UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

FSEI

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE LÉENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
Faculté des Sciences Exactes et informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de
Master

Spécialité : Mathématique
Option : Analyse Fonctionnelle

La croissance des solutions d'une classe des équations différentiellles linéaires dans le plan complexe

Présenté par : **Ould Tata Islam Abdenour**

Soutenu le 21/06/2023 **devant le jury :**

Mr. **Bouzit Hamid**	Président	M.C.A	U. MOSTAGANEM
Mr. **Maamar Andasmas**	Examinateur	M.C.A	U. MOSTAGANEM
Mr. **Houari Fettouch**	Encadrant	M.C.A	U. MOSTAGANEM

Année universitaire : 2022 / 2023

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciments

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين والمبعوث رحمةً للعالمين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين، أما بعد فالحمد لله الذي بيده كل الخير وبه تتم الصالحات، الحمد لله الذي علم الإنسان بالقلم علمه ما لم يعلم، والذي وفقني وألهمني الصبر والإرادة لأصل إلى ما أنا فيه الآن، وأعانني لإتمام هذا العمل إلى آخر نقطةً، فاللهم لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا.

Je tiens á remercier mes honorables professeurs :

Mr Houari Fettouch d'avoire encadré ce mémoire. Et Mr Bouzit Hamid d'avoire présidé ce jury. Et Mr Maamar Andasmas qui a accepté d'examiner ce travail.

Et mes sincéres remerciments á Mr Belaïdi Benharrat pour m'avoire aidé, et pour sa grande contribution à la réalisation de ce travail.

Sans oublier toutes les professeurs qui m'ont enseigné tout au long de mon parcours universitaire.

Table des matières

Résumé

Ce travail consiste à étudier la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières á travers l'étude de ses coefficients et voire les conditions qui leurs sont imposées .

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre, on donne les notions de bases nécéssaires sur la théorie de Nevanlinna qu'on a besoin d'utiliser dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre on va expliquer les résultats obtenus par Chen Zogxuan et Li Chunhong et Huang Xiaojun pour les équations différentielles linéaires homogènes [7], [8] et Wang et Laine pour les équations différentielles non homogènes [9], [10].

Introducion

Dans le domaine de l'analyse complexe, et de la multiplicité de ses théories, il existe une théorie qui décrit la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe appelée la théorie de Nevanlinna, cette théorie joue un grand rôle dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe.

Dans ce mémoire on étudie la croissance des solutions des équations différentielles linéaires de type :

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_0(z)e^{P_0(z)}f = H \tag{0}$$

telle que $k \geqslant 2$, où les $P_j(z)$ $(j = 0; 1; ...; k-1)$ sont des polynômes de degré n et les $h_j(z)$ $(j = 0; 1; ...; k-1)$ et H sont des fonctions entiéres d'ordre fini inférieur strictement á n.

Ce mémoire se compose de deux chapitres :

Le premier chapitre est une introduction à la théorie de Nevanlinna, où on donne des définitions et des propriétés sur cette théorie qui concernent la distribution des valeurs des fonctions méromorphes dans le plan complexe.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous étudierons l'ordre des solutions des équations différentielles linèaires d'ordre supérieur de la forme de l'équation (0)

Chapitre 1

Notions de base sur la théorie de Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va présenter les notions de base nécéssaire et donner quelques définitions et résultats dont on aura besoin tout au long de notre travail.

1.1 Formules de Jensen et de Poisson & Formule de Poisson-Jensen

***Théoréme* 1.1.** *[6](**Formule de Jensen**) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0; \infty$, et soient $a_1, a_2, ..., a_n$ (respectivement $b_1, b_2, ..., b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \sum_{|a_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|b_j|}$$

Preuve du Théorème 1.1.

On démontre le théorème lorsque f n'admet ni zéro ni pôle sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction :

$$g(z) = f(z)\frac{\prod\limits_{|a_j|\leqslant r} \dfrac{r^2 - \overline{a_j}z}{r\,(z - a_j)}}{\prod\limits_{|b_j|\leqslant r} \dfrac{r^2 - \overline{b_j}z}{r\,(z - b_j)}}$$

On a $g \neq 0; \infty$ dans le disque $|z| \leqslant r$, donc $\ln g(z)$ est analytique, et d'aprés la formule de moyenne pour les fonctions harmoniques :

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \tag{1.1.1}$$

D'autre part

$$|g(0)| = |f(0)| \left| \frac{\prod\limits_{|a_j| \leqslant r} \frac{r}{-a_j}}{\prod\limits_{|b_j| \leqslant r} \frac{r}{-b_j}} \right| = |f(0)| \frac{\prod\limits_{|a_j| \leqslant r} \frac{r}{|a_j|}}{\prod\limits_{|b_j| \leqslant r} \frac{r}{|b_j|}},$$

D'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|b_j|} \tag{1.1.2}$$

et pour $z = re^{i\varphi}$, on obtient :

$$\left| g(re^{i\varphi}) \right| = \left| f(re^{i\varphi}) \right| \frac{\prod\limits_{|a_j| \leqslant r} \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\varphi}}{r\left(re^{i\varphi} - a_j\right)} \right|}{\prod\limits_{|b_j| \leqslant r} \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\varphi}}{r\left(re^{i\varphi} - b_j\right)} \right|} = \left| f(re^{i\varphi}) \right| \frac{\prod\limits_{|a_j| \leqslant r} \left| \frac{re^{i\varphi}(re^{-i\varphi} - \overline{a_j})}{r\left(re^{i\varphi} - a_j\right)} \right|}{\prod\limits_{|b_j| \leqslant r} \left| \frac{re^{i\varphi}(re^{-i\varphi} - \overline{a_j})}{r\left(re^{i\varphi} - b_j\right)} \right|}$$

$$= \left| f(re^{i\varphi}) \right| \frac{\prod\limits_{|a_j| \leqslant r} \left| e^{i\varphi} \right| \overbrace{\left| \frac{\overline{re^{i\varphi} - a_j}}{re^{i\varphi} - a_j} \right|}^{=1}}{\prod\limits_{|b_j| \leqslant r} \left| e^{i\varphi} \right| \underbrace{\left| \frac{\overline{re^{i\varphi} - b_j}}{re^{i\varphi} - b_j} \right|}_{=1}} = \left| f(re^{i\varphi}) \right|. \tag{1.1.3}$$

On remplace (1.1.2) et (1.1.3) dans (1.1.1), *on aura*

$$\ln |f(0)| + \sum_{|a_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|b_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

D'où

$$\ln |f(0)| = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi - \sum_{|a_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_j| \leqslant r} \ln \frac{r}{|b_j|}$$

***Théoréme* 1.2.** *[1](**Formule de Poisson**) Soit f une fonction analytique dans le disque $|\xi| \leqslant R$ alors pour tout $r < R$ et $\theta, \varphi \in [0; 2\pi]$ on a*

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left[\frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}\right] \ln|f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi.$$

Preuve du Théorème 1.2.

La fonction f etant analytique dans le disque $|\xi| \leqslant R$, d'aprés la formule intégrale de Cauchy on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{1.1.4}$$

Soit z^* le point symétrique à z par rapport au cercle $|\xi| = R$. Alors on a

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{re^{-i\theta}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

On considère la fonction $\xi \longmapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z^*}$, qui est analytique dans le disque $|\xi| \leqslant R$,

d'aprés le théorème de Cauchy, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi. \tag{1.1.5}$$

Par la soustraction, de (1.1.4) et (1.1.5), on obtient

$$f(z) - 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \Big(\frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z^*}\Big) d\xi.$$

On pose $\xi = Re^{i\varphi}$ $(d\xi = Rie^{i\varphi} d\varphi)$ et $z = re^{i\theta}$, on aura

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r} e^{i\theta}}\Big) Rie^{i\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{Re^{i\varphi} f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{Rre^{i\varphi} f(Re^{i\varphi})}{Rre^{i\varphi} - R^2 e^{i\theta}}\Big) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} + \frac{re^{i\varphi}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}}\Big) f(Re^{i\varphi}) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{Re^{i(\varphi-\theta)}}{Re^{i(\varphi-\theta)} - r} + \frac{r}{Re^{-i(\varphi-\theta)} - r}\Big) f(Re^{i\varphi}) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rRe^{i(\varphi-\theta)} + rRe^{i(\varphi-\theta)} - r^2}{(Re^{i(\varphi-\theta)} - r)(Re^{-i(\varphi-\theta)} - r)} f(Re^{i\varphi})d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - rR(e^{i(\varphi-\theta)} + e^{-i(\varphi-\theta)}) + r^2} f(Re^{i\varphi})d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left[\frac{R^2 - rR\overbrace{(e^{i(\varphi-\theta)} - e^{-i(\varphi-\theta)})}^{2i\sin(\varphi-\theta)} - r^2}{R^2 - rR\underbrace{(e^{i(\varphi-\theta)} + e^{-i(\varphi-\theta)})}_{2\cos(\varphi-\theta)} + r^2}\right] f(Re^{i\varphi})d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left[\frac{\left(Re^{i\varphi} + re^{i\theta}\right)}{\left(Re^{i\varphi} - re^{i\theta}\right)} . \frac{\left(Re^{-i\varphi} - re^{-i\theta}\right)}{\left(Re^{-i\varphi} - re^{-i\theta}\right)}\right] f(Re^{-i\varphi})d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left[\frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}\right] f(Re^{i\varphi})d\varphi, \tag{1.1.6}$$

d'où le résultat

Théoréme 1.3. *[2](**Formule de Poisson -Jensen**) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non identiquement nulle, et $a_j (j = 1, 2, ...)$ (respectivement b_j) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Si $z = re^{i\theta}$ et $r < \rho$, alors dans le disque $|z| < \rho$, on a*

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{Re}\left[\frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}}\right] f(Re^{i\varphi})d\varphi \; - \sum_{|a_j|\leqslant\rho} \ln\left|\frac{\rho^2 - \overline{a_j}z}{\rho(z - a_j)}\right|$$
$$+ \sum_{|b_j|\leqslant\rho} \ln\left|\frac{\rho^2 - \overline{b_j}z}{\rho(z - b_j)}\right|$$

Nevanlinna a appelé cette formule la formule de Poisson-Jensen.

