UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
Filière : Mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option :

Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :
Equations différentielles fractionnaires avec dérivation de type Phi-Hilfer

Présenté par :

BELARBI Kehla

Soutenu : 21/06/2023 devant le jury composé de :

Mr. Zakaria BEKKOUCHE	**MCA**	**Université de Mostaganem**	**Président**
Mr. Oussama BOUANANI	**MCB**	**Université de Mostaganem**	**Examinateur**
Mr. Mohammed KAID	**MCA**	**Université de Mostaganem**	**Encadreur**
Mr. Houari FETTOUCHE	**MCA**	**Université de Mostaganem**	**Co-Encadreur**

DEDICACES

Je dédie ce travail :

À mon cher pére.

À ma chére mére.
Pour leurs sacrifices, que dieu les préserve en bonne santé et longue vie et qu'ils trouvent dans ces modestes lignes le témoignage de ma gratitude.

À mes soeurs et mes frères.
Particulièrement **Fatima** et **Aziz** qui ont été toujours à mes côtés et m'ont soutenu tout au long de ces longues années d'études.

À toute ma famille BELARBI.
À tous ceux qui me sont chers, aux personnes qui m'ont aidé et encouragé de près ou de loin.

Et A toutes mes amies.
Pour leurs amitiés et à tous les étudiants de math - info.

Remerciements

Premiérement et avant tout je remerciements Allah qui m'a donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

Je voudrais de manière particulière remercier d'abord :

-**Monsieur Mohammed KAID,** enseignant à l'université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem Faculté Des Sciences Exactes et Informatique, pour s'aide précieuse dans l'encadrement de mon travail, ses conseils, sa disponibilité.

-**Monsieur Houari FETTOUCHE**, enseignant au faculté Des Sciences Exactes et Informatique pour ses conseils.

-**Monsieur Zakaria BEKKOUCHE**, enseignant à l'université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem Faculté Des Sciences Exactes et Informatique, d'avoir accepté de présider le jury.

-**Monsieur Oussama BOUANANI**, enseignant à l'université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem Faculté Des Sciences Exactes et Informatique a accepté de participer au jury.

Enfin, je remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des équations différentielles dans lesquelles les dérivées sont des opérateurs de dérivation fractionnaires.

Dans ce mémoire, on donnera des résultats d'éxistence d'une solution au moins pour les problèmes aux limites d'ordre fractionnaire de type $\varphi-$Hilfer avec conditions aux limites. En se basant sur le théoréme de points fixe d'Arzela-Ascoli.

Mots clés : Dérivée fractionnaire $\varphi-$Hilfer, Point fixe d'Arzela-Ascoli.

Abstract

Fractional differential equations are differential equations in which the derivatives are fractional differentiation operators.

In this thesis, we present some existence results of boundary value problems for differential equations with fractional derivatives of φ-Hilfer type, it also included the existence study of at least one solution. The methods used are the Arzela-Ascoli fixed point theorems.

Keywords : $\varphi-$Hilfer derivative, Arzela-Ascoli fixed point theorem.

Table des matières

Notation

$\mathbb{N}$: Ensembles des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Ensembles des nombres réels.

$[a, b]$: Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'éxtrémités a et b.

$\mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\|.\|_{\infty}$: Normes infinie.

$\|.\|_{X}$: Normes de l'espace X.

${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha,\beta;\varphi}$: Dérivées fractionnaire de type φ-Hilfer de ordres $\alpha > 0$.

$I_{0^+}^{\delta;\varphi}$: Intégrale fractionnaire de type φ-Riemann–Liouville d'ordre $\delta > 0$.

$\Gamma(.)$: Fonctions Gamma.

Introduction

Depuis le début du calcul fractionnaire en 1695, il existe de nombreux définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires. Récemment, Almeida [1] utilisant l'idée de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à une fonction. Ensuite, utiliser l'idée de dérivée fractionnaire de Hilfer, et proposer un opérateur différentiel fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction.
Dans l'article [15], l'auteur M. Houas a étudie l'équations différentielle fractionnaire suivante :

$$^{C}D^{\beta}(^{C}D^{\alpha}+\lambda)u(t)=g(t,u(t)),t\in[0,T],$$

avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0)=\sum_{i=1}^{n}u(t_i), \\ I^{\delta}u(T)=\sum_{j=1}^{m}I^{\delta}u(t_i),\ 0<t_1<t_2<...<T, \end{cases}$$

où D^{α}et D^{β}sont des dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α,β et I^{δ} représente l'intégrale fractionnaire d'ordre $\delta>0$. Dans notre travail, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} ^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t)=f(t,u(t)),\quad t\in[0,T], \\ \psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(0)=0, \\ \psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\phi}u\right)(T)=\sum_{i=1}^{n}u(t_i),\qquad 0<t_1<...<t_n<T, \end{cases}$$

avec aussi

$$\begin{cases} u(0)=0, \\ I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T)=\sum_{j=1}^{k}I_{0^+}^{\delta;\varphi}u\left(\zeta_j\right),\quad 0<\zeta_j<T. \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Chapitre 1 : Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de ce travail. On rappelera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire de Hilfer. Quelques théorèmes du point fixe seront présentés.

Chapitre 2 : Dans le deuxiéme chapitre on donnera la solution d'équations différentielles avec l'intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville, On présentera des résultats sur du problème suivant :

$$\begin{cases} ^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t)=f(t,u(t)),\quad t\in[0,T], \\ \psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(0)=0, \\ \psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\phi}u\right)(T)=\sum_{i=1}^{n}u(t_i),\qquad 0<t_1<...<t_n<T, \\ u(0)=0,\quad I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T)=\sum_{j=1}^{k}I_{0^+}^{\delta;\varphi}u\left(\zeta_j\right),\quad 0<\zeta_j<T, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}$ et ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}$ sont les dérivées fractionnaire de type φ-Hilfer d'ordres α_1, α_2 tels que $1 < \alpha_1, \alpha_2 < 2$ et β_1, β_2 deux paramètres tel que $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$. Ainsi que, $I_{0^+}^{\delta;\varphi}$ l'Intégrale fractionnaire de type φ-Riemann–Liouville d'ordre $\delta > 0$ et $\psi_p(z) = |z|^{p-2}z$ désigne l'opérateur $p-$Laplacien et vérifie :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \qquad \left(\psi_p\right)^{-1} = \psi_q.$$

Aussi

$$\begin{cases} \varphi : [0,T] \to \mathbb{R}, \quad \varphi' \neq 0, \\ f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à l'existence d'une solution au moins pour le problème non linéaire à condition initiale d'une équation différentielle fractionnaire, en utilisant le théorème de point fixe d'Arzela-Ascoli.

