Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Chaïmae DJELLOUL

Étude de l'existence et de la régularité des solutions de l'équation de diffusion d'ordre fractionnaire par rapport au temps

soutenu publiquement le 22 *juin* 2023 *devant le jury composé de :*

Président :	Sidi Mohamed BAHRI	Prof	U. Mostaganem
Examinateur :	Abdallah MENAD	M.C.A	U. Mostaganem
Encadreur :	Laïd DJILALI	M.C.A	U. Mostaganem

Année Universitaire : 2022 / 2023

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents qui m'ont soutenu durant toute ma carrière éducative, à mon frère et mes sœurs qui ont supporté mon désordre durant ces dernier mois à fin de réaliser ce travail.

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord au Dieu tout puissant de m'avoir donner tous ce que je possède et de guider mes pas vers le chemin du savoir.

Je voudrais exprimer aussi ma plus grande gratitude et mes sincères remerciements à :

L'ensemble des enseignants du département des Mathématiques et de l'Informatique de la Faculté des Sciences Exactes et Informatique de l'université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem, principalement :

Mon encadreur Monsieur ***Laïd DJILALI***, Maître de conférence classe A à l'Université de Mostaganem, pour me poser ce sujet et guider mon travail.

Monsieur, ***Sidi Mohamed BAHRI***, Professeur à l'Université de Mostaganem, qui m'a honoré en présidant ce jury.

Monsieur ***Abdallah MENAD***, Maître de conférence classe A à l'Université de Mostaganem qui m'a honoré en acceptant de faire partie de mon Jury de soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à toute ma famille principalement mes parents qui ont été derrière moi tout au long de mon cursus éducatif.

Index des notations

Ω	:	un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.
$L^p(\Omega)$	:	l'espace des fonctions p-intégrables sur Ω.
$L^\infty(\Omega)$	:	l'espace des fonctions essentiellement bornées.
$\mathscr{D}(\Omega)$	:	l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω.
$\mathscr{D}'(\Omega)$	:	l'espace des distributions sur Ω.
$\Gamma(\alpha)$	:	fonction Gamma d'Euler.
$\beta(x, y)$	:	fonction Bêta d'Euler.
X	:	un espace de Banach.
H	:	un espace de Hilbert.
g_α	:	le noyau d'intégration.
$W^{m,p}(\Omega)$	:	l'espace de Sobolev d'ordre m.
$W^{1,p}(\Omega)$	:	l'espace de Sobolev d'ordre 1.
$H^1(\Omega)$	:	l'espace de Sobolev d'ordre 2.
${}^{R}\mathbf{D}_t^\alpha u(t)$	:	la dérivée d'ordre α de u au sens de Riemann-Liouville.
${}^{R}\mathbf{D}_{0,t}^\alpha u(t)$	:	la dérivée d'ordre α de u au sens de Riemann-Liouville à gauche.
${}^{R}\mathbf{D}_{t,T}^\alpha u(t)$	:	la dérivée d'ordre α de u au sens de Riemann-Liouville à droite.
∇u	:	laplacien de u.
Δu	:	gradient de u.
p.p.	:	presque partout
(PCF)	:	problème de Cauchy fractionnaire.

Table des matières

Introduction

De nombreux phénomènes physiques se décrivent par l'équation de diffusion, par exemple le déplacement collectif de particules, la diffusion informatique, etc. Le problème de diffusion classique peut se formuler comme suit :

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{D}\Delta u & = f(u), \quad t > 0 \\ u(x,0) & = u_0(x) \end{cases}$$

où Δ est le Laplacien, D constante positive appelée coefficient de diffusion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue appelée terme réactif et u_0 la donnée initiale.

Mais, comme l'idée des équations différentielles fractionnaires (EDF) a toujours été intrigante pour les mathématiciens depuis la naissance du calcul différentiel. Ces derniers ont développé beaucoup de notions dans ce domaine tel qu'il existe de nombreux sens pour calculer une dérivée d'ordre non entier pour une fonction.

Nous citons la dérivée de Grünwald-Letnikov, la dérivée de Caputo ect. Mais dans ce travail, nous nous intéressons à celle de Riemann-Liouville qui est donnée par :

$${}^{\mathrm{R}}_{a}\mathbf{D}^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\,du\right] = \frac{d^n}{dt^n}\left[\left(g_{n-\alpha} * f\right)(t)\right],$$

où $n-1 \leqslant \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t \leqslant 0. \end{cases}$$

Dans ce travail, nous allons étudier le problème de diffusion d'ordre fractionnaire suivant :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} {}^{\mathrm{R}}\mathrm{D}^{\alpha}_{0,t} u - \Delta u & = f \\ \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) & = \nu, \end{cases}$$

avec $\alpha \in]0,1[$ f et ν des fonctions données et $u = u(t,x)$ solution de notre Problème de Cauchy d'ordre fractionnaire (PCF) dans $[0,\mathrm{T}] \times \Omega \subset [0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$. Nous montrons que ce problème est bien posé c'est à dire il admet une unique solution dans un espace convenable et par la suite, nous allons établir dans un espace bien défini la régularité de la solution.

L'équation de notre problème présente une singularité au temps initial $t = 0$. Comme remarque, la fonction ν signifie un taux de blow-up lorsque t tend ver zero.

Nous proposons la méthode de Galerkin pour la résolution des problèmes de diffusion de ce type sous des hypothèses assez générales car cette méthode est l'un des outils les plus efficaces pour résoudre des (EDP) linéaires et non linéaires.

Nous avons rencontré deux problèmes :

Le premier : la manipulation de ce terme

$$\left\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u, u \right\rangle,$$

dans cette méthode.

Le deuxième est l'espace fonctionnel convenable dans lequel on résout le problème (**P**). Dans ce travail, nous utilisons des espaces fonctionnels simples qui sont des généralisations naturelles des espaces connus dans le cadre entier.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Le **premier chapitre** est un rappel des outils utilisés pour établir les théorèmes donnés.

- Les espaces de Lebesgue sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec leurs normes et propriétés
- Convolution de deux fonctions
- Distributions et espaces de Sobolev
- Les fonctions spéciales
- Description de la méthode de Galerkin

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville généralisée.

Dans le **dernier chapitre** nous montrons par la méthode de Galerkin l'existence, l'unicité ainsi la régularité de la solution.

Chapitre 1

Préliminaire

1 Introduction

Ce chapitre est un rappel des outils utilisés. Nous parlerons des espaces de Lebesgue, la convolution de deux fonctions. Par la suite nous traiterons les distributions, les espaces de Sobolev, des fonctions tests et quelques propriétés puis nous définirons quelques fonctions spéciales. À la fin nous donnerons une description à la méthode de Galerkin.

Dans tout ce qui suit, on considèrera Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

2 Les espaces de Lebesgue

2.1 Définitions et généralités

Définition 1.1 [1]

Soit $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lebesgue d'ordre p, noté $\mathrm{L}^p(\Omega)$, est un espace vectoriel de classe de fonctions dont la puissance de l'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue est défini par :

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f\ mesurable\ et \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2 [1]

Lorsque $p \to \infty$, l'espace de Lebesgue, noté $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, des fonctions bornées est défini par :

$$\mathrm{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ mesurable\ , \exists\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}+\ telle\ que\ \left|f\right| \leqslant \mathrm{C} \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = \inf\left\{ \mathrm{C}\ ;\ \left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{C}\ \mathbf{p.p.}\ sur\ \Omega \right\}.$$

Proposition 1.1 [1]

Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$. $\left(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)$ *est un espace vectoriel normé complet.*

Proposition 1.2

L'espace $\left(\mathrm{L}^2(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)$ *muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \qquad \forall\ u, v \in \mathrm{L}^2(\Omega)\ ;$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.3 ***(Fonctions localement intégrables)***

Une fonction f est dite localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact inclus dans Ω.

L'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω est noté par $\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$.