Preuve du Théorème 1.3. *On fait le même raisonnement du Théorème 1.1 .*

On démontre le théoréme dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = \rho$, Considérons la fonction

$$g(z) = f(z)\frac{\prod_{|a_j|\leqslant\rho} \frac{\rho^2 - \overline{a_j}z}{\rho\,(z - a_j)}}{\prod_{|b_j|\leqslant\rho} \frac{\rho^2 - \overline{b_j}z}{\rho\,(z - b_j)}} \tag{1.1.7}$$

On a $g \neq 0; \infty$ *dans le disque*$|z| \leqslant \rho$*, donc* $\ln g\,(z)$ *est analytique. Donc* $\mathfrak{Re} \ln g(z)$ *est une fonction harmonique dans le disque* $|z| \leqslant \rho$.

D'aprés (1.1.6) :

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathfrak{Re} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] g(\rho e^{i\varphi}) d\varphi,$$

donc

$$\ln |g(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathfrak{Re} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] \ln |g(\rho e^{i\varphi})| d\varphi. \tag{1.1.8}$$

De (1.1.7), nous avons

$$\ln |g(z)| = \ln |f(z)| + \sum_{|a_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{a_j} z}{\rho\,(z - a_j)} \right| - \sum_{|b_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{b_j} z}{\rho\,(z - b_j)} \right|. \tag{1.1.9}$$

On remplace (1.1.9) dans (1.1.8), on obtient

$$\ln |f(z)| + \sum_{|a_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{a_j} z}{\rho\,(z - a_j)} \right| - \sum_{|b_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{b_j} z}{\rho\,(z - b_j)} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathfrak{Re} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] \ln |g(\rho e^{i\varphi})| d\varphi. \tag{1.1.10}$$

D'autre part, pour $z = \rho e^{i\varphi}$ $(z.\bar{z} = \rho)$*, on a*

$$\left| \frac{\rho^2 - \overline{a_j} z}{\rho\,(z - a_j)} \right| = \left| \frac{\rho^2 - \overline{b_j} z}{\rho\,(z - b_j)} \right| = 1,$$

d'où

$$\ln \left| g(\rho e^{i\varphi}) \right| = \ln |f(\rho e^{i\varphi})|. \tag{1.1.11}$$

On remplace (1.1.11) dans (1.1.10), on obtient

$$\ln |f(z)| + \sum_{|a_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{a_j} z}{R\,(z - a_j)} \right| - \sum_{|b_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{b_j} z}{\rho\,(z - b_j)} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathfrak{Re} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] \ln |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi,$$

d'où

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathfrak{Re} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} + re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi} - re^{i\theta}} \right] \ln |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{|a_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{a_j} z}{\rho(z - a_j)} \right|$$
$$+ \sum_{|b_j| \leqslant \rho} \ln \left| \frac{\rho^2 - \overline{b_j} z}{\rho(z - b_j)} \right|,$$

1.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 1.1. *[3] (**logarithme tronqué**)*
Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(0, \ln x) = \begin{cases} \ln x & x > 1 \\ 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Lemme 1.1. *[3] On a les propriétés suivantes du logarithme tronqué :*

❶ $\ln x \leqslant \ln^+ x$

❷ $\ln^+ x \leqslant \ln^+ y$ *pour tout* $(0 < x \leqslant y)$

❸ $\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$

❹ $|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$

❺ $\ln^+ \left(\prod_{j=1}^{m} x_j \right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ln^+ x_j$

❻ $\ln^+ \left(\sum_{j=1}^{m} x_j \right) \leqslant \ln m + \sum_{j=1}^{m} \ln^+ x$

Preuve de lemme 1.1. *Les deux premières propriétés sont évidentes*

③ *.On a d'aprés la Définition 1.1 :*

$$\begin{aligned} \ln^+ x - \ln^+ \tfrac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) - \max(\ln \tfrac{1}{x}, 0) \\ &= \max(\ln x, 0) - \max(-\ln x, 0) \\ &= \max(\ln x, 0) + \min(\ln x, 0) \\ &= \ln x \end{aligned}$$

④ .

$$\begin{aligned} \ln^+ x + \ln^+ \tfrac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) - \min(\ln x, 0) \\ &= |\ln x| \end{aligned}$$

⑤ . *Si* $\prod_{j=1}^{m} x_j \leqslant 1$ *alors l'inégalité est triviale* $(0 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ln^+ x_j)$

On montre l'inégalité pour $\prod_{j=1}^{m} x_j \geqslant 1$.

On a d'aprés ❺

$$\ln^+ \left(\prod_{j=1}^{m} x_j \right) = \ln \left(\prod_{j=1}^{m} x_j \right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ln x_j$$

⑥ . *On a*

$$\ln^+\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) \leqslant \ln^+(m \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j)$$

D'aprés ❺

$$\leqslant \ln^+ m + \ln^+(\max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j)$$
$$\leqslant \ln m + \sum_{j=1}^{m} \ln^+ x_j$$

Définition 1.2. *[6] Soient $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leqslant t$ (chaque racine étant comptée avec son ordre de mutiplicité) et par $\overline{n}(t, a, f)$ le nombre de racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leqslant t$.*

De même, on désigne par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de f dans le disque $|z| \leqslant t$ (chaque pôle étant compté avec son ordre de mutiplicité) et par $\overline{n}(t, \infty, f)$ le nombre de pôles distincts dans le disque $|z| \leqslant t$.

Exemple 1.1. *Soit l'exemple suivant :*

$f(z) = e^z$, $a \in \mathbb{C}$

$$n(t, a, e^z) = \overline{n}(t, a, e^z) = 0 \qquad \text{et} \qquad n(t, \infty, e^z) = \overline{n}(t, \infty, e^z) = 0$$

car $f(z) = e^z$ n'admet ni zéros ni pôles.

Définition 1.3. *[2]*

Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction a-points de f par :

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) lnr \qquad f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$N(r, f) = N(r, \infty, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) lnr$$

De même, on définit la fonction a-points distincts par :

$$\overline{N}(r, a, f) = \overline{N}(r, a, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a, f) - \overline{n}(0, a, f)}{t} dt + \overline{n}(0, a, f) lnr \qquad f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$\overline{N}(r,f)=\overline{N}(r,\infty,f)=\int_0^r \frac{\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)lnr.$$

Lemme 1.2. *[6] Soit f une fonction méromorphe avec a-points ; $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ dans le disque $|z|\leq r$ tels que $0\leq|\alpha_1|\leq|\alpha_2|\leq...\leq|\alpha_n|$, Alors :*

$$\int_0^r \frac{n\left(t,a,f\right)}{t}dt=\int_0^r \frac{n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)}{t}dt=\sum_{0\leqslant|\alpha_j|\leqslant r}\ln\frac{r}{|\alpha_j|}$$

Preuve de lemme 1.2. *Posons $r_j=|\alpha_j|$ $(j=1,...,n)$. Alors*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{r}{|\alpha_j|}&=\sum_{0\leqslant|\alpha_j|\leqslant r}\ln\frac{r}{r_j}=\ln\Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{r}{r_j}\Big)=\ln\Big(\frac{r^n}{r_1r_2...r_n}\Big)\\&=\ln\Big[\frac{r_2}{r_1}\Big(\frac{r_3}{r_2}\Big)^2\Big(\frac{r_4}{r_3}\Big)^3.....\Big(\frac{r_n}{r_{n-1}}\Big)^{n-1}\Big(\frac{r}{r_n}\Big)^n\Big]\\&=\ln\frac{r_2}{r_1}+2\ln\frac{r_3}{r_2}+3\ln\frac{r_4}{r_3}+...+n\ln\frac{r}{r_n}\\&=\int_0^{r_1}0\frac{dt}{t}+\int_{r_1}^{r_2}1\frac{dt}{t}+\int_{r_2}^{r_3}2\frac{dt}{t}+....+\int_{r_{n-1}}^{r_n}(n-1)\frac{dt}{t}+\int_{r_n}^{r}n\frac{dt}{t}\\&=\int_0^r\frac{n(t,a,f)}{t}dt\end{aligned}$$

Proposition 1.1. *[3]*

Soit f une fonction méromorphe avec son développement de Laurent au voisinage de 0 :

$$f(z)=\sum_{j=m}^{\infty}C_jz^j\ ,\ \ C_m\neq 0\ ,z\in\mathbb{C}\ ,m\in\mathbb{Z}$$