Chapitre 4 : Dans le dernier chapitre, on donne un exemple pour illustrer quelques résultats principales.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et théoréme sur la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, on s'intéresse particulièrement à définir quelque notion de base sur le point fixe de Banach.

1.1 Outils mathématiques de base

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante avec $\varphi' \neq 0$. Notons

$$\begin{cases} \forall s, t \in [0, \infty);\ t \geq s, \quad \varphi_v(t, s) = (\varphi(t) - \varphi(s))^v, \\ \varphi(T) - \varphi(0) = M. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *([13], [34])Un espace de Banach est un espace vectoriel normeé complet pour la distance induite par la norme.´*

1.1.2 Fonction Gamma

On présente la fonction Gamma qui est le plus important outil dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.1.2 *([33]) On appelle la fonction Gamma notée Γ, la fonction définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Remarque 1.1.1 *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

1.

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

2.

$$\Gamma(\alpha+n) = \alpha(\alpha+1)....(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha),$$

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.1.3 Fonction Béta

Définition 1.1.3 *([33]) On appelle fonction Béta l'intégrale suivante :*

$$B(\alpha,\lambda) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\lambda-1} du, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \lambda > 0.$$

La relation entre les fonctions Gamma et Béta est donnée par :

$$B(\alpha,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}.$$

1.1.4 L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann–Liouville

Définition 1.1.4 *([19]). Soit$[a,b]$ tels que $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini sur l'axe réel $\mathbb{R}$. L'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville d'ordre α, avec $\alpha > 0$ de la fonction u est définie par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \; t > a$$

Définition 1.1.5 *([19]). Soit $I = [a,b]$ et $u(t) \in AC^n[a,b]$ et $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. La dérivée fractionnaire Riemann–Liouville d'ordre α, avec $\alpha > 0$ de la fonction u est définie par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} u(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s) ds, \end{aligned}$$

1.1.5 Intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville

Définition 1.1.6 *([19]) Soit (a,b) tels que $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de demi-axe $(0,\infty)$ et $\alpha > 0$. De plus, soit φ une fonction croissante positive sur $[\,a,b]$, qui a une dérivée continue φ' sur $[a,b]$. L'intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville d'ordre α d'une fonction u par rapport à une autre fonction φ sur $[a,b]$ est défini par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)u(s)ds, \tag{1.1.2}$$

où $\Gamma(.)$ est une fonction Gamma.

1.1.6 Dérivée fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville

Définition 1.1.7 *([18]-[19])Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\varphi, u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telle que φ est croissante avec $\varphi' \neq 0$. Pour tout $t \in [a,b]$, la dérivée fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville d'ordre α d'une fonction u est définie par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) &= \left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha;\varphi}u(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \varphi'(s)\varphi_{n-\alpha-1}(t,s)u(s)ds,\end{aligned}$$

où $n = [\alpha]+1$, $[\alpha]$ représente la partie entière du nombre réel α.

1.1.7 Dérivée fractionnaire type $\varphi-$Hilfer

Définition 1.1.8 *([16]-[17]) Soient $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $[a,b]$ est un intervalle tel que $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $\varphi, u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telle que φ est croissante avec $\varphi' \neq 0$. Pour tout $t \in [a,b]$, la dérivée fractionnaire $\varphi-$Hilfer d'une fonction u d'ordre α et de type $0 \leq \beta \leq 1$ est définie par :*

$$^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{\beta(n-\alpha);\varphi}\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{\gamma-\alpha;\varphi}\mathcal{D}_{a^+}^{\gamma;\varphi}u(t),$$

où $n = [\alpha]+1$ et $\gamma - \alpha = \beta\,(n-\alpha)$.

Proposition 1.1.1 *Soient $\alpha, \rho > 0$. Alors, on a la propriété de semi-groupe suivante donnée par :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi}\mathcal{I}_{a^+}^{\rho;\varphi}u(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\rho;\varphi}u(t), \quad t > a.$$

Lemme 1.1.1 *([18])Soit $u \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $n-1<\alpha<n$, $0\leq\beta\leq 1$ et $\gamma=\alpha+\beta(n-\alpha)$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t)=u(t)-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\varphi_{\gamma-k}(t,a)}{\Gamma(\gamma-k+1)}\nabla_{\varphi}^{[n-k]}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(a),\qquad t\in[a,b],$$

où

$$\nabla_{\varphi}^{[n]}u(t):=\left(\frac{1}{\varphi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n u(t).$$

Exemple 1.1.1 *Pour $n=2$, il vient*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t) &= u(t)-\sum_{k=1}^{k=2}\frac{\varphi_{\gamma-k}(t,a)}{\Gamma(\gamma-k+1)}\nabla_{\varphi}^{[n-k]}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\varphi}u(a)\\ &= u(t)-\left[\frac{\varphi_{\gamma-1}(t,a)}{\Gamma(\gamma)}\nabla_{\varphi}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(2-\alpha);\varphi}u(a)+\frac{\varphi_{\gamma-2}(t,a)}{\Gamma(\gamma-1)}\mathcal{I}_{a^+}^{(1-\beta)(2-\alpha);\varphi}u(a)\right]\\ &= u(t)+\frac{\varphi_{\gamma-1}(t,a)}{\Gamma(\gamma)}m_0+\frac{\varphi_{\gamma-2}(t,a)}{\Gamma(\gamma-1)}m_1,\end{aligned}$$

où $m_0,m_1\in\mathbb{R}$, ou bien

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}({}^{Hi}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha,\beta;\varphi}u)(t)=u(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}m_0+\frac{(\varphi(t)-\varphi(a))^{\gamma-2}}{\Gamma(\gamma-1)}m_1,$$

tel que $\gamma=\alpha+\beta(2-\alpha)$, c'est-à-dire $2-\gamma=(1-\beta)(2-\alpha)$.

