

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Wafaa BOUKNIENE

Calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert fractionnaire du second type

soutenu publiquement le 25 juin 2023 devant le jury composé de :

Président :	Djillali BOUAGADA	Prof.	UMAB
Examinatrice :	Ikram Fatima Zohra BENSAID	MCB	UMAB
Encadrante :	Zineb KAISSERLI	MCA	UMAB

Année universitaire : 2022 / 2023

M
A
S
T
E
R

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents.

Mes chères grandes mères.

La mémoire de mes grands-pères.

Mes chères sœurs
Ikram, Marwa et Siham.

Mes chères tantes.

Toute ma famille
Oncles, Cousins, Cousines.

Mon encadrante Madame Zineb Kaiserli.

Et, à tous mes enseignants.

Wafaa

Remerciements

Avant tout, mes remerciements vont à mon Dieu, le tout puissant de m'avoir aidée à faire ce travail et de m'avoir donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à remercier très vivement mon encadrante Madame Zineb KAISSERLI, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, de m'avoir encadré, orienté avec ses précieux conseils, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Mes remerciements les plus sincères, pour le temps qu'elle a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce mémoire de fin d'études.

Je suis très honorée que Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université de Mostaganem, ait accepté de présider le jury de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude envers Madame Ikram Fatima Zohra BENSALD, Maître de Conférence à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je vous remercie sincèrement.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique de l'Université de Mostaganem. Ils sont à l'origine de tout mon savoir.

Je tiens particulièrement à remercier mon père, ma mère et ma grande-mère Mamie pour leurs encouragements et leurs soutiens durant toutes mes années d'études. Je remercie aussi mes tantes et mes sœurs. Un grand merci à toute ma famille pour leurs encouragements.

Finalement, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amies et collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel.

Les mots ne pourront jamais exprimer mes sentiments, ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

Je vous remercie du fond du cœur.

Wafaa

Table des matières

Index des notations	iv
Liste des abréviations	v
Introduction	1
1 Notions de bases	4
1 Introduction	4
2 Fonctions spéciales	4
3 Dérivées d'ordre fractionnaire	6
4 Transformations intégrales	8
5 Conclusion	15
2 Calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels	16
1 Introduction	16
2 Préliminaire	16
3 Norme \mathcal{H}_2 pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire du second type : Une nouvelle approche	26
4 Norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel	33
5 Conclusion	35
3 Calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour une classe de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bidimensionnels	36
1 Introduction	36
2 Préliminaires	36
3 Norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique fractionnaire bidimensionnel du type Roesser	43
4 Conclusion	48
4 Validation numérique	49
1 Introduction	49
2 Système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel	49
3 Système dynamique d'ordre fractionnaire bidimensionnel	52
4 Conclusion	55
Conclusion	56
Bibliographie	57

Index des notations

\mathbb{N}	: Ensemble des nombres entiers naturels.
\mathbb{N}^*	: Ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
\mathbb{R}	: Corps des nombres réels.
\mathbb{R}_+	: Corps des nombres réels positifs ou nuls.
\mathbb{R}^m	: Espace des vecteurs à m entrées réelles.
$\mathbb{R}^{m \times p}$: Espace des matrices réelles de dimensions $m \times p$.
\mathbb{C}	: Corps des nombres complexes.
\mathbb{C}^*	: Corps des nombres complexes non nuls.
$[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b , $a < b < \infty$.
\mathcal{C}^n	: Espace des fonctions n fois continument différentiable.
A^T	: Transposée d'une matrice A .
$I_{m \times m}$: Matrice identité de dimension $m \times m$, notée aussi I_m .
\mathcal{L}	: Transformation de Laplace unidimensionnelle.
\mathcal{L}^{-1}	: Transformation de Laplace unidimensionnelle inverse.
\mathcal{L}_2	: Transformation de Laplace bidimensionnelle.
\mathcal{L}_2^{-1}	: Transformation de Laplace bidimensionnelle inverse.
\mathcal{M}	: Transformation de Mellin.
\mathcal{M}^{-1}	: Transformation de Mellin inverse.
$\ G\ _{\mathcal{H}_2}$: Norme \mathcal{H}_2 de la fonction G .
$ \cdot $: Module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$: Fonction Gamma d'Euler.
$B(\cdot, \cdot)$: Fonction Bêta d'Euler.
$E_{\alpha, \beta}$: Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
δ	: Fonction Delta de Dirac.
$f^{(n)}$: Dérivée n -ème de la fonction f .
\mathbf{D}^α	: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α où $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$: Dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ où $N_i - 1 < \alpha_i < N_i$ avec $N_i \in \mathbb{N}^*$.
$i = \overline{p, q}$: $i \in \{p, p + 1, p + 2, \dots, q - 1, q\}$, $p, q \in \mathbb{N}$.
$\text{tr}(A)$: Trace d'une matrice A .
$\text{Re}(z)$: Partie réelle du nombre complexe z .
deg	: Degré d'un polynôme.
arg	: Argument d'un nombre complexe.
\det	: Déterminant d'une matrice.
$\text{cosec}(\cdot)$: La fonction cosécante, i.e., $\text{cosec}(\cdot) = \frac{1}{\sin(\cdot)}$.
$!$: Factorielle d'un entier naturel.
$*$: Produit de convolution pour une fonction unidimensionnelle.
$*_2$: Produit de convolution pour une fonction bidimensionnelle.

Liste des abréviations

- EDF** : Équation différentielle fractionnaire.
BIBO : *Bounded-input, bounded-output*, i.e., entrée bornée, sortie bornée.
MIMO : *Multiple-input, multiple-output*, i.e., plusieurs entrées, plusieurs sorties.
SISO : *Single-input, single-output*, i.e., une seule entrée, une seule sortie.

Introduction

La modélisation et la simulation numérique des phénomènes physiques sont des outils devenus irremplaçables pour la conception des produits industriels.

La modélisation mathématique des phénomènes du monde réel passe très souvent par l'écriture des équations différentielles où des dérivées ordinaires ou partielles interviennent. Ces équations différentielles peuvent être transformées, sous certaines conditions, en des systèmes différentiels, dit aussi systèmes dynamiques¹. Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi-totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique et en traitement du signal [8, 19, 25]. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé par le schéma ci-dessous.

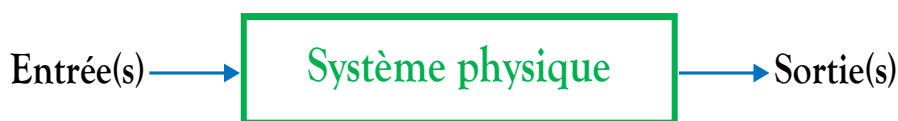


FIGURE 1 – Représentation générale d'un système dynamique

Cependant, ces dernières décennies, une nouvelle dérivée, dite dérivée d'ordre fractionnaire, est apparue. Son utilisation ne cesse de croître et dans différents domaines de la science et de l'ingénierie [13, 19, 23, 25]. Son concept est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers. Pour plus de détails sur l'interprétation physique et géométrique de cette dérivée, nous renvoyons le lecteur aux références [11, 27].

Les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales, et d'autre part, ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe. Plus que cela, dans la réalité, les systèmes dynamiques peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées, ces derniers sont dits systèmes dynamiques en série. En outre, si l'information se propage dans plusieurs directions, on dit que le système dynamique dépend de plusieurs variables. On les retrouve en électronique, en imagerie, en chimie [19, 25].

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude du comportement des systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire, lesquels sont décrits par des relations mathématiques reliant les variables d'entrées avec les variables de sorties au cours du temps. Il

1. Un système dynamique est un système où son comportement évolue au cours du temps.

existe plusieurs représentations de ces systèmes, parmi eux, on trouve :

- La représentation en espace d'état, laquelle décrit le comportement interne du phénomène, est exprimée par :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t), \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$ sont, respectivement, la trajectoire (l'état), le vecteur d'entrée (de la commande) et le vecteur de sortie. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice d'état, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est la matrice de transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Les conditions initiales associées au système (1) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0}, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Le système dynamique (1) peut être schématisé par :

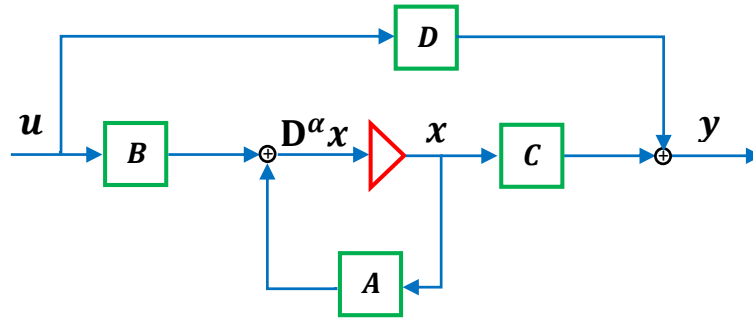


FIGURE 2 – Schéma de la représentation d'état d'un système dynamique.

- La fonction de transfert, notée G , relie, sous certaines conditions, l'entrée u à la sortie y par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)},$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, où Y et U sont respectivement, les transformées de Laplace de la sortie y et du contrôle u .

En mathématiques et en ingénierie, la théorie du contrôle a comme objet l'étude du comportement des systèmes dynamiques, parmi eux, nous trouvons l'énergie de réponse impulsionnelle, connue sous le nom norme \mathcal{H}_2 , où la lettre \mathcal{H} vient du fait que l'ensemble est un espace d'Hardy², lequel joue un rôle important dans le domaine des systèmes et du contrôle, en tant qu'une mesure de la performance vis-à-vis du bruit ou des perturbations externes. Elle est définie pour une fonction de transfert G , et peut être calculé dans le domaine fréquentiel ou temporel en utilisant le théorème de Plancherel.

2. La définition rigoureuse est la suivante : si $0 < p < +\infty$, alors, l'espace de Hardy $\mathcal{H}_p(D)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes f , i.e., analytiques définies sur le disque unité D et satisfaisant la condition

$$\|f\|_{\mathcal{H}_p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

La norme $\|f\|_{\mathcal{H}_p}$ est dite norme p de Hardy de la fonction f .

Dans [24], la norme d' Hardy d'une fonction de transfert fractionnaire est calculée d'une façon analytique. Cependant, l'objectif de notre travail est de calculer la norme \mathcal{H}_2 pour une fonction de transfert fractionnaire du second type associée à un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire par une nouvelle technique basée sur l'utilisation de l'espace d'état, des outils de la théorie des matrices et des transformations intégrales. Ensuite, nous allons regarder la possibilité de généraliser cette approche pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour tous types de systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire unidimensionnels et une classe de systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire bidimensionnels.

Ce manuscrit, lequel traite une étude théorique suivie par des simulations numériques, est organisé en quatre chapitres.

- Le premier chapitre regroupe les notions mathématiques de base dont nous aurons besoin pour l'élaboration de ce travail. Nous commencerons par donner quelques définitions des fonctions utiles dans le calcul fractionnaire, suivi par quelques notions sur la dérivation et l'intégration d'ordre fractionnaire et en dernier quelques transformations intégrales seront introduites ;
- Dans le deuxième chapitre, nous rappelons quelques définitions d'un système dynamique d'ordre fractionnaire ainsi que ses différentes représentations. Ensuite, nous passons au calcul de la norme \mathcal{H}_2 , dite aussi l'énergie de la réponse impulsionnelle, d'une fonction de transfert fractionnaire du second type par une nouvelle méthode. En dernier, le calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'un système unidimensionnel est envisagé ;
- Le troisième chapitre a pour but de généraliser la technique proposée pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'un système dynamique bidimensionnel d'ordre fractionnaire de type Roesser ;
- Finalement, la validation numérique des résultats théoriques obtenus est présentée dans le quatrième chapitre via des exemples académiques.

Ce manuscrit est clôturé par une conclusion, des perspectives et une bibliographie contenant les différents ouvrages et articles utilisés pour élaborer ce travail.

Chapitre 1

Notions de bases

1 Introduction

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans laquelle nous rappellerons quelques notions de base. Il est divisé en quatre sections. Dans la section qui suit, des notions et des définitions de certaines fonctions spéciales sont rappelées. Ensuite, un aperçu sur les dérivées d'ordre fractionnaire pour une fonction d'une seule variable et deux variables est présenté dans la troisième section. La dernière section sera consacrée aux transformations intégrales de Laplace et de Mellin.

2 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présenterons quelques fonctions spéciales. Il s'agit de la fonction Gamma d'Euler, Bêta d'Euler, les fonctions de Mittag-Leffler et en dernier la fonction Delta de Dirac.

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 [19] *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma d'Euler, notée par Γ , est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1 [19]

1. *Pour tout $z > 0$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad (1.2)$$

2. *Pour tout $z \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\Gamma(z+1) = z!.$$

Exemple 1.1 *Pour $z = \frac{3}{2}$, l'application de la formule (1.2) donne*

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

vu que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 [7] Pour tous $\operatorname{Re}(x) > 0$ et $\operatorname{Re}(y) > 0$, la fonction Bêta d'Euler, notée par B , est définie par l'intégrale suivante

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Exemple 1.2 Pour $x = 1$ et $y = 1$, nous obtenons

$$B(1, 1) = 1.$$

Proposition 1.2 [7] La relation entre la fonction Gamma d'Euler Γ et la fonction Bêta d'Euler B est donnée par la formule suivante

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

avec $\operatorname{Re}(x) > 0$ et $\operatorname{Re}(y) > 0$.

2.3 Fonction Mittag-Leffler

Définition 1.3 [19] Pour tous $\alpha > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Exemple 1.3 Pour $\alpha = 0$, nous obtenons

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)}.$$

Comme,

$$\Gamma(1) = 1,$$

alors,

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Définition 1.4 [19] Pour tous $\alpha, \beta > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Proposition 1.3 Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta = 1$, nous avons

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_\alpha(z),$$

et pour $\alpha = \beta = 1$, nous avons

$$E_{1, 1} = e^z.$$

Exemple 1.4 Pour $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $z = t^2$, nous avons

$$E_{2, 1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k + 1)}.$$

Il découle,

$$E_{2, 1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

ou encore,

$$E_{2, 1}(t^2) = \cosh(t).$$

2.4 Fonction Delta de Dirac

Définition 1.5 [19] *L'impulsion de Dirac est la fonction δ définie par*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0, \\ +\infty & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

3 Dérivées d'ordre fractionnaire

L'objectif de cette section est de présenter les définitions ainsi que quelques résultats sur les dérivées d'ordre fractionnaire. Il s'agit de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et la dérivée partielle fractionnaire.

3.1 Dérivation fractionnaire d'une fonction unidimensionnelle au sens de Caputo

Définition 1.6 [3] *La dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction f , telle que $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, est donnée par*

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

où $f^{(n)}$ représente la dérivée nième de la fonction f par rapport à la variable τ .