Alors :

$$\ln|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi+N(r,f)-N(r,\frac{1}{f})$$

Preuve de la Proposition 1.1. *On considère la fonction :*

$$k(z)=f(z)z^{-m},z\in\mathbb{C}.$$

On voit que $k(0)\neq 0;\infty$ de plus $m=n(0,0,f)-n(0,\infty,f)$ et on a

si $m > 0$ *alors* $n(0,0,f) = m$ *et* $n(0,\infty,f) = 0$
si $m < 0$ *alors* $n(0,0,f) = 0$ *et* $n(0,\infty,f) = -m$
si $m = 0$ *alors* $n(0,0,f) = n(0,\infty,f) = 0.$

Donc k et f ont les mêm,e zéros et les même pôles dans le disque pointé $0 < |z| \leqslant r$. *D'après la formule de Jensen :*

$$\ln|C_m| = \ln|k(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|k(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \sum_{|a_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|b_j|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})r^{-m}\right| d\varphi - \sum_{|a_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_j|\leqslant r} \ln\frac{r}{|b_j|}$$

D'aprés le Lemme 1.2 précédent :

$$\ln|C_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - m\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \Big(n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\Big)\ln r$$

$$- \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r$$

$$- \left(\int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt + n(0,0,f)\right).$$

D'où

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).$$

Définition 1.4. *[2]* ***(fonction de proximité)***

Soit f une fonction méromorphe. Alors la fonction de proximité de f est définie par :

$$m(r,a,f) = m\left(r,\tfrac{1}{f-a}\right) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi \quad, f \not\equiv a \in \mathbb{C}$$

et

$$m\left(r,f\right)=m\left(r,\infty,f\right)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi$$

Définition 1.5. *[2] (**Fonction caractéristique**)*

Soit f une fonction méromorphe. Alors la fonction de proximité de f est définie par :

$$T\left(r,f\right)=m\left(r,f\right)+N\left(r,f\right),$$

Exemple 1.2. *Pour la fonction $f\left(z\right)=e^{\alpha z}$, $\alpha\in\mathbb{R}^{*}$, on a :*

$$n(t,\infty,f)=0 \text{ et } n(0,\infty,f)=0 \text{ alors } N(r,f)=0$$

et

$$\begin{aligned}m\left(r,f\right)&=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}\left|e^{\alpha re^{i\varphi}}\right|d\varphi=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\ln^{+}\left|e^{\alpha r\cos\varphi}\right|d\varphi=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\ln^{+}\left|e^{\alpha r\cos\varphi}\right|d\varphi\\&=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\alpha r\cos\varphi d\varphi=\tfrac{1}{2\pi}2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\alpha r\cos\varphi d\varphi=\tfrac{1}{\pi}\alpha r\sin\varphi\left.\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\tfrac{\alpha r}{\pi}\end{aligned}$$

D'où

$$T\left(r,f\right)=\tfrac{\alpha r}{\pi}$$

Corollaire 1.1. *[3] Soit f une fonction méromorphe, f est rationelle si et seulement si $T\left(r,f\right)=O\left(\ln r\right)$.*

Corollaire 1.2. *[3] Soit f une fonction entiére, f est un polynôme si et seulement si $T\left(r,f\right)=O\left(\ln r\right)$.*

Lemme 1.3. *[3] Soient $f_1,...,f_n$ des fonctions méromorphes, Alors :*

❶ $m\left(r,\sum\limits_{j=1}^{n}f_j\right)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}m\left(r,f_j\right)+\ln n$

❷ $m\left(r,\prod\limits_{j=1}^{n}f_j\right)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}m\left(r,f_j\right)$

❸ $N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} N\left(r,f_j\right)$

❹ $N\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} N\left(r,f_j\right)$

❺ $T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} T\left(r,f_j\right) + \ln n \quad \textit{pour } n \geqslant 1$

❻ $T\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} T\left(r,f_j\right) \quad \textit{pour } n \geqslant 1$

❼ $T\left(r,f^n\right) = nT\left(r,f\right) \quad , n \in \mathbb{N}^*$

Preuve de lemme 1.3. .

① .

$$m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\sum_{j=1}^{n} f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

D'après le Lemme 1.1(❻)

$$\leqslant \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{j=1}^{n} \ln^+\left|f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| + \ln n\Big) d\varphi$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\Big) + \frac{1}{2\pi}2\pi\ln n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m\left(r,f_j\right) + \ln n$$

② .

$$m\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\prod_{j=1}^{n} f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

D'après le Lemme 1.1 (❺)

$$\leqslant \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \ln^+\left|f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f_j\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m\left(r,f_j\right)$$

Si z_0 *est un pôle d'ordre* β_j *pour* f_j*, alors il est un pôle d'ordre égal au plus* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\beta_j$ *pour* $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j$ *avec* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\beta_j \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j$*. Donc*

$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} N\left(r, f_j\right)$$

③ .

Si z_0 *est un pôle d'ordre* β_j *pour* f_j*, alors il estun pôle d'ordre égal au plus* $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j$ *pour* $\prod\limits_{j=1}^{n} f_j$*.*

Donc

$$N\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} N\left(r, f_j\right)$$

④ *D'après* ❶ *et* ❷ *, on a*

$$\begin{aligned}
T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} m\left(r, f_j\right) + \ln n + \sum_{j=1}^{n} N\left(r, f_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big(m\left(r, f_j\right) + N\left(r, f_j\right)\Big) + \ln n\\
&= \sum_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right)
\end{aligned}$$

⑤ *D'après* ❸ *et* ❹ *, on a*

$$\begin{aligned}
T\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\prod_{j=1}^{n} f_j\right)\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} m\left(r, f_j\right) + \sum_{j=1}^{n} N\left(r, f_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big(m\left(r, f_j\right) + N\left(r, f_j\right)\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right)
\end{aligned}$$

⑥ *. On distingue deux cas*

Si $|f| \leqslant 1$*, alors :*

$$m\left(r, f^n\right) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f^n\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = 0 \qquad \textit{(car } |f| \leqslant 1 \Leftrightarrow |f|^n \leqslant 1\textit{)}$$

et

$$N\left(r, f^n\right) = nN\left(r, f\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) = 0 + nN\left(r, f\right) \\ &= n\Big(m\left(r, f\right) + N\left(r, f\right)\Big) = nT\left(r, f\right) \end{aligned}$$

Si $|f| > 1$, *alors :*

$$\begin{aligned} m\left(r, f^n\right) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f^n\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f^n\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \\ &= n\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = nm\left(r, f\right) \end{aligned}$$

et

$$N\left(r, f^n\right) = nN\left(r, f\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) = nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) \\ &= n\Big(m\left(r, f\right) + N\left(r, f\right)\Big) = nT\left(r, f\right) \end{aligned}$$

1.3 Premier Théorème fondamental de Nevanlinna

Théoréme* 1.4.** *[3]* ***(Premier Théorème fondamental)
Soient $a \in \mathbb{C}$ *et* f *une fonction méromorphe et soit le développement de Laurent de la fonction* $f - a$ *autour de l'origine :*

$$f\left(z\right) - a = \sum_{j=m}^{\infty} C_j z^j, \;\; C_m \neq 0,\; m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T\left(r, \tfrac{1}{f-a}\right) = T\left(r, f\right) - \ln\left|c_m\right| + \varphi\left(r, a\right),$$

où

$$\left|\varphi\left(r, a\right)\right| \leq \ln 2 + \ln^+\left|a\right|.$$

Preuve du Théorème 1.4. *On distingue deux cas pour montrer ce théorème :*

1^{er} ***cas :*** *pour* $a = 0$

D'après la Proposition 1.1, on a

$$\log\left|c_m\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta$$
$$+N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$
$$= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) = m(r,f) + N(r,f) - \log|c_m|$$
$$= T(r,f) - \log|c_m| \tag{1.3.1}$$

où $\varphi(r,a) = 0$.

2^{me} ***cas :****(cas général)* *pour* $a \neq 0$

Posons $h = f - a$. *Alors*

$$N\left(r,\frac{1}{h}\right) = N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$
$$m\left(r,\frac{1}{h}\right) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$$
$$N(r,h) = N(r,f-a) = N(r,f).$$

On a

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2. \tag{1.3.2}$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2. \tag{1.3.3}$$

En intégrant (1.3.2) *et* (1.3.3) *on aura*

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, *on obtient*

$$-(\log^+|a| + \ln 2) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2 \Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2.$$

D'après (1.3.1), *on a*

$$T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,\frac{1}{h}) = m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h})$$
$$= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m|$$
$$= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m|$$
$$= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|.$$

Où $\varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2$.

Corollaire 1.3. *[3] Soit f une fonction méromorphe. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$:*

$$T\left(r, \tfrac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \infty$$

Proposition 1.2. *[3] Soient f une fonction méromorphe et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc \neq 0$, Alors :*

$$T\left(r, \tfrac{af+b}{cf+d}\right) = T(r,f) + O(1)$$

Exemple 1.3. $f(z) = \frac{3e^z+1}{e^z+1}$

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T\left(r, \tfrac{3e^z+1}{e^z+1}\right) \\ &= T(r, e^z) + O(1) \\ &= \tfrac{r}{\pi} + O(1) \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 1.2.

