MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

En vue d'obtenir le diplôme de Mémoire de

MASTER

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Estimation de l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles linéaires avec des coefficients fonctions entières à petite croissance

Présenté par KADDOUR Nadia

Soutenu le 22/06/2023 devant le Jury

Mohand OULD ALI	**Président**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
Rabab BOUABDELLI	**Examinateur**	**MCB**	**U. MOSTAGANEM**
Amina FERRAOUN	**Encadrant**	**MCB**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire : 2022-2023

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$A_k(z)\,f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+...+A_1(z)f^{'}+A_0(z)f=F(z)\,,$$

et

$$A_k(z)\,f^{(k)}+A_{k-1}(z)\,f^{(k-1)}+...+A_1(z)\,f'+A_0(z)\,f=Qe^P,$$

avec les coefficients $A_j(z)$, $(j=0,1,\ldots,k)$ et les fonctions $F(z)$, $P(z)$ et $Q(z)$ sont des fonctions entières d'ordre de croissance fini et la condition qu'il existe un coefficient $A_s(z)$, $(0\leq s\leq k)$ d'ordre maximal. On obtient quelques estimations sur l'hyper-ordre et l'hyper-exposant de convergence des zéros de ces solutions.

Abstract

In this thesis, we study the growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations

$$A_k(z)\,f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+...+A_1(z)f^{'}+A_0(z)f=F(z)\,,$$

and

$$A_k(z)\,f^{(k)}+A_{k-1}(z)\,f^{(k-1)}+...+A_1(z)\,f'+A_0(z)\,f=Qe^P,$$

where the coefficients $A_j(z)$, $(j=0,1,\ldots,k)$ and the functions $F(z)$, $P(z)$ and $Q(z)$ are entire functions of finite order and the condition that there exists a coefficient $A_s(z)$, $(0\leq s\leq k)$ of maximal order. We obtain some estimates on the hyper-order and the hyper-exponent of convergence of the zeros of these solutions.

Remerciement

Tout d'abord je tiens à remercier ALLAH, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je voudrais dans un premier temps remercier mon encadrante Mme Amina FERRAOUN, enseignante à l'université de Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres du jury, Mr Mohand OULD ALI et Mme Rabab BOUABDELLI qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Mostaganem, en particulier les enseignants du département de mathématiques qui m'ont suivi tout au long de mes années d'études à l'université. Par ailleurs, je remercie tous mes collègues de la promotion 2023.

Un grand merci à ma mère, pour son amour, ses conseils ainsi que son soutien inconditionnel à la fois moral et matériel, qui m'a permis de réaliser les études que je voulais et par conséquent ce mémoire.

Enfin, je ne manquerai pas cette occasion pour remercier mon mari et mon fils qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna ou la théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe était fondée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna au début du $20^{éme}$ siècle. Cette théorie joue un rôle très important dans l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Beaucoup d'études ont été faites sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes complexes. Elles concernent les problèmes de la répartition des zéros et les applications de la théorie de distribution des valeurs dans l'étude de comportement asymptotique des solutions des équations différentielles. Parmi les mathématiciens qui ont contribué au développement de cette théorie, on cite : R. Nevanlinna, G. Gunderson, C. C. Yang,...etc.

Ce mémoire est réparti en une introduction et deux chapitres. Dans le premier chapitre, on commence par la présentation de la formule de Jensen qui est la base de la théorie de Nevanlinna. Puis, on cite les définitions des fonctions $N(r,f)$, $m(r,f)$, $T(r,f)$ avec des propriétés. En suite, on traite le premier théorème de Nevanlinna qui est une conséquence de la formule de Jensen et quelques notions ,notations et définitions fondamentales de la théorie de Nevanlinna,...etc . Ces derniers sont utilisés dans la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre se base sur deux théorèmes. On commence par le premier théorème, qui étude la coissance des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$A_k(z) f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z),$$

puis le deuxième théorème qui aborde la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire non homogène

$$A_k(z) f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = Qe^P,$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k)$, $F(z)$ et $Q(z) \neq 0$ sont des fonctions entières d'ordre finie et $P(z)$ est une fonction entière transcendante.

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

Dans ce chapitre, on va donner les définitions de base de la théorie de Nevanlinna sur les fonctions méromorphes et de rappeler quelques propriétés sur la croissance des fonctions méromorphes. Pour plus de détails voir ([11], [13], [16]) .

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 ***(Fonction méromorphe)*** *Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

Remarque 1.1.1 *En pratique, on peut considèrer une fonction méromorphe comme le quotient de deux fonctions entières.*

Exemple 1.1.1 *Les fonctions* $\frac{e^z}{z^2}$ *et* $\tan z$ *sont des fonctions méromorphes.*

Définition 1.1.2 ***(Fonction transcendante)*** *Les fonctions transcendantes sont des fonctions qui ne sont pas algébriques comme :* $e^z, \cos z, \sin z, ...etc$

Définition 1.1.3 ***(Fonction méromorphe transcendante)*** *Une fonction méromorphe transcendante est une fonction qui n'est pas rationnelle.*

Théorème 1.1.1 ***(La formule de Jensen)*** ([13]) *Soit* f *une fonction méromorphe telle que* $f(0) \neq 0, \infty$ *et* $a_1, a_2, \cdots$ *(respectivement* $b_1, b_2, \cdots$ *) ses zéros (respectivement ses pôles),* *chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log(|f(0)|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|} + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|}$$

Preuve. On démontre le théorème lorsque f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z)\frac{\prod\limits_{|a_j|<r} \dfrac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}}{\prod\limits_{|b_j|<r} \dfrac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}}.$$