Exemple 1.5 *Considérons la fonction f définie par*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+, \\ t &\mapsto f(t) = t. \end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha < 1$, en appliquant (1.3), nous obtenons

$$\mathbf{D}^\alpha t = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} d\tau.$$

Pour $\tau = st$, il découle

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha t &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{-\alpha} ds, \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \mathbf{B}(1, 1 - \alpha), \\ &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} t^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4 [19] *Pour tous $\alpha > 0$, $f, g \in \mathcal{C}^n([a, b])$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathbf{D}^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathbf{D}^\alpha f(t) + \mu \mathbf{D}^\alpha g(t).$$

3.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle

Définition 1.7 [19] *La fonction définie par*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i} f(t_1, t_2) &= \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial t_i^{\alpha_i}} f(t_1, t_2), \\ &= \frac{1}{\Gamma(N_i - \alpha_i)} \int_0^{t_i} \frac{f_{t_i}^{(N_i)}(\tau)}{(t_i - \tau)^{\alpha_i + 1 - N_i}} d\tau, \end{aligned} \quad (1.4)$$

est appelée la dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, où $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$ avec $N_i \in \mathbb{N}^*$, de la fonction bidimensionnelle continue f par rapport à la variable $t_i \in \mathbb{R}_+$, pour $i = 1, 2$. Γ représente la fonction Gamma d'Euler (1.1) et $f_{t_i}^{(N_i)}$ est la dérivée partielle d'ordre N_i de la fonction f par rapport à la variable t_i , elle est donnée par

$$f_{t_i}^{(N_i)}(\tau) = \begin{cases} \frac{\partial^{N_1} f(\tau, t_2)}{\partial \tau^{N_1}} & \text{pour } i = 1, \\ \frac{\partial^{N_2} f(t_1, \tau)}{\partial \tau^{N_2}} & \text{pour } i = 2. \end{cases}$$

Définition 1.8 [19] *L'intégrale fractionnaire de la fonction bidimensionnelle f d'ordre β_i par rapport à la variable t_i est définie par*

$$\mathbf{I}_{t_i}^{\beta_i} f(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\beta_i)} \int_0^{t_i} (t_i - \tau)^{\beta_i - 1} F_{t_i}(\tau) d\tau,$$

où $\beta_i > 0$ pour $i = 1, 2$, Γ est la fonction Gamma d'Euler (1.1) et

$$F_{t_i}(\tau) = \begin{cases} f(\tau, t_2) & \text{pour } i = 1, \\ f(t_1, \tau) & \text{pour } i = 2. \end{cases}$$

Définition 1.9 [19] *L'opérateur défini par*

$$\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i} f(t_1, t_2) = \begin{cases} \mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i} f(t_1, t_2) & \text{pour } \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{I}_{t_i}^{-\alpha_i} f(t_1, t_2) & \text{pour } \alpha_i < 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

est appelé opérateur fractionnaire intégral-différentiel d'ordre α_i ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) de la fonction bidimensionnelle continue f par rapport à la variable t_i pour $i = 1, 2$.

Proposition 1.5 [26] *Soit f une fonction continue de deux variables réelles indépendantes $t_1, t_2 > 0$ et soient $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ avec $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$, $N_i \in \mathbb{N}^*$ et $\beta_i > 0$ pour $i = 1, 2$. Alors,*

$$\mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} f(t_1, t_2) = \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} f(t_1, t_2) = \mathbf{D}_{t_1, t_2}^{\alpha_1, \alpha_2} f(t_1, t_2),$$

et

$$\mathbf{I}_{t_1}^{\beta_1} \mathbf{I}_{t_2}^{\beta_2} f(t_1, t_2) = \mathbf{I}_{t_2}^{\beta_2} \mathbf{I}_{t_1}^{\beta_1} f(t_1, t_2) = \mathbf{I}_{t_1, t_2}^{\beta_1, \beta_2} f(t_1, t_2).$$

Exemple 1.6 *Considérons la fonction de Heaviside bidimensionnelle*

$$H(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t_1 \geq 0 \text{ et/ou } t_2 \geq 0, \\ 0 & \text{pour } t_1 < 0 \text{ et/ou } t_2 < 0. \end{cases}$$

1. La dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ de la fonction de Heaviside bidimensionnelle par rapport à la variable t_1 vaut 0.

En effet, comme la première dérivée de la fonction $H(t_1, t_2)$ par rapport à t_1 est égale à 0, donc, il s'en suit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} H(t_1, t_2) &= \frac{1}{\Gamma(N_1 - \alpha_1)} \int_0^{t_1} \frac{1}{(t_1 - \tau)^{\alpha_1 - N_1 + 1}} \frac{\partial^{N_1} H}{\partial \tau^{N_1}}(\tau, t_2) d\tau, \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. L'intégrale fractionnaire d'ordre $\beta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de la fonction de Heaviside bidimensionnelle par rapport à la variable t_2 est

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{t_2}^{\beta_2} H(t_1, t_2) &= \frac{1}{\Gamma(\beta_2)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\beta_2 - 1} H(t_1, \tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta_2)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\beta_2 - 1} d\tau, \\ &= \frac{t_2^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2 + 1)}. \end{aligned}$$

4 Transformations intégrales

Dans cette section, nous présenterons deux transformations intégrales. La transformée de Laplace unidimensionnelle et bidimensionnelle largement connue et la transformée de Mellin qui peut être considérée comme la version multiplicative de la transformation de Laplace bilatérale. Ces outils sont d'une grande utilité dans l'analyse des systèmes dynamiques linéaires.

4.1 Transformation de Laplace unidimensionnelle

4.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.10 [7] La transformée bilatérale de Laplace d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, notée par $F = \mathcal{L}[f]$, est définie par

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Définition 1.11 [12] La transformée de Laplace unilatérale d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue, notée par $F = \mathcal{L}[f]$, est définie par

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$ et $\text{Re}(s) > 0$.

Exemple 1.7 Si $f(t) = \sin(at)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, alors, la transformée de Laplace unilatérale

est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(at) dt, \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left[e^{-t(s-ia)} - e^{-t(s+ia)} \right] dt, \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right], \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}.\end{aligned}$$

Définition 1.12 [7] Une fonction f continue est dite d'ordre exponentiel, d'ordre $a > 0$ sur $t \in [0, \infty[$, s'il existe une constante positive K telle que pour un certain $t > T$, nous avons

$$|f(t)| \leq K e^{at}.$$

Théorème 1.1 [7] Si une fonction f est continue ou continue par morceaux dans tout intervalle fini $[0, T]$ et d'ordre exponentiel e^{at} , alors, la transformée de Laplace de $\mathcal{L}[f]$ existe pour tout s telle que $\text{Re}(s) > a$.

Théorème 1.2 [5] Supposons que

- f est une fonction continue par morceaux sur $]0, \infty[$;
- Pour certain $a < 1$, $f(t) = \mathcal{O}(t^{-a})$ quand $t \rightarrow 0$;
- Pour tout $b > 0$, $e^{-bt} f(t)$ tend vers 0, quand $t \rightarrow \infty$.

Alors, l'intégrale de Laplace

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

converge absolument pour $\text{Re}(s) > 0$ et définit une fonction holomorphe¹ sur le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$.

Proposition 1.6 [12] Pour toutes fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+ , avec $f \in \mathcal{C}^n([0, \infty[)$ et $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés suivantes

1. Linéarité

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)](s) = a \mathcal{L}[f(t)](s) + b \mathcal{L}[g(t)](s); \quad (1.6)$$

2. Dérivée d'ordre n , $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0}; \quad (1.7)$$

3. Produit de convolution

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \mathcal{L}[g(t)](s),$$

où

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

1. Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est \mathbb{C} -dérivable en chaque point de U , et si sa dérivée $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

Proposition 1.7 [12] Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $\nu \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ et δ la fonction Delta de Dirac, ainsi,

1.

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a};$$

2.

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1;$$

3.

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)](s) = s^n;$$

4.

$$\mathcal{L}[t^\nu](s) = \Gamma(\nu+1) s^{-(\nu+1)}.$$

Définition 1.13 [12] La transformée de Laplace inverse d'une fonction F , notée $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$, est définie par

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{st} ds,$$

où γ est une constante réelle qui dépasse la partie réelle de toutes les singularités de $F(s)$.

Exemple 1.8 Pour tout $s \in \mathbb{C} - \{0, a\}$ où $a \in \mathbb{R}$, considérons la fonction suivante

$$F(s) = \frac{1}{s(s-a)}.$$

Ainsi, sa transformée de Laplace inverse est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-a)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right)\right](t), \\ &= \frac{1}{a}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t)\right), \\ &= \frac{e^{at} - 1}{a}. \end{aligned}$$

4.1.2 Transformée de Laplace et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Théorème 1.3 [19] La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo (1.3) de la fonction $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}_+)$ pour $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0}, \quad (1.8)$$

où $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Exemple 1.9 Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire à coefficient constant avec second membre

$$\mathbf{D}^\alpha f(t) = h(t), \quad (1.9)$$

où $0 < \alpha < 1$. La condition initiale associée à l'équation (1.9) est $f(0) = 1$.

Pour trouver la solution de l'équation différentielle (1.9), nous appliquons la transformée de Laplace. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) = \mathcal{L}[h(t)](s) &\Leftrightarrow s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0) = H(s), \\ &\Leftrightarrow F(s) = s^{-\alpha} H(s) + s^{-1} f(0), \end{aligned}$$

ensuite, l'application de la transformée de Laplace inverse donne

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + f(0),$$

où encore

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + 1.$$

Exemple 1.10 Considérons la fonction suivante

$$g(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha),$$

avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice réelle de dimension $m \times m$, alors, sa transformée de Laplace unilatérale est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \alpha - 1} dt. \end{aligned}$$

Posons le changement $v = st$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g(t)](s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha) s^{\alpha k + \alpha}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\alpha k + \alpha - 1} dv \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha) s^{\alpha k + \alpha}} \Gamma(\alpha k + \alpha), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{A}{s^\alpha} \right)^k, \end{aligned}$$

où encore

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)](s) = \frac{1}{s^\alpha \mathbf{I}_m - A}.$$

4.2 Transformation de Laplace bidimensionnelle

4.2.1 Définitions et résultats théoriques

Soient $F(s_1, t_2)$ et $F(t_1, s_2)$ les transformées de Laplace de la fonction continue $f(t_1, t_2)$ par rapport à t_1 et t_2 respectivement où [19]

$$F(s_1, t_2) = \mathcal{L}_{t_1}[f(t_1, t_2)](s_1, t_2) = \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-s_1 t_1} dt_1,$$

et

$$F(t_1, s_2) = \mathcal{L}_{t_2}[f(t_1, t_2)](t_1, s_2) = \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-s_2 t_2} dt_2.$$

Définition 1.14 [6, 19] La transformée de Laplace bidimensionnelle, notée $F = \mathcal{L}_2[f]$, d'une fonction réelle continue bidimensionnelle f est définie par la formule suivante

$$F(s_1, s_2) = \mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t_1, t_2) e^{-s_1 t_1 - s_2 t_2} dt_1 dt_2, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C}.$$

Remarque 1.1 [19] *Il est à noter que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) &= \mathcal{L}_{t_1}[\mathcal{L}_{t_2}[f(t_1, t_2)](t_1, s_2)](s_1, s_2), \\ &= \mathcal{L}_{t_2}[\mathcal{L}_{t_1}[f(t_1, t_2)](s_1, t_2)](s_1, s_2).\end{aligned}$$

Exemple 1.11 *Considérons la fonction f définie par*

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t_1, t_2) &\mapsto f(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 > 0, t_2 > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t_1, t_2) e^{-s_1 t_1 - s_2 t_2} dt_1 dt_2, \\ &= \frac{1}{s_1 s_2}.\end{aligned}$$

Théorème 1.4 [6] *Si f est une fonction continue dans chaque intervalle fini $[0, T_1] \times [0, T_2]$ et d'ordre exponentiel a et b , alors, la transformée de Laplace bidimensionnelle de f existe pour tous s_1 et s_2 à condition que $\text{Re}(s_1) > a$ et $\text{Re}(s_2) > b$.*

Remarque 1.2 [6] *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction f est dite d'ordre exponentiel a et b sur $t_1 \in [0, \infty[$ et $t_2 \in [0, \infty[$, s'il existe une constante positive K telles que pour tous $t_1 > T_1$ et $t_2 > T_2$, nous aurons*

$$|f(t_1, t_2)| \leq K e^{at_1 + bt_2}.$$

Proposition 1.8 [6] *Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R}_+^2 continument différentiables et soient $a, b \in \mathbb{R}$, ainsi :*

1. Linéarité

$$\mathcal{L}_2[af(t_1, t_2) + bg(t_1, t_2)](s_1, s_2) = a\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) + b\mathcal{L}_2[g(t_1, t_2)](s_1, s_2).$$

2. Dérivée d'ordre 1

$$\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right](s_1, s_2) = s_1\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) - \mathcal{L}_{t_2}[f(t_1, t_2)](t_1, s_2)\Big|_{t_1=0},$$

et

$$\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right](s_1, s_2) = s_2\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) - \mathcal{L}_{t_1}[f(t_1, t_2)](s_1, t_2)\Big|_{t_2=0}.$$

3. Dérivée d'ordre 2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\left[\frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1^2}\right](s_1, s_2) &= s_1^2\mathcal{L}_2[f(t_1, t_2)](s_1, s_2) - s_1\mathcal{L}_{t_2}[f(t_1, t_2)](t_1, s_2)\Big|_{t_1=0} \\ &\quad - \mathcal{L}_{t_2}\left[\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right](t_1, s_2)\Big|_{t_1=0},\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}_2 \left[\frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} \right] (s_1, s_2) = s_2^2 \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) - s_2 \mathcal{L}_{t_1} [f(t_1, t_2)] (s_1, t_2) \Big|_{t_2=0} - \mathcal{L}_{t_1} \left[\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] (s_1, t_2) \Big|_{t_2=0},$$

et

$$\mathcal{L}_2 \left[\frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right] (s_1, s_2) = s_1 s_2 \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) - s_1 \mathcal{L}_{t_2} [f(t_1, t_2)] (t_1, s_2) \Big|_{t_1=0} - s_2 \mathcal{L}_{t_1} [f(t_1, t_2)] (s_1, t_2) \Big|_{t_2=0} + f(0, 0).$$

4. Produit de convolution

$$\mathcal{L}_2 [(f \star_2 g)(t_1, t_2)] (s_1, s_2) = \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) \mathcal{L}_2 [g(t_1, t_2)] (s_1, s_2),$$

où

$$(f \star_2 g)(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Définition 1.15 [6] La transformée de Laplace bidimensionnelle inverse, notée $f = \mathcal{L}_2^{-1} [F]$, est définie par la formule d'intégrale complexe double

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \mathcal{L}_2^{-1} [F(s_1, s_2)] (t_1, t_2), \\ &= \frac{1}{(2\pi j)^2} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \int_{\sigma_2 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} F(s_1, s_2) e^{s_1 t_1 + s_2 t_2} ds_1 ds_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où F doit être une fonction analytique pour tous s_1 et s_2 dans la région définie par les inégalités $\text{Re}(s_1) \geq \sigma_1$ et $\text{Re}(s_2) \geq \sigma_2$, où σ_1 et σ_2 sont des constantes réelles à choisir convenablement.

Exemple 1.12 Considérons la fonction F définie sur $\mathbb{C} - \{a\} \times \mathbb{C} - \{b\}$, où $a, b \in \mathbb{R}$, par

$$F(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_1 - a)(s_2 - b)}.$$

La transformée de Laplace inverse est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{-1} [F(s_1, s_2)] (t_1, t_2) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s_1 - a)} \right] (t_1) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s_2 - b)} \right] (t_2), \\ &= e^{at_1 + bt_2}. \end{aligned}$$

Donc,

$$f(t_1, t_2) = e^{at_1 + bt_2}.$$

4.2.2 Transformée de Laplace bidimensionnelle et dérivée d'ordre fractionnaire

Définition 1.16 [19] La transformée de Laplace bidimensionnelle de la dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ par rapport à la variable t_1 d'une fonction bidimensionnelle f , où $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, continue et N_1 -fois différentiable par rapport à t_1 est donnée par

$$\mathcal{L}_2 \left[\mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} f(t_1, t_2) \right] (s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) - \sum_{k=1}^{N_1} s_1^{\alpha_1 - k} \mathcal{L}_{t_2} \left[\frac{\partial^{k-1} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k-1}} \right] (t_1, s_2) \Big|_{t_1=0},$$

où $N_1 - 1 \leq \alpha_1 < N_1$ avec $N_1 \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.17 [19] *La transformée de Laplace bidimensionnelle de la dérivée partielle fractionnaire d'ordre $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ par rapport à la variable t_2 d'une fonction bidimensionnelle f , où $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, continue et N_2 -fois différentiable par rapport à t_2 est donnée par*

$$\mathcal{L}_2 \left[\mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} f(t_1, t_2) \right] (s_1, s_2) = s_2^{\alpha_2} \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) - \sum_{k=1}^{N_2} s_2^{\alpha_2-k} \mathcal{L}_{t_1} \left[\frac{\partial^{k-1} f(t_1, t_2)}{\partial t_2^{k-1}} \right] (s_1, t_2) \Big|_{t_2=0},$$

où $N_2 - 1 \leq \alpha_2 < N_2$ avec $N_2 \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.18 [19] *La transformée de Laplace bidimensionnelle de la dérivée partielle fractionnaire mixte d'une fonction bidimensionnelle f , où $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, continue et N_i -fois différentiable par rapport à la variable t_i , $i = 1, 2$, est donnée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \left[\mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} f(t_1, t_2) \right] (s_1, s_2) &= s_2^{\alpha_2} s_1^{\alpha_1} \mathcal{L}_2 [f(t_1, t_2)] (s_1, s_2) \\ &- \sum_{k_1=1}^{N_1} s_2^{\alpha_2} s_1^{\alpha_1-k_1} \mathcal{L}_{t_2} \left[\frac{\partial^{k_1-1} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k_1-1}} \right] (t_1, s_2) \Big|_{t_1=0} \\ &- \sum_{k_2=1}^{N_2} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2-k_2} \mathcal{L}_{t_1} \left[\frac{\partial^{k_2-1} f(t_1, t_2)}{\partial t_2^{k_2-1}} \right] (s_1, t_2) \Big|_{t_2=0} \\ &- \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} s_1^{\alpha_1-k_1} s_2^{\alpha_2-k_2} \frac{\partial^{k_1+k_2-2} f(t_1, t_2)}{\partial t_1^{k_1-1} \partial t_2^{k_2-1}} \Big|_{t_1=t_2=0}, \end{aligned}$$

où $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$ avec $N_i \in \mathbb{N}^*$ et $i = 1, 2$.