Si c=0 :. *On a directement*

$$\begin{aligned} T\left(r, \tfrac{af+b}{d}\right) &= T\left(r, \tfrac{a}{d}f + \tfrac{b}{d}\right) \\ &\leqslant T\left(r, \tfrac{a}{d}\right) + T(r,f) + T\left(r, \tfrac{b}{d}\right) + \ln 2 \\ &= \ln^+\left|\tfrac{a}{d}\right| + T(r,f) + \ln^+\left|\tfrac{b}{d}\right| + \ln 2 \\ &= T(r,f) + O(1) \end{aligned}$$

Si c≠0 :*on a*

$$\begin{aligned} \tfrac{af+b}{cf+d} &= \tfrac{a(f+\frac{b}{a})}{c(f+\frac{d}{c})} = \tfrac{a}{c}\left[\tfrac{f+\frac{b}{a}+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}}\right] = \tfrac{a}{c}\left[\tfrac{f+\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} + \tfrac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}}\right] = \tfrac{a}{c}\left[1 + \tfrac{\frac{bc-da}{ac}}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \tfrac{a}{c}\left[1 + \tfrac{bc-da}{ac\left(f+\frac{d}{c}\right)}\right] = \tfrac{a}{c} + \tfrac{bc-da}{c^2\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \tfrac{a}{c} + \tfrac{bc-da}{c^2}\tfrac{1}{f+\frac{d}{c}} \end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r, \tfrac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r, \tfrac{a}{c} + \tfrac{bc-da}{c^2}\tfrac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)$$

D'aprés le lemme 1.3 (❶)

$$\begin{aligned} &\leqslant T\left(r, \tfrac{a}{c}\right) + T\left(r, \tfrac{bc-da}{c^2}\right) + T\left(r, \tfrac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \ln 2 \\ &= T\left(r, \tfrac{a}{c}\right) + T\left(r, \tfrac{bc-da}{c^2}\right) + \underbrace{T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1)}_{D'apres\ le\ corollaire 1.3} + \ln 2 \\ &= \ln^+\left|\tfrac{a}{c}\right| + \ln^+\left|\tfrac{bc-da}{ac^2}\right| + T(r,f) + \ln^+\left|\tfrac{d}{c}\right| + 2\ln 2 + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1) \end{aligned}$$

1.4 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction méromorphe ou entière

Définition 1.6. *[3](**L'ordre**)*
Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f est défini par :

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \tfrac{\log T(r,f)}{\log r}$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \tfrac{\log\log M(r,f)}{\log r}$$

où $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.1. *On définit l'ordre inférieur d'une fonction méromorphe par :*

$$\mu(f) = \lim_{r\to+\infty} inf \tfrac{\log T(r,f)}{\log r}$$

Définition 1.7. *[3](**L'hyper-ordre**)*
Soit f une fonction méromorphe, alors l'hyper-ordre de f est défini par

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \tfrac{\log\log T(r;f)}{\log r}$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \tfrac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}$$

Remarque 1.2. *On dit que la fonction f est d'ordre infini si*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = +\infty$$

Exemple 1.4. *Soit $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$.*

On a $n(t,f) = 0$, et donc $N(r,f) = 0$.

D'autre part,

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |a_n| r^n (1+o(1))\, d\theta = n\log r + O(1),$$

et comme

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = n\log r + O(1), alors\ \rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = 0$$

Lemme 1.4. *[6] Soient f et g deux fonctions entières non constantes. Alors :*

❶ $\rho(f+g) \leqslant \max\{\rho(f);\rho(g)\}$

❷ $\rho(f.g) \leqslant \max\{\rho(f);\rho(g)\}$

❸ *Si $\rho(f) < \rho(g)$, alors* $\rho(f+g) = \rho(g)$ *et* $\rho(f.g) = \rho(g)$

Lemme 1.5. *[3] Si f est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{C}$, alors*

$$\rho\left(f^{(k)}\right) = \rho(f) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

1.5 L'exposant et L'hyper-exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.8. *[3] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par :*

$$\lambda(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right) - n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r,$$

et $n\left(t,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

et on définit l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

où

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r$$

et $\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

On définit l'hyper-exposant de convergence des zéros de la fonction f par :

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r,\frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

et l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par :

$$\overline{\lambda_2}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

Définition 1.9. *[3] (**La mesure linéaire et la mesure logarithmique**)*
Supposons que $E \subset [1, +\infty[$, *on définit la mesure linéaire de l'ensemble* E *par :*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt$$

et la mesure logarithmique par :

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)\frac{dt}{t}$$

où $\chi_E(t)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E*.*

Définition 1.10. *[4](**La densité supérieure et inférieure**)*
On définit la densité supérieure et inférieure respectivement de l'ensemble E *par :*

$$\overline{dens}E = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m(E \cap [1, r])}{r},$$

$$\underline{dens}E = \lim_{r\to+\infty} \inf \frac{m(E \cap [1, r])}{r}.$$

Exemple 1.5. *Soit l'ensemble* $E = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$

① *La mesure linéaire de* E *est*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_e^{e^4} dt = e(e^3 - 1).$$

② *La mesure logarithmique de l'ensemble de* E *est*

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)\frac{dt}{t} = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

③ *La densité supérieure de l'ensemble de* E *est*

$$\overline{dens}E = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m(E \cap [1, r])}{r} = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m([e, e^4] \cap [1, r])}{r} = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{m([e, e^4])}{r} = 0.$$

Définition 1.11. *[13] Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction entière, on définit le terme maximal de la fonction* f *par :*

$$\mu(r) = \max_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$$

Définition 1.12. *[13] Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction entière, on définit l'indice central de la fonction* f *par :*

$$\nu_f(r) = \max\{m : |a_m| r^m = \mu(r)\}$$

1.6 Deuxiéme Théorème fondamental de Nevanlinna

Lemme 1.6. *[2]**(lemme de la dérrivée logarithmique)** Soient* f *une fonction méromorphe non constante et* $k \in \mathbb{N}$*, Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f),$$

où $S(r,f) = O\left(\log r + \log T\left(r,f\right)\right)$ *à l'extérieur d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty[$*de mesure linéaire finie.*

Si f *est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).\left(r \to \infty\right).$$

Lemme 1.7. *[3] Soit* f *une fonction méromorphe non constante sur* $|z| < R$ *et* a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ *des nombres complexes finis distincts. Alors l'égalité*

$$m\left(r, \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{f - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + O\left(1\right) \tag{1.6.1}$$

est vrai pour $0 < r < R$.

***Théoréme* 1.5.** *[3]**(Deuxiéme Théorème fondamental)** Soient* f *une fonction mérom-porphe non-constante dans le disque* $|z| < R$ *et* a_j $(j = 1, 2, ..., q)$ *des nombres complexes finis distincts. Alors pour* $0 < r < R$*, on a*

$$m\left(r, f\right) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) \leq 2T\left(r, f\right) - N_1\left(r\right) + S\left(r, f\right) \tag{1.6.2}$$

où

$$N_1\left(r\right) = 2N\left(r, f\right) - N\left(r, f'\right) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \tag{1.6.3}$$

et

$$S(r,f) = m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{f'}{f-a_j}\right) + O(1) \tag{1.6.4}$$

Preuve du Théorème 1.5. *On onsidère la fonction*

$$g(z) = \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f(z)-a_j}.$$

D'après le Lemme 1.7, on a

$$m(r,g) = \sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right) + O(1), \tag{1.6.5}$$

d'autre part, on a

$$m(r,g) \leqslant m(r,f'g) + m\left(r,\frac{1}{f'}\right).$$

$$\leqslant m(r,f'g) + T(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + O(1) \tag{1.6.6}$$

d'aprés le Corollaire 1.3.

Et on a

$$T(r,f') = m(r,f') + N(r,f')$$

$$\leqslant m(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f')$$

$$\leqslant T(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N(r,f). \tag{1.6.7}$$

On remplace (1.6.7) dans (1.6.6) on obtient

$$m(r,g) \leqslant m(r,f'g) + T(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + O(1),$$

et d'aprés (1.6.5)

$$\sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right) + T(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

$$+N(r,f') - N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + O(1)$$

On rajoute $m(r,f)$

$$m(r,f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right) \leqslant m(r,f) + \sum_{j=1}^{q} m\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right) + T(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+N\left(r,f'\right)-N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O\left(1\right)\\
&=T(r,f)-N(r,f)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right)+T\left(r,f\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\\
&+N\left(r,f'\right)-N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+O\left(1\right)\\
&=2T(r,f)-2N(r,f)+N\left(r,f'\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right)+T\left(r,f\right)+O\left(1\right)\\
&=2T\left(r,f\right)-N_1\left(r\right)+S\left(r,f\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
m\left(r,f\right)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)\leqslant 2T\left(r,f\right)-N_1\left(r\right)+S\left(r,f\right),
$$

Chapitre 2

Ordre de croissance des solutions des équations differéntielles linéaires

Au cours des dernières dècennies, de nombreux chercheurs ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre de type :

$$f'' + h_1(z)e^{P_1(z)}f' + h_0(z)e^{P_0(z)}f = H, \tag{2.1.1}$$

où $P_j(z)$ $(j = 0, 1)$ sont des polynômes non constants, et $h_j(z)$ $(j = 0, 1)$ sont des fonctions entières non identiquement nulles telles que $\rho(h_j) < \deg P_j$, H est une fonction entière.