Proposition 1.1.2 *Soient $\alpha\geq 0$ et $\lambda>0$. Pour tout $t>a$ on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}\varphi_{\lambda-1}(t,a)(t) &= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\lambda-1}(t)\\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}\varphi_{\lambda+\alpha-1}(t,a)\\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)}(\varphi(t)-\varphi(a))^{\lambda+\alpha-1}(t),\end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 *Calculons l'intégrale fractionnaire au sens de $\varphi-$Riemann-Liouville de la fonction :*

$$\varphi(t)=t.$$

En utilisant la définition ([19]), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}\varphi_{\lambda-1}(t,a)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)\varphi_{\lambda-1}(s,a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)(\varphi(t)-\varphi(s))^{\alpha-1}(\varphi(s)-\varphi(a))^{\lambda-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\lambda-1}ds.
\end{aligned}$$

En posant

$$s = z\,(t-a)+a,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}(t-a)^{\lambda-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-(z\,(t-a)+a))^{\alpha-1}(z\,(t-a)+a-a)^{\lambda-1}\,(t-a)\,dz \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\lambda-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (1-z)^{\alpha-1}z^{\lambda-1}dz \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\lambda-1}}{\Gamma(\alpha)}B\,(\alpha,\lambda)\,,
\end{aligned}$$

d'ou

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha,\varphi}\varphi_{\lambda-1}(t,a)(t) = \frac{\Gamma\,(\lambda)}{\Gamma\,(\alpha+\lambda)}\varphi_{\alpha+\lambda-1}(t,a)\,(t)\,,$$

pour $\lambda = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)ds &= \frac{\varphi_\alpha(t,a)\,(t)}{\Gamma\,(\alpha+1)} \\
&= \frac{(\varphi(t)-\varphi(s))^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+1)} \\
&= \frac{M^\alpha}{\Gamma\,(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.3 *[12].Soit les nombres a_i, $i = 1, ..., k$ positives, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^q \leq k^{q-1}\left(\sum_{i=1}^k a_i^q\right), q \geq 1,$$

Proposition 1.1.4 *Soit $u \in [a,b]$ et $0 < \alpha < 1$. Alors, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$ on a*

$$\left|\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi} u(t_2) - \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi} u(t_1)\right| \leq \frac{2\,\|u\|}{\Gamma(\alpha+1)} \left|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\right|^{\alpha},$$

1.2 Points Fixes

Les théorèmes de points fixes sont des outils très important dans la résolution des équations différentielles fractionnaires. En effet, nous assurent l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème du point fixe.

Définition 1.2.1 *([13]-[29])Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$ et $\phi : X \to X$ une application de X dans X. On appelle point fixe de ϕ tout point u tel que :*

$$\phi u = u.$$

1.2.1 Point fixe de Banach

Théorème 1.2.1 *([11]-[13])Soient X un espace de Banach et $\phi : X \to X$ est un opérateur contractante. Alors, il existe un point fixe $x \in X$ tel que :*

$$\phi x = x,$$

1.2.2 Point fixe d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.2.2 *([13])Soit $\Omega \subset X$. Alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Ω est uniformément borné.
2. Ω est équicontinu.

Chapitre 2

Sur la solution d'équations différentielles avec l'intégrale fractionnaire $\varphi-$Riemann–Liouville

Dans ce chapitre, nous avons étudier d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales, en utilisant l'intégrale fractionnaire de $\varphi-$Riemann–Liouville. On considère le problème suivant.

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t) = f(t,u(t)), \quad t\in[0,T], \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(0) = 0, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\phi}u\right)(T) = \sum_{i=1}^{n} u(t_i), \qquad 0<t_1<...<t_n<T, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

avec aussi

$$\begin{cases} u(0)=0, \\ I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T) = \sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi}u\left(\zeta_j\right), \quad 0<\zeta_j<T. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

Ici, nous prenons ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}$ et ${}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}$ sont les dérivées fractionnaire φ-Hilfer d'ordres α_1,α_2 tels que $1<\alpha_1,\alpha_2<2$ et β_1,β_2 deux paramètres tel que $0\leq\beta_1,\beta_2\leq 1$. Ainsi que, $I_{0^+}^{\delta;\varphi}$ l'intégrale fractionnaire φ-Riemann–Liouville d'ordre $\delta>0$ et

$$\psi_p(z) = |z|^{p-2}z, \tag{2.0.3}$$

désigne l'opérateur $p-$Laplacien et vérifie :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \qquad \left(\psi_p\right)^{-1} = \psi_q. \tag{2.0.4}$$

Aussi $\varphi:[0,T]\to\mathbb{R}$ est une fonction croissante telle que $\varphi'\neq 0$ et $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction donnée.

2.1 *Solution intégrale*

On prouve le lemme auxiliaire suivant qui est important pour donner la solution intégrale de 2.0.1-2.0.2.

Lemme 2.1.1 *On suppose que* $\Lambda \neq 0$, *tel que*

$$\Lambda = (\varphi(T) - \varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1} - \sum_{j=1}^{k} \left[(\varphi(\zeta_j) - \varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1} \right],$$

et $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, la solution du problème aux limites fractionnaires suivant :*

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi} \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u \right)(t) = g(t), \quad t \in [0,T], \\ \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u \right)(0) = 0, \\ \psi_p \left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\phi} u \right)(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} u(t_i), \qquad 0 < t_1 < ... < t_n < T, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ I_{0^+}^{\delta;\varphi} u(T) = \sum\limits_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} u\left(\zeta_j\right), \quad 0 < \zeta_j < T, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & u(t) \\ = \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \varphi'(s) \varphi_{\alpha_2-1}(t,s) \\ & \times \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x) dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \; \Omega_T \right) \right] ds \\ & + \Upsilon \sum_{j=1}^{k} \int_0^{\zeta_j} \varphi'(s) \varphi_{\alpha_2-1}(\zeta_j, s) \\ & \times \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x) dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \; \Omega_T \right) \right] ds \\ & - \Upsilon \int_0^T \varphi'(s) \varphi_{\alpha_2-1}(T,s) \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x) \varphi_{\alpha_1-1}(s,x) g(x) dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \Omega_T \right) \right] ds, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

où

$$\Omega_T = \sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1 - 1}(T,x) g(x) dx,$$

et

$$\Upsilon = \frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda}$$

Preuve. On considère l'équations suivante :

$$^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t) = g(t). \tag{2.1.4}$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}$ sur l'équation (2.1.4), on trouve