4.3 Transformation de Mellin

Définition 1.19 [12] *La transformée de Mellin d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue, notée $\mathcal{M}[f]$, est définie par*

$$F(s) = \mathcal{M}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Exemple 1.13 *Si $f(t) = e^{-nt}$, où $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, alors, la transformée de Mellin est*

$$\mathcal{M}[e^{-nt}](s) = \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt.$$

Posons $nt = x$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[e^{-x}](s) &= \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \\ &= \frac{\Gamma(s)}{n^s}. \end{aligned}$$

Théorème 1.5 [12] *La transformée de Mellin de la fonction f existe, si la fonction f est continue par morceaux dans tout intervalle fermé $[a, b] \subset [0, +\infty[$, telle que*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| t^{k-1} dt,$$

est bornée pour un certain $k > 0$.

Théorème 1.6 [5] *Supposons que*

- *f est continue sur $]0, +\infty[$;*
- *Pour certain $a \in \mathbb{R}$, $f(t) = \mathcal{O}(t^{-a})$ quand $t \rightarrow 0$;*
- *Pour tout t , $f(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.*

Alors, l'intégrale de Mellin

$$\int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt,$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > a$ et définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > a$.

Proposition 1.9 [12] *Soient f et g deux fonctions continues définies sur \mathbb{R}_+ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathcal{M} [\lambda f(t) + \mu g(t)] (s) = \lambda \mathcal{M} [f(t)] (s) + \mu \mathcal{M} [g(t)] (s).$$

Proposition 1.10 [12] *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left[\frac{1}{a+t^n} \right] (s) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{a+t^n} dt, \\ &= \pi n^{-1} \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi s}{n} \right) a^{\frac{s}{n}-1}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

avec $|\arg(a)| < \pi$ et $0 < \operatorname{Re}(s) < n$.

Définition 1.20 [12] *La transformée de Mellin inverse de la fonction F, notée $\mathcal{M}^{-1}[F]$, est définie par*

$$f(t) = \mathcal{M}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) t^{-s} ds.$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents outils et notions qui seront d'une grande utilité pour le développement des chapitres qui suivent.

Chapitre 2

Calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels

1 Introduction

Ce chapitre est consacré au calcul de la norme \mathcal{H}_2 , dite aussi l'énergie de la réponse impulsionnelle, d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel. Tout d'abord, quelques notions sur les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels ainsi que leurs différentes représentations seront présentées suivi de quelques concepts sur la norme \mathcal{H}_2 . Ensuite, nous calculons la norme \mathcal{H}_2 d'un système dynamique d'ordre fractionnaire décrivant une fonction de transfert du second type en utilisant une nouvelle technique basée sur la représentation en espace d'état, les matrices de transformation, la matrice parahermitienne et les transformations intégrales. En dernier, nous essayons, dans la mesure du possible, de généraliser le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour tous types de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels.

2 Préliminaire

Dans cette section, nous présenterons quelques notions sur les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels à temps continu. Il s'agira de quelques définitions, de l'expression de la trajectoire et en dernier des différentes représentations, lesquelles sont l'équation différentielle, la fonction de transfert, la réponse impulsionnelle et la matrice de Schur. Ensuite, la définition et quelques résultats sur la norme \mathcal{H}_2 seront donnés.

2.1 Système dynamique d'ordre fractionnaire

Considérons un système dynamique d'ordre fractionnaire linéaire à temps continu de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, avec $n-1 < \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$. $x \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie ; $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice d'état,

$B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation et $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est la matrice de transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Les conditions initiales associées au système (2.1) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0}, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

2.1.1 Définitions et résultats

Définition 2.1 [20] *Le système dynamique (2.1) est dit singulier si*

$$\det E = 0.$$

Définition 2.2 [20] *Le système dynamique (2.1) est dit standard ou explicite si*

$$E = I_m, \quad \text{ou} \quad \det E \neq 0.$$

Définition 2.3 [19, 20] *Le système dynamique (2.1) est dit régulier si et seulement si*

$$\det(Es^\alpha - A) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.1 *Si*

$$\det(Es^\alpha - A) \neq 0,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, alors, le faisceau (E, A) associé au système dynamique (2.1) est dit régulier.

Proposition 2.1 [1, 20] *La matrice résolvante associée à un système dynamique linéaire singulier de la forme (2.1) peut s'écrire comme unique série de Laurent au voisinage de ∞*

$$(Es^\alpha - A)^{-1} = \sum_{l=-\mu}^{+\infty} \phi_l s^{-(l+1)\alpha}, \quad (2.2)$$

où μ est appelé indice de nilpotence

$$\mu = \text{rg} E - \deg(\det(Es^\alpha - A)) + 1,$$

et ϕ_l est appelé la matrice fondamentale de système (2.1).

Définition 2.4 [19] *La paire (A, B) (où le système (2.1)) est dite contrôlable si*

$$\text{rg } \mathcal{C} = m \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = (B \ AB \ \dots \ A^{m-1}B).$$

Définition 2.5 [19] *La paire (A, C) (où le système (2.1)) est dite observable si*

$$\text{rg } \mathcal{O} = m \quad \text{où} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1 *Soit le système (2.1) avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (0 \ 1).$$

- La matrice de contrôlabilité est

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice \mathcal{C} est de rang $\text{rg } \mathcal{C} = 2$, donc, le système dynamique associé est contrôlable.

- La matrice d'observabilité est

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice \mathcal{O} est de rang $\text{rg } \mathcal{O} = 2$, donc, le système dynamique associé est observable.

2.1.2 Solvabilité d'un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire à temps continu

Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire singulier et à faisceau régulier à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{E} \mathbf{D}^\alpha x(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Les conditions initiales associées au système (2.3) sont

$$x^{(i)}(0) = x_{i,0}, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

La solution x du système (2.3) est sans impulsion, ce qui est équivalent aux conditions de comptabilités suivantes [1]

- $s^{\alpha-1-i} \mathbf{E} x^{(i)}(0)$ existe pour tous $s \in [0, +\infty[$, $n-1 < \alpha < n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq n-1$;
- $u(t)$ existe et $u^{(l)}(0)$ est nulle, $\forall l \geq 0$.

Résoudre le système (2.3) revient à retrouver l'expression de la trajectoire x . Pour ce faire, il existe plusieurs manières [2, 18, 21, 28] parmi lesquelles on trouve la transformée de Laplace. L'application de cette dernière à l'équation d'état associée au système (2.3) donne

$$(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} x^{(i)}(0).$$

Comme le système (2.3) est à faisceau régulier, alors, nous obtenons

$$\mathbf{X}(s) = (\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} x^{(i)}(0).$$

L'utilisation de l'expression (2.2) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l s^{-(l+1)\alpha} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_l \mathbf{E} s^{-l\alpha-i-1} x^{(i)}(0) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\mu} \phi_{-l} s^{(l-1)\alpha} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \sum_{l=1}^{\mu} \sum_{i=0}^{n-1} \phi_{-l} \mathbf{E} s^{l\alpha-i-1} x^{(i)}(0). \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de l'état x est obtenue par le biais de la transformée de Laplace inverse. Elle est exprimée dans le théorème suivant

Théorème 2.1 [1] La trajectoire x du système (2.3) est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l \left(\frac{\mathbf{B}}{\Gamma((l+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(l+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{i+\alpha}}{\Gamma(l\alpha+i+1)} x_{i,0} \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\mu} \phi_{-l} \left(\mathbf{B} \mathbf{D}^{(l-1)\alpha} u(t) + \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{D}^{l\alpha-i-1} \delta(t) x_{i,0} \right), \end{aligned}$$

où δ est la fonction de Dirac, μ est l'indice de nilpotence où $\mu = \text{rg } \mathbf{E} - \deg[\det(\mathbf{E}s^\alpha - \mathbf{A})] + 1$ et ϕ_l est la matrice fondamentale.

Exemple 2.2 Considérons le système (2.3) avec $0 < \alpha < 1$ et

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Comme,

$$\det(Es^\alpha - A) = 2(s^\alpha + 1),$$

alors, $\mu = 1$ ce qui prouve que le système est régulier. Les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_l = \begin{pmatrix} (-1)^l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l \geq 0.$$

Ainsi, la solution du système est

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(l+1)\alpha-1}}{\Gamma((l+1)\alpha)} u(\tau) d\tau + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{l\alpha}}{\Gamma(l\alpha+1)} x_{1,0} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.1 [1] Si $\det E \neq 0$, l'équation d'état associée au système (2.3) se transforme en

$$D^\alpha x(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \quad (2.4)$$

où $\tilde{A} = E^{-1}A$, $\tilde{B} = E^{-1}B$ et la solution de l'équation (2.4) est

$$x(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}^l \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{(l+1)\alpha-1}}{\Gamma((l+1)\alpha)} \tilde{B}u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{l\alpha+i}}{\Gamma(l\alpha+i+1)} x_{i,0} \right).$$

2.1.3 Représentation d'un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire à temps continu

Dans cette partie, nous donnerons les différentes représentations d'un système dynamique d'ordre fractionnaire, lesquelles sont la représentation d'état $\{A, B, C, D, \alpha\}$ [29], l'équation différentielle, la fonction de transfert G [18], la réponse impulsionnelle g [18, 19] et la matrice de Schur S_G [31]. Avant de définir les représentations, nous présenterons la modélisation d'un phénomène de circuit RLC.

2.1.3.1 Modélisation du phénomène du circuit RLC

Considérons le circuit électrique d'ordre fractionnaire représenté par la figure 2.1

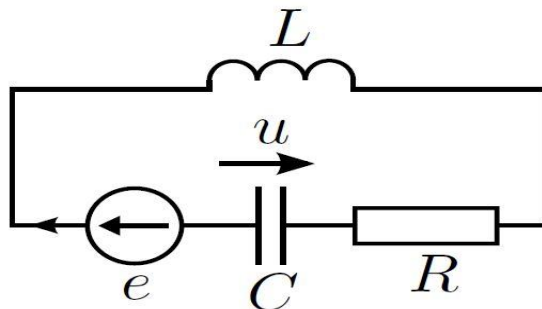


FIGURE 2.1 – Circuit électrique du type RLC [19]

R représente la résistance, L l'inductance, C capacité, u la tension électrique et e la source de voltage.

Le comportement d'un circuit RLC est décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire où l'entrée e et la sortie u sont obtenues par l'application des lois de Kirchhoff comme suit

$$\begin{aligned} i(t) &= C \mathbf{D}^\alpha u(t), \\ e(t) &= L \mathbf{D}^\alpha i(t) + R i(t) + u(t), \end{aligned}$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec $0 < \alpha < 1$.

Par des manipulations simple, nous obtenons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante

$$LC \mathbf{D}^{2\alpha} u(t) + RC \mathbf{D}^\alpha u(t) + u(t) = e(t).$$

Si on prend par exemple $L = 1$, $C = \frac{1}{3}$ et $R = 4$, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire associée au circuit RLC (Figure 2.1) est

$$\frac{1}{3} \mathbf{D}^{2\alpha} u(t) + \frac{4}{3} \mathbf{D}^\alpha u(t) + u(t) = e(t),$$

où encore

$$\mathbf{D}^{2\alpha} u(t) + 4 \mathbf{D}^\alpha u(t) + 3 u(t) = 3 e(t),$$

avec $0 < \alpha < 1$.

2.1.3.2 De l'équation différentielle à la représentation d'état

L'équation différentielle représentant un système d'ordre fractionnaire peut s'écrire sous la forme

$$a_m \mathbf{D}^{\alpha m} y(t) + a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_l \mathbf{D}^{\beta l} u(t) + \dots + b_0 u(t). \quad (2.5)$$

A fin de transformer l'équation différentielle fractionnaire en un système différentiel, dit aussi système en espace d'état ou encore système dynamique, nous allons d'abord nous intéresser à une version simplifiée de l'équation (2.5) où les dérivées de l'entrée u n'interviennent pas

$$\mathbf{D}^{\alpha m} y(t) + a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t) = u(t), \quad (2.6)$$

\mathbf{D}^α représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo avec $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et a_i sont les coefficients réels de l'EDF

Les conditions initiales associées à l'EDF (2.6) sont

$$y^{(i)}(0) = y_{i,0}, \quad 0 \leq i \leq (n-1)m.$$

Pour des raisons de simplification, nous supposons dans tout ce qui suit que les conditions initiales sont toutes nulles.

En effet, posons le changement de fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = y(t), \\ x_2(t) = \mathbf{D}^\alpha y(t), \\ \vdots \\ x_m(t) = \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t), \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = x_2(t), \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \mathbf{D}^\alpha x_m(t) = \mathbf{D}^{\alpha m} y(t), \\ = -[a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \dots + a_0 y(t)] + u(t). \end{array} \right.$$

Ainsi, la représentation en espace d'état obtenu est

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{D}^\alpha x_{m-1}(t) \\ \mathbf{D}^\alpha x_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{m-1}(t) \\ x_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = (1 \ 0 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

où encore

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Les conditions initiales deviennent

$$x(0) = 0, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Exemple 2.3 Considérons l'EDF associée au circuit RLC (Figure 2.1)

$$\mathbf{D}^{2\alpha} u(t) + 4\mathbf{D}^\alpha u(t) + 3u(t) = 3e(t), \quad (2.7)$$

où $0 < \alpha < 1$, $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = 0$.

L'équation (2.7) peut se transformer en un système différentiel d'ordre fractionnaire. Posons le changement de fonction suivant

$$\begin{cases} x_1(t) = u(t), \\ x_2(t) = \mathbf{D}^\alpha u(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x_1(t) = x_2(t), \\ \mathbf{D}^\alpha x_2(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t) + 3e(t). \end{cases}$$

Ainsi, la représentation d'état associée à l'EDF (2.7) est

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e(t), \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Les conditions initiales deviennent

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.3.3 De l'équation différentielle à la fonction de transfert

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$$a_m \mathbf{D}^{\alpha m} y(t) + a_{m-1} \mathbf{D}^{\alpha(m-1)} y(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_l \mathbf{D}^{\beta l} u(t) + b_{l-1} \mathbf{D}^{\beta(l-1)} u(t) + \cdots + b_0 u(t),$$

que l'on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\sum_{i=0}^m a_i \mathbf{D}^{\alpha i} y(t) = \sum_{j=0}^l b_j \mathbf{D}^{\beta j} u(t), \quad (2.8)$$

où u est l'entrée, y la sortie et a_i , $i = \overline{0, m}$, b_j , $j = \overline{0, l}$, sont des coefficients réels de l'EDF (2.8).