Gundersen [5] a prouvé que si $\deg P_1 \neq \deg P_0$, alors toute solution non constante de l'équation $(2.1.1)$ est d'ordre infini, mais si $\deg P_1 = \deg P_0$, alors l'équation $(2.1.1)$ peut avoir des solutions non constantes d'ordre fini.

2.1 L'ordre de croissance des solutions des équations differéntielles linéaires homogène.

Chen [7] a également étudié le problème de la croissance des solutions des équations differéntielles linéaires homogène, pour $\deg P_1 = \deg P_0 = 1$, et il a obtenu le résultat suivant :

Théorème. $\mathcal{A}$ *[7] Soient a,b des constantes complexes non nulles avec $a \neq b$, et $h_j(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières avec $\rho(h_j) < 1$ $(j = 0, 1)$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$f'' + h_1(z)e^{az}f' + h_0(z)e^{bz}f = 0, \tag{2.1.2}$$

est d'ordre infini et son hyper-ordre $\rho_2(f) = 1$.

Li Chunhong et Huang Xiaojun [8] ont généralisé ce résultat pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_1f' + A_0f = 0, \tag{2.1.3}$$

où $k \geqslant 2$, $A_j = h_j(z)e^{a_jz}$ $(j = 0; ...; k-1)$, et ils ont obtenu :

Théorème. $\mathcal{B}$ *[8] Soeint $h_j(z) \not\equiv 0$ des fonctions entières avec $\rho(h_j) < 1$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ et a_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ des constantes complexes non nulles satisfaisant $a_j = c_j a_0$ oú $c_j > 0$, et si $k = 2$, $c_{k-1} > 1$, et si $k \geqslant 2$, $c_{k-1} > m$ (où $m = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k-2} c_j$), alors toute solution transcendante de l'équation (2.1.3) est d'ordre infini.*

Maintenant, on cherche à améliorer ce résultat dans le théorème suivant, on réduit la condition "$c_{k-1} > m$ (où $m = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k-2} c_j$)" à "$\exists\, a_s$ tel que $a_j = c_j a_s$ oú $0 < c_j < 1$" et on suprime la condition "$h_j(z) \not\equiv 0$" (permis $h_j(z) = 0$ si $j \neq s$) :

***Théoréme* 2.1.** *Soit $A_j(z) = h_j e^{a_j z}$, où $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entières avec $\rho(h_j) < 1$, et a_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des constantes complexes. Supposons qu'il existe un coefficient $A_s(z) = h_s e^{a_s z}$ $_s$ tel que $h_s \not\equiv 0$ et pour $j \neq s$: si $A_j \not\equiv 0$ on a $a_j = c_j a_s$ oú $0 < c_j < 1$, et si $A_j = 0$ on définit $c_j = 0$. Alors toute solution transcendante de l'équation (2.1.3) satisfait $\rho(f) = \infty$.*

De plus, si $\max\{c_1; ...; c_{s-1}\} < c_0$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.3) est d'ordre infini.

Exemple 2.1. *Soient les deux équations différentielles suivantes :*

① .

$$f'' + z^2 e^{\frac{1}{4}iz} f' + (z^2 + 3z) e^{\frac{1}{2}iz} f = 0.$$

Il existe $a_s = a_0 = \frac{1}{2}i$ donc $c_1 = \frac{1}{2}$ et alors $a_1 = \frac{1}{2}a_0$ et $\rho(z^2) = \rho(z^2 + 3z) = 0 < 1$.
Donc les conditions du Théoréme 2.1 sont vérifiées, alors toute solution transcendante satisfait $\rho(f) = \infty$.

② .

$$f^{(4)} + e^{\frac{1}{2}iz} f^{(3)} + (z^2 + z) e^{\frac{1}{8}iz} f'' + e^{\frac{1}{6}iz} f' + z^3 e^{\frac{1}{4}iz} f = 0$$

On a : $\exists\ a_s = a_3 = \frac{1}{2}i$ et $c_3 = \frac{1}{2}$ tel que $a_0 = \frac{1}{2}a_3$ et $a_1 = \frac{1}{3}a_3$ et $a_2 = \frac{1}{4}a_3$, $\rho(z^3) = \rho(z^2 + 3z) = 0 < 1$
Donc les condition, du Théoréme 2.1 sont vérifiées. Alors toute solution transcendante satisfait $\rho(f) = \infty$.
De plus on a $\max\{c_1; ..; c_{s-1}\} = \max\{c_1; c_2\} = \max\{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\} = \frac{1}{3} < c_0 = \frac{1}{2}$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ est d'ordre infini.

Avant de prouver le Théorème 2.1, on a besoin d'utiliser les lemmes suivants :

Lemme 2.1. *[5] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ et $H = \{(k_1, j_1); ...; (k_m, j_m)\}$ $(i = 1; ...; m)$ un ensemble fini de points distincts entiers vérifiant$k_i > j_i \geqslant 0$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $z = re^{i\theta}$avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$ et pour tout $(k, j) \in H$, on ait*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho - 1 + \epsilon)} \tag{2.1.4}$$

Lemme 2.2. *([11]). Soit* $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $(a_n = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $n \geqslant 1$ *et* $h(z) \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\rho(h) < n$. *Soit* $f(z) = h(z)\ e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta\ (P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire finie telle que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E \cup E_0)$, *où* $E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta\ (P, \theta) = 0\}$ *est un ensemble fini, il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *les assertions suivantes sont vérifiées :*

❶ *Si* $\delta\ (P, \theta) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \tag{2.1.5}$$

❷ *Si* $\delta\ (P, \theta) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \leq |f(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\ \delta\ (P, \theta)\ r^n\} \tag{2.1.6}$$

Remarque 2.1. *Dans la preuve du Théoréme 2.1, nous devons spécifier le Lemme 2.2 pour* $n = 1$, *donc* $P(z)$ *devient* $P(z) = az$ *et* $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$ *devient* $\delta(P, \theta) = \cos(\theta + \varphi)$.

Nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Soit la fonction* $h(z)e^{a(z)}$, *où* $h(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière avec* $\rho(h) = \alpha < 1$, *et* $a = de^{i\varphi}$ $(d > 0, \varphi \in [0, 2\pi))$, *on pose* $(E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\theta + \varphi) = 0\}$, *alors pour tout* ε $(0 < \varepsilon < 1 - \alpha)$, *il existe un ensemble de mesure linéaire nulle, si* $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E \cup E_0)$, *on a pour tout* r *suffisamment grand :*

❶ *Si* $\cos(\theta + \varphi) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon) dr \cos(\theta + \varphi)\} \leqslant |h(z)e^{a(z)}| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon) dr \cos(\theta + \varphi)\} \tag{2.1.7}$$

❷ *Si* $\cos(\theta + \varphi) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon) dr \cos(\theta + \varphi)\} \leqslant |h(z)e^{a(z)}| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon) dr \cos(\theta + \varphi)\} \tag{2.1.8}$$

Lemme 2.4. *Soit* $f(z)$ *une fonction entière, supposons que* $|f^m(re^{i\theta})|$ *n'est pas bornée sur un certain rayon* $\{z : argz = \theta\}$, *alors il existe une suite infinie de points* $\{z_n = r_n e^{i\theta}; n = 1; ...\}$, *où* $r_n \to \infty$ *telle que* $f^m(re^{i\theta}) \to \infty$ *et*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^m(z_n)} \right| \leq |z_n|^{m-j}(1 + o(1)), \qquad (j = 0, ..., m-1) \tag{2.1.9}$$

quand $n \to \infty$.

Lemme 2.5. *[10] Soit* $f(z)$ *une fonction entière avec* $\rho(f) = \rho < \infty$. *Supposons qu'il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout rayon* $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E$,

$$\log^+\ |f(re^{i\theta})| \leq Mr^{\alpha} \tag{2.1.10}$$

où M *est une constante positive dépendant de* θ *et* α *une constante positive indépendante de* θ. *Alors* $\rho(f) \leq \alpha$.