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}\left[^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_1,\beta_1;\varphi}\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t)\right] = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t),$$

d'après le lemme 1.1.1, on obtient

$$\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t) + \frac{\varphi_{\gamma_1-2}(t,0)}{\Gamma(\gamma_1-1)}m_0 + \frac{\varphi_{\gamma_1-1}(t,0)}{\Gamma(\gamma_1)}m_1,$$

tel que m_0, m_1 des réels et

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1(2-\alpha_1) \qquad \text{ou} \quad 2-\gamma_1 = (1-\beta_1)(2-\alpha_1),$$

car $n = [\alpha_1] + 1 = 2$. On obtient

$$\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}{\Gamma(\gamma_1-1)}m_0 + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}m_1. \tag{2.1.5}$$

En utilisant la condition $\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(0) = 0$, il vient

$$\psi_p\left(^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi}u\right)(0) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(0) + \left[\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}{\Gamma(\gamma_1-1)}m_0 + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}m_1\right]_{t\to 0},$$

d'où

$$\left[\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2}}{\Gamma(\gamma_1-1)}m_0 + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}m_1\right]_{t\to 0} = 0.$$

On a

$$\begin{cases} 0 \le \beta_1 \le 1, \\ 1 < \alpha_1 < 2 \end{cases} \Rightarrow (1-\beta_1)(2-\alpha_1) \ge 0,$$

alors $\gamma_1 - 2 \le 0$, ce qui implique

$$(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-2} \to \infty, \quad t \to 0.$$

En plus $\gamma_1 - 1 = (\alpha_1 - 1) + \beta_1(2 - \alpha_1) \geq 0$, donc

$$(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1} \to 0, \quad t \to 0.$$

Enfin, on trouve

$$m_0 = -\left[\frac{\Gamma(\gamma_1 - 1)}{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 2}} . \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_1)} m_1\right]_{t \to 0} = 0.$$

Maintenant, on utilise la condition $\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\phi} u\right)(T) = \sum_{i=1}^{n} u(t_i)$, tel que $0 < t_1 < ... < t_n < T$. Alors, d'après la relation (2.1.5) on a

$$\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u\right)(T) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T) + \frac{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_1)} m_1, \qquad (m_0 = 0),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} u(t_i) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T) + \frac{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_1)} m_1,$$

or

$$m_1 = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right].$$

On remplace m_1 dans (2.1.5), on a

$$\begin{aligned} &\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u\right)(t) \\ = \ &\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(t) + \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{\Gamma(\gamma_1)} \left[\frac{\Gamma(\gamma_1)}{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right], \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u\right)(t) = \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(t) + \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right].$$

En utilisant l'inverse l'opérateur de ψ_p, donc d'après la propriété (2.0.4), on a

$$(\psi_p)^{-1}\left[\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u\right)(t)\right] = (\psi_p)^{-1}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(t) + \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)$$

or

$$\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha_2,\beta_2;\varphi} u\right)(t) = \psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(t) + \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}}{(\varphi(T) - \varphi(0))^{\gamma_1 - 1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right). \quad (2.1.6)$$

Maintenant, en appliquant l'opérateur $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}$ sur la formule (2.1.6) et utilisant encore une fois le lemme 1.1.1 , on trouve

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad +\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-2}}{\Gamma(\gamma_2-1)}m_2+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}m_3, \end{aligned}$$

tels que $m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ et

$$\gamma_2=\alpha_2+\beta_2(2-\alpha_2) \quad \text{ou} \quad 2-\gamma_2=(1-\beta_2)(2-\alpha_2).$$

Pour trouver les constantes m_2, m_3, en utilisant les conditions aux limites. On a $u(0) = 0$, alors

$$u(0)=\left[\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-2}}{\Gamma(\gamma_2-1)}m_2+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}m_3\right]_{t\to 0}.$$

Nous avons

$$\begin{cases} 0\le\beta_2\le 1, \\ 1<\alpha_2<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2-2=(1-\beta_2)(2-\alpha_2)\le 0, \\ \gamma_2-1=(\alpha_2-1)+\beta_2(2-\alpha_2)\ge 0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-2}\to\infty, & t\to 0, \\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\to 0, & t\to 0, \end{cases}$$

finalement

$$m_2=\left[\left(\frac{\Gamma(\gamma_2-1)}{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-2}}\right)\left(\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}\right)m_3\right]_{t\to 0}=0,$$

alors $m_2 = 0$.

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad +\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}m_3. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Pour terminer m_3, on utilise la condition $I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T)=\sum_{j=1}^{k}I_{0^+}^{\delta;\varphi}u\left(\zeta_j\right)$ tel que $0<\zeta_j<T$. Alors, la formule (2.1.7) donne

$$\begin{aligned} u(\zeta_j) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(\zeta_j)+\frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad +\frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}m_3, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} u(\zeta_j) &= \sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(\zeta_j) + \frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} \frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)} m_3,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} u(\zeta_j) &= \sum_{j=1}^{k} \mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(\zeta_j) + \frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad + \frac{m_3}{\Gamma(\gamma_2)}\left(\sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi}\left[(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\right]\right).\end{aligned}$$