Proposition 1.3

Pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\mathrm{L}^p(\Omega) \subset \mathrm{L}^p_{loc}(\Omega).$$

Théorème 1.1 [1] ***(Théorème de Tonelli)***

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose pour presque tout $x \in \Omega_1$

$$\int_{\Omega_2} \left|f(x,y)\right| dy < \infty,$$

et que

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \left|f(x,y)\right| dy dx < \infty.$$

Alors, $f \in \mathrm{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.2 [1] ***(Théorème de Fubuni)***

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$f(x,y) \in \mathrm{L}^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} \left|f(x,y)\right| dy \quad \in \mathrm{L}^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$f(x,y) \in \mathrm{L}^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_2} \left|f(x,y)\right| dy \quad \in \mathrm{L}^1_y(\Omega_2).$$

De plus, on a

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Théorème 1.3 [1] ***(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)***

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $\mathrm{L}^1(\Omega)$ telle que

$$\sup_n \int_\Omega f_n\,dx < \infty.$$

*Alors $f_n(x)$ converge **p.p.** sur Ω vers une limite finie notée f(x) ; de plus*

$$f \in \mathrm{L}^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \to 0.$$

2.2 Inégalités remarquables

Définition 1.4

Soit $p \in [1,+\infty[$. On appelle exposant conjugué de p l'unique $q \in [1,+\infty[$ tel que :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Inégalité de Hölder

Lemme 1.1 [1]

Soit q l'exposant conjugué de p avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et soient $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\Omega)$. Alors $f.g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et on a :

$$\|f.g\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\,\|g\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}.$$

Dans le cas où $p = q = 2$, on obtiendra l'inégalité appelée inégalité de Cauchy-Schwarz donnée par lemme suivant :

Lemme 1.2 ***(Cauchy-Schwarz)***
Pour tout $f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on a :

$$\|f.g\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\|g\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

2.3 Produit de convolution

Définitions et généralités

Définition 1.5 [1]

Soient f et g deux fonctions intégrables. On définit le produit de convolution de f et g par :

$$(f * g)(x) := \int_{\Omega} f(x-y)g(y)dy.$$

Proposition 1.4 [1]

Soient $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors,

1. *La fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur Ω.*

2. *$f * g \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ et*

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \|g\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}.$$

Propriétés 1

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, f, g et h trois fonctions intégrables sur Ω. Alors

1. $f * g = g * f$.
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. $f * (\lambda g + h) = \lambda(f * g) + (f * h)$.

3 Fonctions tests

3.1 Les espaces $\mathscr{C}^k(\Omega)$

Définition 1.6

l'ensemble, noté $\mathscr{C}^k(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions k fois différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues sur Ω.

Remarques 1

1. *Par itération sur k, on peut définir $\mathscr{C}^k(\Omega)$ par :*

$$\mathscr{C}^k(\Omega) := \left\{ f \in \mathscr{C}^{k-1}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathscr{C}^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}; \quad k \geqslant 1.$$

2. *Pour k=0, l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω, et aussi noté $\mathscr{C}(\Omega)$.*
3. *L'espace, noté $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω, et on a*

$$\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^k(\Omega).$$

3.2 Support des fonctions continues

Définition 1.7 ***(Support d'une fonction continues)***

Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, une fonction continue sur Ω. Le support de f, noté $supp(f)$, est l'ensemble défini par :

$$supp\left(f\right) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

De plus, si $supp\left(f\right)$ est un compact, on dit que f est continue à support compact.

Définition 1.8 ***(Espace des fonctions tests)***

L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivable et à support compact sur Ω, noté $\mathscr{D}(\Omega)$, est appelé espace des fonctions tests.

Définition 1.9 [3] ***(Convergence dans $\mathscr{D}(\Omega)$)***

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{D}(\Omega)$. On dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si

1. *$\exists\, \mathrm{K} \in \Omega$ compact tel que les supports des (φ_n) sont contenus dans K.*
2. *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées $(\varphi_n)^{(j)}$ converge uniformément vers $\varphi^{(j)}$ sur K.*

4 Distributions

4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.10 [3]

On appelle une distribution T sur Ω, toute forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$, c'est à dire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T} : \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{T}(\varphi) = \left\langle \mathrm{T}, \varphi \right\rangle, \end{array}$$

telle que :

- *Pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a*

$$\mathrm{T}\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \left\langle \mathrm{T}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \right\rangle = \alpha \left\langle \mathrm{T}, \varphi_1 \right\rangle + \beta \left\langle \mathrm{T}, \varphi_2 \right\rangle.$$

- *T est continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$, c'est à dire ; pour toute suite $\left(\varphi_n\right)_n$ qui converge vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, alors la suite $\left\langle \mathrm{T}, \varphi_n \right\rangle$ converge vers $\left\langle \mathrm{T}, \varphi \right\rangle$.*

Proposition 1.5

Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, on a

$$\exists\, m \in \mathbb{N}, \exists\, C_k > 0 \;:\; \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_k(\Omega),$$
$$\left|T(\varphi)\right| = \left|\langle T, \varphi\rangle\right| \leqslant C_k \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leqslant m}} \left(\sup_{x\in K}\left|\partial^\alpha \varphi(x)\right|\right).$$

Remarque 1.1

En dimension un, c'est-à-dire $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$*, on peut écrire la proposition* (1.5) *comme suit : pour tout compact* $[c, d] \subset]a, b[$*, alors*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}, \exists\, C_{[c,d]} > 0 \;:\; \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_{[c,d]}(\Omega),$$
$$\left|T(\varphi)\right| = \left|\langle T, \varphi\rangle\right| \leqslant C_{[c,d]} \sum_{j=0}^{m} \sup_{x\in[c,d]} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|.$$

Proposition 1.6

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*, l'application*

$$\begin{array}{rcl} T_f : \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T_f, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \end{array}$$

est une distribution.

Définition 1.11 ***(Distribution régulière)***

On appelle distribution régulière toute distribution associée à une fonction localement intégrable.

Remarque 1.2

L'ensemble des distributions sera noté $\mathscr{D}'(\Omega)$.

4.2 Dérivée d'une distribution

Contrairement aux fonctions, les distributions sont toujours différentiables et leurs dérivées sont aussi des distributions. On donne alors la définition suivante :

Définition 1.12 ***(Dérivée d'une distribution)***

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$*. Pour tout* $j = 1, \ldots, d$*, la dérivée de* T *par rapport à sa* $j^{ème}$ *variable est la distribution définie par :*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Définition 1.13

Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *Pour tout multi-indice* $\alpha \in \mathbb{N}^d$*, la dérivée d'ordre* α *de T, notée* $\partial^\alpha \mathrm{T}$ *est la distribution définie par :*

$$\langle \partial^\alpha \mathrm{T}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathrm{T}, \partial^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *et* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

5 Espaces de Sobolev

On commence par définir les espaces de Sobolev. Ces espaces sont très importants dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

5.1 Définitions

Un espace de Sobolev est un espace de Banach de fonctions pouvaient être dérivées suffisamment de fois pour donner sens par exemple à une EDP.

Définition 1.14 [1] ($\mathbf{W^{m,p}}(\Omega)$)

Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *L'espace de Sobolev* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *est défini par :*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, g \in \mathrm{L}^p(\Omega) \ tel\ que \\ \langle u, \mathrm{D}^\alpha \varphi \rangle = -\langle g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, |\alpha| \leqslant m \end{array} \right\}.$$

Proposition 1.7

L'espace $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *munit de la norme suivante qui mesure la taille et la régularité de la fonction :*

$$u \longmapsto \|u\|_{w^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & Si \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\mathrm{D}^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} & Si \quad p = +\infty \end{cases}$$

est un espace de Banach, réflexif pour $1 < p < \infty$*, de plus séparable pour* $1 \leqslant p < \infty$.