Alors, $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| \leqslant r$, et $\ln|g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)|\frac{\prod\limits_{|a_j|<r} \dfrac{r}{|a_j|}}{\prod\limits_{|b_j|<r} \dfrac{r}{|b_j|}},$$

d'où

$$\log|g(0)| = \log|f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|}. \tag{1.1.2}$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a pour tout a_j et b_j

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| = \left|\frac{z\bar{z} - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| = \left|\frac{z\left(\overline{z-a_j}\right)}{r(z-a_j)}\right| = 1 = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right|.$$

D'où

$$\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|.$$

De (1.1.1) et (1.1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.4 ([*13*]) *Pour tout réel $x > 0$, on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x, & si\ x > 1, \\ 0, & si\quad 0 < \ x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([*13*]) *On a les propriétés suivantes*

(a) $\log x \leq \log^+ x$

(b) $\log^+ x \leq \log^+ y$ $(0 \leq x \leq y)$.

(c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

(d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.

(e) $\log^+ x \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j$.

(f) $\log^+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j + \log n$.

Définition 1.1.5 ([*13*]) ***(La fonction a-points)*** *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction $a-$points de f par*

Si $a \neq \infty$

$$N(r,a,f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(r,a,f) \log r.$$

Si $a = \infty$

$$N(r,f) = N(r,\infty,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(r,\infty,f) \log r.$$

Exemple 1.1.2 *Considérons la fonction* $f(z) = e^{\alpha z} z^{-m}, \alpha \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $|z| < t$.
On a $n(t,\infty,f) = m$ *car* $n(t,\infty,e^{\alpha z}) = 0$ *et* $n(t,\infty,z^{-m}) = m$. *Alors*

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(r,\infty,f) \log r = m \log r.$$

Définition 1.1.6 ([*13*]) ***(La fonction a-points distincts)*** *On définit la fonction $a-$points distincts de f par*

Si $a \neq \infty$

$$\bar{N}(r,a,f) = \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) := \int_0^r \frac{\bar{n}(t,a,f) - \bar{n}(0,a,f)}{t} dt + \bar{n}(0,a,f) \log r.$$

Si $a = \infty$

$$\bar{N}(r,\infty,f) = \bar{N}(r,f) := \int_0^r \frac{\bar{n}(t,\infty,f) - \bar{n}(0,\infty,f)}{t} dt + \bar{n}(0,\infty,f) \log r.$$

Remarque 1.1.2 *Si f une fonction entière, alors* $N(r,f) = \bar{N}(r,f) = 0$.

Définition 1.1.7 ([11], [13]) ***(La fonction de proximité)*** *Soit f une fonction méromorphe tel que $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$. On définit la fonction de proximité de f par*

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Exemple 1.1.3 *Soit la fonction $f(z) = e^{\alpha z} z^{-m}, \alpha \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $|z| < t$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+ \left(e^{\alpha r \cos\theta} . r^{-m}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\alpha r \cos\theta - m \log r) d\theta \\ &= \frac{\alpha r}{\pi} - \frac{m}{2} \log r. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe représentée par la sérié de Laurent à l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \ c_m \in \mathbb{C}^*, \ m \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$\log|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.1.8 ([11], [13]) ***(La fonction caractéristique)*** *Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction caractéristique de Nevanlinna de f par*

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f).$$

Exemple 1.1.4 *Soit la fonction $f(z) = e^{\alpha z} z^{-m}, \alpha \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $|z| < t$. Alors*

$$\begin{aligned} T(r, f) &= m(r, f) + N(r, f) \\ &= \frac{\alpha r}{\pi} - \frac{m}{2} \log r + m \log r \\ &= \frac{\alpha r}{\pi} + \frac{m}{2} \log r. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.3 *La fonction caractéristique de Nevanlinna permet de mesurer la croissance d'une fonction méromorphe.*

1.1.1 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.1.2 ([*11*]) *Soit f une fonction méromorphe tel que $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$ et soit le développement Laurent de fonction $f - a$ autour de l'origine*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, \ c_m \neq 0, \ m \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Donc,

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \log|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \ln 2.$$

Preuve. Premièrement, montrons le théorème pour $a = 0$. D'aprés la proposition 1.1.1 et la propriété (c) du lemme 1.1.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\log|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r,f) + N(r,f).$$

D'où

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \log|c_m|.$$

Ici $\varphi(r,0) = 0$.

Montrons le théorème dans le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Dans ce cas, nous avons

$$N\left(r, \frac{1}{h}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$m\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right),$$

$$N(r,h) = N(r,f-a) = N(r,f).$$

Nous avons aussi

$$\log^+|h| = \log^+|f-a| \leq \log^+|f| + \log^+|a| + \log 2.$$

$$\log^+|f| = \log^+|h+a| \leq \log^+|h| + \log^+|a| + \log 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on obtient

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \log^+|a| + \log 2.$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \log^+|a| + \log 2.$$

En posant $\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$, on trouve

$$-\left(\log^+|a| + \log 2\right) \leq \varphi(r,a) \leq \log^+|a| + \log 2.$$

D'où $|\varphi(r,a)| \leq \log^+|a| + \log 2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) &= T\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= m\left(r,\frac{1}{h}\right) + N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \log|c_m| \\ &= m(r,f) + N(r,f) + \varphi(r,a) - \log|c_m| \\ &= T(r,f) + \varphi(r,a) - \log|c_m|. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 *Le premier théorème fondamental de Nevanlinna peut être exprimé comme suit*

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), r \to +\infty.$$

Proposition 1.1.2 ([11], [13]) *Soient f, f_1, $f_2, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ad - bc \neq 0$. Alors*

1) $T(r, \sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \ln n$, *pour* $n \geq 1$.

2) $T(r, \prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j)$, *pour* $n \geq 1$.

