta}|^2}\right\}\leq \sup_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho-1+|\alpha|^2r^2}{|1-|\alpha|r|^2}\right\}$$

De plus on a

$$\sup_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho-1+|\alpha|^2r^2}{|1-|\alpha|r|^2}\right\}=\sup_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho}{|1-|\alpha|r|^2}-\frac{1+|\alpha|r}{1-|\alpha|r}\right\}.$$

En effet, on pose : $F(r)=\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho}{|1-|\alpha|r|^2}-\frac{1+|\alpha|r}{1-|\alpha|r}$,
d'où

$$F'(r)=\frac{\rho(1-|\alpha|^2)}{|1-|\alpha|r|^2}+\frac{2|\alpha|(1-|\alpha|^2)r\rho}{|1-|\alpha|r|^3}-\frac{|\alpha|}{1-|\alpha|r}+\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|r}$$

Comme $F'(r)$ est positive, alors F est croissante, ainsi le sup est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r, $r\to 1$ alors

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)r\rho}{|1-|\alpha|r|^2}-\frac{1+|\alpha|r}{1-|\alpha|r}\right\}&=\frac{(1-|\alpha|^2)}{|1-|\alpha||^2}\rho-\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\\&=\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}(\rho-1)\end{aligned}$$

Or

$$\gamma-1\geq\sup_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{\frac{(1-|\alpha|^2)|\beta|\rho-1+|\alpha|^2|\beta|^2}{|1+\alpha\overline{\beta}|^2}\right\}$$

ce qui est équivalent à

$$\gamma\geq 1+\frac{1-|\alpha|}{1-|\alpha|}(\rho-1)=1+\frac{1+|\varphi_\alpha|}{1-|\varphi_\alpha|}(\rho(T)-1).$$

ainsi, (utilisant (3.1))

$$\rho(f(T))=1+\frac{1+|\varphi\alpha(0)|}{1-|\varphi_\alpha(0)|}(\rho(T)-1).$$

□

3.2 Exemple d'optimalité

Dans cette partie, on va traiter un exemple d'opérateur de classe C_2 pour montrer que les résultats obtenus dans le théorème 3.1 sont optimaux et restent les meilleures possibles.
Pour $\rho(T) \geq 1$, on considére l'opérateur $T \in C_2$ donné par

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Où $a \in \mathbb{C}$ $a > 0$, et λ une valeur propre de l'opérateur T. Pout tout $\alpha \in \mathbb{D}$, on note par φ_α la transformation de Möbius définie par :

$$\varphi_\alpha = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

et on pose $T_\alpha = \varphi_\alpha(T) = (T-\alpha I)(I-\overline{\alpha}T)^{-1}$.
Premièrement, on calcule le ρ-noyau associé à T_α défini par :

$$K_\beta^\rho(T) = (I-\overline{\beta}T_\alpha)^{-1} + (I-\beta T_\alpha^*)^{-1} + (\rho-2)I.$$

Tout d'abord on calcule T_α, tel que

$$T_\alpha = (T-\alpha I)(I-\overline{\alpha}T)^{-1}$$

En substituant T et I dans l'expression de T_α, on obtient

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \left[\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\alpha}\lambda & \overline{\alpha}a \\ 0 & \overline{\alpha}\lambda \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda-\alpha & a \\ 0 & \lambda-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\overline{\alpha}\lambda & -\overline{\alpha}a \\ 0 & 1-\overline{\alpha}\lambda \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda-\alpha & a \\ 0 & \lambda-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\overline{\alpha}\lambda} & \frac{\overline{\alpha}}{(1-\overline{\alpha}\lambda)^2}a \\ 0 & \frac{1}{1-\overline{\alpha}\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-\alpha}{1-\overline{\alpha}\lambda} & \frac{(1-|\alpha|^2)}{(1-\overline{\alpha}\lambda)^2}a \\ 0 & \frac{\lambda-\alpha}{1-\overline{\alpha}\lambda} \end{pmatrix}.$$

Posons $\psi_\alpha = \frac{\lambda-\alpha}{1-\overline{\alpha}\lambda}$ où $\psi_\alpha \in A(\mathbb{D})$ et $\psi_\alpha(T) \in C_\infty(H)$, et $a' = \frac{(1-|\alpha|^2)}{(1-\overline{\alpha}\lambda)^2}a$.
Alors T_α devient

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\alpha & a' \\ 0 & \psi_\alpha \end{pmatrix}.$$