Proposition 1.8

Lorsque $p = 2$*, les espaces de Sobolev* $\mathrm{H}^m(\Omega)$ *sont définis par :*

$$\mathrm{W}^{m,2}(\Omega) = \mathrm{H}^m(\Omega).$$

Définition 1.15 [6] ($\mathbf{H^1}(\Omega)$)

L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *est défini par :*

$$\mathrm{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \exists\, g \in \mathrm{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \left\langle u, \nabla\varphi \right\rangle = -\left\langle g, \varphi \right\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \right\}.$$

L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ *défini par :*

$$\langle u, v \rangle_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Définition 1.16 [6] ($\mathbf{H_0^1}(\Omega)$)

L'espace $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *est défini comme étant l'adhérence de* $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Théorème 1.4
Soit Ω *un ouvert borné régulier de classe* C^1. *Alors,* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *est donné par :*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) / v = 0 \; sur \; \partial\Omega \right\}$$

6 Fonctions spéciales

6.1 Fonction Gamma

Définition 1.17 [5]

La fonction dite ***Gamma d'Euler*** *est définie sur* $\mathbb{C}$ *comme suit :*

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \Re(z) > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposition 1.9

La fonction ***Gamma*** *est bien définie lorsque* $\Re(z) > 0$.

Exemples 1

1)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\frac{-1}{2}}\, dt$$

Si on pose $t^{\frac{1}{2}} = u$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Propriétés 2 [5]

i. $\forall\, \alpha > 0; \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$

ii. $\forall\, n \in \mathbb{N}; \quad \Gamma(n+1) = n!$

6.2 Fonction Bêta

Définition 1.18 [5]

*La fonction intégrale appelée fonction **Bêta** est défini par :*

$$\begin{aligned}\beta : \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \qquad \big(\Re(x) > 0, \Re(y) > 0\big).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Exemples 2

1) $\beta(1,1) = 1.$

2) $\beta(x,1) = \frac{1}{x}.$

Propriétés 3 [5]

Soient $x, y \in \mathbb{C}$, alors

i. $\beta(x,y) = \beta(y,x).$

ii. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y).$

iii. $\beta(x,y+1) = \frac{y}{x+y}\beta(x,y).$

iv. $\beta(x+1,y) + \beta(x,y+1) = \beta(x,y).$

v. $\forall x > 0, \forall y > 0,$ *alors*

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta.$$

vi. *Soient x et y deux réels strictement positifs, alors*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

7 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une technique très utilisée pour la résolution des équations différentielles ou des problèmes avec des conditions aux limites. Elle consiste a projeter le problème définit sur un espace de dimension infini vers un espace de dimension fini et approximer la solution du problème en la représentant comme une combinaison linéaire des éléments de base de ce dernier.

On considère $(\mathrm{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $(\mathrm{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ deux espaces de Hilbert séparables tels que $\mathrm{V} \subset \mathrm{H}$ avec $\|\cdot\|$ une norme sur H, et on donne le problème suivant :

$$(\mathbf{P'}) \begin{cases} u''(t) + \mathrm{A}(t)u(t) = f, & t \in [0,\mathrm{T}] \\ u(t,0) = u_0(t), & u'(t,0) = u_1(t); \end{cases}$$

où $u = u(t,x)$ est l'inconnu du problème $(\mathbf{P'})$, f est une fonction donnée, elles sont définies sur $[0,\mathrm{T}] \subset \mathbb{R}$ vers H, et $\mathrm{A}(t)$ est un opérateur définit sur V.

Soit $\{w_i\}_{i\geqslant 1}$ une base hilbertienne de H. On peut alors formuler le problème $(\mathbf{P'})$ comme suit :

$$(\overline{\mathbf{P}}) \begin{cases} u \in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{V}), u' \in \mathrm{C}\left([0,\mathrm{T}];\mathrm{V}'\right), \\ \langle u'', w\rangle + \langle \mathrm{A}(t)u, w\rangle = \left\langle f, \nu\right\rangle, & \text{dans} \quad \mathscr{D}'(]0,\mathrm{T}[) \\ u_0 \in \mathrm{H}, \ u_1(t) \in \mathrm{H}. \end{cases}$$

7.1 Méthode générale

On suppose que $\langle \mathrm{A}(t)u(t), w\rangle = a(t, u(t), w)$, pour tout $u, w \in \mathrm{V}$; où $a(t,\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur V.

Soit V_m un sous-espace de V avec une dimension finie m,et $\{w_i\}_{i=1}^m$ une base de V_m.

On projette $(\overline{\mathbf{P}})$ sur V_m et on obtient le problème discret suivant :

$$(\mathbf{P_m}) \begin{cases} u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_i(t) w_i, \\ u_m \in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{V}_m), u_m' \in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{V}_m), & u_m \in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}_m) \\ \langle u_m''(t), w_i\rangle + a(t, u_m(t), w_i) = \left\langle f, w_i\right\rangle, & 1 \leqslant i \leqslant m \\ u_m(0) = \sum_{i=1}^m \xi_i(t) w_i, u_m'(0) = \sum_{i=1}^m \eta_i(t) w_i, \end{cases}$$

où

$$\sum_{i=1}^m \xi_i(t) w_i \longrightarrow u_0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{V} \quad \text{quand} \quad m \longrightarrow \infty,$$
$$\sum_{i=1}^m \eta_i(t) w_i \longrightarrow u_1 \quad \text{dans} \quad \mathrm{V} \quad \text{quand} \quad m \longrightarrow \infty.$$

En vertu de la théorie des équations différentielles ordinaires,le système $(\mathbf{P_m})$ a une solution locale unique qui s'étend jusqu'à un intervalle maximal $[0, t_m[$.

8 Conclusion

Dans cette première partie de ce mémoire, on a rappelé quelques notions essentielles qui seront très utilisées par la suite. Dans le chapitre suivant on donnera une généralisation des espaces de Lebesgue, les espaces des fonctions tests, et on donnera aussi quelques résultats sur le calcul fractionnaire.

Chapitre 2

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville généralisée

1 Introduction

Dans ce chapitre, on généralisera les espaces de Lebesgue, on donnera leurs définitions dans des espaces de Banach. On définira aussi la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville à gauche et à droite et la relation entre eux. Et à la fin, on donnera une généralisation de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville au sens des distributions.

2 Les espaces des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach

Cette partie est une généralisation de ce qu'on a déjà vu dans les sections précédentes. On donnera la généralisation des espaces de Lebesgue..

2.1 Les espaces $L^p(0,T;X)$

Définition 2.1

Soient X *un espace de Banach et* $1 \leqslant p < \infty$. *On définit l'espace* $L^p(0,T;X)$ *par :*

$$L^p(0,T;X) = \left\{ f : [0,T] \longrightarrow X \; ; \; mesurable\ et \int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\}.$$

Théorème 2.1

Soient X *un espace de Banach et* $1 \leqslant p < \infty$.
L'application $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)} : L^p(0,T;X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur $L^p(0,T;X)$.

Muni de cette norme, l'espace $L^p(0,T;X)$ *est un espace de Banach.*

Définition 2.2

Soit X *un espace de Banach. On définit l'espace* $L^\infty(0,T;X)$ *par*

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ f : [0,T] \longrightarrow X \; ; \; mesurable\ et \ \sup_{t\in]0,T[} ess \left\| f(t) \right\| < \infty \qquad \mathbf{p.p.} \right\}.$$

Théorème 2.2

Soit X *un espace de Banach.*

L'application $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;X)} : L^\infty(0,T;X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \left\| f(t) \right\|,$$

est une norme sur $L^\infty(0,T;X)$.
Muni de cette norme, l'espace $L^\infty(0,T;X)$ *est un espace de Banach.*

2.2 Espace de distribution

Définition 2.3

Soit X *un espace de Banach. On désigne par* $\mathscr{D}'(0,T,X)$ *l'espace des distributions sur* $]0,T[$ *vers* X *défini par :*

$$\mathscr{D}'(0,T,X) = \mathscr{L}(\mathscr{D}(]0,T[,X)),$$

où $\mathscr{D}(0,T;X)$ *est l'espace des fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* $]0,T[$ *vers* X *et à support compact dans* $]0,T[$.