L'application la transformée de Laplace à l'équation (2.8), sachant que les conditions initiales sont toutes nulles, donne

$$\sum_{i=0}^m a_i s^{\alpha i} Y(s) = \sum_{j=0}^l b_j s^{\beta j} U(s).$$

Ainsi, par définition de la fonction de transfert G, nous obtenons

$$G(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{b_l s^{\beta l} + b_{l-1} s^{\beta(l-1)} + \dots + b_0}{a_m s^{\alpha m} + a_{m-1} s^{\alpha(m-1)} + \dots + a_0}.$$

Exemple 2.4 Reprenons l'EDF associée au circuit RLC (Figure 2.1)

$$\mathbf{D}^{2\alpha} u(t) + 4\mathbf{D}^\alpha u(t) + 3u(t) = 3e(t), \quad (2.9)$$

avec $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = 0$.

L'application de la transformée de Laplace à l'équation (2.9), permet d'obtenir

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{3}{s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 3}, \\ &= \frac{3}{(s^\alpha + 1)(s^\alpha + 3)}. \end{aligned}$$

2.1.3.4 De la représentation d'état à la fonction de transfert

Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire à temps continu standard et à faisceau régulier

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Appliquons la transformée de Laplace au système dynamique (2.10), nous obtenons

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (2.11)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \quad (2.12)$$

Comme le système dynamique d'ordre fractionnaire (2.10) est régulier, i.e.,

$$\det(s^\alpha \mathbf{I}_m - A) \neq 0$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, alors, par des manipulations sur l'équation d'état (2.11), il découle

$$X(s) = (s^\alpha \mathbf{I}_m - A)^{-1} BU(s). \quad (2.13)$$

Remplaçons l'expression de X en (2.13) dans l'équation de la sortie (2.12), nous obtenons

$$Y(s) = \left[C (s^\alpha \mathbf{I}_m - A)^{-1} B + D \right] U(s),$$

finalemt, la fonction de transfert est

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C (s^\alpha \mathbf{I}_m - A)^{-1} B + D. \quad (2.14)$$

Exemple 2.5 Soit le système dynamique d'ordre fractionnaire associé au circuit RLC (Figure 2.1)

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e(t), \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1$. Ainsi, par l'application de la relation (2.14), il vient

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^\alpha & -1 \\ 3 & s^\alpha + 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ &= \frac{3}{s^{2\alpha} + 4s^\alpha + 3}, \\ &= \frac{3}{(s^\alpha + 1)(s^\alpha + 3)}. \end{aligned}$$

Définition 2.6 [17] Une réalisation $\{A, B, C, D, \alpha\}$ pour la fonction de transfert

$$G(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D,$$

est dite minimale si et seulement si la paire (A, B) est contrôlable et la paire (A, C) est observable.

Exemple 2.6 Reprenons les matrices associées au circuit RLC (Figure 2.1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité est

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -12 \end{pmatrix},$$

la matrice \mathcal{C} est de rang $\text{rg } \mathcal{C} = 2$, donc, la paire (A, B) est contrôlable.

La matrice d'observabilité est

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice \mathcal{O} est de rang $\text{rg } \mathcal{O} = 2$, donc, la paire (A, C) est observable.

Comme la paire (A, B) est contrôlable et la paire (A, C) est observable alors la réalisation

$$\begin{aligned} G(s) &= C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D, \\ &= \frac{3}{(s^\alpha + 1)(s^\alpha + 3)}, \end{aligned}$$

est minimale.

Théorème 2.2 [24] La fonction de transfert commensurable¹

$$G(s) = \frac{Y(s^\alpha)}{U(s^\alpha)},$$

1. Une fonction de transfert est dite commensurable si tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui le régit sont des multiples entiers d'un ordre de base α .

d'ordre α est BIBO stable si

$$0 < \alpha < 2,$$

et pour tout $s \in \mathbb{C}$ telle que $U(s) = 0$

$$|\arg(s)| > \alpha \frac{\pi}{2}.$$

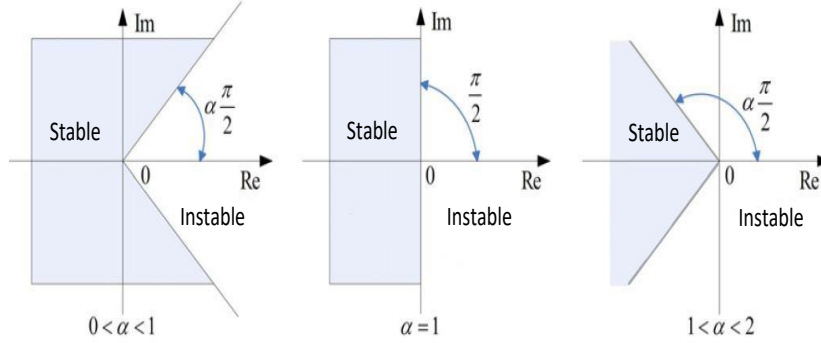


FIGURE 2.2 – Domaine de stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire et commensurable dans le plan complexe s^α [16].

2.1.3.5 De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle

Soit la fonction de transfert (2.14) écrite sous la forme générale

$$G(s) = C(s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D. \quad (2.15)$$

La réponse impulsionnelle g est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert G , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)](t), \\ &= C \mathcal{L}^{-1}[(s^\alpha I_m - A)^{-1}](t) B + D \mathcal{L}^{-1}[1](t), \end{aligned}$$

et comme (proposition 1.7 et exemple 1.10)

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)](s) = \frac{1}{s^\alpha I - A}$$

alors, la réponse impulsionnelle associée à la fonction de transfert (2.15) est donc

$$g(t) = C t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) B + D \delta(t). \quad (2.16)$$

Exemple 2.7 Considérons la fonction de transfert associée au circuit RLC (Figure 2.1), $0 < \alpha < 1$

$$G(s) = \frac{3}{(s^\alpha + 1)(s^\alpha + 3)}.$$

Cette dernière est associée au système dynamique d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e(t), \\ y(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ainsi, par la formule (2.16), il vient

$$g(t) = (1 \ 0) t^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t^{l\alpha}}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^l \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.1.3.6 De la fonction de transfert à la matrice de Schur

Définition 2.7 [31] Soit la matrice bloc M de dimension $(m + p) \times (m + p)$

$$M = \begin{pmatrix} Z & T \\ R & S \end{pmatrix},$$

où Z, T, R et S sont des matrices de dimension $m \times m$, $m \times p$, $q \times m$ et $q \times p$ respectivement. Le complément de Schur de la matrice Z en M est donnée par

$$M/Z = S - RZ^{-1}T,$$

où la matrice Z est non singulière.

Rappelons que la fonction de transfert associée au système dynamique linéaire (2.10) est donnée par

$$G(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B + D,$$

par définition, sa matrice de Schur est de la forme

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} s^\alpha I_m - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right].$$

Exemple 2.8 Soit la fonction de transfert associée au circuit RLC (Figure 2.1), $0 < \alpha < 1$

$$G(s) = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s^\alpha & -1 \\ 3 & s^\alpha + 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ainsi, la matrice de Schur associée est

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s^\alpha & -3 & 0 \\ 1 & s^\alpha + 4 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

En dernier, la figure ci-dessous regroupe les différents liens du passage d'une représentation à une autre.

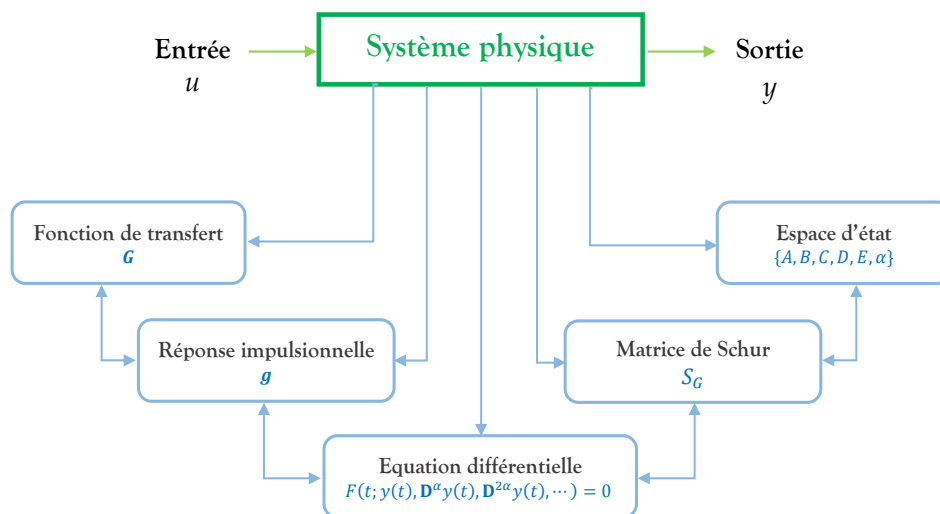


FIGURE 2.3 – Liens entre les différentes représentations d'un système dynamique d'ordre fractionnaire.

2.2 Norme \mathcal{H}_2

Définition 2.8 [29] La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO), notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par l'expression suivante

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G(j\omega) G^*(j\omega)] d\omega.$$

Définition 2.9 [24, 29] La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G à une entrée et une sortie (SISO), notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par l'expression suivante

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega.$$

Remarque 2.2 [29] Pour $G(-j\omega) = G(j\omega)$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^0 \text{tr} [G(j\omega) G^*(j\omega)] d\omega = \int_0^{+\infty} \text{tr} [G(j\omega) G^*(j\omega)] d\omega,$$

ainsi,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{tr} [G(j\omega) G^*(j\omega)] d\omega.$$

Définition 2.10 [29] La norme \mathcal{H}_2 de la réponse impulsionnelle g associée à une fonction de transfert G est donnée par l'expression suivante

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{+\infty} \text{tr} [g(t) g^*(t)] dt.$$

Théorème 2.3 [24] Soient G et g , la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert, respectivement, alors,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s).$$

Remarque 2.3 [24] Il est à noter que la norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G peut être égal à l'infinie pour une certaine valeur de α . Ceci est principalement dû au comportement de la réponse impulsionnelle g , au voisinage de l'origine, comme il est illustré dans le théorème 2.3.

3 Norme \mathcal{H}_2 pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire du second type : Une nouvelle approche

Notre objectif dans cette section est de calculer la norme \mathcal{H}_2 , dite aussi l'énergie de la réponse impulsionnelle, d'une fonction de transfert du second type par une nouvelle approche. Cette dernière est basée sur la représentation en espace d'état, des outils de la théorie des matrices et des transformations intégrales. Tout d'abord, nous donnerons le système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel associé à la fonction de transfert d'ordre fractionnaire du second type ainsi que quelques notions utiles. Ensuite, nous calculons la norme \mathcal{H}_2 en utilisant des transformations matricielles et intégrales.

3.1 Système dynamique d'ordre fractionnaire associée à une fonction de transfert du second type

Considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire du second type régulier à temps continu de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = \begin{pmatrix} -(\lambda + \bar{\lambda}) & -\lambda \bar{\lambda} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = (0 \quad k) x(t), \end{cases} \quad (2.17)$$

où $x \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée, $y \in \mathbb{R}$ est la sortie, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$. \mathbf{D}^α est la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de la fonction x par rapport à la variable t , $t \in \mathbb{R}_+$, où pour des raisons de stabilité $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Les conditions initiales associées au système dynamique (2.17) sont

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Comme le système (2.17) est régulier, l'utilisation de la transformée de Laplace permet de transformer le système dynamique (2.17) en une fonction de transfert, laquelle est donnée par

$$G(s) = \frac{k}{(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda})},$$

où encore

$$G(s) = k(s^\alpha + \lambda)^{-1} (s^\alpha + \bar{\lambda})^{-1},$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$. La fonction de transfert peut, aussi, être représentée par la matrice de Schur

$$S_G(s) = \left[\begin{array}{c|c} (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & 1 \\ \hline -k & 0 \end{array} \right].$$

La fonction de transfert complexe conjuguée associée au système dynamique (2.17) devient

$$G^*(s) = (\bar{s}^\alpha + \lambda)^{-1} (\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda})^{-1} k,$$

pour certains $s \in \mathbb{C}$, sa matrice de Schur est représentée sous la forme suivante

$$S_{G^*}(s) = \left[\begin{array}{c|c} (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) & k \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right].$$

La multiplication de la matrice de Schur S_G et de son complexe conjuguée S_{G^*} , donne la matrice parahermitienne [10] notée par S_ϕ

$$S_\phi(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) & k \\ (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & -1 & 0 \\ \hline -k & 0 & 0 \end{array} \right],$$

son complément de Schur est

$$\phi(s) = k(s^\alpha + \lambda)^{-1} (s^\alpha + \bar{\lambda})^{-1} (\bar{s}^\alpha + \lambda)^{-1} (\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda})^{-1} k.$$

3.2 Calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert du second type

L'idée principale de cette technique est d'utiliser une matrice parahermitienne à diagonale nulle. Pour ce faire, nous multiplions la matrice parahermitienne S_ϕ par deux matrices de transformations M_1 et M_2 . Notons que la matrice S_ϕ reste invariante et ne change pas sous ces transformations [10].

En effet,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\tilde{\phi}}(s) &= M_1 S_\phi(s) M_2, \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) & k \\ (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & -1 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) & k \\ (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & p(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) + p(\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) - 1 & pk \\ -k & -pk & 0 \end{array} \right].\end{aligned}$$

Les matrices de transformations dépendent du paramètre p , où

$$p = \frac{1}{2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) \right]},$$

est la solution de l'équation

$$p(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) + p(\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) - 1 = 0.$$

Ainsi, la matrice parahermitienne $\tilde{S}_{\tilde{\phi}}$ devient

$$\tilde{S}_{\tilde{\phi}}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) & k \\ (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & 0 & \frac{k}{2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) \right]} \\ -k & -\frac{k}{2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) \right]} & 0 \end{array} \right],$$

et sa fonction de transfert parahermitienne est

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(s) &= - \left(-k \quad -\frac{k}{2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) \right]} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & (\bar{s}^\alpha + \lambda)(\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda}) \\ (s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) & 0 \end{array} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c} k \\ k \\ 2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda)(s^\alpha + \bar{\lambda}) \right] \end{array} \right),\end{aligned}$$

où encore

$$\tilde{\Phi}(s) = \frac{k^2}{2 \operatorname{Re} \left[(s^\alpha + \lambda) (s^\alpha + \bar{\lambda}) \right]} \left[\frac{1}{(s^\alpha + \lambda) (s^\alpha + \bar{\lambda})} + \frac{1}{(\bar{s}^\alpha + \lambda) (\bar{s}^\alpha + \bar{\lambda})} \right]. \quad (2.18)$$

Posons le changement de variable suivant

$$s^\alpha = e^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \tilde{\omega} \iff \bar{s}^\alpha = e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} \tilde{\omega},$$

où $\tilde{\omega} = \omega^\alpha$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, nous avons

$$\lambda = |\lambda| e^{j\theta} \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} = |\lambda| e^{-j\theta},$$

telle que $\theta = \arg(\lambda)$ et $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

La fonction de transfert parahermitienne (2.18) devient donc,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) &= \frac{k^2}{8j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} \left[\frac{e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} - \frac{e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} \right] \\ &+ \frac{k^2}{8j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \left[\frac{e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} - \frac{e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} \right]. \end{aligned}$$

Par la définition 2.9 de la norme \mathcal{H}_2 , nous avons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega, \\ &= \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Traitons les différents cas qui peuvent se présenter

- **Pour** $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$: l'utilisation du théorème 2.2 permet de trouver

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \infty.$$

- **Pour** $\frac{1}{4} < \alpha < 2$: nous distinguons deux cas : $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$.

D'une part, pour $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ et $\alpha \neq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$, la fonction $\tilde{\Phi}$ est

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) &= \frac{k^2}{8j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} \left[\frac{e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} - \frac{e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} \right] \\ &+ \frac{k^2}{8j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \left[\frac{e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} - \frac{e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} \right], \end{aligned}$$

avec $\theta = \arg(\lambda)$.