Preuve du Théorème 2.1. *On montre que* $\rho(f) = \infty$, *on suppose que* $\rho(f) < \infty$, *on pose* $z = re^{i\theta}$ *et* $a_s = de^{i\varphi}$, *alors* $|e^{a_s z}| = e^{rd\cos(\theta+\varphi)}$,*et pour* $j \neq s$, $a_j = c_j de^{i\varphi}$, $|e^{a_j z}| = e^{c_j rd\cos(\theta+\varphi)}$, *posons* $m = max\{c_j; j \neq s\}$, $(0 \leqslant m < 1)$. *d'après le Lemme 2.1, il existe un ensemble* $E_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle tel que pour tout* $z = re^{i\theta}$ *avec* $|z|$ *suffisamment grand et* $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, *on ait :*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq |z|^M, \quad (j = s+1; ...; k), \tag{2.1.11}$$

où M *est une constante positive, pour* $h_s \not\equiv 0$ *et* $\rho(h_s) < 1 (j = 1; ...; k-1)$, *d'aprés le Lemme 2.2, il existe* $E_2 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, et pour* $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(E_1 \cup E_2 \cup E_0)(E_0 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \cos(\theta+\varphi) = 0\}$, E_0 *est un ensemble fini), pour tout* $\varepsilon(0 < 3\varepsilon < 1-c)$, *on a pour tout* r *suffisamment grand :*

1. *Si* $\cos(\theta + \varphi) > 0$, *alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\} \leqslant |H_s(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\} \tag{2.1.12}$$

et

$$|H_j(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\} \quad (j \neq s) \tag{2.1.13}$$

2. *Si* $\cos(\theta+\varphi) < 0$ *et* $H_j \not\equiv 0$, *alors*

$$|H_s(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\} \tag{2.1.14}$$

et

$$|H_j(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\} \quad (j \neq s) \tag{2.1.15}$$

1^{er} ***cas*** $\cos(\theta+\varphi) > 0$ *: On montre que* $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ *est bornée sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$. *Si* $|f^{(s)}(re^{i\theta})|$ *n'est pas bornée sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$, *alors d'aprés le Lemme 2.3, il existe une suite infinie des points* $\{z_q = r_q e^{i\theta}; n = 1; ...\}$, *telle que quand* $q \to \infty$, *on a* $r_q \to \infty$, $f^{(s)}(z_q) \to \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \leq |z_q|^{s-j}(1+o(1)), \qquad (j = 0, ..., s-1), \tag{2.1.16}$$

On remplace (2.1.11) - (2.1.13), et (2.1.16) dans (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon)dr_q\cos(\theta+\varphi)\} \leqslant |H_s(z_q)| &\leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(s)}(z_q)}\right| + ... + \left|H_{s+1}(z_q)\frac{f^{(s+1)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \\ &+ \left|H_{s-1}(z_q)\frac{f^{(s-1)}(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| + ... + \left|H_0(z_q)\frac{f(z_q)}{f^{(s)}(z_q)}\right| \\ &\leqslant k\exp\{(1+\varepsilon)mdr_q\cos(\theta+\varphi)\}|z_q|^M \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

et d'aprés (2.1.17), on obtient

$$\exp\{\frac{1}{3}(1-m)dr_q\cos(\theta+\varphi)\} \leqslant r_q^M \tag{2.1.18}$$

C'est une contradiction, donc $|f^{(s)}(re^{i\theta})| \leqslant M$ *sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$, *donc on peut facilement obtient*

$$|f^{(s)}(re^{i\theta})| \leqslant Mr^k \tag{2.1.19}$$

sur $\{z : argz = \theta\}$.

2^{eme} ***cas*** $\cos(\theta+\varphi) < 0$: *d'après (2.1.3) nous obtenons*

$$-1 = H_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + H_s(z)\frac{f^{(s)}(z)}{f^k(z)} + ... + H_0(z)\frac{f(z)}{f^k(z)} \tag{2.1.20}$$

On montre que $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ *est bornée sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$. *Si* $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ *n'est pas bornée sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$, *alors d'après le Lemme 2.3, il existe une suite infinie de points* $\{z_q = r_q e^{i\theta}; n = 1; ...\}$, *telle que quand* $q \to \infty$, *on a* $r_q \to \infty$, $f^{(s)}(z_q) \to \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leqslant |z_n|^{k-j}(1+o(1)), \qquad (j = 0, ..., k-1), \tag{2.1.21}$$

d'après (2.1.14) et (2.1.21) on a quand $q \to \infty$

$$\left|H_s(z_q)\frac{f^{(s)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\}r_q^{k-s}(1+o(1)) \to 0 \tag{2.1.22}$$

Si $H_j \neq 0$ $(j \neq s)$ *alors d'après (2.1.15) et (2.1.21) et* $c_j > 0$, *on a quand* $q \to \infty$

$$\left|H_j(z_q)\frac{f^{(j)}(z_q)}{f^{(k)}(z_q)}\right| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)dr\cos(\theta+\varphi)\}r_q^{k-j}(1+o(1)) \to 0, \tag{2.1.23}$$

On remplace (2.1.22) et (2.1.23) dans (2.1.20), on obtient

$$1 \leqslant 0 \tag{2.1.24}$$

C'est une contradiction, donc $|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leqslant M$ *sur le rayon* $\{z : argz = \theta\}$, *donc*

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leqslant Mr^k \tag{2.1.25}$$

sur $\{z : argz = \theta\}$.

D'après le Lemme 2.5, en combinant (2.1.19) et (2.1.25), et le fait que $E_1 \cup E_2 \cup E_0$ *a une mesure lnéaire nulle, on sait que* $f(z)$ *est polynômiale, ce qui contredit notre supposition, donc* $\rho(f) = \infty$.

En outre, supposons que f *est une solution polynômiale de l'équation (2.1.3) de degré* n, *si* $n \geqslant s$, *alors on prend* $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E_1 \cup E_2 \cup E_0$ *satisfaisant* $\cos(\theta+\varphi) > 0$, *alors pour tout* ε_1 $(0 < 3\varepsilon_1 < \min\{1-m, m_0 - m'\}(m' = max\{c_1; ...; c_{s-1}\} < m_0))$, *d'après (2.1.3) et le Lemme 2.3 on a*

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon_1)dr\cos(\theta+\varphi)\}r^{m-s} &\leqslant |h_s(re^{i\theta})f^{(s)}(re^{i\theta})|e^{dr\cos(\theta+\varphi)} \\ &= |H_s(re^{i\theta})f^{(s)}(re^{i\theta})| \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

$$\leqslant \sum_{j\neq s} |h_j(re^{i\theta})f^{(j)}(re^{i\theta})|e^{c_j dr\cos(\theta+\varphi)}$$
$$\leqslant kr^m \exp\{(1+\varepsilon_1)mdr\cos(\theta+\varphi)\},$$

d'aprés (2.1.26) on obtient

$$\exp\{\frac{1}{3}(1-m)dr\cos(\theta+\varphi)\} \leqslant r^s, \tag{2.1.27}$$

c'est une contradiction.

Si $m < s$, on prend θ comme ci-dessus, d'après (2.1.3) et le Lemme 2.3 on a

$$\exp\{(1-\varepsilon_1)m_0 dr\cos(\theta+\varphi)\}r^{m-s} \leqslant |H_0(re^{i\theta})f^{(s)}(re^{i\theta})|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{s-1} |H_j(re^{i\theta})f^{(j)}(re^{i\theta})| \tag{2.1.28}$$
$$\leqslant (s-1)\exp\{(1+\varepsilon_1)m'dr\cos(\theta+\varphi)\}$$

et

$$\exp\{\frac{1}{3}(m_0-m')dr\cos(\theta+\varphi)\} \leqslant s-1 \tag{2.1.29}$$

c'est une contradiction, de plus, si $\max\{c_1;...;c_{s-1}\} < c_0$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.3) est d'ordre infini.

2.2 L'ordre de croissance des solutions des équations différentielles linéaires non homogènes

Quelques années après Chen, exactement en 2008, Wang et Laine [9] ont étudié l'équation différentielle linéaire non homogène

$$f'' + h_1(z)e^{az}f' + h_0(z)e^{bz}f = H, \tag{2.2.1}$$

et ils ont obtenu :

Théorème. $\mathcal{C}$ *[9] Soient a,b des constantes complexes telles que $ab \neq 0$ et $h_j(z) \not\equiv 0$ et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières avec $\rho(h_j) < 1$ $(j = 0, 1)$, Alors toute solution non trivale f de l'équation (2.2.1) est d'ordre infini.*

Considérons maintenant l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre supérieur :

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_1(z)e^{P_1(z)}f' + h_0 e^{P_0 z}(z)f = H \tag{2.2.2}$$

où $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, on pose $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ telle que h_j et $H \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini, Il est clair que *toutes les solutions de l'équation* (2.2.2) *sont des fonctions entières, et si certains des coefficients sont des fonctions transcendantes, alors la plupart des solutions de l'équation* (2.2.2) *sont d'ordre infini.*

Question : *Quelles sont les conditions sur* $A_j(z)$ *et* H *qui nous garantissent que chaque solution de l'équation* (2.2.2) *est d'ordre infini.*

Wang et Laine [10] ont étudié le problème et ont dèmontré les résultats suivants :

***Théoréme* 2.2.** *[10] Soit* $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$ $(j = 0, ...k-1)$, *où* $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}$ *sont des polynômes de degré* $n \geqslant 1$, $h_j(z)$ *sont des fonctions entières non nulles d'ordre strictement inférieur à* n, *et* $H \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\rho(H) < n$. *Si les nombres complexes* $a_{jn}(j = 0, ...k-1)$ *sont distincts, alors toute solution de l'équation* (2.2.2) *est d'ordre infini.*

Exemple 2.2. *Considérons l'équation différentielle :*

$$f^{(4)} + (z^3 - z)e^{3z^4}f(3) + e^{5iz^4}f' + e^{z^4}f = e^{z^3}$$

on a : $n = 4$; $\rho(z^3 - z) = 0$ *et* $\rho(e^{z^3}) = 3 < 4$ *;* $a_{34} = 3$, $a_{14} = 5i$, $a_{04} = 1$. *Donc, les conditions du Théoréme 2.2 sont vérifiées. Alors toute solution de l'équation* (2.2.2) *est d'ordre infini.*