— *Si* $f \in \mathscr{D}'(0,T,X)$, *alors la dérivée de f au sens des distributions est défini par :*

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle. \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[).$$

— *Soient* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^p(0,T,X)$, *il lui correspond une distribution, notée f, sur* $]0,T[$ *à valeurs dans* X, *par :*

$$\left\langle f, \varphi \right\rangle = f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[).$$

Remarque 2.1

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques, alors* $\mathscr{L}(E,F)$ *est l'espace des applications linéaires continues de* E *dans* F.

2.3 Espace de Sobolev

Définition 2.4

Soient X *un espace de Banach,* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *L'espace de Sobolev généralisé* $W^{m,p}(0,T;X)$ *est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(0,T;X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists\, g \in L^p(0,T;X) \ tel\ que \\ \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = -\langle g, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^*, |\alpha| \leqslant m \end{array} \right\}.$$

Proposition 2.1

L'espace $W^{m,p}(0,T;X)$ *munit de la norme suivante :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}} & Si \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^\infty(0,T;X)} & Si \quad p = +\infty \end{cases}$$

est un espace de Banach.

Remarques 2
Soit X *un espace de Banach.*

- *Dans le cas où* $p = 2$*, l'espace de Sobolev* $W m, 2(0,T;X)$ *est noté* $H^m(0,T;X)$.
- *Soient* $u, v \in H^m(0,T;X)$. *L'espace* $H^m(0,T;X)$ *muni du produit scalaire suivant :*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{m} \int_0^T \left\langle \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\rangle dt. \tag{2.1}$$

  est un espace de Hilbert.

3 Produit de convolution

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On introduit maintenant la convolution de deux fonctions et son adjoint.

Définition 2.5

Soient $g \in L^1_{loc}([0,\infty[)$, *et* $f \in L^1(0,T;X)$, *avec* $T > 0$. *On définit alors sur* $L^1(0,T;X)$ *la convolution de* f *et* g *par :*

$$g * f(t) := \int_0^t g(t-y) f(y)\, dy, \quad \textbf{\textit{p.p.}} \quad t \in [0,T].$$

De plus, l'adjoint de convolution de g *et* f *est la convolution, notée* $*'$*, définie par :*

$$g *' f(t) := \int_t^T g(y-t) f(y)\, dy, \quad \textbf{\textit{p.p.}} \quad t \in [0,T].$$

Théorème 2.3

Soient $g \in L^1_{loc}([0,\infty[)$ *et* $f \in L^1(0,T;X)$ *avec* $T>0$. *Pour toute* $\psi \in \mathscr{C}([0,T])$, *on a :*

$$\int_0^T g*f(t)\psi(t)dt = \int_0^T f(t) g*' \psi(t)dt. \tag{2.2}$$

Preuve.

Soient $g \in L^1_{loc}([0,\infty[)$, $T>0$, $f \in L^1(0,T;X)$ et $\psi \in \mathscr{C}([0,T])$, on a :

$$\int_0^T g*f(t)\psi(t)dt = \int_0^T \int_0^t g(t-y)f(y)\psi(t)dydt.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^T g*f(t)\psi(t)dt &= \int_0^t f(y)\left(\int_0^T g(t-y)\psi(t)dt\right)dy,\\ &= \int_0^t f(y)g*'\psi(y)dy.\end{aligned}$$

■

La définition suivante est assez importante dans les dérivées d'ordre fractionnaire, c'est le noyau d'intégration.

Définition 2.6

Pour tout β *positif, on définit sur* $L^1_{loc}([0,\infty[)$ *la fonction, notée* g_β, *par :*

$$g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1}, \qquad \forall\ t>0.$$

Proposition 2.2

Soient α, β *deux réels strictement positifs. Pour tout* $t>0$, *on a :*

$$(g_\alpha * g_\beta)(t) = g_{\alpha+\beta}(t). \tag{2.3}$$

Preuve.

Soient $\alpha,\ \beta \geq 0$ et pour tout $t>0$, on a :

$$\begin{aligned}(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{]0,+\infty[}(t) g_\alpha(t-y)g_\beta(y)dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy,\end{aligned} \tag{2.4}$$

on pose $u = \dfrac{y}{t}$, et (2.4) devient :

$$\begin{aligned}
(g_\alpha * g_\beta)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (t-tu)^{\alpha-1}(tu)^{\beta-1}\,t\,du \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)}u^{\beta-1}du \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\beta(\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta-1} \\
&= g_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3

Soient $f\in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *et* $g_\alpha\in \mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})$. *Alors,*
$g_\alpha * f\in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$*, de plus, on a :*

$$\|g_\alpha * f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \le \|g_\alpha\|_{\mathrm{L}^1(0,\mathrm{T})}\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.4 [4]

Soit $(\mathrm{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert réel. Soient* $f\in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{H})$ *et* $\alpha\in]0,1[$*, alors*

$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t), g_\alpha * f(t)\rangle dt \ge 0. \tag{2.6}$$

4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Dans cette partie on introduira la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle au sens des distributions.

Définition 2.7 [5] ***(Dérivée à gauche)***

Soient $\alpha\in]0,1[$ *et* $f\in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *avec* $\mathrm{T}>0$. *On suppose que :*

$$g_{1-\alpha} * f\in \mathrm{H}^1(0,\mathrm{T};\mathrm{X}).$$

Alors, la dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de Riemann-Liouville à gauche (forward derivative) de* f*, notée* ${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{0,t}f$*, est définie par :*

$${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{0,t}f := \frac{d}{dt}\left(g_{1-\alpha} * f\right). \tag{2.7}$$

Définition 2.8 [5] ***(Dérivée à droite)***

Soient $\alpha\in]0,1[$ *et* $f\in \mathrm{W}^{1,1}(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *avec* $\mathrm{T}>0$. *On suppose que :*

$$g_{1-\alpha} *' \frac{d}{dt} f \in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X}).$$

Alors, la dérivée fractionnaire d'ordre α *au sens de Riemann-Liouville à droite (backward derivative) de* f*, notée* ${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}} f$*, est définie par :*

$${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}} f := g_{1-\alpha} *' \frac{d}{dt} f. \tag{2.8}$$

Remarque 2.2

D'après (2.5)*, si* $f \in \mathrm{H}^1(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *alors* $g_{1-\alpha} *' \frac{d}{dt} f$ *appartient à* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$*. Ainsi* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *à droite dans* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$*.*

Proposition 2.4

Soient $\alpha \in]0,1[$, $f \in \mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *et* $\psi \in \mathrm{H}^1(0,\mathrm{T})$*. On suppose que* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *dans* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *alors,*

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f(t)\psi(t)\,dt = -\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi(t)\,dt + \left[g_{1-\alpha} * f\psi\right]_0^{\mathrm{T}}. \tag{2.9}$$

Si de plus $\psi \in \mathscr{D}(]0,\mathrm{T}[)$*, alors*

$$\left\| \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi(t)\,dt \right\| \leq \sqrt{\mathrm{T}}\, g_{2-\alpha}(\mathrm{T}) \|f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \|\psi\|_{\infty,[0,\mathrm{T}]}. \tag{2.10}$$

Preuve.

i) Par une intégration par partie du premier membre de l'équation (2.9), on obtient :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f(t)\psi(t)\,dt = \left[g_{1-\alpha} * f(t)\psi(t)\right]_0^{\mathrm{T}} - \int_0^{\mathrm{T}} g_{1-\alpha} * f(t)\frac{d}{dt}\psi(t)\,dt.$$

Appliquant le théorème (2.3), on peut écrire :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f(t)\psi(t)\,dt = \left[g_{1-\alpha} * f(t)\psi(t)\right]_0^{\mathrm{T}} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t) g_{1-\alpha} *' \frac{d}{dt}\psi(t)\,dt.$$

De la définition (2.8), on peut avoir :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f(t)\psi(t)\,dt = \left[g_{1-\alpha} * f(t)\psi(t)\right]_0^{\mathrm{T}} - \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi(t)\,dt.$$