Maintenant on calcule $(I-\overline{\beta}T)^{-1}$ et $(I-\beta T^*)^{-1}$, avec $T^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda} & 0 \\ \overline{a} & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}(I-\overline{\beta}T)^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\beta}\lambda & \overline{\beta}a \\ 0 & \overline{\beta}\lambda \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} & \frac{a\overline{\beta}}{(1-\overline{\beta}\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(I-\beta T^*)^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta\overline{\lambda} & 0 \\ \beta\overline{a} & \beta\overline{\lambda} \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} & 0 \\ \frac{\beta\overline{a}}{(1-\beta\overline{\lambda})^2} & \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, en substituant $(I-\overline{\beta}T)^{-1}$ et $(I-\beta T^*)^{-1}$ dans $K_\beta^\rho(T)$, on obtient :

$$\begin{aligned}K_\beta^\rho(T) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} & \frac{a\overline{\beta}}{(1-\overline{\beta}\lambda)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} & 0 \\ \frac{\beta\overline{a}}{(1-\beta\overline{\lambda})^2} & \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho-2 & 0 \\ 0 & \rho-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} + \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} + \rho - 2 & \frac{a\overline{\beta}}{(1-\lambda\overline{\beta})^2} \\ \frac{\overline{a\beta}}{(1-\overline{\lambda}\beta} & \frac{1}{1-\overline{\beta}\lambda} + \frac{1}{1-\beta\overline{\lambda}} + \rho - 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

d'où

$$K_\beta^\rho(T) = \begin{bmatrix} \frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\overline{\beta}\lambda|^2} + \rho - 1 & \frac{\overline{\beta}a}{1-\overline{\beta}\lambda} \\ \frac{\beta\overline{a}}{1-\beta\overline{\lambda}} & \frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\overline{\beta}\lambda|^2} + \rho - 1 \end{bmatrix}.$$

Deuxièment, on vérifie la positivité de $K_\beta^\rho(T)$, tel que on ait $K_\beta^\rho(T)$ positif si et seulement si sa trace et sont déterminant sont positifs. i.e.

$$K_\beta^\rho(T) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1 \geq 0. & \forall \beta \in \mathbb{D}. \\ \left[\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1\right]^2 - \frac{|a|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^4} \geq 0. & \forall \beta \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

D'une part, on vérifie la positivité de la trace de $K_\beta^\rho(T)$.
on a

$$tr(K_\beta^\rho(T)) = 2\left(\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1\right).$$

Or

$$tr(K_\beta^\rho(T)) \geq 0$$

est équivalent à

$$\rho - 1 + \frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} \geq 0 \tag{3.9}$$

Car, on a $\rho \in [1, +\infty[$ et $\beta, \lambda \in \overline{\mathbb{D}}$
l'inégalité (3.9) implique

$$\rho - 1 \geq -\frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2}$$

d'où

$$\rho - 1 \geq \sup_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{-\frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2}\right\}$$

Par conséquent

$$\rho - 1 \geq -\inf_{\beta\in\mathbb{D}}\left\{\frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2}\right\}. \tag{3.10}$$

Comme $\beta \in \mathbb{D}$ on le pose $\beta = re^{i\theta}$ où $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. D'aprés l'inégalité triangulaire

$$|1 + \overline{\lambda}re^{i\theta}| \leq 1 + |\lambda|r$$

d'où

$$|1 + \overline{\lambda}re^{i\theta}|^2 \leq (1 + |\lambda|r)^2$$

en utilisant le fait que $1 - |\lambda|^2r^2$ est positif, on obtient

$$\frac{1-|\lambda|^2r^2}{|1+\overline{\lambda}re^{i\theta}|^2} \geq \frac{1-|\lambda|^2r^2}{(1+|\lambda|r)^2}$$

ce qui veut dire,

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\lambda|^2r^2}{|1+\overline{\lambda}re^{i\theta}|^2}\right\}\geq \inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\lambda|^2r^2}{(1+|\lambda|r)^2}\right\}$$

or

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\lambda|^2r^2}{(1+|\lambda|r)^2}\right\}= \inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{(1-|\lambda|r)}{(1+|\lambda|r)}\right\}.$$

On obtient une fonction en r :

$$F(r)=\frac{1-|\lambda|r}{1+|\lambda|r}$$

d'où

$$F'(r)=\frac{-2|\lambda|}{(1+|\lambda|r)^2}.$$

Comme $F'(r)$ est négatif, alors F est décroissante, ainsi l'inf est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r, $r\to 1^-$ alors

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{\frac{1-|\lambda|^2r^2}{|1+\overline{\lambda}re^{i\theta}|^2}\right\}=\frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}.$$