3) $T(r, f^m) = mT(r, f)$, $m \in \mathbb{N}^*$.

4) $T\left(r, \dfrac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1)$, $f \not\equiv \frac{-d}{c}$.

1.2 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.2.1 L'ordre et l'hyper-ordre d'une fonction

Définition 1.2.1 ([11], [13]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre de f par*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Si f est fonction entière alors

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Définition 1.2.2 ([11], [13]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'hyper-ordre de f par*

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}$$

et si f est fonction entière

$$\rho_2(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2.1 *La fonction* $f(z) = e^{\alpha z}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r, f)}{\log r} \\ &= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \frac{\alpha r}{\pi}}{\log r} \\ &= \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \alpha r - \log \pi}{\log r} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\rho_2(f) = 0.$$

1.2.2 L'ordre inférieur

Définition 1.2.3 ([*11*]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre inférieur de f par*

$$\mu(f) = \underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, alors

$$\mu(f) = \underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 1.2.2 *Considérons la fonction $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, e^z)}{\log r} \\ &= \underline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log \frac{r}{\pi}}{\log r} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2.3 L'exposant de convergence et l'hyper-exposant de convergence

Définition 1.2.4 ([*11*], [*13*]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros et des zéros distincts respectivement par*

$$\lambda(f) = \overline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

et

$$\overline{\lambda}(f) = \overline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

où $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ et $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ sont les fonctions densités des zéros et des zéros distincts respectivement dans le disque $\{z : |z| \leq r\}$.

Exemple 1.2.3 *Considérons la fonction $f(z) = e^z, z \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$\lambda(f) = \overline{\lambda}(f) = 0,$$

car $N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = 0$.

Définition 1.2.5 ([11], [13]) *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'hyper-exposant de convergence des zéros et des zéros distincts de fonction f respectivement par*

$$\lambda_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r},$$

$$\overline{\lambda_2}(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

1.2.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.2.6 ([13]) *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ est définie par*

$$m(E) = \int_E dt.$$

Définition 1.2.7 ([13]) *La mesure logarithmique d'un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ est définie par*

$$m_l(E) = \int_E \frac{dt}{t}.$$

Exemple 1.2.4 *La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [1, e^6] \subset [1, +\infty[$.*

$$m_l(E) = \int_E \frac{dt}{t} = \int_1^{e^6} \frac{dt}{t} = \log t]_1^{e^6} = 6.$$

Définition 1.2.8 ([13]) *La densité supérieure d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ est définie par*

$$\overline{dens(E)} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

Définition 1.2.9 ([13]) *La densité inférieure d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ est définie par*

$$\overline{dens(E)} = \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}.$$

1.2.5 Le Lemme de la dérivée logarithmique

Lemme 1.2.1 ***(La dérivée logarithmique)*** ([*11*]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f) = o(T(r, f)),$$

où $S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie.

Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r).$$

Corollaire 1.2.1 ([*9*]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f).$$

1.3 Eléments de la théorie de Wiman-Valiron

Définition 1.3.1 ***(L'indice central)*** ([*13*]) *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ est convergente. D'où $\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0$ et le terme maximal $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central de la fonction f par*

$$\nu_f(r) = \max\{m : \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Exemple 1.3.1 *Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$. Alors $\mu(r) = \max\{|a_j| r^j;\ j = 0, \cdots, n\} = |a_n| r^n$, r assez grand, et par conséquent*

$$\nu_P(r) = \max\{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\} = n.$$

Proposition 1.3.1 ([*13*]) *Soit f une fonction entière d'ordre $\rho(f)$. Alors*

$$\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log \nu_f(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r}.$$

1.4 Théorème de factorisation de Hadamard

Définition 1.4.1 ***(Produit canonique)*** ([13], [16]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et soient z_1, z_2,.. ses zéros avec $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq ...$ Soit p l'entier minimal tel que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p+1}}$$

converge. On appelle

$$\begin{aligned} E(u,0) &= (1-u), \\ E(u,p) &= (1-u)\exp(u + \frac{u^2}{2} + ... + \frac{u^p}{p}) \quad p = 1,2,... \end{aligned}$$

des facteurs principaux. Le produit infini

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, p),$$

converge uniformément dans chaque domaine borné dans $\mathbb{C}$ et par suite $P(z)$ s'appelle le produit canonique de f formé à partir des zéros de f . L'entier p est appelé le genre du produit canonique.

Théorème 1.4.1 ([16]) *Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f)$ et soient $\{a_{1,}a_2, ...\}$ et $\{b_{1,}b_2, ...\}$ les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, respectivement. Supposons que f a une représentation*

$$f(z) = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ..., (c_k \neq 0),$$

au voisinage de $z = 0$. Alors

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

avec $Q(z)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\rho(f)$ et $P_1(z)$ et $P_2(z)$ sont des produits canoniques de f formés des zéros et des pôles non nuls de f .