D'où (2.9).

ii) On applique maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur (2.10) et on va obtenir

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi(t)\,dt \right\| &\leq \|f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \|{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \\
&\leq \sqrt{\mathrm{T}} \|f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \|{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,\mathrm{T}}\psi\|_{\infty,[0,\mathrm{T}]} \\
&\leq \sqrt{\mathrm{T}}\, g_{2-\alpha}(\mathrm{T}) \|f\|_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})} \|\psi'\|_{\infty,[0,\mathrm{T}]}.
\end{aligned}$$

■

De la proposition précédente, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{D}(0,\mathrm{T}) & \longrightarrow & \mathrm{X} \\ \varphi & \longmapsto & -\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{t,\mathrm{T}}^{\alpha}\varphi(t)\,dt \end{array}$$

est une distribution d'ordre 1.
Il résulte de ce qui précède la définition suivante :

Définition 2.9

Soient $\alpha\in]0,1[$ *et* $f\in\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$. *La dérivée fractionnaire d'ordre* α *de* f *au sens des distributions, notée* ${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f$, *est définie par :*

$$\left\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f,\varphi\right\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{t,\mathrm{T}}^{\alpha}\varphi(t)\,dt, \qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{D}(0,\mathrm{T}).$$

Proposition 2.5

Soient $\alpha\in]0,1[$ *et* $f\in\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$, *alors*

i) Si f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *dans* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$, *dans le sens de la définition* (2.7), *alors elle est égale à sa dérivée au sens des distribution.*

ii) Si la dérivée au sens des distribution de f *est dans* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$, *alors* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *dans* $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ *et ces deux dérivées sont égales.*

Preuve.

i) Soit $f\in\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$ admet une dérivée fractionnaire d'ordre α telle que ${}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f$ est dans $\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$. Alors, de la proposition (2.4), formule (2.9), pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(0,\mathrm{T})$, on a :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{t,\mathrm{T}}^{\alpha}\varphi(t)\,dt.$$

D'autre part de la définition (2.9), on a :

$$\left\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f,\varphi\right\rangle = -\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{t,\mathrm{T}}^{\alpha}\varphi(t)\,dt,$$

donc

$$\left\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f,\varphi\right\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{0,t}^{\alpha}f(t)\varphi(t)\,dt.$$

ii) Soit $f\in\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{X})$. De (2.9), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f, \varphi\rangle_{\mathscr{D}'(0,T;X),\mathscr{D}(0,T)} &= -\int_0^T f(t)\,{}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{t,T}\varphi(t)\,dt\\ &= -\int_0^T f(t)\, g_{1-\alpha} *' \frac{d}{dt}\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Appliquant (2.2) et on aura :

$$\langle {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f, \varphi\rangle_{\mathscr{D}'(0,T;X),\mathscr{D}(0,T)} = -\int_0^T g_{1-\alpha} * f(t) \frac{d}{dt}\varphi(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Par hypothèse, la dérivée faible ${}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f$ est dans $L^2(0,T;X)$, on déduit alors que $g_{1-\alpha} * f$ est dans $H^1(0,T;X)$, de plus,

$$\frac{d}{dt}\left(g_{1-\alpha} * f\right) = {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f; \qquad \text{dans} \qquad L^2(0,T;X).$$

■

Proposition 2.6

Soient $\alpha \in]0,1[$, V *un espace de Banach réel,* V' *son dual et* $f \in L^2(0,T;V')$. *On suppose que* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *dans* $L^2(0,T;V')$. *Alors, pour tout* $v \in V$, $\langle f, v\rangle_{V',V}$ *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *dans* $L^2(0,T)$, *de plus,*

$${}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t}\left(\langle f, v\rangle_{V',V}\right) = \langle {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} f, v\rangle_{V',V}, \qquad \textit{dans} \qquad L^2(0,T). \tag{2.12}$$

Pour la démonstration voir [2]. Proposition 3.3. Page 354.

Proposition 2.7

Soient $\alpha \in]0,1[$, $u \in L^2(0,T;X)$. *Si* u *admet une dérivée d'ordre* α *dans* $L^2(0,T;X)$, *alors*

$$u = \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)\, g_\alpha + g_\alpha * {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u, \qquad \textit{dans} \qquad L^1(0,T;X) \tag{2.13}$$

Preuve.

Soient $\alpha \in]0,1[$ et u une fonction de $L^2(0,T;X)$ admet une dérivée d'ordre α dans $L^2(0,T;X)$. On pose

$${}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u(t) := f(t) = \frac{d}{dt}\left(g_{1-\alpha} * u\right)(t),$$

donc,

$$f(t)\,dt = d\left(g_{1-\alpha} * u\right)(t),$$

par une intégration sur $[0,t]$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)ds &= \int_0^t d\left(g_{1-\alpha} * u\right)(s) \\ &= \left(g_{1-\alpha} * u\right)(t) - \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0).\end{aligned}$$

Comme $g_1(t) = 1$ pour tout $t > 0$. On obtient :

$$\left(g_1 * f\right)(t) = \left(g_{1-\alpha} * u\right)(t) - \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)g_1(t),$$

on applique g_α à gauche, et on obtient :

$$\left(g_{1+\alpha} * f\right)(t) = \left(g_1 * u\right)(t) - \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)g_{1+\alpha}(t).$$

Alors,

$$\left(g_1 * u\right)(t) = \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)g_{1+\alpha}(t) + \left(g_{1+\alpha} * f\right)(t).$$

Enfin, par une dérivation par rapport à t on revient à (2.13).

■

5 Conclusion

Toutes les définitions, ainsi que les propriétés précédentes sont très importantes pour établir le problème qu'on va entamer dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Problème d'évolution fractionnaire par rapport au temps

1 Introduction

Cette partie du mémoire est consacrée à la résolution du problème suivant : pour $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ et $\nu \in L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{H}^{\alpha}\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) & \text{telle que} \\ {}^{R}D_{0,t}^{\alpha}u - \Delta u = f, & \text{dans } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = \nu, & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathscr{H}^{\alpha}$ est l'espace défini pour tout $T>0$ avec $\alpha \in]0,1[$, comme suit :

$$H^{\alpha}\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) := \left\{u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \text{tel que } \mathbf{D}^{\alpha}u \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)\right\}.$$

et $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$

De plus, nous allons donner une réponse à la question de la régularité pour la solution du problème (3.1).

La méthode de Galerkin que nous allons adopter, va nous donner des réponses favorables à nos questions posées.

2 Existence et unicité

À présent, nous nous intéressons à prouver le premier résultat principal suivant :

Théorème 3.1

Soient $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ et $\nu \in H_0^1(\Omega)$, alors

- *Si $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$, le problème (3.1) admet une unique solution.*
- *Si $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$,*

i) *Si* $\nu = 0$*, le problème* (3.1) *admet une unique solution.*

ii) *Si* $\nu \neq 0$*, le problème* (3.1) *n'admet pas de solution.*

Preuve.

Existence :

- **Étape 1 :**

Nous cherchons dans cette étape pour quelles valeurs de α, le problème (3.1) admet une solution $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

De la proposition (2.7), on déduit que notre problème (3.1) admet une solution u si

$$u = \left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)g_\alpha + g_\alpha * {}^R\mathbf{D}_{0,t}^\alpha u \qquad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.2}$$

Pour que (3.2) soit vérifié il suffit de voir si $\left(g_{1-\alpha} * u\right)(0)g_\alpha \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ et que $g_\alpha * {}^R\mathbf{D}_{0,t}^\alpha u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

Comme $g_\alpha \in L^1_{loc}([0,\infty[)$ donc pour tout $t \in [0,T]$ $g_\alpha \in L^1([0,T])$, et de plus, ${}^R\mathbf{D}_{0,t}^\alpha u \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, alors on en déduit de la proposition (2.3) que $g_\alpha * {}^R\mathbf{D}_{0,t}^\alpha u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

D'autre part, on a $(g_{1-\alpha} * u)(0) = \nu$ dans $L^2(\Omega)$, c'est une constante par rapport à t, donc il reste de voir si $g_\alpha \in L^2(0,T)$.