D'après la prposition 1.1.2 , on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} u(\zeta_j) &= \sum_{j=1}^{k} \mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(\zeta_j) + \frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)\right] \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma_2)\ m_3}{\Gamma(\gamma_2)\ \Gamma(\delta+\gamma_2)}\left(\sum_{j=1}^{k}\left[(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}\right]\right),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\delta;\varphi} u(\zeta_i) \\ = &\sum_{j=1}^{k} \mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(\zeta_j) + \frac{(\varphi(\zeta_i)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)\right] \\ &+ \frac{m_3}{\Gamma(\delta+\gamma_2)}\left(\sum_{j=1}^{k}\left[(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}\right]\right).\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Maintenant, vue de (2.1.7), pour $t=T$ nous avons

$$\begin{aligned}u(T) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(t) + \frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi} g(T)\right]\right)\right]_{t=T} \\ &\quad + \frac{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)} m_3,\end{aligned}$$

donc

$$
\begin{aligned}
I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T) &= \mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]_{t=T}\\
&\quad+\frac{m_3}{\Gamma(\gamma_2)}I_{0^+}^{\delta;\varphi}(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_2-1},
\end{aligned}
$$

or, d'aprés la proposition 1.1.2, on a

$$
\begin{aligned}
&I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T)\\
=\ &\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]_{t=T}\\
&+\frac{m_3}{\Gamma(\delta+\gamma_2)}(\varphi(T)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}. \qquad (2.1.9)
\end{aligned}
$$

De (2.1.8), (2.1.9) et la condition $I_{0^+}^{\delta;\varphi}u(T)=\sum_{j=1}^{k}I_{0^+}^{\delta;\varphi}u\left(\zeta_j\right)$, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\frac{m_3}{\Gamma(\delta+\gamma_2)}\left\{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}-\sum_{j=1}^{k}\left[(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}\right]\right\}.\\
=\ &\sum_{j=1}^{k}\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(\zeta_i)+\frac{(\varphi(\zeta_i)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]\\
&-\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]_{t=T}
\end{aligned}
$$

Puisque $\Lambda\neq 0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&m_3\\
=\ &\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Lambda}\sum_{j=1}^{k}\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(\zeta_i)+\frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]\\
&-\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Lambda}\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]_{t=T}.
\end{aligned}
$$

En remplacant m_3 dans l'equation (2.1.7), d'où

$$
\begin{aligned}
& u(t) \\
= \; & \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right] \\
& +\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Lambda\ \Gamma(\gamma_2)} \\
& \times\sum_{j=1}^{k}\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(\zeta_j)+\frac{(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right] \\
& -\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Lambda} \\
& \times\mathcal{I}_{0^+}^{\delta+\alpha_2;\varphi}\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(t)+\frac{(\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]_{t=T}
\end{aligned}
$$

vue la formule (1.1.2), on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha;\varphi}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\varphi'(s)\varphi_{\alpha-1}(t,s)u(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\varphi'(s)(\varphi(t)-\varphi(s))^{\alpha-1}u(s)ds.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& u(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t,s)\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(s)+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]ds \\
& +\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Lambda\ \Gamma(\gamma_2)\ \Gamma(\delta+\alpha_2)} \\
& \times\sum_{j=1}^{k}\int_0^{\zeta_j}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(\zeta_j,s)\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(s)+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]ds \\
& -\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Lambda\ \Gamma(\gamma_2)} \\
& \times\int_0^T\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(T,s)\left[\psi_q\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(s)+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha_1;\varphi}g(T)\right]\right)\right]ds,
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
& u(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t,s) \\
& \times \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x)dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \times \right.\right. \\
& \left.\left. \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)g(x)dx \right] \right) \right] ds \qquad (2.1.10) \\
& + \Upsilon \sum_{j=1}^{k} \int_0^{\zeta_j} \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(\zeta_j,s) \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x)dx \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)g(x)dx \right] \right) \right] ds \\
& - \Upsilon \int_0^T \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(T,s) \left[\psi_q \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)g(x)dx \right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)g(x)dx \right] \right) \right] ds.
\end{aligned}
$$

□

Chapitre 3

Exitence d'une solution au moins

Dans ce qui suit et tout au long de ce chapitre, nous étudions l'existence d'une solution au moins pour les problèmes aux limites, en utilisant le théoréme de point fixe d'Arzela-Ascoli.
– On notera l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$X = C\left([0, T], \mathbb{R}\right)$$

– On transforme notre problème à un problème du point fixe. Alors, vue la formule 2.1.10, on considère pour tout $t \in [0,T]$ l'opérateur $H : X \to X$ par :

$$\begin{aligned}
& Hu(t) \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t,s) \\
& \times \left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\right.\right. \\
& \times \left.\left.\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right] ds \qquad (3.0.1) \\
& +\Upsilon\sum_{j=1}^{k}\int_0^{\zeta_j} \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(\zeta_j,s)\left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right] ds \\
& -\Upsilon\int_0^T \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(T,s)\left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^{n} u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right] ds.
\end{aligned}$$

tel que

$$\Upsilon = \frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(t)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda},$$

et

$$\Lambda = (\varphi(T)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1} - \sum_{j=1}^{k}\left[(\varphi(\zeta_j)-\varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1}\right].$$

Notons par

$$\Pi_1 = 3^{q-2}\left(\left(\frac{2\gamma^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\right)^{q-1} + \theta^{q-1}\right).$$

Aussi

$$\begin{aligned}\Upsilon^* &= \underset{t\in[0,T]}{Sup}\left|\Upsilon(t)\right| \\ &= \frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ M^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda},\end{aligned}$$

et par suite

$$\Pi_2 = \Upsilon^* \frac{\Pi_1}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left(\sum_{j=1}^{k}\ \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta} - M^{\alpha_2+\delta}\right) + \frac{M^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Pi_1.$$

En plus, on note pour tout $r > 0$

$$\mathcal{U}_r = \left\{u \in X,\ \ \|u\|_X \leq r\right\}.$$

3.0.1 Hypothèse

On suppose que :
- (H_1) : La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.
- (H_2) : Il existe deux fonctions positives $\gamma \in C([0,T],\mathbb{R})$ et $\theta : [0,\infty[\to [0,\infty[$ telles que pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{cases} |f(t,u(t)| \leq \gamma(t)\,|u(t)|\,, \\ \gamma^* = \underset{t\in[0,T]}{Sup}\,|\gamma(t)|\,. \end{cases}$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u(t_i)\right| \leq \theta\,\|u\|_X\,.$$

3.0.2 Quelques résultats

En se basant sur le théorème de point fixe d'Arzela-Ascoli (voir théorème 1.2.2).