Chapitre 2

Estimation de l'hyper-ordre des solutions méromorphes des équations différentielles complexes d'ordre supérieur

2.1 Introduction et résultats

Plusieurs auteurs ont étudié la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{2.1.1}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$, $F(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières (ou fonctions méromorphes) et ils ont obtenu des résultats intéressants, (voir par exemple [2], [3], [4], [12], [13], [14], [15], [17]]). Dans [15], Wang, et Liu ont étudié les propriétés des solutions de l'équation (2.1.1) quand il existe un coefficient $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k-1)$ vérifiant la condition $\mu(A_s) < \frac{1}{2}$ et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.1.1 ([*15*]) *Supposons que* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z), F(z)$ *sont des fonctions méromorphes d'ordre finie. S'il existe* $s \in \{0, 1, ..., k-1\}$ *tel que*

$$b = \max\left\{\rho(A_j), (j \neq s), \rho\ (F), \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) < \frac{1}{2},$$

alors

(i) *Toute solution méromorphe transcendante* f *de l'équation* (2.1.1)*, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, satisfait* $\mu(A_s) \leq \rho_2(\ f) \leq \rho(\ A_s)$. *En outre si* $F \neq 0$, *alors on a*

$$\mu\left(A_s\right) \leq \overline{\lambda}_2\left(f\right) = \lambda_2(f) = \rho_2\left(f\right) \leq \rho\left(A_s\right).$$

(ii) Si $s \geq 2$, alors toute solution méromorphe non-transcendante f de l'équation (2.1.1) *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$. *Si $s=0$ ou $s=1$, alors toute solution non-constante f de l'équation* (2.1.1) *est une fonction transcendante.*

Si $F\left(z\right)$ est d'ordre infini, Wang et Liu [15] ont considéré l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}\left(z\right) f^{(k-1)} + ... + A_1\left(z\right) f^{"} + A_0\left(z\right) f = Qe^P \tag{2.1.2}$$

où $A_j\left(z\right)\left(j=0,1,...,k-1\right), Q\left(z\right) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes et P est une fonction entière transcendante et ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.1.2 ([*15*]) *Supposons que $A_0\left(z\right), ..., A_{k-1}\left(z\right), Q\left(z\right) \neq 0$ sont des fonctions méromorphes d'ordre finie, P est fonction entière transcendante tel que*

$$\max\left\{\rho\left(P\right), \rho\left(Q\right), \rho\left(A_j\right), \left(1 \leq j \leq k-1\right), \lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)\right\} < \mu\left(A_0\right) < \frac{1}{2}.$$

Alors, toute solution f de l'équation (2.1.2) *est une fonction transcendante, et toute solution méromorphe transcendante f de l'équation* (2.1.2), *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, satisfait* $\mu\left(A_0\right) \leq \overline{\lambda}_2\left(f\right) = \lambda_2\ \left(f\right) = \rho_2\left(f\right) \leq \rho\left(A_0\right)$.

Pour $k \geq 2$, on considère les équations différentielles linéaires

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = F(z), \tag{2.1.3}$$

où $A_j(z), (j=0,1,\cdots,k), F(z)$ sont des fonctions entières telles que $A_0(z)A_k(z)F(z) \not\equiv 0$, et

$$A_k(z)f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = Qe^P, \tag{2.1.4}$$

lorsque $A_j(z), (j=0,1,\cdots,k)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières et P est une fonction entière transcendante.

On sait que si $A_k\left(z\right) = 1$, alors toutes les solutions de l'équation (2.1.3) sont des fonctions entières, mais si $A_k\left(z\right)$ est une fonction entière non constante, alors l'équation (2.1.3) peut posséder des solutions méromorphes. Par exemple l'équation

$$zf''' + 4f'' + \left(-1 - \frac{1}{2}z^2 - z\right)e^{-z}f' + \left(\left(1 - \frac{1}{2}z^2 + 2z\right)e^{-2z} + ze^{-3z}\right)f$$

$$= \left(-1 - \frac{1}{2}z^2 - z\right)e^{-z} + \left(z - \frac{1}{2}z^3 + 2z^2\right)e^{-2z} + z^2e^{-3z}$$

admet une solution méromorphe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}e^{e^{-z}} + z.$

D'après les résultats des deux théorèmes précédents, on pose la question : peut-on avoir les mêmes propriétés que dans le Théorème 2.1.1 pour l'équation différentielle linéaire (2.1.3) s'il existe un coefficient $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k)$ sous la condition $\mu(A_s) < \frac{1}{2}$? et deuxièmement, qu'est-ce qu'on peut dire sur la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle linéaire (2.1.4) lorsque $A_j(z), (j = 0, 1, \cdots, k)$, $Q(z)(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières et P est une fonction entière transcendante ?

L'objectif principal de cette partie est d'examiner les questions ci-dessus en étudiant les résultats du travail de Ferraoun et Belaïdi [8] qui ont généralisé les Théorèmes précédents aux équations (2.1.3) et (2.1.4).

En fait, nous allons détailler les preuves des résultats suivants.

Théorème 2.1.3 ([8]) *Supposons que $A_0(z), ..., A_k(z), F(z)(\neq 0)$ sont des fonctions entières d'ordre fini. S'il existe $s \in \{0, 1, ..., k-1\}$ tel que*

$$\alpha = \max\{\rho(A_j), (j \neq s), \rho(F)\} < \mu(A_s) < \frac{1}{2}, \tag{2.1.5}$$

alors,

(i) Toute solution méromorphe transcendante f, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, de l'équation (2.1.3) vérifie $\mu(A_s) \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_s)$. En outre, si $F \not\equiv 0$, alors on a $\mu(A_s) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \rho(A_s)$.

(ii) Si $s \geq 2$, alors toute solution rationnelle f de l'équation (2.1.3) est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$. Si $s = 0$ ou 1, alors toute solution non constante (2.1.3) est transcendante.

Corollaire 2.1.1 ([8]) *Supposons que $A_0(z), ..., A_k(z), F(z)(\neq 0)$ sont des fonctions entières. S'il existe $s \in \{0, 1; ..., k\}$ tel que*

$$\alpha = \max\{\rho(A_j), (j \neq s), \rho(F)\} < \mu(A_s) = \rho(A_s) < \frac{1}{2}.$$

Alors toute solution méromorphe transcendante f, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, de l'équation (2.1.3) vérifie $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho(A_s)$, et toute solution rationnelle $f(z)$ de l'équation (2.1.3) est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$.