Ainsi, (3.10) est équivalente à

$$\begin{aligned}\gamma-1&\geq 1-\frac{1-|\lambda|}{1+|\lambda|}\\ &=\frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|}\end{aligned}$$

d'où

$$\gamma-1\geq\frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|}.$$

D'autre part, la positivité du déterminant de $K^{\rho}_{\beta}(T)$:

On a

$$\det(K_\beta^\rho(T)) = \begin{vmatrix} \frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\overline{\beta}\lambda|^2} + \rho + 1 & \frac{\overline{\beta}a}{1-\overline{\beta}\lambda} \\ \frac{\beta\overline{a}}{1-\beta\overline{\lambda}} & \frac{1-|\beta|^2|\lambda|^2}{|1-\overline{\beta}\lambda|^2} + \rho + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1\right]^2 - \frac{|a|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^4}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1 - \frac{|a||\beta|}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2}\right)}_{(I)} \underbrace{\left(\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1 + \frac{|a||\beta|}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2}\right)}_{(II)}$$

On voit que (II) est positif, donc il reste de montrer la positivitée de (I).

$$\frac{1-|\lambda|^2|\beta|^2}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} + \rho - 1 - \frac{|a||\beta|}{|1-\beta\overline{\lambda}|^2} \geq 0,$$

Veut dire que

$$1 - |\lambda|^2|\beta|^2 + (\rho-1)|1-\beta\overline{\lambda}|^2 \geq |a||\beta|. \tag{3.11}$$

En effet, pour $\beta = re^{i\theta}$ où $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, (3.11) devient

$$1 - |\lambda|^2 r^2 + (\rho-1)|1 - re^{i\theta}\overline{\lambda}|^2 \geq |a|r$$

et cette dernière est équivalente à

$$\inf_{0\leq\theta<2\pi}\left\{1 - |\lambda|^2r^2 + (\rho-1)|1-\overline{\lambda}re^{i\theta}|^2\right\} \geq |a|r,$$

ce qui implique,

$$1 - |\lambda|^2 r^2 + (\rho-1)(1-r|\lambda|)^2 \geq |a|r. \tag{3.12}$$

En particulier, si on passe au bord (i.e.$|\beta| = r$ tel que $r \to 1^-$), l'inégalité (3.12) devient

$$1 - |\lambda|^2 + (\rho-1)(1-|\lambda|)^2 \geq |a|,$$

ce qui veut dire que

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{1-|\lambda|^2+(\rho-1)(1-|\lambda|)^2\right\}\geq |a|.$$

Discussion Si $\lambda\in\mathbb{T}$ alors $a=0$ et $T=\lambda I$, donc on revient au résultat trouvé plus haut.
Maintenant, si β est dans $\mathbb{D}$, on a

$$1-|\lambda|^2r^2+(\rho-1)(1-r|\lambda|)^2-|a|r\geq 0,$$

ce qui implique que

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{1-|\lambda|^2r^2+(\rho-1)(1-r|\lambda|)^2-|a|r\right\}\geq 0.$$

On obtient une fonction en r,

$$F(r)=1-|\lambda|^2r^2+(\rho-1)(1-r|\lambda|)^2-|a|r,$$

dont on calcule l'infimum

$$F'(r)=-2|\lambda|^2r-(\rho-1)|\lambda|(1-r|\lambda|)-|a|. \tag{3.13}$$

Comme $F'(r)$ est négative, alors F est décroissante.
Ainsi, l'inf est atteint sur $\mathbb{D}$ au point r, $r\to 1^-$. Donc

$$\inf_{0\leq r<1}\{1-|\lambda|^2r^2+(\rho-1)(1-r|\lambda|)^2-|a|r\}=1-|\lambda|^2+(\rho-1)(1-|\lambda|)^2-|a|.$$

Or,

$$\inf_{0\leq r<1}\left\{1-|\lambda|^2r^2+(\rho-1)(1-r|\lambda|)^2-|a|r\right\}\geq 0 \tag{3.14}$$

équivaut à

$$1-|\lambda|^2+(\rho-1)(1-|\lambda|)^2\geq |a| \tag{3.15}$$

On remplace ρ par ρ', λ par ψ_α et a par a'.
Et donc $T\in C_{\rho'}$ si et seulement si

$$1-|\psi_\alpha(\lambda)|^2+(\rho'-1)(1-|\psi_\alpha(\lambda)|)^2\geq\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\lambda|^2}|a|. \tag{3.16}$$

On sait par le "Mapping theorem" que

$$\rho'\geq 1+(\rho(T)-1)\frac{1+|\psi_\alpha(0)|}{1-|\psi_\alpha(0)|},$$

ce qui donne

$$\rho' \geq 1 + (\rho(T) - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}$$