Le calcul de la norme \mathcal{H}_2 donne,

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{k^2}{8j\pi\alpha|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} \left[e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} d\tilde{\omega} \right. \\ &\quad \left. - e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)}} d\tilde{\omega} \right] + \frac{k^2}{8j\pi\alpha|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \\ &\quad \times \left[e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} d\tilde{\omega} - e^{-j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)}} d\tilde{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Les intégrales peuvent être calculées aisément par l'utilisation de la transformation de Mellin. En effet, l'utilisation de la proposition 1.10, permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j(\frac{\alpha\pi}{2}+\theta)}} d\tilde{\omega} = \frac{\pi |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{j(\frac{\alpha\pi}{2}+\theta)(\frac{1}{\alpha}-1)}}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j(\frac{\alpha\pi}{2}+\theta)}} d\tilde{\omega} = \frac{\pi |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-j(\frac{\alpha\pi}{2}+\theta)(\frac{1}{\alpha}-1)}}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{-j(\frac{\alpha\pi}{2}-\theta)}} d\tilde{\omega} = \frac{\pi |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-j(\frac{\alpha\pi}{2}-\theta)(\frac{1}{\alpha}-1)}}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})},$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\tilde{\omega} + |\lambda| e^{j(\frac{\alpha\pi}{2}-\theta)}} d\tilde{\omega} = \frac{\pi |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{j(\frac{\alpha\pi}{2}-\theta)(\frac{1}{\alpha}-1)}}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})}.$$

Ainsi, il découle,

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{k^2 |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-4}}{8j\alpha \sin(\theta) \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \left[\frac{1}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta)} \left(e^{j(\frac{\theta}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta + \frac{\pi}{2})} - e^{-j(\frac{\theta}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta + \frac{\pi}{2})} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta)} \left(e^{j(\frac{\theta}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta - \frac{\pi}{2})} - e^{-j(\frac{\theta}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta - \frac{\pi}{2})} \right) \right], \\ &= \frac{k^2 |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-4}}{4\alpha \sin(\theta) \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \left[\frac{\sin(\frac{\theta}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta + \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta)} + \frac{\sin(\frac{\theta}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta)} \right], \\ &= \frac{k^2 |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-4}}{4\alpha \sin(\theta) \sin(\frac{\alpha\pi}{2}) \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \left[\frac{\cos(\frac{\theta}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta)}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta)} - \frac{\cos(\frac{\theta}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta)}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta)} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N}$, autrement dit $\alpha \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$. Traitons ces cas, cas par cas.

- Si $\alpha = 1$, la fonction parhermitienne devient

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\omega) &= \frac{k^2}{8|\lambda|^3 \sin(\theta) \cos(\theta)} \left[\frac{e^{-j\theta}}{\omega + |\lambda| e^{-j(\frac{\pi}{2}-\theta)}} - \frac{e^{j\theta}}{\omega + |\lambda| e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} + \frac{e^{j\theta}}{\omega + |\lambda| e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-j\theta}}{\omega + |\lambda| e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(\omega) d\omega, \\ &= \frac{k^2}{8\pi |\lambda|^3 \sin(\theta) \cos(\theta)} \left[e^{-j\theta} \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + |\lambda| e^{-j(\frac{\pi}{2}-\theta)}} - \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + |\lambda| e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{j\theta} \left(\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + |\lambda| e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}} - \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + |\lambda| e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k^2}{8\pi|\lambda|^3 \sin(\theta) \cos(\theta)} \left[e^{-j\theta} \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\omega + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{2}-\theta)}}{\omega + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} \right) \Big|_0^M \right. \\
 &\quad \left. + e^{j\theta} \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\omega + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}}{\omega + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}} \right) \Big|_0^M \right], \\
 &= \frac{k^2}{4|\lambda|^3 \cos(\theta)}.
 \end{aligned}$$

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la fonction de transfert parahermitienne s'écrit comme

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) &= \frac{k^2}{4\sqrt{2}j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)} \left[\frac{e^{j(\frac{\pi}{4}-\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}-\theta)}} - \frac{e^{-j(\frac{\pi}{4}-\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}-\theta)}} \right] \\
 &\quad + \frac{k^2}{4\sqrt{2}j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}+\theta)} \left[\frac{e^{-j(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}+\theta)}} - \frac{e^{j(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}+\theta)}} \right],
 \end{aligned}$$

et la norme \mathcal{H}_2 est

$$\begin{aligned}
 \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) \tilde{\omega} d\tilde{\omega}, \\
 &= \frac{k^2}{2\sqrt{2}j\pi|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)} \left[e^{j(\frac{\pi}{4}-\theta)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}-\theta)}} - e^{-j(\frac{\pi}{4}-\theta)} \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}-\theta)}} \right] + \frac{k^2}{2\sqrt{2}j\pi|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}+\theta)} \left[e^{-j(\frac{\pi}{4}+\theta)} \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}+\theta)}} - e^{j(\frac{\pi}{4}+\theta)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}+\theta)}} \right], \\
 &= \frac{k^2}{2\sqrt{2}j\pi|\lambda|^2 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)} \left[\lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}-\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}-\theta)}} \right) \Big|_0^M \right] \\
 &\quad + \frac{k^2}{2\sqrt{2}j\pi|\lambda|^2 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{4}+\theta)} \left[\lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{4}+\theta)}} \right) \Big|_0^M \right], \\
 &= \frac{k^2}{\sqrt{2}\pi|\lambda|^2 \sin(\theta)} \left[\frac{(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)} - \frac{(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)} \right], \\
 &= k^2 \frac{4\theta \cot(\theta) - \pi}{2\pi|\lambda|^2 \cos(2\theta)}.
 \end{aligned}$$

- Si $\alpha = \frac{1}{3}$, la fonction de transfert parahermitienne devient

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}(\tilde{\omega}) &= \frac{k^2}{4j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{6}-\theta)} \left[\frac{e^{j(\frac{\pi}{6}-\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{6}-\theta)}} - \frac{e^{-j(\frac{\pi}{6}-\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{6}-\theta)}} \right] \\
 &\quad + \frac{k^2}{4j|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin(\frac{\pi}{6}+\theta)} \left[\frac{e^{-j(\frac{\pi}{6}+\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j(\frac{\pi}{6}+\theta)}} - \frac{e^{j(\frac{\pi}{6}+\theta)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j(\frac{\pi}{6}+\theta)}} \right],
 \end{aligned}$$

sa norme \mathcal{H}_2 associée est

$$\begin{aligned}
\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{3}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\phi}(\tilde{\omega}) \tilde{\omega}^2 d\tilde{\omega}, \\
&= \frac{3k^2}{4j\pi|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \left[e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^2 d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} - e^{-j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^2 d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} \right] + \frac{3k^2}{4j\pi|\lambda|^3 \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)} \left[e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)} \right. \\
&\quad \times \left. \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^2 d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}} - e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\omega}^2 d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}} \right], \\
&= \frac{3k^2}{4j\pi|\lambda| \sin(\theta)} \left[\cot\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right) \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} \right) \Big|_0^M + \cot\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \right. \\
&\quad \times \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}} \right) \Big|_0^M + j \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} \right) \Big|_0^M \\
&\quad \left. + j \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}}{\tilde{\omega} + |\lambda|e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}} \right) \Big|_0^M \right], \\
&= \frac{3k^2}{2\pi|\lambda| \sin(\theta)} \left[\left(\frac{\pi}{6}-\theta \right) \cot\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right) - \left(\frac{\pi}{6}+\theta \right) \cot\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right) \right], \\
&= k^2 \frac{\sin(2\theta) - 3\frac{\theta}{\pi}\sqrt{3}}{|\lambda| \sin(\theta) [4\cos^2(\theta) - 3]}.
\end{aligned}$$

D'où le théorème

Théorème 2.4 La norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire du second type associée à la représentation en espace d'état $\{A, B, C, \alpha\}$, où

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda + \bar{\lambda}) & -\lambda\bar{\lambda} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad k) \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < 2,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $k \in \mathbb{R}$ et $\theta = \arg(\lambda)$ telle que $|\theta| < \pi - \alpha \frac{\pi}{2}$, est donnée par

- Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \infty;$$

- Si $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ avec $\alpha \neq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{k^2 |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}-4}}{4\alpha \sin(\theta) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\theta}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)} \right];$$

- Si $\alpha = 1$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{k^2}{4|\lambda|^3 \cos(\theta)};$$

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = k^2 \frac{4\theta \cot(\theta) - \pi}{2\pi|\lambda|^2 \cos(2\theta)};$$

- Si $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = k^2 \frac{\sin(2\theta) - 3\frac{\theta}{\pi}\sqrt{3}}{|\lambda| \sin(\theta) [4 \cos^2(\theta) - 3]}.$$

4 Norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel

Dans cette section, nous allons regarder la possibilité de généraliser le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels par deux méthodes différentes.

4.1 Système dynamique

Considérons un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel standard et à faisceau régulier à temps continu

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{cases} \quad (2.19)$$

où \mathbf{D}^α la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec $0 < \alpha < 2$. $x \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée, $y \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie ; $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ représente la matrice d'état, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ est la matrice de commande et $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ est la matrice d'observation.

Les conditions initiales associées au système dynamique (2.19) sont

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0.$$

L'utilisation de la transformée de Laplace sur le système dynamique (2.19) permet de trouver la fonction de transfert suivante

$$G(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B. \quad (2.20)$$

La réponse impulsionnelle associée au système dynamique (2.19), obtenue par l'application de la transformée de Laplace inverse sur la fonction de transfert (2.20), est donnée par

$$g(t) = C t^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l\alpha} A^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} B,$$

et nous définissons son complexe conjuguée par

$$g^*(t) = B^T t^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l\alpha} (A^T)^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} C^T.$$

4.2 Calcul de la norme \mathcal{H}_2

4.2.1 Utilisation de la réponse impulsionnelle

Pour calculer de la norme \mathcal{H}_2 du système dynamique d'ordre fractionnaire (2.19), appliquons la définition 2.8, il découle

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{tr} [G(j\omega) G^*(j\omega)] d\omega,$$

laquelle est équivalente à

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_0^{+\infty} \text{tr} [g(t) g^*(t)] dt,$$

par l'utilisation de l'égalité de Plancherel.

Ainsi, en remplaçant l'expression de la fonction g et celle de g^* , il vient

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \int_0^{+\infty} \text{tr} \left[C t^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l\alpha} A^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} BB^T t^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l\alpha} (A^T)^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} C^T \right] dt, \\ &= \text{tr} [C W_c C^T], \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} W_c(t) &= \int_0^t z^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{l\alpha} A^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} BB^T z^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{l\alpha} (A^T)^l}{\Gamma(l\alpha + \alpha)} dz, \quad t \rightarrow +\infty, \\ &= \int_0^t z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(Az^\alpha) BB^T z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A^T z^\alpha) dz, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

lequel représente le Grammien de contrôlabilité.

Rappelons que dans le cas où $\alpha = 1$, le grammien de contrôlabilité W_c , lequel devient

$$\begin{aligned} W_c(t) &= \int_0^t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l A^l}{\Gamma(l+1)} BB^T \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l (A^T)^l}{\Gamma(l+1)} dz, \quad t \rightarrow +\infty, \\ &= \int_0^t e^{Az} BB^T e^{A^T z} dz, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

vérifie l'équation de Lyapunov

$$A W_c + W_c A^T + BB^T = 0.$$

Ce pendant, dans le cas où $\alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \left[\cup 1, 2 \left[\right.$, la difficulté est donc de trouver une équation linéaire qui puisse être utilisée pour calculer le grammien de contrôlabilité W_c , plus précisément, la difficulté vient du fait que la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}$ n'a pas les mêmes propriétés que la fonction exponentielle et le manque de propriétés reliant l'intégration et la dérivation fractionnaire au sens de Caputo.

4.2.2 Extension de la nouvelle technique

Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire à temps continu standard à faisceau régulier

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 2$ et

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$$

La fonction de transfert associée est

$$G(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} B,$$

et son complexe conjuguée est

$$G^*(s) = B^T (\bar{s}^\alpha I_m - A^T)^{-1} C^T,$$

par conséquent, la matrice parahermitienne est

$$S_\phi(s) = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{s}^\alpha I_m - A^T & C^T \\ s^\alpha I_m - A & -BB^T & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{array} \right],$$

telle que

$$\phi(s) = C (s^\alpha I_m - A)^{-1} BB^T (\bar{s}^\alpha I_m - A^T)^{-1} C^T.$$

Pour la nouvelle technique, nous nous intéressons à une matrice parahermitienne à diagonale nulle, alors, nous multiplions la matrice parahermitienne par deux matrices de transformations M_1 et M_2 telle que la matrice $S_\phi(s)$ reste invariante par ces transformations [10]. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\tilde{\phi}}(s) &= M_1 S_\phi(s) M_2, \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} I_m & 0 & 0 \\ P & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{s}^\alpha I_m - A^T & C^T \\ s^\alpha I_m - A & -BB^T & 0 \\ -C & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} I_m & P & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{s}^\alpha I_m - A^T & C^T \\ s^\alpha I_m - A & (s^\alpha I_m - A)P + P(\bar{s}^\alpha I_m - A^T) - BB^T & PC^T \\ -C & -CP & 0 \end{array} \right], \end{aligned}$$

telle que la matrice P est solution de l'équation

$$(s^\alpha I_m - A)P + P(\bar{s}^\alpha I_m - A^T) - BB^T = 0.$$

Posons le changement $s^\alpha = j^\alpha \omega^\alpha \Rightarrow s^\alpha = e^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \tilde{\omega}$, nous obtenons

$$\left(e^{j\frac{\alpha\pi}{2}} \tilde{\omega} I_m - A \right) P + P \left(e^{-j\frac{\alpha\pi}{2}} \tilde{\omega} I_m - A^T \right) - BB^T = 0,$$

où encore

$$2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \tilde{\omega} P - AP - PA^T - BB^T = 0. \quad (2.21)$$

La difficulté dans cette partie est de trouver les valeurs de la matrice P solution de l'équation (2.21).

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons calculé l'énergie de la réponse impulsionnelle d'un système dynamique d'ordre fractionnaire associé à une fonction de transfert fractionnaire du second type en utilisant une nouvelle technique moyennant des outils de la théorie des matrices et des transformations intégrales. Ensuite, nous avons essayé de généraliser le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour n'importe quel système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel. Le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour ce genre de système reste toujours une question ouverte [15, 25].

Le chapitre suivant traite le calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une certaine classe de système dynamique d'ordre fractionnaire bidimensionnel.

Chapitre 3

Calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour une classe de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bidimensionnels

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de calculer la norme \mathcal{H}_2 d'une certaine classe de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bidimensionnels du type Roesser. Tout d'abord, quelques définitions sur le système dynamique choisi, sa trajectoire ainsi que ses différentes représentations seront présentées. Ensuite, quelques notions sur la norme \mathcal{H}_2 dans le cas bidimensionnel sont introduites. En dernier, le calcul de la norme \mathcal{H}_2 du système dynamique d'ordre fractionnaire bidimensionnel du type Roesser choisi est présenté.

2 Préliminaires

Dans cette section, une étude autour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bidimensionnels du type Roesser à temps continu sera présentée suivi par quelques notions sur la norme \mathcal{H}_2 pour une fonction de transfert bidimensionnelle.

2.1 Systèmes dynamiques linéaires d'ordre fractionnaire bidimensionnels du type Roesser

Un système dynamique linéaire fractionnaire bidimensionnel du type Roesser est décrit par les équations suivantes [19]

$$\begin{cases} \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \mathbf{B} u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \mathbf{D} u(t_1, t_2), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ est la dérivée partielle fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle continue par rapport à la variable t_i (formule (1.4)), d'ordre α_i avec $N_i - 1 < \alpha_i < N_i$, $N_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, 2$; $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = m$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$ sont, respectivement, les vecteurs d'état horizontal, d'état vertical, de la commande et de la sortie. $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Les conditions initiales associées au système (3.1) sont

$$x^{h(l_1)}(0, t_2) = \frac{\partial^{l_1} x^h}{\partial t_1^{l_1}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=0},$$

où $l_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$; $t_2 > 0$,

$$x^{v(l_2)}(t_1, 0) = \frac{\partial^{l_2} x^v}{\partial t_2^{l_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=0},$$

où $l_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1$; $t_1 > 0$.