Théorème 2.1.4 ([8]) *Supposons que* $A_0(z), ..., A_k(z), Q(z)\,(\neq 0)$ *sont des fonctions entières d'ordre fini et* P *est fonction entière transcendante telle que*

$$\max\{\rho(P), \rho(Q), \rho(A_j), (1 \leq j \leq k)\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}. \tag{2.1.6}$$

Alors toute solution f *de l'équation* (2.1.4) *est transcendante, et toute solution méromorphe* f*, telle que* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$*, de l'équation* (2.1.4) *vérifie* $\mu(A_0) \leq \bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \leq \rho(A_0)$.

Corollaire 2.1.2 ([8]) *Supposons que* $A_0(z), ..., A_{k-1}(z), Q(z)\,(\neq 0)$ *sont des fonctions entières d'ordre fini et* P *est fonction entière transcendante telle que*

$$\max\{\rho(P), \rho(Q), \rho(A_j), (0 \leq j \leq k)\} < \mu(A_0) = \rho(A_0) < \frac{1}{2}.$$

Alors toute solution $f(z)$ *de l'équation* (2.1.4) *est transcendante, et toute solution méromorphe* f*, telle que* $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$*, de l'équation* (2.1.4) *vérifie* $\bar{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Remarque 2.1.1 *Les Théorème 2.1.3 et Théorème 2.1.4 sont la généralisation des Théorème 2.1.1 et Théorème 2.1.2 de Wang et Liu [15] et Théorème 1.8 de Zang et Tu [17].*

2.2 Lemmes préliminaires

Pour démontrer nos résultats, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 ([9]) *Soit* f *une fonction méromorphe transcendante dans le plan* $\mathbb{C}$ *et soit* $\alpha > 1$*, une constante donnée. Alors il existe un ensemble* $E_1 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie et une constante* $B > 0$ *qui dépend uniquement de* α *et* (m, n) $(m, n \in \{0, 1, \cdots, k\})$ $m < n$ *tels que pour tout* z *avec* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$*, on a*

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}(\log^\alpha r)\log T(\alpha r, f)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.2.2 ([6]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ *une fonction méromorphe, telle que* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières vérifiant* $\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f) \leq +\infty$ *et* $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < \mu$*. Alors il existe un ensemble* $E_2 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$ *on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \ (s \in \mathbb{N}).$$

Lemme 2.2.3 ([10]) *Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions monotones croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ pour tout $r \notin E_3 \cup [0, 1]$, où $E_3 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors, pour tout $\alpha > 1$, il existe $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.*

Lemme 2.2.4 ([6]) *Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe, avec $g(z)$ et $d(z)$ des fonctions entières telles que $\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f) \leq +\infty$ et $\lambda(d) = \rho(d) = \lambda(\frac{1}{f}) < \mu$. Alors il existe un ensemble $E_4 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), \quad (n \geq 1),$$

où $\nu_g(r)$ est l'indice central de $g(z)$.

Lemme 2.2.5 ([5]) *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre $\rho(g) = \alpha < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_5 \subset [1, +\infty)$ d'une mesure linéaire finie et mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_5$, on a*

$$\exp\{-r^{\alpha+\varepsilon}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{r^{\alpha+\varepsilon}\}.$$

Lemme 2.2.6 ([7]) *Soit $g(z)$ une fonction entière d'ordre infini, avec l'hyper ordre $\rho_2(g) = \rho$, et $\nu_g(r)$ est l'indice central de $g(z)$. Alors*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \log \nu_g(r)}{\log r} = \rho.$$

Lemme 2.2.7 ([1]) *Soit $g(z)$ une fonction entière avec $0 \leq \mu(g) < 1$. Alors pour tout $\alpha \in (\mu(g), 1)$, il existe un ensemble $E_6 \subset [0, \infty)$ tel que*

$$\overline{\log dens} E_6 \geq 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha},$$

où $E_6 = \{r \in [0, \infty) : m(r) > M(r) \cos \pi\alpha\}$, $m(r) = \inf_{|z|=r} \log |g(z)|$, $M(r) = \sup_{|z|=r} \log |g(z)|$.

Lemme 2.2.8 ([8]) *Soit $f(z)$ une fonction entière telle que $\mu(f) < \frac{1}{2}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ avec $\overline{\log dens} E_7 > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_7$, on a*

$$|f(z)| \geq \exp\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\}.$$

Preuve. Soit $\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2}+\mu(f)}{2}$. Alors d'après le Lemme 2.2.7, il existe un ensemble H avec $\overline{\log dens} H \geq 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha_0}$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H$, on a

$$\log |f(z)| \geq \cos(\pi\alpha_0) \log M(r, f). \tag{2.2.1}$$

D'après la définition de l'ordre inférieur, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $r_1 > 0$ tel que pour $r > r_1$, on a

$$\log M(r, f) \geq r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{2.2.2}$$

Comme

$$\frac{\cos(\pi\alpha_0) r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}}{r^{\mu(f)-\varepsilon}} \to +\infty, \ (r \to +\infty), \tag{2.2.3}$$

alors, de (2.2.1) – (2.2.3), il existe $r_2 (\geq r_1)$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H \backslash [0, r_2]$, on obtient

$$|f(z)| \geq \exp\{\cos(\pi\alpha_0) r^{\mu(f)-\frac{\varepsilon}{2}}\} \geq \exp\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\}.$$

Posons $E_7 = H \cap [r_2, +\infty]$, alors $\overline{\log dens} E_7 > 0$.