Pour $\alpha \in]0,1[$ et $T > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^T |g_\alpha|^2 dt &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T t^{2(\alpha-1)} dt \\ &= \frac{1}{2\alpha-1}\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\left[t^{2\alpha-1}\right]_0^T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Or, $\frac{1}{2\alpha-1}$ est défini si :

$$\alpha \neq \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

et la quantité $\left[t^{2\alpha-1}\right]_0^T$ est défini si :

$$\alpha \geqslant \frac{1}{2}, \tag{3.5}$$

puisque,

$$\lim_{t\to 0} t^{2\alpha-1} < \infty \Longleftrightarrow 2\alpha - 1 \geqslant 0.$$

Récapitulons, et on obtient :

$$u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \Longleftrightarrow g_\alpha \in L^2(0,T) \text{ si } \alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[\text{ ou } \left(\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right] \text{ et } \nu = 0\right).$$

Étape 2 : Reformulation du problème approché

Soient $V := H_0^1(\Omega)$ et A l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{array}{rcl} A : V = H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\Delta u \end{array}$$

Pour $k = 1, 2, \cdots$, soit $(w_k, \lambda_k) \in H_0^1(\Omega) \times]0, \infty[$, où w_k est la $k^{\text{ème}}$ fonction propre de A associé à la valeur propre λ_k, tel que $(w_k)_{k \geqslant 1}$ forment base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note par F_n l'espace vectoriel engendré par $\{w_i\}_{i=1}^n$, alors on peut écrire :

$$v = \sum_{k \geqslant 1} b_k w_k \qquad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega),$$

et on pose

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k w_k \qquad \text{dans} \quad F_n. \tag{3.6}$$

D'où $v_n \in F_n \to v \in H_0^1(\Omega)$.
Alors Pour tout entier $n \geqslant 1$, le problème approché de (3.1) est reformulé comme suit :

i) Solvabilité du problème approché.

Décomposition et notation :
Trouver $u_n \in L^2(0,T;F_n)$ tel que ${}^{R}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha} u_n \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, avec

$$\begin{cases} \left\langle {}^{R}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha} u_n, w \right\rangle_{V',V} + \langle A u_n, w \rangle_{V',V} & = & \langle f, w \rangle_{V',V} \qquad \text{dans} \quad L^2(0,T), \forall\, w \in F_n \\ \left(g_{1-\alpha} * u_n\right)(0) & = & v_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) w_k, \qquad f_k(t) := \langle f(t), w_k \rangle_{V',V},$$

donc, pour $k = 1, \cdots, n$, on aura le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} {}^{R}\mathbf{D}_{0,t}^{\alpha} x_k + \lambda_k x_k & = & f_k, \qquad \text{dans} \quad L^2(0,T) \\ \left(g_{1-\alpha} * x_k\right)(0) & = & b_k. \end{cases} \tag{3.8}$$

On va maintenant démontrer par l'absurde que le problème (3.8) admet une solution globale sur $[0,T]$, c'est-à-dire ; une solution u définie sur l'intervalle $[0,T]$, pour tout $T > 0$.
Il existe $T_m > 0$ fini, tel que la solution maximale correspondante u vérifie

$$\lim_{\tau \to T_m^-} \|u(t)\|_{L^2(0,\tau)} = \infty \tag{3.9}$$

On suppose que :

$$\sup_{\tau\in(0,T_m)} \|u\|_{L^2(0,\tau)} < \infty. \tag{3.10}$$

Par la somme de l'équation et la condition initiale du problème (3.8), on a :

$$\underbrace{\left(g_{1-\alpha} * x_k\right)(0)}_{b_k} + {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} x_k + \lambda_k x_k = b_k + f_k,$$

appliquant g_α à gauche, et on obtiendra :

$$\underbrace{\left(g_{1-\alpha} * x_k\right)(0) g_\alpha + g_\alpha * {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} x_k}_{x_k} + \lambda_k g_\alpha * x_k = b_k g_\alpha + g_\alpha * f_k.$$

Des propositions (2.3) et (2.7), on peut obtenir finalement ;

$$x_k + \lambda_k g_\alpha * x_k = b_k g_\alpha + g_\alpha * f_k, \qquad \text{dans} \quad L^2(0,\tau). \tag{3.11}$$

On multiplie l'équation par x_k et on intègre sur $[0,\tau]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T x_k^2(t)\,dt}_{\|x_k\|} + \lambda_k \int_0^T x_k(t) g_\alpha * x_k(t)\,dt = b_k \int_0^T x_k(t) g_\alpha(t)\,dt \\ + \int_0^T x_k(t) g_\alpha * f_k(t)\,dt \end{aligned} \tag{3.12}$$

comme $\lambda_k \geqslant 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ et par le théorème (2.4), on a :

$$\int_0^\tau x_k(t) g_\alpha * x_k(t)\,dt \geqslant 0.$$

Alors, de (3.12), on obtient

$$\|x_k\|^2_{L^2(0,\tau)} \leqslant |b_k| \|g_\alpha\|_{L^2(0,T_m)} \|x_k\|_{L^2(0,\tau)} + \|g_\alpha * f_k\|_{L^2(0,T_m)} \|x_k\|_{L^2(0,\tau)} \tag{3.13}$$

Or on déduit quand $\tau \to T_m$, $\|x_k\|_{L^2(0,\tau)}$ est borné, ce qui contredit la formule (3.9) sauf si $T_m = \infty$, alors le problème (3.7) admet une solution, Pour tout $T \geqslant 0$.

ii) Estimations.

On prend $w = v_n$ dans (3.7), on obtient

$$\int_0^T \left\langle {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u_n, v_n \right\rangle_{V',V} dt + \int_0^T \langle A u_n, v_n \rangle_{V',V}\, dt = \int_0^T \left\langle f, v_n \right\rangle_{V',V} dt. \tag{3.14}$$

Comme $g_\alpha \in L^2(0,T)$ et $u_n \in L^2(0,T;F_n)$, alors $u_n - g_\alpha v_n \in L^2(0,T;F_n)$, et donc

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\langle {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u_n, u_n - g_\alpha v_n \right\rangle_{V',V} dt + \int_0^T \left\langle A u_n, u_n - g_\alpha v_n \right\rangle_{V',V} dt \\ &= \int_0^T \left\langle f, u_n - g_\alpha v_n \right\rangle_{V',V} dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

De la proposition (2.7), on a

$$u_n - g_\alpha v_n = g_\alpha * {}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t} u_n \qquad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right) \tag{3.16}$$

On pose $\mathbf{D}^\alpha :={}^{R}\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t}$, alors la première intégrale de l'équation (3.15) devient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle \mathbf{D}^\alpha u_n, u_n - g_\alpha v_n\rangle_{V',V}\, dt &= \int_0^T \langle \mathbf{D}^\alpha u_n, g_\alpha * \mathbf{D}^\alpha u_n\rangle_{V',V}\, dt \\
&= \int_0^T \left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n(t), \int_0^t g_\alpha(t-y)\left(\mathbf{D}^\alpha u_n\right)(t-y)\,dy \right\rangle_{V',V} dt \\
&= \int_0^T dt \int_0^t g_\alpha(t-y)\left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n(t), \left(\mathbf{D}^\alpha u_n\right)(t-y)\right\rangle_{V',V} dy \\
&= \int_0^T dt \int_0^t g(t-y)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_k w_j \mathbf{D}^\alpha x_k(t)\left(\mathbf{D}^\alpha x_j\right)(t-y)\,dy,
\end{aligned}$$

comme $\langle w_k, w_j\rangle_{V',V} = \delta_{k,j}$, alors

$$\int_0^T \langle \mathbf{D}^\alpha u_n, u_n - g_\alpha v_n\rangle_{V',V}\, dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^T dt \int_0^t g_\alpha(t-y)\mathbf{D}^\alpha x_k\left(\mathbf{D}^\alpha x_k\right)(t-y)\,dy,$$