2.1.1 Définitions

Définition 3.1 [19] *Le système dynamique (3.1) est dit singulier si*

$$\det E = 0.$$

Définition 3.2 [19] *Le système dynamique (3.1) est dit standard ou explicite si*

$$E = I_m, \quad \text{ou} \quad \det E \neq 0.$$

Définition 3.3 [9] *Le système (3.1) est dit régulier si*

$$\det G(s_1, s_2) = \left| E \begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} I_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix} - A \right| \neq 0, \quad (3.2)$$

pour certains $s_1, s_2 \in \mathbb{C}^*$.

On dit, alors, que le faisceau (E, A) est régulier.

Proposition 3.1 [19, 22] *Soient $E, A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ avec $\det E = 0$. Alors, pour tous $s_1, s_2 \in \mathbb{C}^*$ et $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $N_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2$, l'inverse de la matrice $G(s_1, s_2)$ (3.2) peut s'exprimer sous la forme de la somme suivante*

$$G^{-1}(s_1, s_2) = \sum_{l_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{l_2=-\mu_2}^{\infty} T_{l_1 l_2} s_1^{-(l_1+1)\alpha_1} s_2^{-(l_2+1)\alpha_2}.$$

La paire des entiers naturelle μ_1 et μ_2 , telle que $T_{l_1 l_2} = 0$ pour $l_1 < \mu_1$ et/ou $l_2 < \mu_2$, est appelée l'indice du faisceau (E, A) .

De plus, $T_{l_1 l_2}$, laquelle est appelée la matrice transition, est donnée par

$$T_{l_1 l_2} = \begin{cases} [E_1, 0] T_{0, -1} + [0, E_2] T_{-1, 0} - A T_{-1, -1} = I_{m \times m} \\ [E_1, 0] T_{l_1, l_2-1} + [0, E_2] T_{l_1-1, l_2} - A T_{l_1-1, l_2-1} = 0 & \text{pour } l_1 \geq \mu_1, l_1 \neq 0 \\ & \text{et } l_2 \geq \mu_2, l_2 \neq 0, \\ 0 & \text{pour } l_1 < \mu_1 \text{ et/ou } l_2 < \mu_2, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $E = [E_1, E_2]$ avec $E_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ et $E_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$.

2.1.2 Solvabilité

La trajectoire du système dynamique linéaire fractionnaire singulier à faisceau régulier du type Roesser (3.1) est décrite par le théorème suivant

Théorème 3.1 [19] *La solution* $\begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix}$ *du système dynamique linéaire fractionnaire singulier et régulier (3.1) est*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} &= \sum_{l_1=-\mu_1}^{\infty} \sum_{l_2=-\mu_2}^{\infty} T_{l_1 l_2} \left[E_1 \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \frac{t_1^{i_1+l_1\alpha_1}}{\Gamma(i_1+l_1\alpha_1+1)} D_{t_2}^{-(l_2+1)\alpha_2} \frac{\partial^{i_1} x^h}{\partial t_1^{i_1}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=0} \right. \\ &+ E_1 \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{M_2-1} \frac{t_1^{i_1+l_1\alpha_1}}{\Gamma(i_1+l_1\alpha_1+1)} \frac{t_2^{i_2+(l_2+1)\alpha_2}}{\Gamma(i_2+(l_2+1)\alpha_2+1)} \frac{\partial^{i_2}}{\partial t_2^{i_2}} \left[\frac{\partial^{i_1} x^h}{\partial t_1^{i_1}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=0} \right] \Big|_{t_2=0} \\ &+ E_2 \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \frac{t_2^{i_2+l_2\alpha_2}}{\Gamma(i_2+l_2\alpha_2+1)} D_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} \frac{\partial^{i_2} x^v}{\partial t_2^{i_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=0} \\ &+ E_2 \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \frac{t_1^{i_1+(l_1+1)\alpha_1}}{\Gamma(i_1+(l_1+1)\alpha_1+1)} \frac{t_2^{i_2+l_2\alpha_2}}{\Gamma(i_2+l_2\alpha_2+1)} \frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}} \left[\frac{\partial^{i_2} x^v}{\partial t_2^{i_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=0} \right] \Big|_{t_1=0} \\ &+ B D_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} D_{t_2}^{-(l_2+1)\alpha_2} u(t_1, t_2) \\ &+ B \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \frac{t_1^{i_1+(l_1+1)\alpha_1}}{\Gamma(i_1+(l_1+1)\alpha_1+1)} D_{t_2}^{-(l_2+1)\alpha_2} \frac{\partial^{i_1} u}{\partial t_1^{i_1}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=0} \\ &+ \sum_{i_2=0}^{M_2-1} \frac{t_2^{i_2+(l_2+1)\alpha_2}}{\Gamma(i_2+(l_2+1)\alpha_2+1)} D_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} \frac{\partial^{i_2} u}{\partial t_2^{i_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=0} \\ &+ \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \sum_{i_2=0}^{M_2-1} \frac{t_1^{i_1+(l_1+1)\alpha_1}}{\Gamma(i_1+(l_1+1)\alpha_1+1)} \frac{t_2^{i_2+(l_2+1)\alpha_2}}{\Gamma(i_2+(l_2+1)\alpha_2+1)} \frac{\partial^{i_1}}{\partial t_1^{i_1}} \frac{\partial^{i_2} u}{\partial t_2^{i_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=0} \Big], \end{aligned}$$

où (μ_1, μ_2) , $T_{l_1 l_2}$ et Γ sont, respectivement, la paire de l'indice du faisceau (E, A), les matrices de transition (3.3) et la fonction Gamma d'Euler (1.1), $E = [E_1 \ E_2]$ avec $E_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ et $E_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$. $D_{t_i}^{\alpha_i}$ représente l'opérateur intégro-différentiel d'ordre α_i par rapport t_i (1.5), où $N_i - 1 \leq \alpha_i < N_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $N_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, 2$ et

$$M_1 - 1 < -(l_1 + 1)\alpha_1 \leq M_1, \quad M_2 - 1 < -(l_2 + 1)\alpha_2 \leq M_2, \quad M_1, M_2 \in \mathbb{N}.$$

Remarque 3.1 *La transformée de Laplace bidimensionnelle a été utilisée pour déterminer la trajectoire du système (3.1), cependant, d'autres transformations intégrales peuvent être utilisées.*

Exemple 3.1 *Considérons la longue ligne de transmission avec le modèle d'élément distribué illustré par la figure ci-dessous*

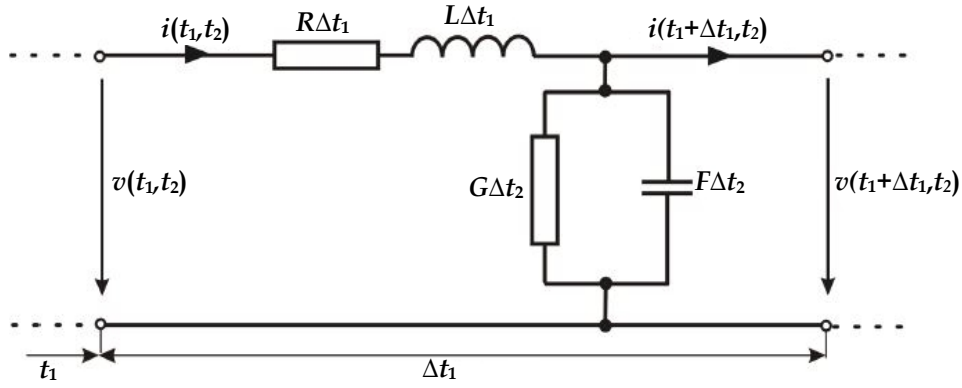


FIGURE 3.1 – Modèle d'élément distribué de la longue ligne de transmission [19].

Pour ce circuit, nous pouvons formuler les équations qui décrivent le courant i et la tension v dans cette ligne en fonction des variables t_1 et t_2 comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_1, t_2) \\ v(t_1, t_2) \\ i(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R & 0 & 0 \\ -G & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \\ v(t_1, t_2) \\ i(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v(t_1, t_2) \\ i(t_1, t_2) \end{pmatrix} = y(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où R est la résistance distribuée, L est l'inductance distribuée, G est la conductance distribuée et F est la capacité distribuée de la ligne de transmission ; $0 < \alpha_1 \leq 1$ et $0 < \alpha_2 \leq 1$.

Les conditions initiales associées au systèmes (3.4) sont données par

$$x^{h(i_1)}(0, t_2) = \left(\begin{array}{c} \left. \frac{\partial^{i_1} v(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1}} \right|_{t_1=0} \\ \left. \frac{\partial^{i_1} i(t_1, t_2)}{\partial t_1^{i_1}} \right|_{t_1=0} \end{array} \right),$$

pour $i_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, $t_2 \geq 0$ et

$$x^{v(i_2)}(t_1, 0) = \left(\begin{array}{c} \left. \frac{\partial^{i_2} v(t_1, t_2)}{\partial t_2^{i_2}} \right|_{t_2=0} \\ \left. \frac{\partial^{i_2} i(t_1, t_2)}{\partial t_2^{i_2}} \right|_{t_2=0} \end{array} \right)$$

où $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, $t_1 \geq 0$.

Comme

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

alors, l'application du théorème 3.1 permet d'obtenir

$$\begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \sum_{l_1=-1}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{-1} T_{l_1 l_2}^1 \times \left\{ \frac{t_1^{l_1 \alpha_1}}{\Gamma(l_1 \alpha_1 + 1)} \left(D_{t_2}^{-(l_2+1)\alpha_2} \begin{pmatrix} v(0, t_2) \\ i(0, t_2) \end{pmatrix} + \sum_{i_2=0}^{M_2-1} \frac{t_2^{(l_2+1)\alpha_2+i_2}}{\Gamma[(l_2+1)\alpha_2+i_2+1]} \frac{\partial^{i_2}}{\partial t_2^{i_2}} \begin{pmatrix} v(0,0) \\ i(0,0) \end{pmatrix} \right) \right. \\ \left. + \frac{t_2^{l_2 \alpha_2}}{\Gamma(l_2 \alpha_2 + 1)} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix} D_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} \begin{pmatrix} v(t_1, 0) \\ i(t_1, 0) \end{pmatrix} \right\},$$

où

$$T_{-1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

$$T_{l_1 l_2} = \begin{pmatrix} T_{l_1 l_2}^1 & T_{l_1 l_2}^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & L & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & C & 0 \end{pmatrix} T_{l_1-1, l_2+1} - \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} T_{l_1-1, l_2}$$

pour $l_1 \geq 0, l_2 < 0$, où

$$T_{0,-1}^1 = \begin{pmatrix} I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad T_{l_1 l_2}^1 = (0)_{4 \times 2} \quad \text{pour } l_1 < 0 \text{ et / ou } l_2 \geq 0;$$

$$T_{0,-2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -L \\ -C & 0 \\ 0 & -L \\ -C & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{l_1 l_2}^2 = (0)_{4 \times 2} \quad \text{pour } l_1 < 0 \text{ et / ou } l_2 \geq -1,$$

$M_2 - 1 < -(i_2 + 1)\alpha_2 \leq M_2$ avec $M_2 \in \mathbb{N}$ et

$$y(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} v(t_1, t_2) \\ i(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1 Si $E = I_m$, alors, la solution $\begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix}$ du système dynamique linéaire fractionnaire standard et régulier (3.1) est

$$\begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} T_{l_1 l_2} \left[\sum_{i_1=0}^{N_1-1} \frac{t_1^{i_1+l_1\alpha_1}}{\Gamma(i_1+l_1\alpha_1+1)} D_{t_2}^{-l_2\alpha_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^{i_1} x^h}{\partial t_1^{i_1}}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=0} \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \frac{t_2^{i_2+l_2\alpha_2}}{\Gamma(i_2+l_2\alpha_2+1)} D_{t_1}^{-l_1\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^{i_2} x^v}{\partial t_2^{i_2}}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=0} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} D_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} D_{t_2}^{-l_2\alpha_2} u(t_1, t_2) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} D_{t_1}^{-l_1\alpha_1} D_{t_2}^{-(l_2+1)\alpha_2} u(t_1, t_2) \right],$$

où

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times p}, \quad B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times p}$$

et

$$T_{l_1 l_2} = \begin{cases} I_{m \times m} & \text{pour } l_1 = 0, l_2 = 0, \\ T_{10} T_{l_1-1, l_2} + T_{01} T_{l_1, l_2-1} & \text{pour } l_1 + l_2 > 0 \\ 0 & \text{pour } l_1 < 0 \text{ et/ou } l_2 < 0, \end{cases}$$

où

$$T_{10} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Quelques représentations du système dynamique d'ordre fractionnaire du type Roesser

Dans tout ce qui suit, nous considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire bidimensionnel standard du type Roesser de la forme [19]

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^{\alpha_1} x^h(t_1, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_2}^{\alpha_2} x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + B u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = C \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + D u(t_1, t_2), \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\mathbf{D}_{t_i}^{\alpha_i}$ est la dérivée partielle fractionnaire d'une fonction bidimensionnelle continue par rapport à la variable t_i (formule (1.4)), d'ordre α_i avec $N_i - 1 < \alpha_i < N_i$, $N_i \in \mathbb{N}^*$ pour $i = 1, 2$; $x^h \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = m$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times m}$ et $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Nous supposons que le système (3.5) est régulier, i.e., le faisceau (I_m, A) est régulier et que les conditions initiales sont toutes nulles.