Lemme 2.2.9 ([*16*]) *Soit f, g deux fonctions méromorphes non constantes avec $\rho(f)$ est l'ordre de f et $\mu(g)$ est l'ordre inférieure de g. Alors on a*

$$\mu(f+g) \leq \max\{\rho(f), \mu(g)\}$$

et

$$\mu(fg) \leq \max\{\rho(f), \mu(g)\}.$$

Si $\mu(g) > \rho(f)$, alors on obtient

$$\mu(f+g) = \mu(fg) = \mu(g).$$

2.3 Preuve de Théorème 2.1.3

(i) Supposons que f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (2.1.3) telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$.

De l'équation (2.1.3) on obtient

$$-A_s(z) = \frac{1}{f^{(s)}} \left[A_k(z) f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_{s+1}(z) f^{(s+1)}\right.$$

$$\left. + A_{s-1}(z) f^{(s-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f + F\right]$$

$$\Rightarrow |A_s(z)| \leq \left|\frac{f}{f^{(s)}}\right| \left[|A_k(z)| \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + ... + |A_{s+1}(z)| \left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right|\right.$$

$$\left. + |A_{s-1}(z)| \left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + ... + |A_1(z)| \left|\frac{f'}{f}\right| + |A_0(z)| + \left|\frac{F}{f}\right|\right] \qquad (2.3.1)$$

D'après le Lemme 2.2.1, il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifient $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| &\leq B\left(T(2r, f)\frac{\log^2 r}{r}\log T(2r, f)\right)^j \\ &\leq B(T(2r, f))^j T(2r, f) \\ &= B(T(2r, f))^{j+1} \\ &\leq B(T(2r, f))^{k+1} \qquad , 1 \leq j \leq k. \end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

Puisque $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$, alors d'après le théorème de factorisation de Hadamard, on peut écrire f sous la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{d(z)}$, avec $g(z)$ et $d(z)$ sont deux fonctions entières vérifiant

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \rho(g) = \rho(f), \quad \rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu.$$

Alors, d'après lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_2 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_2$ et $|g(z)| = M(r, g)$ et pour z suffisament grand, on a

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}. \qquad (2.3.3)$$

De $(2.1.5)$, pour tout ε donné vérifiant $0 < 2\varepsilon < \mu(A_s) - \alpha$, on obtient pour r suffisamment grand

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r, A_j)}{\log r} \leq \alpha + \varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r, F)}{\log r} \leq \alpha + \varepsilon$$

ce qui implique

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \quad (j \neq s), \quad |F(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \qquad (2.3.4)$$

D'après le lemme 2.2.8, pour tout $\varepsilon > 0$, il exsite un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$ avec $\overline{\log dens E_7} > 0$, tel que pour tout z vérifient $|z| = r \in E_7$, on a

$$|A_s(z)| \geq \exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.5}$$

Puisque $\rho(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f) = \mu(g)$, alors pour tout ε vérifiant $0 < 2\varepsilon < \mu(f) - \lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ et pour r suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{d(z)}{g(z)}\right| |F(z)| = \frac{|d(z)|}{M(r,g)} |F(z)| \\ &\leq \frac{\exp\left\{r^{\rho(d)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\mu(g)-\varepsilon}\right\}} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \\ &\leq \frac{\exp\left\{r^{\lambda\left(\frac{1}{f}\right)+\varepsilon}\right\}}{\exp\left\{r^{\mu(f)-\varepsilon}\right\}} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \\ &\leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Soit $E_8 = E_7 \backslash ([0,1] \cup E_1 \cup E_2)$. Alors on a $\overline{\log dens E_8} > 0$. Donc, en substituant (2.3.2) – (2.3.6) dans (2.3.1), pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_8$ et $|g(z)| = M(r,g)$, on obtient

$$\begin{aligned}\exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\} \leq \left|r^{2s}\right| \Big[&\exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} B(T(2r,f))^{k+1} + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} B(T(2r,f))^{k+1} \\ &+ ... + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} B(T(2r,f))^{k+1} + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} B(T(2r,f))^{k+1} \\ &+ ... + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} B(T(2r,f))^{k+1} + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\Big],\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\} \leq B(k+1) r^{2s} (T(2r,f))^{k+1} \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.7}$$

De (2.3.7) et le Lemme 2.2.3, on obtient

$$\mu(A_s) - \varepsilon \leq \rho_2(f).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on a

$$\mu(A_s) \leq \rho_2(f).$$

Maintenant, on démontre que $\rho_2(f) \leq \rho(A_s)$. Nous pouvons écrire (2.1.3) comme

$$-A_k(z)\frac{f^{(k)}}{f}=A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f}+...+A_{s+1}(z)\frac{f^{(s+1)}}{f}$$

$$+A_s(z)\frac{f^{(s)}}{f}+A_{s-1}(z)\frac{f^{(s-1)}}{f}+...+A_1(z)\frac{f'}{f}+A_0(z)-\frac{F}{f}. \tag{2.3.8}$$

D'après le Lemme 2.2.4, il existe un ensemble $E_4\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4$ et $|g(z)|=M(r,g)$, nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1)),(j=1,...,k). \tag{2.3.9}$$

Pour tout $\varepsilon>0$ donné et pour r suffisament grand, on a

$$|A_j(z)|\leq\exp\left\{r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right\},\qquad j=0,...,k-1. \tag{2.3.10}$$

Par lemme 2.2.5, pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble $E_5\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_5$, nous avons :

$$|A_k(z)|\geq\exp\left\{-r^{\rho(A_k)+\varepsilon}\right\}\geq\exp\left\{-r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right\}. \tag{2.3.11}$$

De (2.3.8) et (2.3.9), on obtient

$$-\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k(1+o(1))=\frac{1}{A_k(z)}\left[\sum_{j=1}^{k-1}A_j(z)\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1))+A_0(z)-\frac{F(z)}{f(z)}\right],$$

il s'en suit

$$\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k\right||(1+o(1))|\leq\frac{1}{|A_k(z)|}\left[\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^j\right||(1+o(1))|+|A_0(z)|+\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|\right]. \tag{2.3.12}$$