Cas d'égalité. Si $\rho = \rho(T)$, on a deux cas à étudier.
1^{er} cas :

$$\rho' = 1 + (\rho - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}$$

on substitue ρ' dans (3.16), on obtient

$$1 - |\psi_\alpha(\lambda)|^2 + (\rho - 1)(1 - |\psi_\alpha(\lambda)|)^2 \geq \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \overline{\alpha}\lambda|^2}|a|. \tag{3.17}$$

Si $\lambda = 0$, (3.17) devient

$$1 - |\alpha|^2 + (\rho - 1)(1 - |\alpha|^2) \geq (1 - |\alpha|^2)|a|$$

d'où

$$\rho \geq |a|.$$

donc

$$\rho(T) \geq |a|.$$

2^{eme} cas :

$$\rho' > 1 + (\rho - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}$$

On a

$$\begin{aligned} & \rho' > 1 + (\rho(T) - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|} \\ \Leftrightarrow \quad & \rho' > 1 + (\rho - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|} \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} 1 - |\psi_\alpha(\lambda)|^2 + (\rho' - 1)(1 - |\psi_\alpha(\lambda)|)^2 &> 1 - |\psi_\alpha(\lambda)|^2 + (\rho - 1)\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}(1 - |\psi_\alpha(\lambda)|)^2 \\ &\geq \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \overline{\alpha}\lambda|^2}|a|. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, (3.17) devient

$$1 - |\alpha|^2 + (\rho - 1)(1 - |\alpha|^2) \geq (1 - |\alpha|^2)|a|$$

d'où

$$\rho \geq |a|$$

et donc

$$\rho(T) \geq |a|.$$

Par ces résultats on vient de démontrer que les ρ' sont les meilleurs possibles dans le théorème 3.1.

Remarque 3.1. *Le cas où $\rho > \rho(T)$ sera étudié plus tard.*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons trait la question relative au théorème de transfert pour les opérateurs de classe C_ρ, étudié par G. Cassier et N. Suciu dans l'article [6].

Dans un premier temps, nous avons développé et détaillé les calculs de la démonstration du théorème puis dans un deuxième temps, nous avons démontré l'optimalité des résultats obtenus en étudiant un exemple proposé par Cassier : $T = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, pas encore étudié jusqu'à maintenant et cela dans le cas $\rho(T) \leq \rho$.

Comme perspectives directes de ce travail :

1. Étudier le cas $\rho > \rho(T)$.
2. Étudier un deuxième exemple $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

Bibliographie

[1] B. Belaïdi, *cour de Master I*, Université de Mostaganem (2021-2022).

[2] S. K. Berberian, *introduction to Hilbert space*, Chelsea publishing company 1961.

[3] G. Cassier *Mapping formula for function calculus, Julia's lemma for operators and application*, Prépublication de l'Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon, 1 (2005), 1-22.

[4] G. Cassier and T. Fack, *Un noyau pour calculs fonctinnels*, C.R.Acad.Sci.Paris. I MATH. Série I 317 (1993), 683-688. MR1245099

[5] G. Cassier and T. Fack, *Contractions in von Neumann algebras.*J. Funct. Anal. 135 (1996), 297-338.

[6] G. Cassier and N. Suciu, *Mapping theorems and Harnack ordering for ρ-contractions.* Indiana Univ. Math. J. 55 No 2 (2006), 483-523.

[7] N. Dunford, J. T. Shwartz, *Linear operator, I, II and III, Interscience*, New York, 1958, 1963 and 1971.

[8] C. Foias, *Sur certains théorème de J. von Neumann cencernant les ensembles spectraux*, Acta Sci. Math. (Szeged) 18 (1957), 15-20. MR0090029.

[9] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor and Fran. London, 2001.

[10] Guillaume Aubrun, *Théorie des Opérateurs 1, M1 Mathématiques*, Université de la Réunion.

[11] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Second edition ; Graduate texts in mathematics ; vol. 19, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN 0-387-90685-1. MR675952 (84e :47001).

[12] W. Hengartner, M. Lambert, C. Reischer, *Intoduction à l'analyse Fonctionnelle.* Québec, 1981.

[13] J. A. R. Holbrook, *On power-bounded operators of Sz-Nagy and Foias*, Acta Sci. Math. (Szeged) 29 (1968), 299-310 ; MR0239453.

[14] B. Sz.-Nagy and C. Foias *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.* Masson, Paris, 1967.

[15] S. M. Patel, *On generalized numerical ranges*, Pacific journal of mathematics, Vol.66, No.1, 1976.

[16] Y. Privat, *Polycopié de cours : Espaces Vectoriels Normés et Topologie*, Institut Elie Cartan Nancy de Mathématiques, Université Henri Poincaré Nancy 1.