2.1.3.1 De la représentation d'état à la fonction de transfert

Par définition, la fonction de transfert, notée G , est obtenue en utilisant la transformée de Laplace. En effet, l'application de cette dernière sur le système (3.5) donne

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} X^h(s_1, s_2) \\ s_2^{\alpha_2} X^v(s_1, s_2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^v(s_1, s_2) \end{pmatrix} + B U(s_1, s_2), \\ Y(s_1, s_2) = C \begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^v(s_1, s_2) \end{pmatrix} + D U(s_1, s_2), \end{cases}$$

lequel peut, aussi, s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^v(s_1, s_2) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} I_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix} - A \right)^{-1} B U(s_1, s_2), \\ Y(s_1, s_2) = C \begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^v(s_1, s_2) \end{pmatrix} + D U(s_1, s_2), \end{cases}$$

ainsi, la fonction de transfert associée au système (3.5) est

$$G(s_1, s_2) = \frac{Y(s_1, s_2)}{U(s_1, s_2)} = C \left(\begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} I_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix} - A \right)^{-1} B + D.$$

Exemple 3.2 *Considérons le système dynamique (3.5) avec $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ et les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.7 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la fonction de transfert est

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} + 0.9 & -0.7 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} + 0.3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1^{\alpha_1} + 0.9} + \frac{0.7}{(s_1^{\alpha_1} + 0.9)(s_2^{\alpha_2} + 0.3)} \\ \frac{1}{s_2^{\alpha_2} + 0.3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.3.2 De la fonction de transfert à la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle, notée g , est la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert G . Elle est donnée par

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2) &= \mathcal{L}_2^{-1} [G(s_1, s_2)](t_1, t_2), \\ &= C \mathcal{L}_2^{-1} \left[\left(\begin{pmatrix} s_1^{\alpha_1} I_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix} - A \right)^{-1} \right] (t_1, t_2) B + \delta(t_1, t_2), \\ &= C \mathcal{L}_2^{-1} \left[\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} T_{l_1 l_2} s_1^{-l_1 \alpha_1} s_2^{-l_2 \alpha_2} \right] (t_1, t_2) B + D \delta(t_1, t_2), \\ &= C \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} T_{l_1 l_2} \frac{t_1^{l_1 \alpha_1 - 1}}{\Gamma(l_1 \alpha_1)} \frac{t_2^{l_2 \alpha_2 - 1}}{\Gamma(l_2 \alpha_2)} \right) B + D \delta(t_1, t_2), \end{aligned}$$

où Γ et δ représentent la fonction Gamma d'Euler (1.1) et l'impulsion Delta de Dirac respectivement. $T_{l_1 l_2}$ sont les matrices de transition, elles sont données par

$$T_{l_1 l_2} = \begin{cases} I_{m \times m} & \text{pour } l_1 = 0, l_2 = 0, \\ T_{10} T_{l_1 - 1, l_2} + T_{01} T_{l_1, l_2 - 1} & \text{pour } l_1 + l_2 > 1 \\ 0 & \text{pour } l_1 < 0 \text{ et/ou } l_2 < 0, \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $T_{10} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $T_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Exemple 3.3 Considérons le système dynamique (3.5) avec $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.7 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La réponse impulsionnelle associée est

$$\begin{aligned} g(t_1, t_2) &= \mathcal{L}_2^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{s_1^{\alpha_1} + 0.9} + \frac{0.7}{(s_1^{\alpha_1} + 0.9)(s_2^{\alpha_2} + 0.3)} \\ \frac{1}{s_2^{\alpha_2} + 0.3} \end{pmatrix} \right] (t_1, t_2), \\ &= \begin{pmatrix} t_1^{\alpha_1 - 1} \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{0.9^{l_1} t_1^{l_1 \alpha_1}}{\Gamma(l_1 \alpha_1 + \alpha_1)} \left(1 + 0.7 t_2^{\alpha_2 - 1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{0.3^{l_2} t_2^{l_2 \alpha_2}}{\Gamma(l_2 \alpha_2 + \alpha_2)} \right) \\ t_2^{\alpha_2 - 1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{0.3^{l_2} t_2^{l_2 \alpha_2}}{\Gamma(l_2 \alpha_2 + \alpha_2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.3.3 De la fonction de transfert à la matrice de Schur

La matrice de Schur, notée S_G , peut être déterminée aisément à partir de la fonction de transfert. Elle s'exprime par

$$S_G(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{cc|c} \left(\begin{array}{cc} s_1^{\alpha_1} I_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} I_{n_2 \times n_2} \end{array} \right) - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right],$$

ou encore

$$S_G(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{c|c} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} I_{m \times m} - A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right].$$

Exemple 3.4 *Considérons le système dynamique (3.5) avec $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ et les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.7 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sa matrice de Schur est

$$S_G(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{cc|c} s_1^{\alpha_1} + 0.9 & -0.7 & 1 \\ 0 & s_2^{\alpha_2} + 0.3 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

2.2 Quelques notions sur la norme \mathcal{H}_2

Définition 3.4 [4, 30] *La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO), notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G(j\omega_1, j\omega_2) G^*(j\omega_1, j\omega_2)] d\omega_1 d\omega_2.$$

Définition 3.5 [4, 30] *La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G associée à une réponse impulsionnelle g , notée $\|G\|_{\mathcal{H}_2}$, est donnée par*

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [g(t_1, t_2) g^*(t_1, t_2)] dt_1 dt_2.$$

3 Norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique fractionnaire bi-dimensionnel du type Roesser

Cette section est dédiée au calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'un système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire bidimensionnel à temps continu décrit par le modèle de Roesser. Nous présenterons, dans un premier temps, le modèle en question. Ensuite, la fonction de transfert associée et en dernier la technique utilisée pour déterminer l'expression de la norme \mathcal{H}_2 .

3.1 Préliminaires

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel d'ordre fractionnaire standard à faisceau régulier à temps continu du type Roesser

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^\alpha x^h(t_1, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_2}^\alpha x^\nu(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) & -\lambda_1 \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -(\lambda_2 + \bar{\lambda}_2) & -\lambda_2 \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^\nu(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^\nu(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.6)$$

où $x^h, x^\nu \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. $\mathbf{D}_{t_1}^\alpha, \mathbf{D}_{t_2}^\alpha$ sont les dérivées partielles d'ordre fractionnaire (1.4), avec $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Les conditions initiales associées au système (3.6) sont

$$\frac{\partial^i x^h}{\partial t_1^i}(0, t_2) = 0, \quad \frac{\partial^i x^\nu}{\partial t_2^i}(t_1, 0) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (3.7)$$

Comme le système (3.6) est régulier, alors, pour certains $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ nous obtenons

$$\begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^\nu(s_1, s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^\alpha + \lambda_1 + \bar{\lambda}_1 & \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ -1 & s_1^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s_2^\alpha + \lambda_2 + \bar{\lambda}_2 & \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 & -1 & s_2^\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U(s_1, s_2), \quad (3.8)$$

$$Y(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^\nu(s_1, s_2) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

où X^h, X^ν, U et Y sont, respectivement, les transformées de Laplace bidimensionnelle des fonctions x^h, x^ν, u et y . En remplaçant l'équation (3.8) dans (3.9), il découle

$$G(s_1, s_2) = \frac{Y(s_1, s_2)}{U(s_1, s_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^\alpha + \lambda_1 + \bar{\lambda}_1 & \lambda_1 \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ -1 & s_1^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s_2^\alpha + \lambda_2 + \bar{\lambda}_2 & \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \\ 0 & 0 & -1 & s_2^\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la fonction de transfert G associée au système (3.6) devient, pour certains $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$

$$G(s_1, s_2) = \frac{k_1 k_2}{\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)},$$

ou encore,

$$G(s_1, s_2) = k_1 k_2 \left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right)^{-1} \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right)^{-1} \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right)^{-1} \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)^{-1}, \quad (3.10)$$

La matrice de Schur associée à la fonction de transfert (3.10) est de la forme

$$S_G(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{c|c} \left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) & 1 \\ \hline -k_1 k_2 & 0 \end{array} \right].$$

Comme la fonction de transfert complexe conjuguée associée au système (3.6) est

$$G^*(s_1, s_2) = \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2\right)^{-1} \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2\right)^{-1} \left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1\right)^{-1} \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1\right)^{-1} k_1 k_2,$$

alors, sa matrice de Schur est représentée par

$$S_{G^*}(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{c|c} \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2\right)^{-1} \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2\right)^{-1} \left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1\right)^{-1} \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1\right)^{-1} & k_1 k_2 \\ \hline -1 & 0 \end{array} \right].$$

Ainsi, la matrice parahermitienne devient

$$S_\phi(s_1, s_2) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2\right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2\right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1\right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1\right) & k_1 k_2 & \\ \left(s_1^\alpha + \lambda_1\right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1\right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2\right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2\right) & -1 & 0 & \\ \hline -k_1 k_2 & 0 & 0 & \end{array} \right],$$

telle que

$$\phi(s_1, s_2) = G(s_1, s_2) G^*(s_1, s_2).$$

3.2 Résultat : Calcul de la norme \mathcal{H}_2

La norme \mathcal{H}_2 du système dynamique (3.6) sous les conditions (3.7) est décrite par le théorème suivant

Théorème 3.2 *La norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert G associée à un espace d'état $\{A, B, C, \alpha\}$ de la forme (3.6) avec des conditions initiales nulles, où $k_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta_i = \arg(\lambda_i)$ de telle sorte que $|\theta_i| < \pi - \alpha \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2$, est exprimée par*

- Si $\alpha \leq \frac{1}{4}$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \infty;$$

- Si $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ et $\alpha \neq \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{k_1^2 k_2^2 |\lambda_1|^{\frac{1}{\alpha}-4} |\lambda_2|^{\frac{1}{\alpha}-4}}{16 \alpha^2 \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)} \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta_1\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta_1\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta_1\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta_1\right)} \right] \\ \times \left[\frac{\cos\left(\frac{\theta_2}{\alpha} - \alpha\pi - 2\theta_2\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \theta_2\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\theta_2}{\alpha} + \alpha\pi - 2\theta_2\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \theta_2\right)} \right];$$

- Si $\alpha = \frac{1}{3}$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = k_1^2 k_2^2 \left(\frac{\sin(2\theta_1) - 3\frac{\theta_1}{\pi}\sqrt{3}}{|\lambda_1| \sin(\theta_1) (4 \cos^2(\theta_1) - 3)} \right) \left(\frac{\sin(2\theta_2) - 3\frac{\theta_2}{\pi}\sqrt{3}}{|\lambda_2| \sin(\theta_2) (4 \cos^2(\theta_2) - 3)} \right);$$

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = k_1^2 k_2^2 \left(\frac{4\theta_1 \cot(\theta_1) - \pi}{2\pi |\lambda_1|^2 \cos(2\theta_1)} \right) \left(\frac{4\theta_2 \cot(\theta_2) - \pi}{2\pi |\lambda_2|^2 \cos(2\theta_2)} \right);$$

- Si $\alpha = 1$, alors,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{k_1^2 k_2^2}{16(|\lambda_1|^3 \cos(\theta_1))(|\lambda_2|^3 \cos(\theta_2))}.$$

Preuve. Pour démontrer le théorème 3.2, nous utiliserons la même technique que celle du théorème 2.4. Rappelons que cette technique est basée sur l'utilisation de l'espace d'état $\{A, B, C, \alpha\}$, la matrice parahermitienne S_ϕ , des transformations intégrales et des matrices de transformation, lesquelles préservent les propriétés de l'espace d'état.

En effet, pour certains $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\phi(s_1, s_2) &= M_1 S_\phi(s_1, s_2) M_2, \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2)(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2)(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1)(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1) & k_1 k_2 \\ (s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) & -1 & 0 \\ -k_1 k_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\quad \times \left[\begin{array}{cc|c} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1)(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2)(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) & \\ (s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) & p(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1)(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2)(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) + (s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1) & \\ -k_1 k_2 & -k_1 k_2 p & \end{array} \right] \\ &\quad \left[\begin{array}{c|c} k_1 k_2 & \\ \hline (s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2)p - 1 & p k_1 k_2 \\ \hline 0 & \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Les matrices M_1 et M_2 dépendant du paramètre p solution de l'équation

$$p(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1)(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2)(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) + (s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2)p - 1 = 0,$$

ainsi,

$$p = \frac{1}{2 \operatorname{Re} \left[(s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) \right]},$$

ce qui permet de trouver

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\phi(s_1, s_2) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1)(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2)(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) & \\ (s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) & 0 & \\ -k_1 k_2 & -\frac{k_1 k_2}{2 \operatorname{Re} \left[(s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) \right]} & \end{array} \right] \\ &\quad \left[\begin{array}{c|c} k_1 k_2 & \\ \hline \frac{k_1 k_2}{2 \operatorname{Re} \left[(s_1^\alpha + \lambda_1)(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1)(s_2^\alpha + \lambda_2)(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2) \right]} & \\ \hline 0 & \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Le complément de Schur associée à la matrice parahermitienne (3.11) devient

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(s_1, s_2) &= \begin{pmatrix} -k_1 k_2 & -\frac{k_1 k_2}{2 \operatorname{Re} \left[\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) \right]} \\ 0 & \left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} \left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) & 0 \\ k_1 k_2 & k_1 k_2 \end{pmatrix}, \\ &\times \begin{pmatrix} k_1 k_2 \\ 2 \operatorname{Re} \left[\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) \right] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(s_1, s_2) &= \frac{k_1^2 k_2^2}{2 \operatorname{Re} \left[\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) \right]} \left[\frac{1}{\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)} \right], \\ &= \frac{k_1^2}{\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(\bar{s}_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right)} \frac{k_2^2}{\left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(\bar{s}_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)}, \\ &= \tilde{\Phi}_1(s_1) \tilde{\Phi}_2(s_2), \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que le produit de deux compléments de Schur associés à deux fonctions de transfert de second type.

Ainsi, d'après la définition 3.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1, j\omega_2) G^*(j\omega_1, j\omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(j\omega_1) G_1^*(j\omega_1) d\omega_1 \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_2(j\omega_2) G_2^*(j\omega_2) d\omega_2 \right), \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\omega}_1) \tilde{\omega}_1^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}_1 \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}_2(\tilde{\omega}_2) \tilde{\omega}_2^{\frac{1}{\alpha}-1} d\tilde{\omega}_2 \right), \\ &= \|G_1\|_{\mathcal{H}_2}^2 \|G_2\|_{\mathcal{H}_2}^2, \end{aligned}$$

où

$$G_1(s_1) = \frac{k_1}{\left(s_1^\alpha + \lambda_1 \right) \left(s_1^\alpha + \bar{\lambda}_1 \right)},$$

et

$$G_2(s_2) = \frac{k_2}{\left(s_2^\alpha + \lambda_2 \right) \left(s_2^\alpha + \bar{\lambda}_2 \right)}.$$

En dernier, par l'utilisation du théorème 2.4 et les résultats présentés en [14], nous obtenons les résultats du théorème 3.2. ■

4 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet de l'extension de la technique présentée dans le chapitre précédent pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une certaine classe de système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire bidimensionnel. La validation numérique des résultats théoriques obtenus sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Validation numérique

1 Introduction

Dans ce dernier chapitre nous validerons les résultats théoriques obtenus précédemment par l'utilisation des exemples académiques.

2 Système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel

La validation numérique de l'approche proposée pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel associé à une fonction de transfert du second type est présentée et comparée avec la méthode établit par *Malti et al.* [24].

Pour $\frac{1}{4} < \alpha < 2$, prenons la fonction de transfert du second type suivante

$$G(s) = \frac{1}{\left(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}}\right)\left(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}}\right)}. \quad (4.1)$$

Le système dynamique associé à la fonction de transfert du second type (4.1) est

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\alpha x(t) &= \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Les conditions initiales associées au système (4.2) sont

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Il est claire que, pour certain $s \in \mathbb{C}$, le système dynamique (4.2) est régulier, supposons, de plus, qu'il vérifie les conditions suivantes

- $s^{\alpha-i-1} x^{(i)}(0)$ est nulle pour tout $s \in [0, +\infty]$; $\frac{1}{4} < \alpha < 2$ et $i = 0, 1$;
 - $u(t)$ existe, $u^{(i)}(0)$ est nulle, $\forall i \geq 0$;
- ainsi, sa trajectoire est donnée par

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau.$$

En outre, le système dynamique d'ordre fractionnaire (4.2) vérifie les conditions du théorème 2.2 et du théorème 2.4. Ainsi, sa norme \mathcal{H}_2 est

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \begin{cases} \frac{2^{\frac{1}{\alpha}-4}}{4\alpha \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12\alpha} - \alpha\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12\alpha} + \alpha\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} \right] & \text{si } \frac{1}{4} < \alpha < 2 \text{ et} \\ & \alpha \neq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}, \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{32} & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{36} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{8} & \text{si } \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Par l'utilisation d'un code MATLAB, nous présentons les valeurs de la norme \mathcal{H}_2 et nous comparons notre approche avec celle de *Malti et al.* [24] pour les différentes valeurs de α où $\frac{1}{4} < \alpha < 2$. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.1.