par le théorème (2.4), le second membre est positif.
Donc,

$$\int_0^T \langle \mathbf{D}^\alpha u_n, u_n - g_\alpha v_n\rangle_{V',V}\, dt \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Revenant à (3.15),

$$\int_0^T \left|\langle A u_n, u_n - g_\alpha v_n\rangle_{V',V}\right| dt \leqslant \int_0^T \left|\langle f, u_n - g_\alpha v_n\rangle_{V',v}\right| dt, \tag{3.18}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle A u_n, u_n\rangle_{V',V}\, dt \leqslant \int_0^T \left|\langle A u_n, v_n\rangle_{V',V}\right| g_\alpha(t)\,dt + \int_0^T \left|\langle f, u_n\rangle_{V',V}\right| dt \\
+ \int_0^T \left|\langle f, v_n\rangle_{V',V}\right| g_\alpha\, dt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme :

$$\int_0^T \langle A u_n, u_n\rangle_{V',V}\, dt = \| u_n\|^2_{L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)} \tag{3.20}$$

et $v_n \to v \in H^1_0(\Omega)$, on obtient que :

$$\|u_n\|^2_{\mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^1_0(\Omega)\right)} \leqslant \mathrm{C}, \tag{3.21}$$

où C est une constante indépendante de n. Alors, il existe certaine fonction $u \in \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^1_0(\Omega)\right)$, tel que :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement} \qquad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^1_0(\Omega)\right). \tag{3.22}$$

iii) Équation du problème (3.1)

Soient $k \geqslant 1$ fixé et $n \geqslant k$. De l'équation du problème (3.7), on écrit :

$$\left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n + \mathrm{A}u_n - f, w\right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(0,\mathrm{T})$, on a :

$$\left\langle \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^\alpha u_n \varphi(t)\,dt + \int_0^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{A}u_n - f(t)\right)\varphi(t)\,dt, w \right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = 0, \tag{3.23}$$

par la proposition (2.4), on aura :

$$\left\langle \int_0^{\mathrm{T}} -u_n(t)\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{t,\mathrm{T}}\varphi(t) + \left(\mathrm{A}u_n - f(t)\right)\varphi(t)\,dt, w_k \right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{3.24}$$

Par passage à la limite, et de la définition (2.9), on obtient :

$$\mathbf{D}^\alpha u + \mathrm{A}u - f = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathscr{D}'\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right).$$

Comme $\mathrm{A}u$, $f \in \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right)$ et aussi la dérivée d'ordre α au sens des distributions de u est dans $\mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right)$, alors par la proposition (2.5) **(*ii*)**

$$\mathbf{D}^\alpha u \in \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right) \Longleftrightarrow u \in \mathscr{H}^\alpha\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^1_0(\Omega),\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right)$$

et

$$\mathbf{D}^\alpha u + \mathrm{A}u = f \qquad \text{dans} \quad \mathrm{L}^2\left(0,\mathrm{T};\mathrm{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{3.25}$$

iv) Condition initiale.

Soient $k, n \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathscr{D}(0,\mathrm{T})$ telle que $\varphi(\mathrm{T}) = 0$. Par la proposition (2.6), on peut écrire :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n, w_k \right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^\alpha \left\langle u_n, w_k\right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} \varphi(t)\,dt,$$

par proposition (2.4)

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{T}} \left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n, w_k \right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} \varphi(t)\,dt = &-\int_0^{\mathrm{T}} \left\langle u_n(t), w_k\right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}}\,{}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{t,\mathrm{T}}\varphi(t)\,dt \\ &- \left\langle g_{1-\alpha} * u_n(0), w_k\right\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} \varphi(0),\end{aligned}$$

par (3.6) et (3.22)

$$\int_0^T \left\langle \mathbf{D}^\alpha u_n, w_k \right\rangle_{V',V} \varphi(t)dt$$
$$\xrightarrow{n \longrightarrow \infty} -\int_0^T \langle u(t), w_k\rangle_{V',V} {}^R\mathbf{D}^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt - \langle \nu, w_k\rangle_{V',V}\varphi(0).$$

Encore, on applique la proposition (2.4) sur la dernière limite et on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \langle u(t), w_k\rangle_{V',V} {}^R\mathbf{D}^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt - \langle \nu, w_k\rangle_{V',V} \\ &= \int_0^T \mathbf{D}^\alpha \langle u(t), w_k\rangle_{V',V}\varphi(t)dt + \left\langle g_{1-\alpha} * u(0), w_k \right\rangle_{V',V}\varphi(0) - \langle \nu, w_k\rangle_{V',V}\varphi(0). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Unicité

Soient u_1, $u_2 \in \mathscr{H}^\alpha(0,T;H^1_0(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, solutions du problème (3.1).
On pose

$$u := u_1 - u_2. \tag{3.27}$$

De la linéarité des deux opérateurs ${}^R\mathbf{D}^\alpha_{0,t}$ et $-\Delta$, l'unicité de notre problème nous ramène à prendre le suivant :

$$\begin{cases} {}^R D^\alpha_{0,t} u - \Delta u = 0 & dans \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = 0 & dans \ L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.28}$$

Pour avoir l'unicité de notre solution, il suffit de prouver que la solution du problème (3.28) est triviale. Pour faire ceci, on pose

$$u_\alpha := g_{1-\alpha} * u \in L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right), \tag{3.29}$$

De (3.28) et (3.29), on a :

$$\int_0^T \left\langle {}^R\mathbf{D}^\alpha_{0,t} u, u_\alpha \right\rangle_{V',V} dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla u_\alpha dx dt = 0,$$

donc,

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} u_\alpha, u_\alpha \right\rangle_{V',V} dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla u_\alpha dx dt = 0,$$

Comme $u_\alpha(0) = 0$, alors,

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} u_\alpha, u_\alpha \right\rangle_{V',V} dt = \frac{1}{2}\, \|u_\alpha(T)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et par le théorème (2.4), on écrit :

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u \nabla u_\alpha dx dt = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \int_0^T \partial_{x_k} u(t,x) g_{1-\alpha} * \partial_{x_k} u(\cdot,x)(t)dt dx \geqslant 0.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$, on déduit que $g_{1-\alpha} * u(t) = 0$.

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{d}{dt}\left[g_\alpha * g_{1-\alpha} * u\right](t) \\ &= \frac{d}{dt}\left[g_1 * u\right](t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, l'unicité de la solution.

■

3 Étude de la régularité

La régularité de la solution est donnée par le deuxième résultat principal suivant :

Théorème 3.2

Soient $\alpha \in]0,1[$, Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$, f *une fonction de* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *et* v *appartient à* $H_0^1(\Omega)$.

(i) *Si* $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$ *alors on suppose que* Av *est dans* $L^2(\Omega)$ *;*

(ii) *Si* $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$ *alors on suppose que* $v = 0$.

Alors la solution u du problème (3.1) *vérifie*

$$\begin{aligned} &Au, {}^{R}D^{\alpha}_{0,t}u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ &{}^{R}D^{\alpha}_{0,t}u + Au = f \ \ in \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

On rappelle que l'opérateur A est définie par :

$$\begin{aligned} A : V = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u \end{aligned}$$

et que $(w_k, \lambda_k) \in H_0^1(\Omega) \times]0,\infty[$, où w_k est la $k^{\text{ème}}$ fonction propre de A associée à la valeur propre λ_k, tel que $(w_k)_{k\geqslant 1}$ forment une base hilbertienne de V.

Pour démontrer le résultat ci-dessus, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 [2]

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$. *Pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$ *avec* $v = \sum b_k w_k$ *dans* $H_0^1(\Omega)$, *alors*

$$Av \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \sum (b_k w_k)^2 < \infty.$$

Preuve.