Lemme 2.6. *[13] Supposons que* $f_1(z)$, $f_2(z), ...,$ $f_n(z)$ $(n \geqslant 2)$ *sont des fonctions méromorphes et* $g_1(z)$, $g_2(z), ...,$ $g_n(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivantes :*

❶ $\sum_{j=1}^{n} f_j(z)e^{g_j(z)} \equiv 0$

❷ $g_j(z) - g_k(z)$ *ne sont pas constantes pour* $1 \leq j < k \leq n$,

❸ *pour* $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, e^{g_h - g_k})\}, (r \to \infty, r \notin E) \tag{2.2.3}$$

où E *est un ensemble de mesure linéaire finie*
Alors

$$f_j \equiv 0 \quad (j = 1, 2, ...n) \tag{2.2.4}$$

Lemme 2.7. *[13] Supposons que* $f_1(z)$, $f_2(z), ...,$ $f_n(z)$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes linéairement indépendantes vérifiant l'égalité suivante :*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \equiv 1 \tag{2.2.5}$$

Alors pour $1 \leq j \leq n$, *on a*

$$T(r, f_j) \leq \sum_{j=1}^{k} N(r, \frac{1}{f_k}) + N(r, f_j) + N(r, D) - \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k) - N(r, \frac{1}{D}) + S(r) \tag{2.2.6}$$

où D est le déterminant Wronskien $W(f_1, f_2, ..., f_n)$,

$$S(r) = o(\max_{1 \leq k \leq n} \{T(r, f_k)\}), (r \to \infty, r \notin E) \tag{2.2.7}$$

E est un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 2.8. *Soit f(z) une fonction entière, supposons que*

$$G(z) = \frac{\log^+ \left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^\rho} \tag{2.2.8}$$

n'est pas bornée sur un certain rayon $\arg z = \theta$ *avec une constante $\rho > 0$. Alors il existe une suite infinie de points $\{z_n = r_n e^{i\theta}\}$ $(n = 1, 2, ...)$, où $r_n \to \infty$ telle que $G(z) \to \infty$ et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leqslant \frac{1}{(k-j)!}(1 + o(1))r_n^{k-j}, \quad j = 0, ..., k-1 \tag{2.2.9}$$

quand $n \to \infty$.

Preuve du Théorème 2.2. *Supposons que f est une solution de* (2.2.2)*avec $\rho(f) = \rho < \infty$. Alors $n \leq \rho$, si $f^{(k)} = H$, on peut appliquer le Lemme* 2.6 *pour conclure que $h_s f^{(s)} \equiv 0$ pour un certain s $(0 \leq s \leq k-1)$ tel que $h_s \not\equiv 0$, Alors f est un polynôme de degré inférieur à s et donc $H \equiv 0$, c'est une contraduction. Ainsi on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$. Par le Lemme* 2.7*, il facile de voir que $n \leq \rho$ puisque les fonctions exponentielles $e^{p_j}(j = 0, 1, ..k-1)$ sont linéairement indépendantes. D'après le Lemme* 2.2*, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire tel que à si $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$, alors $\delta(P_j, \theta) \neq 0$ pour tout $0 \leq j \leq k-1$ et $\delta(P_j - P_i, \theta) \neq 0$ pour tout i, j avec $0 \leq i < j \leq k-1$, si $z = re^{i\theta}$ avec r assez grand, alors chaque $A_j(z)$ vérifie les deux inégalités* (2.1.5) *ou* (2.1.6)*.*
D'après le Lemme 2.1*, on a*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\rho}, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant k, \tag{2.2.10}$$

Comme les a_{jn} sont distincts, alors pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$ fixé, il existe précisément un $s \in \{0, ..., k-1\}$ tel que

$$\delta(P_s, \theta) = \delta := \max\{\delta(P_j, \theta) \mid j = 0, ..., k-1\} \tag{2.2.11}$$

On note $\delta_1 = \max\{\delta(P_j, \theta) \mid j \neq s\}$, alors $\delta_1 < \delta$ et $\delta \neq 0$, on discute maintenant deux cas :

1*er* ***cas*** *Supposons tout d'abord que $\delta > 0$, d'après le Lemme* 2.2*, pour tout ε donné avec $0 < 3\varepsilon < \min\{(\delta - \delta_1) \backslash \delta, n - \rho(H)\}$, on a*

$$|A_s(re^{i\theta})| \geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\} \tag{2.2.12}$$

et

$$|A_j(re^{i\theta})| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\delta_1 r^n\} \tag{2.2.13}$$

pour $j \neq s$ et r suffisamment grand, on va maintenant montrer que

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.2.14}$$

est bornée sur le rayon $\{z : \arg z = \theta\}$. En supposant le contraire, alors d'aprés le lemme 2.8, il y a une suite des points $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ telle que $r_m \to +\infty$, et

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z_m)|}{r_m^{\rho(H)+\varepsilon}} \to \infty, \tag{2.2.14}$$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leqslant (1+o(1))r_m^{s-j}, \quad j = 0, ...s-1, \tag{2.2.15}$$

D'après (2.2.14) et la définition de l'ordre, il est facile de voir que

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \to 0 \tag{2.2.16}$$

pour m assez grand, de (2.2.2), on obtient

$$|A_s(z_m)| \leqslant \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_{s+1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + |A_{s-1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|$$

$$+ ... + |A_0(z)| \left|\frac{f'(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \left|\frac{H(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \tag{2.2.17}$$

En utilisant (2.2.10), (2.2.12) et (2.2.13), (2.2.15), et la limite (2.2.16), on conclut de l'inégalité précédente que

$$\exp\{(1-\varepsilon_1)\delta r_m^n\} \leqslant (k+1)\exp\{(1+\varepsilon_1)\delta_1 r_m^n\} r_m^M, \tag{2.2.18}$$

où $M > 0$ est une constante bornée, ce qui est une contradiction, par conséquent,

$$\frac{\log^+ |f^{(s)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.2.19}$$

est bornée, et on a $|f^{(s)}(z)| \leq M\exp\{r^{\rho(H)+\varepsilon}\}$ sur le rayon $\{z : \arg z = \theta\}$, par le même raisonnement que dans la preuve du ([12], lemme 3.1), on peut immédiatement conclure que

$$|f(z)| \leqslant (1+o(1))r^s |f^{(s)}(z)| \leqslant (1+o(1))Mr^s e^{r^{\rho(H)+\varepsilon}} \leqslant Me^{r^{\rho(H)+2\varepsilon}} \tag{2.2.20}$$

sur le rayon. $\arg z = \theta$.

2^{eme} ***cas*** *Supposons maintenant que $\delta < 0$, de (2.2.2), on a*

$$-1 = A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(k)}} + ... + A_j\frac{f^{(j)}}{f^{(k)}} + ... + A_0\frac{f}{f^{(k)}} - \frac{H}{f^{(k)}}, \tag{2.2.21}$$

D'après le Lemme 2.2, on a pour tout ε donné avec $0 < 3\varepsilon < \min\{1, n-\rho(H)\}$, on a

$$|A_j(re^{i\theta})| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta r^n\} \quad (j = 0, 1, ..., k-1) \tag{2.2.22}$$

*pour r assez grand, comme dans le 1^{er} **cas**, on montre que*

$$\frac{\log^+ |f^{(k)}(z)|}{|z|^{\rho(H)+\varepsilon}} \tag{2.2.23}$$

est bornée sur le rayon $\{z : \arg z = \theta\}$*, supposons le contraire, de même que dans le* 1^{er} ***cas****, il résulte du lemme 2.8 qu'il existe une séquence de points* $\{z_m = r_m e^{i\theta}\}$ *telle que*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leqslant r_m^{k-j}(1+o(1)) \quad (j = 0, ...k-1), \tag{2.2.24}$$

$$\left|\frac{H(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \to 0, \tag{2.2.25}$$

pour m *assez grand. En substituant les inégalités (*2.2.22*) et (*2.2.24*), (*2.2.25*) dans (*2.2.21*), on trouve immédiatement une contradiction, Par conséquent, on a* $|f^{(k)}(z)| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\}$ *sur le rayon* $\{z : \arg z = \theta\}$*, ce qui implique comme dans le* 1^{er} ***cas*** *que*

$$|f(z)| \leq M \exp\{r^{\rho(H)+2\varepsilon}\}, \tag{2.2.26}$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$*, avec* E *est de mesure linéaire nulle, on obtient (*2.2.26*) sur le rayon* $\{z : \arg z = \theta\}$ *à condition que* r *soit suffisamment grand, alors d'après le Lemme 2.5,* $\rho(f) \leq \rho(H) + 2\varepsilon < n$*, c'est une contraduction, donc toute solution transcendante de* (2.2.2) *est d'ordre infini.*