Par $(2.3.6)$ et $(2.3.10)-(2.3.12)$, pour tout z satisfait $|z|=r\notin[0,1]\cup E_4\cup E_5$ et $|g(z)|=M(r,g)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k\right||(1+o(1))| \quad\leq\quad & \exp\left\{r^{\rho(As)+\varepsilon}\right\}\left[\sum_{j=1}^{k-1}\exp\left\{r^{\rho(As)+\varepsilon}\right\}\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^j\right||(1+o(1))|\right.\\ & \left.+\exp\left\{r^{\rho(As)+\varepsilon}\right\}+\exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\right],\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k\right| |(1+o(1))| \leq (k+1)\left|\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^{k+1}\right| |(1+o(1))| \exp\left\{r^{\rho(As)+\varepsilon}\right\}.$$

D'où

$$\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right) |(1+o(1))| \leq (k+1)\,|(1+o(1))| \exp\left\{r^{\rho(A_s)+\varepsilon}\right\}.$$

Donc,

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log \upsilon_f(r)}{\log r} \leq \rho(A_s)+\varepsilon. \tag{2.3.13}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors de (2.3.13) et le Lemme 2.2.6, on obtient

$$\rho_2(g) \leq \rho(A_s),$$

ainsi

$$\rho_2(f) \leq \rho(A_s).$$

Finalement, on a

$$\mu(A_s) \leq \rho_2(f) \leq \rho(A_s).$$

Soit $F \not\equiv 0$. Maintenant, nous prouvons $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f)$. De (2.1.3), on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(A_k\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1(z)\frac{f'}{f} + A_0\right). \tag{2.3.14}$$

Si f admet comme zéro z_0 d'ordre $\gamma(> k)$, alors F admet nécessairement comme zéro z_0 d'ordre $\gamma - k$. D'où, on obtient

$$\begin{aligned} n\left(r,\frac{1}{f}\right) &\leq k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right) + n\left(r,\frac{1}{F}\right), \\ N\left(r,\frac{1}{f}\right) &\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{F}\right). \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Par (2.3.14), on obtient d'après le Lemme de la dérivée logarithmique ([11])

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right) \leq m\left(r,\frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k} m(r,A_j) + O(\log rT(r,f)), (r \notin E), \tag{2.3.16}$$

où E est un ensemble de mesure linéaire finie. De $(2.3.15)$ et $(2.3.16)$, on obtient

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k}m\left(r,A_j\right)+O\left(\log rT\left(r,f\right)\right)$$

ce qui donne

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)+O(1)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k}T\left(r,A_j\right)+O\left(\log rT\left(r,f\right)\right),\left(r\notin E\right).$$

Ainsi

$$T\left(r,f\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,F\right)+\sum_{j=0}^{k}T\left(r,A_j\right)+O\left(\log rT\left(r,f\right)\right),\left(r\notin E\right). \quad (2.3.17)$$

Pour r sufisamment grand et pour $\varepsilon>0$, on a

$$O\left(\log rT\left(r,f\right)\right)=o\left(T\left(r,f\right)\right), \quad (2.3.18)$$

$$\begin{aligned} T\left(r,F\right)+\sum_{j=0}^{k}T\left(r,A_j\right) &\leq r^{\rho(A_s)+\varepsilon}+\sum_{j=0}^{k}r^{\rho(A_s)+\varepsilon} \\ &\leq (k+2)\,r^{\rho(A_s)+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

D'où, de $(2.3.17)$, $(2.3.18)$ et $(2.3.19)$, pour r sufisamment grand et $r\notin E$, on obtient

$$T\left(r,f\right)-O\left(\log rT\left(r,f\right)\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+2)\,r^{\rho(A_s)+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{O\left(\log rT\left(r,f\right)\right)}{T\left(r,f\right)}\right)T\left(r,f\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+2)\,r^{\rho(A_s)+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow\left(1-o\left(1\right)\right)T\left(r,f\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+2)\,r^{\rho(A_s)+\varepsilon},$$

d'où

$$\rho_2(f)\leq\bar{\lambda}_2(f).$$

Comme $\bar{\lambda}_2(f)\leq\rho_2(f)$, on obtient

$$\mu(A_s)\leq\bar{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\rho_2(f)\leq\rho(A_s).$$

(ii) Supposons que f est une solution rationnelle de $(2.1.3)$. Si f est une fonction rationnelle, qui a un pôle à z_0 de degré $m\geq 1$, ou $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f\geq s$, alors $f^{(s)}(z)\not\equiv 0$. De (2.1.3), on obtient

$$|A_s(z)| \leq \left[|A_k(z)| \left| \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} \right| + |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}} \right| + ... + |A_{s+1}(z)| \left| \frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} \right| \right.$$

$$\left. + |A_{s-1}(z)| \left| \frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} \right| + ... + |A_1(z)| \left| \frac{f'}{f^{(s)}} \right| + |A_0(z)| + \left| \frac{1}{f^{(s)}} \right| + |F| . \right] \tag{2.3.20}$$

Alors, en substituant (2.3.4) et (2.3.5) dans (2.3.20), on obtient

$$\exp\left\{ r^{\mu(As)-\varepsilon} \right\} \leq (k+1) r^M \exp\left\{ r^{\alpha+\varepsilon} \right\},$$

où M est un constant. C'est une contradiction. D'où, $f(z)$ est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$.