Théorème 3.0.1 *On suppose que* $\Lambda \neq 0$ *et*

$$\Pi_2 r^{q-1} \leq r,$$

Si les hypothèses (H_1) *et* (H_1) *sont satisfaites, alors notre problème admet au moins une solution sur* $[0,T]$

Preuve. On montre que l'opérateur H est complètement continu.
1. D'après l'hypothèse (H_1), l'opérateur H est continu.
2. Maintenant, on montre que l'opérateur H envoie tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact dans X.

$$H\mathcal{U}_r \subset \mathcal{U}_r.$$

Soit $u \in \mathcal{U}_r$, en utilisant (3.0.1) on a

$$\begin{aligned}
&|Hu(t)| \\
\leq\ & \underset{t\in[0,T]}{Sup}\Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t \varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t,s) \\
&\times\Bigg[\psi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx + \frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}} \\
&\times\Bigg[\sum_{i=1}^n u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\Bigg]\Bigg)\Bigg]\, ds \\
&+\Upsilon\sum_{j=1}^k\int_0^{\zeta_j}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(\zeta_j,s)\Bigg[\psi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx \\
&+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\Bigg[\sum_{i=1}^n u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\Bigg]\Bigg)\Bigg]\, ds \\
&-\Upsilon\int_0^T\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(T,s)\Bigg[\psi_q\Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx \\
&+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\Bigg[\sum_{i=1}^n u(t_i) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\Bigg]\Bigg)\Bigg]\, ds\Bigg|.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.0.3), il vient

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right|\\
\leq\ & \underset{s\in[0,T]}{Sup}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx+\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\right.\\
&\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right|^{q-1},
\end{aligned}$$

et d'après la proposition 1.1.3 et la formule (1.1.1), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left[\sum_{i=1}^{n}u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right|\\
\leq\ & 3^{q-2}\underset{s\in[0,T]}{Sup}\left(\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx\right|^{q-1}+\left|\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\right|^{q-1}\right.\\
&\left.+\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right|^{q-1}\right)\\
\leq\ & 3^{q-2}\underset{s\in[0,T]}{Sup}\left(2\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right|^{q-1}+\left|\sum_{i=1}^{n}u(t_i)\right|^{q-1}\right).
\end{aligned}$$

D'apès l'hypothèse (H_2), on a

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right|\\
\leq\ & 3^{q-2}\left(\left(\frac{2\gamma^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\|u\|_X\right)^{q-1}+\theta^{q-1}\ \|u\|_X^{q-1}\right) \qquad (3.0.2)\\
\leq\ & 3^{q-2}\left(\left(\frac{2\gamma^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\right)^{q-1}+\theta^{q-1}\right)r^{q-1}\\
\leq\ & \Pi_1 r^{q-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\underset{t\in[0,T]}{Sup}|Hu(t)| \leq\ & \frac{M^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Pi_1 r^{q-1}\\
&+\Upsilon^*\frac{\Pi_1 r^{q-1}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\sum_{j=1}^k \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}-\Upsilon^*\frac{M^{\alpha_2+\delta}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\Pi_1 r^{q-1}\\
\leq\ & \Upsilon^*\frac{\Pi_1 r^{q-1}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left(\sum_{j=1}^k \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}-M^{\alpha_2+\delta}\right)+\frac{M^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Pi_1 r^{q-1}\\
\leq\ & \left[\Upsilon^*\frac{\Pi_1}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left(\sum_{j=1}^k \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}-M^{\alpha_2+\delta}\right)+\frac{M^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Pi_1\right]r^{q-1}\\
\leq\ & \Pi_2 r^{q-1} \qquad (3.0.3)\\
\leq\ & r,
\end{aligned}$$

ce qui implique $\|Hu\|_X<\infty$, d'où H est uniformément borné.On va établir l'équicontinuité de $H\left(\mathcal{U}_r\right)$:
Soit $u\in\mathcal{U}_r$ et $t_1,t_2\in[0,T]$ tel que $t_1<t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}|Hu(t_2)-Hu(t_1)|\\
\leq\ & \underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_2}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_2,s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_1}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_1,s)ds\right||K(s,0)|\\
&+\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda}\left|(\varphi(t_2)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}-(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\right|\ \times\left|L(\zeta_j,0)+J(T,0)\right|,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&K(s,0)\\
=\ &\left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&L(\zeta_j,0)\\
=\ &\sum_{j=1}^k\int_0^{\zeta_j}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(\zeta_j,s)\left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right]ds,
\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}
&J(T,0)\\
=\ &\int_0^T\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2+\delta-1}(T,s)\left[\psi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^s \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(s,x)f(x,u(x))dx\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{(\varphi(s)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}{(\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_1-1}}\left[\sum_{i=1}^n u(t_i)-\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^T \varphi'(x)\varphi_{\alpha_1-1}(T,x)f(x,u(x))dx\right]\right)\right]ds.
\end{aligned}$$

D'après (3.0.2), il vient

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}\left|Hu(t_2)-Hu(t_1)\right|\\
\leq\ &\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_2}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_2,s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_1}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_1,s)ds\right|\left|K(s,0)\right|\\
&+\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda}\left|(\varphi(t_2)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}-(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\right|\ \times\left|L(\zeta_j,0)+J(T,0)\right|,
\end{aligned}$$

de (3.0.3), on obtient

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}|Hu(t_2)-Hu(t_1)| \\
\leq\ & \underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_2}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_2,s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^{t_1}\varphi'(s)\varphi_{\alpha_2-1}(t_1,s)ds\right||K(s,0)| \\
& +\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda} \\
& \times\left|(\varphi(t_2)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}-(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\right|\ \frac{\Pi_1 r^{q-1}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left|\sum_{j=1}^{k}\ \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}+M^{\alpha_2+\delta}\right|.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1.4, on trouve