Théoréme 2.3. *[10] Soit* $A_j(z) = h_j(z)e^{P_j(z)}$ $(j = 0, ...k-1)$*, où* $P_j(z) = a_{jn}z^n + ... + a_{j0}$ *sont des polynômes de degré* $n \geq 1$*,* $h_j(z)$ *sont des fonctions entières non nulles d'ordre strictement inférieur à* n*, et* $H \not\equiv 0$ *une fonction entière avec* $\rho(H) < n$*, supposons qu'il existe deux coefficients* $A_s(z) = h_s(z)e^{P_s(z)}$ *et* $A_t(z) = h_t(z)e^{P_t(z)}$ *tels que* $a_{sn} = |a_{sn}|e^{i\theta_s}$ *et* $a_{tn} = |a_{tn}|e^{i\theta_t}$ *oú* $0 \leqslant s < t \leqslant k-1$ $\theta_s, \theta_t \in [0, 2\pi)$*,* $\theta_s \not\equiv \theta_t$*,* $h_s h_t \not\equiv 0$*, et pour tout* $j \not\equiv s, t$*,* $a_{jn} = d_j a_{sn}$ *où* $0 < d_j < 1$*, ou* $a_{jn} = d_j a_{tn}$ $(0 < d_j < 1)$*. Alors toute solution transcendante de l'équation* (2.2.2) *est d'ordre infini.*

Exemple 2.3. *Soient les deux équations différentielles suivantes*

①

$$f^{(3)} + \cos(z)e^{iz^4}f'' + \sin(z)\Big(e^{3iz^4}f' + e^{2iz^4}f\Big) = e^{z^2}$$

On a : $n = 4$ $\rho(e^{z^2}) = 2$ *;* $\rho(\cos(z)) = \rho(\sin(z)) = 1 < 4$ *;* $\exists\, a_{sn} = a_{04} = 2i$ *et* $a_{tn} = a_{14} = 3i$ *tels que* $a_{24} = \frac{1}{2}a_{04}$*, ou* $a_{24} = \frac{1}{3}a_{14}$*.*
Donc les conditions du Théoréme 2.3 sont vérifiées, alors toute solution transcendante est d'ordre infini.

②

$$f^{(4)} + 3ze^{\frac{3i}{2}z^3 - z}f^{(3)} + e^{\frac{i}{2}z^3 + z^2 + 1}f'' + z^3e^{4iz^3 - 2}f' + ze^{iz^3}f = z^3$$

On a : $n = 3$ $\rho(z) = \rho(3z) = \rho(z^3) = 0 < 3$*,* $\exists\, a_{sn} = a_{13} = 4i$ *et* $a_{tn} = a_{33} = \frac{3i}{2}$ *tels que* $a_{03} = \frac{1}{4}a_{13}$ *et* $a_{23} = \frac{1}{8}a_{13}$*, ou* $a_{03} = \frac{2}{3}a_{33}$ *et* $a_{23} = \frac{1}{3}a_{33}$
Donc les conditions du Théoréme 2.3 sont vérifiées, alors toute solution transcendante est d'ordre infini.

Preuve du Théorème 2.3. *Supposons que f est une solution transcendante de l'équation* (2.2.2) *avec $\rho(f) = \rho < \infty$.*

Si $\rho < n$, alors il résulte de (2.2.2) *que*

$$f^{(t)}h_t e^{P_t(z)} + f^{(s)}h_s e^{P_s(z)} + \sum_{u=1}^{p} B_u(z)e^{d_{ju}P_t(z)} + \sum_{v=1}^{q} C_v(z)e^{d_{jv}P_s(z)} = F(z) \tag{2.2.26}$$

où $B_u(u = 1, ..., p)$, $C_v(v = 1...q)$ sont des fonctions entières d'ordre strictement inférieur à n, En rassemblant les termes du même type, si nécessaire, alors on peut supposer que les coefficients $d_{ju}(u = 1, ..., p)$ respectivement $d_{jv}(v = 1, ...q)$ sont distincts et étant donné que $\theta_s \neq \theta_t$ et $\theta_s, \theta_t \in [0, 2\pi)$, on peut conclure que $d_{ju}P_t(z) - d_{jv}P_s(z)$ sont des polynômes de degré n. En effet, si $d_{ju}a_{tn} = d_{jv}a_{sn}$, on a

$$0 < \frac{d_{ju}}{d_{jv}} \left|\frac{a_{tn}}{a_{sn}}\right| = e^{i(\theta_s - \theta_t)} \tag{2.2.27}$$

ce qui est impossible.

De même, $P_t(z) - P_s(z), P_t(z) - d_{jv}P_s(z)$ et $P_s(z) - d_{ju}P_t(z)$ sont également des polynômes de degré n. Par conséquent, en appliquant le Lemme 2.6 *à* 2.2.26*, on déduit que $f^{(t)}h_t \equiv f^{(s)}h_s \equiv 0$, comme $h_s h_t \not\equiv 0$, alors f doit etre un polynôme de degré inférieur à s, donc $H \equiv 0$, c'est une contradiction.*

Par conséquent, on peut supposer que $f^{(k)} \not\equiv H$, D'après le Lemme 2.7*, si $f^{(k)} \neq H$, alors $n \leqslant \rho$ puisque les fonctions exponetielles e^{P_t}, e^{P_s}, $e^{d_{ju}P_t}$ $(u = 1, 2, ..., p)$ et $e^{d_{jv}P_s}$ $(v = 1, 2, ..., q)$ sont linéairement indépendantes.*

Comme $\theta_s \neq \theta_t$, d'après les Lemmes 2.1 *et* 2.2*, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in E\backslash[0, 2\pi)$, les $A_j(re^{i\theta})$ vérifient* (2.1.5) *ou* (2.1.6)*,* (2.2.10) *sont vérifiées et*

$$\delta(P_s, \theta) \neq \delta(P_t, \theta), \qquad \delta_2 := \max\{\delta(P_s, \theta), \delta(P_t, \theta)\} \neq 0 \tag{2.2.28}$$

on applique aussi les notations δ, δ_1 trouvées dans la démonstation du Théorème 2.2.

1^{er} ***cas*** *Tout d'abord supposons que $\delta_2 > 0$. On peut supposer que $\delta_2 = \delta(P_s, \theta)$, de l'hypothèse sur a_{jn}, on sait que $\delta_1 < \delta_2 = \delta$, donc* (2.2.12) *et* (2.2.13) *sont vérifiées d'après le Lemme* 2.2*, En utilisant le même raisonnement que dans le* 1^{er} ***cas*** *dans la démonstration du Théorème 2.2, on obtient l'inégalité* (2.2.26) *sur le rayon $\{z : \arg z = \theta\}$.*

2^{eme} ***cas*** *Enfin supposons que $\delta_2 < 0$. Encore une fois par la condition sur a_{jn}, on voit que $\delta < 0$. Par le même argument utilisé dans le* 2^{eme} ***cas*** *dans la démonstration du Théorème 2.2, on obtient à nouveau* (2.2.26)*.*

Par conséquent, par le Lemme 2.5*, on obtient une contradiction, donc $\rho(f) = \infty$.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières. On a étudié les résultats obtenus par Chen Zogxuan et Li Chunhong et Huang Xiaojun pour les équations différentielles linéaires homogènes [7], [8] et wang et Laine pour les équations différentielles non homogènes [9], [10]. En imposant des conditions sur ces coefficients, et ils ont démontré que chaque solution est d'ordre infini.

Est il possible de généraliser les résultats de ce mémoire pour les équations á coefficients des fonctions méromorphes. Et sous quelles conditions sur les coefficients ?

Bibliographie

[1] **A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii**, THE DISTRIBUTION OF VALUES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS, Transl. Math. Monogr., vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2008.

[2] **E. Borel**, SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRE, Acta Mathematica. December 1897,20 :1964.

[3] **W. K. Hayman**, MEROMORPHIC FUNCTIONS, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[4] **L.Yang**, " VALUE DISTRIBUTION THEORY, "Springer-Verlag, Berlin, 1993

[5] **G.G.Gundersen,** "ESTIMATES FOR THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF A MEROMORPHIC FUNCTION, PLUS SIMILAR ESTIMATES,"Journal of the London Mathematical Society,vol.s2-37,no.121,pp.88-104,1998.

[6] **B. Belaïdi**, FONCTIONS ENTIÈRES ET THÉORIE DE NEVANLINNA, Éditions Al-Djazair, 2017.

[7] **Chen Zongxuan**, THE GROWTH OF SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, Science in China (Series A), 2001, **31** : 775-784 (in Chinese)

[8] **Li Chunhong, Huang Xiaojun**, ON THE GROWTH OF SOLUTIONS OF A CLASS OF HIGH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS (IN CHINESE), ACTA MATHEMATICA SCIENTIA, 2003,**23A**(6)

[9] **J.Wang and I.Laine**,GROWTH OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS"Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol.342,no.1,pp.39-51,2008.

[10] **J.Wang and I.Laine**,"GROWTH OF SOLUTIONS OF NONHOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS,Abstr.Appl.Anal.(2009),Art.ID 363927,1-11.

[11] **A.Markushevich**, THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE,vol.2,Prentice-Hall,Englewood Cliffs,NJ,USA,1965.

[12] **I.Laine and R.Yang,**"FINITE ORDER SOLUTIONS OF COMPLEX LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS,"Electronic Journal of Differentail Equations,vol.2004,no.65,pp.1-8,2004.

[13] **C.-C.Yang and H.-X.Yi**,UNIQUENESS THEORY OF MEROMORPHIC FUNCTIONS,vol.557 of Mathematics and Its Applications,Kluwer Academic Publishers,Dordrecht,The Netherlands,2003.