Si $s = 0$ ou 1 et $f(z)$ est une solution polynomiale de (2.1.3), alors de (i), on obtient $\deg f \leq s-1$. D'où, $f(z)$ doit être une constante. Par conséquent, de (i), toute solution non constante $f(z)$ de (2.1.3) est transcendante.

2.4 Preuve de Théorème 2.1.4

D'après les hypothèses, il est claire que toute solution méromorphe de l'équation (2.1.4) est d'ordre infini. Alors, toute solution méromorphe de (2.1.4) est transcendante.
Supposons que f est une solution méromorphe transcendante, telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f)$.
Soit $f = ge^P$. Donc, on obtient

$$\overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f), \quad \lambda_2(g) = \lambda_2(f). \tag{2.4.1}$$

En substituant $f = ge^P$ dans $(2.1.4)$, on obtient

$$g^{(k)} + B_{k-1}(z) g^{(k-1)} + ... + B_1(z) g' + B_0(z) g = \frac{Q}{A_k(z)}, \tag{2.4.2}$$

où

$$B_{k-1}(z) = \frac{A_{k-1}(z)}{A_k(z)} + kP'. \tag{2.4.3}$$

$$B_{k-j}(z) = \frac{A_{k-j}(z)}{A_k(z)} + (k-j+1) \frac{A_{k-j+1}(z)}{A_k(z)} P'$$

$$+ \sum_{m=2}^{j} \frac{A_{k-j+m}(z)}{A_k(z)} \left[\binom{k-j+m}{m} (P')^m + D_{m-1}(P') \right], j = 2, ..., k. \tag{2.4.4}$$

et $D_{m-1}(P')$ est un polynôme différentiel en P' de degrée $m-1$, ces coefficients sont constants. De $(2.4.4)$, on a

$$B_0(z) = \frac{A_0(z)}{A_k(z)} + \frac{A_1(z)}{A_k(z)}P' + \sum_{m=2}^{k} \frac{A_m(z)}{A_k(z)} \left[(P')^m + D_{m-1}P' \right],$$

$$= \frac{1}{A_k(z)} \left[A_0(z) + A_1(z)P' + \sum_{m=2}^{k} A_m(z) \left[(P')^m + D_{m-1}(P') \right] \right] \tag{2.4.5}$$

De $(2.1.6)$, $(2.4.3)$, $(2.4.4)$, $(2.4.5)$ et le Lemme 2.2.9 , on obtient

$$\mu(B_0) = \max\{\mu(A_0), \rho(A_j), (1 \le j \le k)\} = \mu(A_0) \tag{2.4.6}$$

et

$$\rho\left(\frac{Q}{A_k}\right) \le \max\{\rho(A_k), \rho(Q)\} < \mu(A_0), \quad \rho(B_j) < \mu(A_0), \quad j = 1, ..., k-1. \tag{2.4.7}$$

Par $(2.4.2)$, $(2.4.6)$, $(2.4.7)$ et l'appliquation de Théorème 2.1.3 pour $A_k(z) = 1$ et $s = 0$, on obtient

$$\mu(A_0) \le \overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \rho_2(g) \le \rho(A_0) \tag{2.4.8}$$

Comme $\rho_2(e^P) = \rho(P) < \mu(A_0) \le \rho_2(g)$, alors on obtient $\rho_2(f) = \rho_2(g)$. Ainsi, de $(2.4.1)$ et $(2.4.8)$, on obtient

$$\mu(A_0) \le \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \rho_2(f) \le \rho(A_0).$$

CONCLUSION

Nous avons traité dans ce mémoire les notions de l'ordre et l'hyper ordre des solutions des équations différentielles d'ordre k dans le cas où les coefficients sont des fonctions entières et cela ouvre une porte pour plusieurs perspectives. Les questions suivantes se posent : conserve-t-on les mêmes résultats dans le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques ? Peut-on généraliser les résultats obtenus pour des fonctions analytiques ? Et sous quelles conditions cette généralisation serait possible ?

Bibliographie

[1] P. D. Barry, *Some theorems related to the* $\cos \pi\rho$ *theorem*, Proc. London Math. Soc., 21 (1970), 334–360.

[2] B. Belaïdi, H. Habib, *On the growth of solutions to non-homogeneous linear differential equations with entire coefficients having the same order*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 1, 17–26.

[3] B. Belaïdi, H. Habib, *On the growth of solutions of some non-homogeneous linear differential equations*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 32 (2016), no. 1, 101-111.

[4] T. B. Cao, J. F. Xu, Z.X. Chen, *On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. 364 (2010), 130 142.

[5] Z. X. Chen, *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations*, Acta Math. Sinica Ser. B 18(2002), 79-88.

[6] Z. X. Chen, *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 42 (3) (1999) 552–558 (in Chinese).

[7] Z. X. Chen, C. C. Yang, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*. Kodai Math. J. 22 (1999), no. 2, 273–285.

[8] A. Ferraoun, B. Belaïdi, Estimation of hyper-order of solutions to higher order complew linear differential equations with entiere coefficients of slow growth. ROMI J.v.14, no.1(2018), 115-128.

[9] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37(1988), no. 1, 88-104.

[10] G. G. Gundersen, *Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.

[11] W. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[12] S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi, *On the growth of solutions of certain linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 17, 2(1992), 343–365.

[13] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[14] J. Wang, I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations*, Abstr. Appl. Anal. 2009, Art. ID 363927, 1-11.

[15] L. Wang, H. Liu, *Growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Electron. J. Differential Equations, 2014, 125(2014), 1-11.

[16] C.C. Yang, H. X. Yi, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions.*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[17] C. Y. Zhang, J. Tu, *Growth of solutions to linear differential equations with entire coefficients of slow growth*, Electron. J. Differential Equations, 43(2010).