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}|Hu(t_2)-Hu(t_1)| \\
\leq\ & 2\Pi_1 r^{q-1}\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_2)|^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} \\
& +\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda} \\
& \times\left|(\varphi(t_2)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}-(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\right|\ \frac{\Pi_1 r^{q-1}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left|\sum_{j=1}^{k}\ \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}+M^{\alpha_2+\delta}\right|,
\end{aligned}$$

d'autre part, nous avons

$$(\varphi(t_2)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}\geq(\varphi(t_1)-\varphi(0))^{\gamma_2-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}|Hu(t_2)-Hu(t_1)| \\
\leq\ & 2\Pi_1 r^{q-1}\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)} \\
& +\frac{2\Gamma(\delta+\gamma_2)}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda}\ |(\varphi(t_2)-\varphi(t_1))|^{\gamma_2-1}\ \frac{\Pi_1 r^{q-1}}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left|\sum_{j=1}^{k}\ \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}+M^{\alpha_2+\delta}\right|,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\underset{t_2,t_1\in[0,T]}{Sup}|Hu(t_2)-Hu(t_1)| \\
\leq\ & 2\Pi_1 r^{q-1}\times\left[\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}+\frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\,|(\varphi(t_2)-\varphi(t_1))|^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\alpha_2+\delta+1)\Gamma(\gamma_2)\ \Lambda}\right. \\
& \left.\times\left|\sum_{j=1}^{k}\ \left|\ \varphi(\zeta_j)-\varphi(0)\right|^{\alpha_2+\delta}+M^{\alpha_2+\delta}\right|\right]
\end{aligned}$$

Enfin

$$|Hu(t_2) - Hu(t_1)| \to 0, \quad t_2 \to t_1.$$

En vertue du théorème de Arzela-Ascoli, il en résulte que H est un opérateur complètement continu. $\square$

Chapitre 4

Exemple

Nous présentons un exemple pour illustrer quelques résultats principales.

Exemple 4.0.1 *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{4}{3},\frac{1}{2};2t^2}\psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{5}{4},\frac{1}{4};2t^2}u\right)(t) = \frac{1}{(3t+e)^2}\exp(u) + t, \quad t\in[0,1], \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{5}{4},\frac{1}{4};2t^2}u\right)(0) = 0, \\ \psi_p\left({}^{Hi}\mathcal{D}_{0^+}^{\frac{5}{4},\frac{1}{4};2t^2}u\right)(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} u(t_i), \qquad 0 < t_1 < ... < t_n < 1, \\ u(0) = 0, \quad I_{0^+}^{\frac{3}{5};2t^2}u(1) = \sum\limits_{j=1}^{k} I_{0^+}^{\frac{3}{5};2t^2}u\left(\frac{1}{2^j}\right). \end{cases}$$

Pour cet exemple, on a

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{4}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{4}.$$

Ainsi que, nous avons

$$\delta = \frac{3}{5}, \quad \varsigma_j = \frac{1}{2^j}, \quad q = 2$$

en plus

$$f(t, u(t)) = \frac{1}{(3t+e)^2}\exp(u) + t \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 2t^2,$$

Il est facile de voir que φ est croissante et la fonction f est continue. D'autre part, pour *toutes* $u, v \in \mathbb{R}^2$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
\forall t &\in [0,1] : \quad \left| f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{(3t+e)^2} \exp(u) + t - \frac{1}{(3t+e)^2} \exp(v) - t \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{(3t+e)^2} \exp(u) - \frac{1}{(3t+e)^2} \exp(v) \right| \\
&\leq \frac{1}{(3t+e)^2} \left| u - v \right| .
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\forall t \in [0,1] : \varphi(T) - \varphi(0) = M,$$

d'où

$$M = 2$$

$$\begin{aligned}
\Lambda &= (\varphi(T) - \varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1} - \sum_{j=1}^{k} \left[(\varphi(\zeta_j) - \varphi(0))^{\delta+\gamma_2-1} \right] \\
&= 1.565
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Lambda \neq 0.$$

Maintenant, soit

$$\gamma(t) = \frac{1}{(3t+e)^2}, \qquad \theta(t) = \frac{1}{(2e^t+2)^2}.$$

Nous avons

$$\gamma^* = \underset{t\in[0,1]}{Sup} \left| \gamma(t) \right| = \frac{1}{e^2},$$

tel que

$$\left| f(t, u(t) \right| \leq \gamma(t) \left| u(t) \right| .$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\Upsilon^* &= \underset{t\in[0,T]}{Sup} \left| \Upsilon(t) \right| \\
&= \frac{\Gamma(\delta+\gamma_2)\ (\varphi(T)-\varphi(0))^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\delta+\alpha_2)\ \Gamma(\gamma_2)\ \Lambda} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{3}{5}+\frac{23}{16})\ 2^{\frac{7}{16}}}{\Gamma(\frac{3}{5}+\frac{5}{4})\ \Gamma(\frac{23}{16})\ \Lambda}, \\
&= 1.051
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= 3^{q-2}\left(\left(\frac{2\gamma^* M^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)}\right)^{q-1} + \theta^{q-1}\right). \\
&= \left(\frac{\frac{2^{\frac{7}{3}}}{e^2}}{\Gamma(\frac{4}{3}+1)} + \frac{1}{(2e+2)^2}\right) \\
&= 0,591.
\end{aligned}$$

Posons

$$r = \frac{1}{2},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \Upsilon^* \frac{\Pi_1}{\Gamma(\alpha_2+\delta+1)}\left(\sum_{j=1}^{k} \mid \varphi(\zeta_j) - \varphi(0)\Big|^{\alpha_2+\delta} - M^{\alpha_2+\delta}\right) + \frac{M^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}\Pi_1 \\
&= 0.071.
\end{aligned}$$

et

$$\Pi_2 r^{q-1} \leq r.$$

Enfin, D'après le Théorème 1.2.2, le problème admet au moins une solution sur $[0,1]$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence des solutions du probléme aux limites concernant les équations différentielles fractionnaire, ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théoréme de point fixe en particulier nous avons utilisées le théoréme de point fixe d'Arzela-Ascoli.

Bibliographie

[1] R. Almeida, *A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 44, 460–481. (2017).

[2] Z. Baitiche, C. Derbazi, M. Benchohra and Y. Zhou, *A New Class of Coupled Systems of Nonlinear Hyperbolic Partial Fractional Differential Equations in Generalized Banach Spaces Involving the ψ–Caputo Fractional Derivative.* Symmetry 2021, 13, 2412. https ://doi.org/10.3390/sym13122412. (2021).