D'une part, on assume que $\mathrm{A}v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Comme w_k est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\Omega)$, alors il existe une suite $(c_k)_{k\geqslant 0} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{A}v = \sum_k c_k w_k, \qquad \sum (c_k)^2 < \infty, \qquad c_k = \int_\Omega \mathrm{A}v(x) w_k(x) dx.$$

De plus,

$$\int_\Omega \mathrm{A}v(x) w_k(x) dx = \int_\Omega \nabla v(x) \nabla w_k(x) dx = b_k \lambda_k.$$

Alors, $\sum (b_k w_k)^2 < \infty$.

D'autre part, soit $v_n = \sum_{k=1}^n b_k w_k$. Comme $\mathrm{A}w_k = \lambda_k w_k$, on sait que $\mathrm{A}v \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Alors, pour $1 \leqslant m < n$,

$$\|\mathrm{A}v_n - \mathrm{A}v_m\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \sum_{k=m+1}^{n} (b_k w_k)^2.$$

On a par hypothèse $\sum (b_k w_k)^2 < \infty$, donc il existe une $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, tel que :

$$\mathrm{A}v_n \to f \qquad dans \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Or, $v_n \to v$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et l'opérateur continue $\mathrm{A} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Alors $\mathrm{A}v_n \to \mathrm{A}v$ dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. D'où $\mathrm{A}v$ est dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

■

On va démontrer maintenant le théorème (3.2).

Preuve.

On servir systématiquement la démonstration précédente du théorème (3.1) et on suppose toujours que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, v_n donné par (3.6) et u_n solution de (3.7). Comme $\mathrm{A}w_k = \lambda_k w_k$, il est clair que pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big) \in \mathrm{F}_n$. Le problème (3.7) devient

$$\big\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{0,t} u_n, \mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big)\big\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} - \big\langle \mathrm{A}u_n, \mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big)\big\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = \big\langle f, \mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big)\big\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}}.$$

Par la formule (3.16), on a :

$$\big\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{0,t} u_n, \mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big)\big\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{D}^\alpha x_k(t) g_\alpha * \mathbf{D}^\alpha x_k(t).$$

Alors, par le théorème (2.4) on trouve que :

$$\int_0^{\mathrm{T}} \big\langle {}^{\mathrm{R}}\mathbf{D}^\alpha_{0,t} u_n, \mathrm{A}\big(u_n(t) - g_\alpha(t)v\big)\big\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} dt \geqslant 0.$$

En outre, pour l'estimation de $\langle f, g_\alpha \mathrm{A}v_n\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}}$, on a :

$$\langle f, g_\alpha \mathrm{A}v_n\rangle_{\mathrm{V}',\mathrm{V}} = g_\alpha(t) \int_\Omega f(x) \mathrm{A}v_n(x) dx$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve :

$$\left|\langle f, g_\alpha A v_n\rangle_{V',V}\right| \leqslant g_\alpha(t)\,\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,\|Av_n\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.30}$$

De plus, D'après le lemme (3.1) $Av_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k w_k$ et $Av_n \in L^2(\Omega)$, alors $\|Av_n\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée.

Pour les estimations précédentes, toute sous-suite de la suite (Au_n) converge faiblement dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Par l'unicité de la limite, Av appartient à $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.

■

Remarque 3.1

La régularité dans le théorème (3.2) n'est pas une régularité dans $H^2(\Omega)$*, car on n'a pas trouver que* $u \in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right)$*. De plus, comme on a supposé que* Ω *est un ouvert bornée de* $\mathbb{R}^d$*, alors les fonctions propres* $w_k \notin H^2(\Omega)$*.*

Si on suppose que Ω *est convexe, on peut trouver la régularité dans* $H^2(\Omega)$*.*

4 Conclusion

Après avoir poser le problème (3.1), on a utiliser la méthode de Galerkin pour le résoudre. Or le terme qui contient la dérivée fractionnaire est très difficile à le manipulé. Pour le rendre manipulable, nous avons décomposé cette dérivées en somme de deux termes contrôlables.

Résumé

Ce mémoire est consacré a l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution d'un problème de diffusion d'ordre fractionnaire par rapport au temps qui est donné par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathscr{H}^{\alpha}\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) & \text{telle que} \\ {}^{R}D_{0,t}^{\alpha} u - \Delta u = f & \text{dans } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = \nu & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.31}$$

Nous avons utilisée les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville généralisées et la méthode de Galerkin pour établir les deux résultats suivants :

Théorème *(Existence et unicité)*

Soient $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ et $\nu \in H_0^1(\Omega)$, alors

- Si $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$, le problème (3.1) admet une unique solution.
- Si $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$,
  - **i)** Si $\nu = 0$, le problème (3.1) admet une unique solution.
  - **ii)** Si $\nu \neq 0$, le problème (3.1) n'admet pas de solution.

Théorème *(Régularité)*

Soient $\alpha \in]0,1[$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, f une fonction de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, et ν appartient à $H_0^1(\Omega)$.

(i) Si $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$ alors on suppose que $A\nu$ est dans $L^2(\Omega)$;

(ii) Si $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$ alors on suppose que $\nu = 0$.

Alors la solution u du problème (3.1) vérifie

$$\begin{aligned} &Au,\ {}^{R}D_{0,t}^{\alpha} u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ &{}^{R}D_{0,t}^{\alpha} u + Au = f \ \text{ in } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

.

Mots-Clés. Équation de diffusion, Méthode de Galerkin, Dérivée fractionnaire généralisée.

Abstract

In this work, we have studied the time fractional diffusion equation well posedness, let give the following problem

$$\begin{cases} \text{Find } u \in \mathscr{H}^{\alpha}\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) & \text{such that} \\ {}^{R}D_{0,t}^{\alpha}u - \Delta u = f & \text{in } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = \nu & \text{in } L^2(\Omega). \end{cases}$$

We have used the generalization of the Riemann-Liouville fractional derivatives and Galerkin method. So we arrive to the theorems about the existence, unicity and regularity.

Theorem *(Existence and unicity)*

Let $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ and $\nu \in H_0^1(\Omega)$.

- If $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$ then the problem has a unique solution.
- Else, if $\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$, then
  - **i)** If $\nu = 0$, the problem has a unique solution.
  - **ii)** If $\nu \neq 0$, the problem has no solution.

Theorem *(regularity)*

Let $\alpha \in]0,1[$, Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^d$, f be in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, and ν in $H_0^1(\Omega)$.

(i) If $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$ then assume that $A\nu$ lies in $L^2(\Omega)$;

(ii) If $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$ then assume that $\nu = 0$.

So the solution u of the problem satisfies

$$\begin{aligned} &Au,\ {}^{R}D_{0,t}^{\alpha}u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ &{}^{R}D_{0,t}^{\alpha}u + Au = f \ \text{ in } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Key Words. Diffusion equation, Galerkin method, Fractional derivatives generalizated.

Perspectives

Nous donnons ici quelques perspectives de recherche et prolongements concevable du travail de ce mémoire.

La première direction est de chercher à résoudre le même problème et de considérer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo au lieu de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec une condition initiale u_0 qu'on doit la définir.

La deuxième direction est de prendre le même problème avec un opérateur A elliptique, au lieu du Laplacien Δ, et qui vérifie certaines hypothèses.

Bibliographie

[1] **H. Brezis.** (1987), *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, France. 4, 5, 6, 7, 10

[2] **L. Djilali. et A. Rougirel.** (2018), *Galerkin method for time fractional diffusion*, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, **4**, 349–368, Springer, Londen. https://doi.org/10.1007/s41808-018-0022-5. 22, 31

[3] **A. Lesfari.** (2012), *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace - Cours et exercices*, Ellipses, France. 8

[4] **J. A. Nohel. et D. F. Shea.**, (1976) *Frequency domain methods for Volterra equations*, Advances in Math, **22(3)**, 278–304. 19

[5] **I. Podlubny.** (1999), *Fractional differential equations, volume 198 of Mathematics in Science and Engineering*, ACADEMIC PRESS, USA. 11, 12, 19

[6] **C. Zuily.** (2002), *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, France. 11