[3] H. Beddani, and M. Beddani, *Solvability for a differential systems via Phi-Caputo approach.* Journal of Science and Arts. no. 3 (56), p. 749-762, (2021)

[4] H. Beddani and Z. Dahmani, *Solvability for a nonlinear diffrential problem of Langevin type via Phi-Caputo approach.* Eur. J. Math. Appl. 1 :11. (2021)

[5] H. Beddani, M. Beddani and Z. Dahmani, *Nonlinear Differential Problem with p-Laplacian and via Phi-Hilfer Approach : Solvability and Stability Analysis.* Eur. J. Math. Anal. 1 164-181. (2021)

[6] H. Beddani, *(n + 1)-Parameter singular fractional differential equation.* Asia Mathematika. v. 5, p. 11-18. (2021).

[7] M. Bezziou, Z. Dahmani, I. Jebril and M. Kaid, *Caputo-Hadamard approach applications, solvability for an integro-diffrential problem of lane and emden type.* J. Math. Comput. Sci. 11 , no. 2, 1629-1649. (2021).

[8] A.Berhail, N. Tabouche, M. Matar and J. Alzabut, *Boundary value problem defined by system of generalized Sturm–Liouville and Langevin Hadamard fractional differential equations.* https ://doi.org/10.1002/mma.6507. (2020).

[9] C. Corduneanu : *Principles Of Differential And Integral Equations*, Chelsea Publ. Comp., 2nd Edition, (1977).

[10] Z. Dahmani, A. Anber, Y. Gouari, M. Kaid and I. Jebril , *Extension of a Method for Solving Nonlinear Evolution Equations Via Conformable Fractional.* IEEE. International Conference on Information Technology (ICIT), (2021).

[11] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis* ; Springer : New York, NY, USA, (1985).

[12] K. M. Furati, N. D. Kassim, and N. E. Tatar, *Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative*, Comput. Math. Appl. 64 (2012), 1616-1626. https ://doi.org/10.1016/j.camwa..01.009.(2012).

[13] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory* ; Springer : New York, NY, USA, (2003).

[14] J. K. Hale and S. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 19. (1999).

[15] M. Houas, *Existence results for fractional differential equations involving two Caputo derivatives with nonlocal conditions* ; Canad. J. Appl. Math, no. 1, 46-60, 3 (2021).

[16] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics* ; World Scientific : Singapore, (2000).

[17] R. Hilfer, *Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials.* J. Chem. Phys. , 284, 399–408.(2002).

[18] R. Hilfer, Y. Luchko and Z. Tomovski, *Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouvill fractional derivatives.* Frac. Calc. Appl. Anal., 12, 299–318. (2009).

[19] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential.* Elsevier Science B.V. (2006).

[20] H. Khan, W. Chen, H. Sun, *Analysis of positive solution and Hyers-Ulam stability for a class of singular fractional differential equations with p-Laplacian in Banach space.* Math. Methods Appl. Sci. 41 3430-3440. https : //doi.org/10.1002/mma.4835. (2018).

[21] F. Mainardi, *Boundary Value Problems for Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations and Inclusions with Integral Multi-Poin Boundary Conditions. In Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* ; Carpinteri, A., Mainardi, F., Eds. ; Springer : Berlin, Germany, ; p. 291–348.(1997).

[22] R. L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering ; Begell House Publishers*, Chicago, IL, USA, (2006).

[23] A. Ndiaye, M. Kaid, Z. Dahmani, *Solvability for differential systems of Duffing type involving sequential Caputo derivatives.* Annals of pure and applied mathematical sciences. 1(1), 1–13. (2021).

[24] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press. New York, NY, USA, ; v. 198. (1999).

[25] A. Samadi, C. Choltticha, S. K. Ntouyas and J. Tariboon, *A Study of Coupled Systems of y-Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations with Integro-Multipoint Boundary Conditions,* fractal and fractional. , 5, 162. https ://doi.org/ 10.3390/fractalfract5040162. (2021).

[26] J. V.Sousa, J.V. ; E. C. de Oliveira, *On the y-Hilfer fractional derivative.* Commun. Nonlinear Sci. n. Simul. , 60, 72–91. (2018).

[27] W. Shammakh, H. Z. Alzumi and B. A. Alqahtani, *A New Class of ψ-Caputo Fractional Differential Equations and Inclusion.* Journal of Mathematics, Article ID 6677959, 18 pages. (2021).

[28] vastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential.* Elsevier Science B.V. (2006).

[29] H. Khan, W. Chen, H. Sun, *Analysis of positive solution and Hyers-Ulam stability for a class of singular fractional differential equations with p-Laplacian in Banach space.* Math. Methods Appl. Sci. 41 3430-3440. https : //doi.org/10.1002/mma.4835. (2018).

[30] F. Mainardi, *Boundary Value Problems for Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations and Inclusions with Integral Multi-Poin Boundary Conditions. In Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* ; Carpinteri, A., Mainardi, F., Eds. ; Springer : Berlin, Germany, ; p. 291–348.(1997).

[31] R. L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering ; Begell House Publishers*, Chicago, IL, USA, (2006).

[32] A. Ndiaye, M. Kaid, Z. Dahmani, *Solvability for differential systems of Duffing type involving sequential Caputo derivatives.* Annals of pure and applied mathematical sciences. 1(1), 1–13. (2021).

[33] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press. New York, NY, USA, ; v. 198. (1999).

[34] A. Samadi, C. Cholticha, S. K. Ntouyas and J. Tariboon, *A Study of Coupled Systems of y-Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations with Integro-Multipoint Boundary Conditions,* fractal and fractional. , 5, 162. https ://doi.org/ 10.3390/fractalfract5040162. (2021).

[35] J. V.Sousa, J.V. ; E. C. de Oliveira, *On the y-Hilfer fractional derivative.* Commun. Nonlinear Sci. n. Simul. , 60, 72–91. (2018).

[36] W. Shammakh, H. Z. Alzumi and B. A. Alqahtani, *A New Class of ψ-Caputo Fractional Differential Equations and Inclusion.* Journal of Mathematics, Article ID 6677959, 18 pages. (2021).