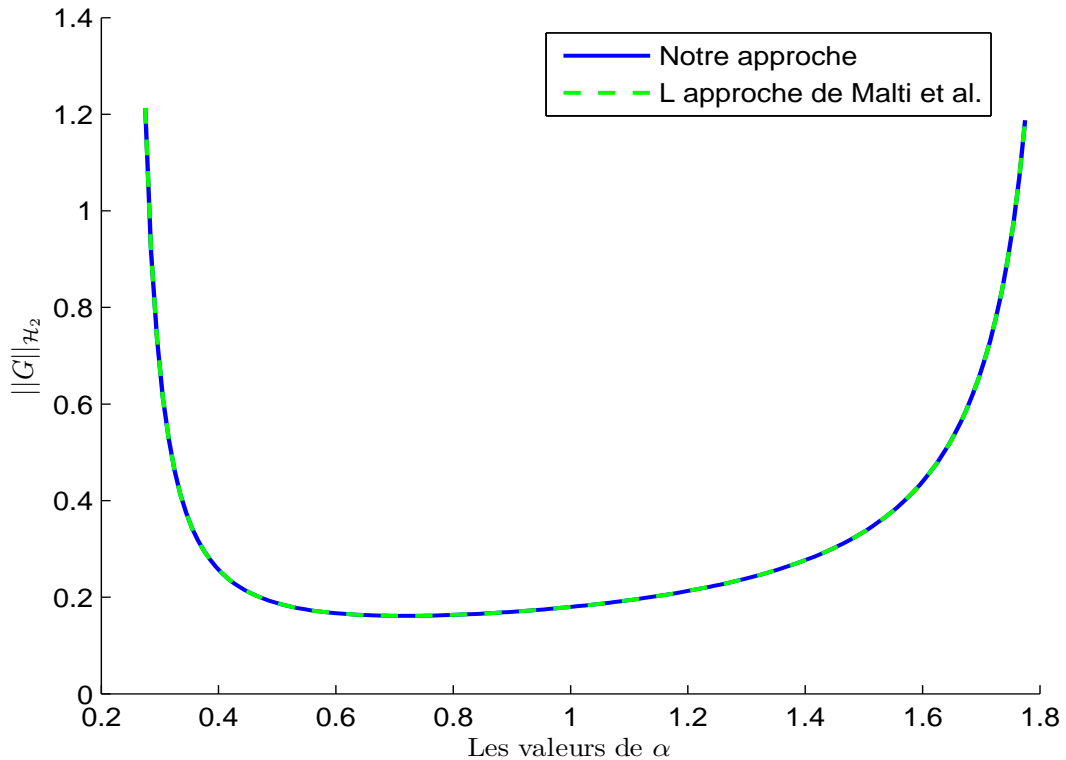


FIGURE 4.1 – Comparaison des valeurs de la norme \mathcal{H}_2 entre notre méthode et celle de *Malti et al.* [24] pour $G(s) = \frac{1}{(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})}$ avec $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Les deux courbes coïncident, ce qui confirme que les deux approches sont identiques et que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux dans [24].

D'après le théorème 2.2, le système dynamique (4.2) est instable pour $\alpha \notin \left] \frac{1}{4}, 2 \right[$, ceci est prouvé par les figures présentées ci-dessous

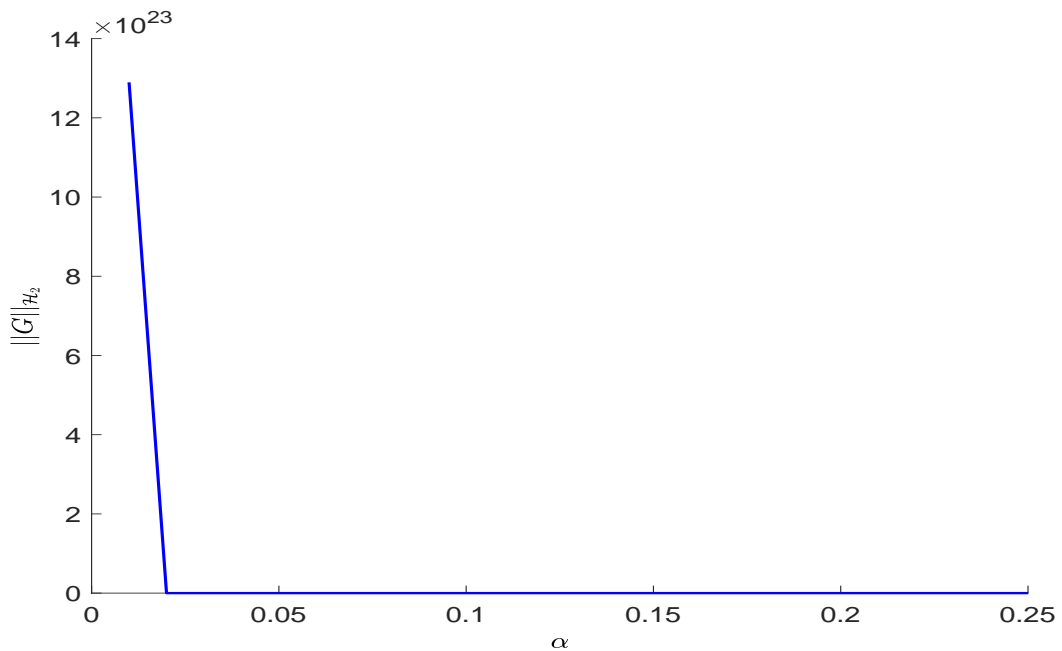


FIGURE 4.2 – Valeurs de la norme \mathcal{H}_2 pour $G(s) = \frac{1}{(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$: Instabilité du système dynamique d'ordre fractionnaire.

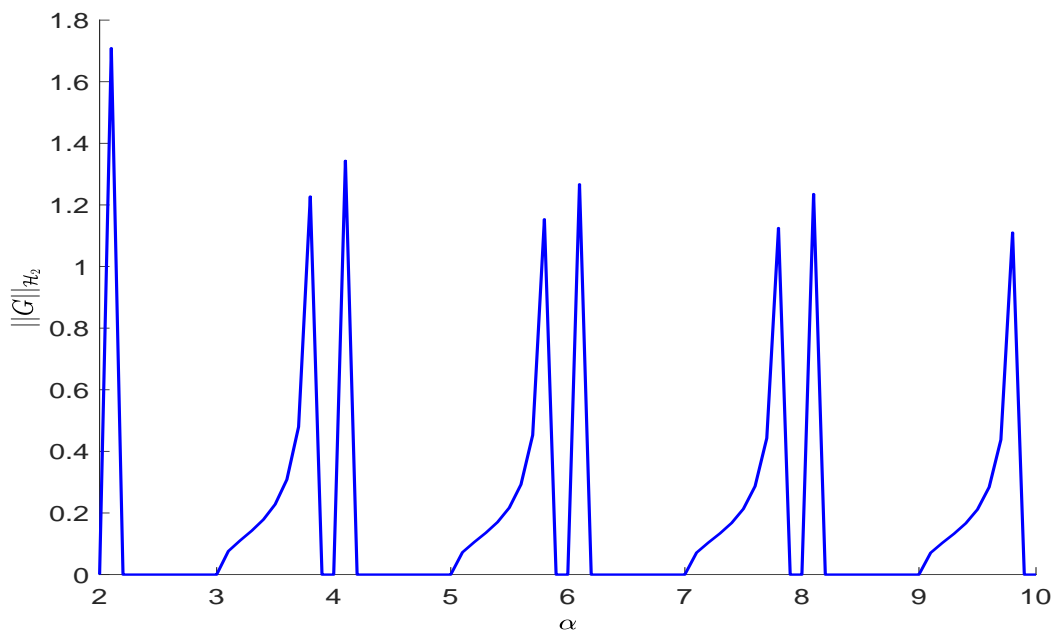


FIGURE 4.3 – Valeurs de la norme \mathcal{H}_2 pour $G(s) = \frac{1}{(s^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})}$ avec $\alpha \geq 2$: Instabilité du système dynamique d'ordre fractionnaire.

3 Système dynamique d'ordre fractionnaire bidimensionnel

Dans cette section, nous présenterons la validation de l'approche du calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique bidimensionnel d'ordre fractionnaire du type Roesser via un exemple numérique.

Pour cela, considérons la fonction de transfert

$$G(s_1, s_2) = \frac{2}{\left(s_1^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}}\right)\left(s_1^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}}\right)\left(s_2^\alpha + 4e^{j\frac{\pi}{14}}\right)\left(s_2^\alpha + 4e^{-j\frac{\pi}{14}}\right)}, \quad (4.3)$$

pour certains $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ et $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Le système dynamique associé à la fonction de transfert (4.3) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^\alpha x_h(t_1, t_2) \\ \mathbf{D}_{t_1}^\alpha x_v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = (0 \ 0 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} x_h(t_1, t_2) \\ x_v(t_1, t_2) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

avec des conditions initiales nulles.

Le système dynamique (4.4) est standard à faisceau régulier, ainsi, par l'utilisation du corollaire 3.1, sa trajectoire est

$$\begin{pmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \mathbf{T}_{l_1 l_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}_{t_1}^{-(l_1+1)\alpha_1} \mathbf{D}_{t_2}^{-l_2\alpha_2} u(t_1, t_2),$$

où

$$\mathbf{T}_{l_1 l_2} = \begin{cases} \mathbf{I}_{m \times m} & \text{pour } l_1 = 0, l_2 = 0, \\ \mathbf{T}_{10} \mathbf{T}_{l_1-1, l_2} + \mathbf{T}_{01} \mathbf{T}_{l_1, l_2-1} & \text{pour } l_1 + l_2 > 0 \\ 0 & \text{pour } l_1 < 0 \text{ et/ou } l_2 < 0, \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{pmatrix} -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En outre, le système dynamique d'ordre fractionnaire (4.4) vérifie les conditions du théorème 3.2. Ainsi, sa norme \mathcal{H}_2 est

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \begin{cases} \frac{1}{4096(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(\frac{\pi}{14})} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{12\alpha}-\alpha\pi-\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{12})} - \frac{\cos(\frac{\pi}{12\alpha}+\alpha\pi-\frac{\pi}{6})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{12})} \right] & \text{si } \frac{1}{4} < \alpha < 2 \text{ et} \\ \times \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{14\alpha}-\alpha\pi-\frac{\pi}{7})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{14})} - \frac{\cos(\frac{\pi}{14\alpha}+\alpha\pi-\frac{\pi}{7})}{\sin(\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{14})} \right] & \alpha \neq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}, \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2048} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{14}\right) & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{(3-\sqrt{3})(2\cot(\frac{\pi}{14})-7)}{2016\cos(\frac{\pi}{7})} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}(14\sin(\frac{\pi}{7})-3\sqrt{3})}{112\sin(\frac{\pi}{14})(4\cos^2(\frac{\pi}{14})-3)} & \text{si } \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Par l'utilisation d'un code MATLAB, nous obtenons les différentes valeurs de la norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert G. Le résultat obtenu est présenté dans la figure 4.4.

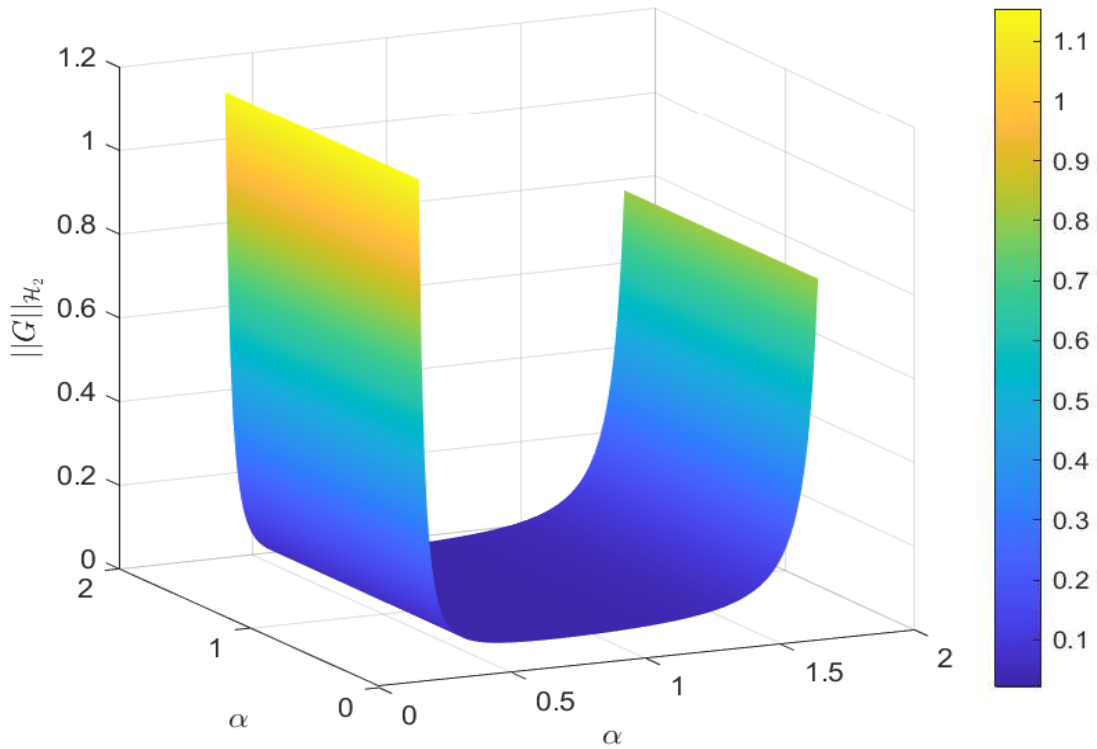


FIGURE 4.4 - La norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert $G(s_1, s_2) = \frac{1}{(s_1^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s_1^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})(s_2^\alpha + 4e^{j\frac{\pi}{14}})(s_2^\alpha + 4e^{-j\frac{\pi}{14}})}$ pour $\frac{1}{4} < \alpha < 2$.

Il est clair que pour $\frac{1}{4} < \alpha < 2$, les valeurs de la norme \mathcal{H}_2 sont finies.

D'après le théorème 2.2, le système dynamique (4.4) est instable pour $\alpha \notin \left] \frac{1}{4}, 2 \right[$, ceci est prouvé par les figures présentées ci-dessous

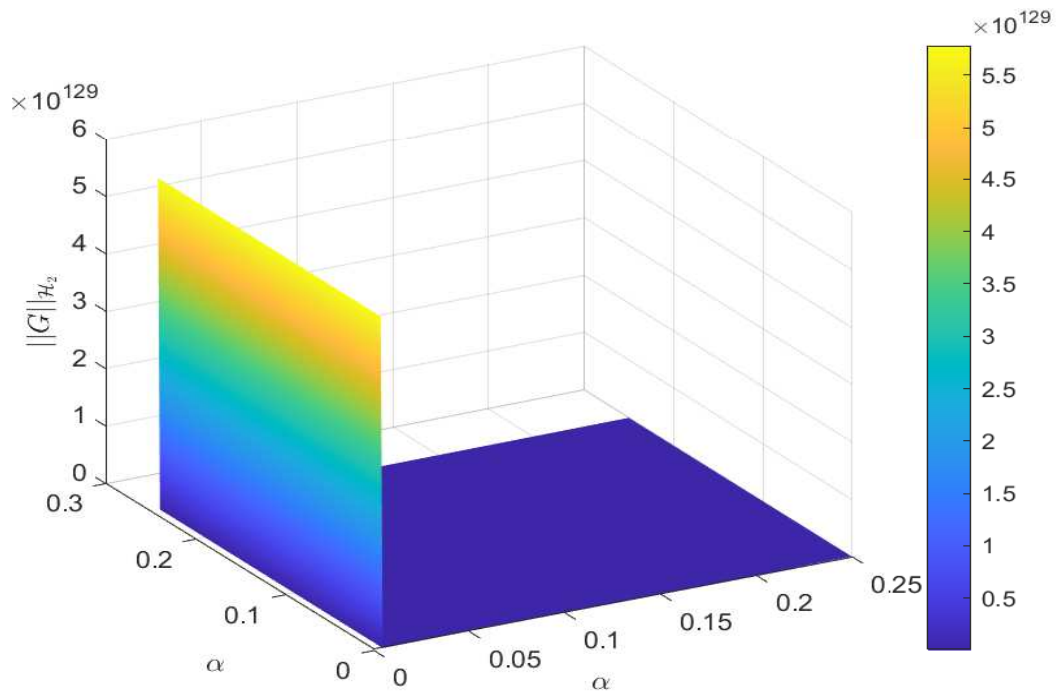


FIGURE 4.5 – Valeurs de la norme \mathcal{H}_2 pour $G(s_1, s_2) = \frac{2}{(s_1^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s_1^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})(s_2^\alpha + 4e^{j\frac{\pi}{14}})(s_2^\alpha + 4e^{-j\frac{\pi}{14}})}$ avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$: Instabilité du système dynamique d'ordre fractionnaire.

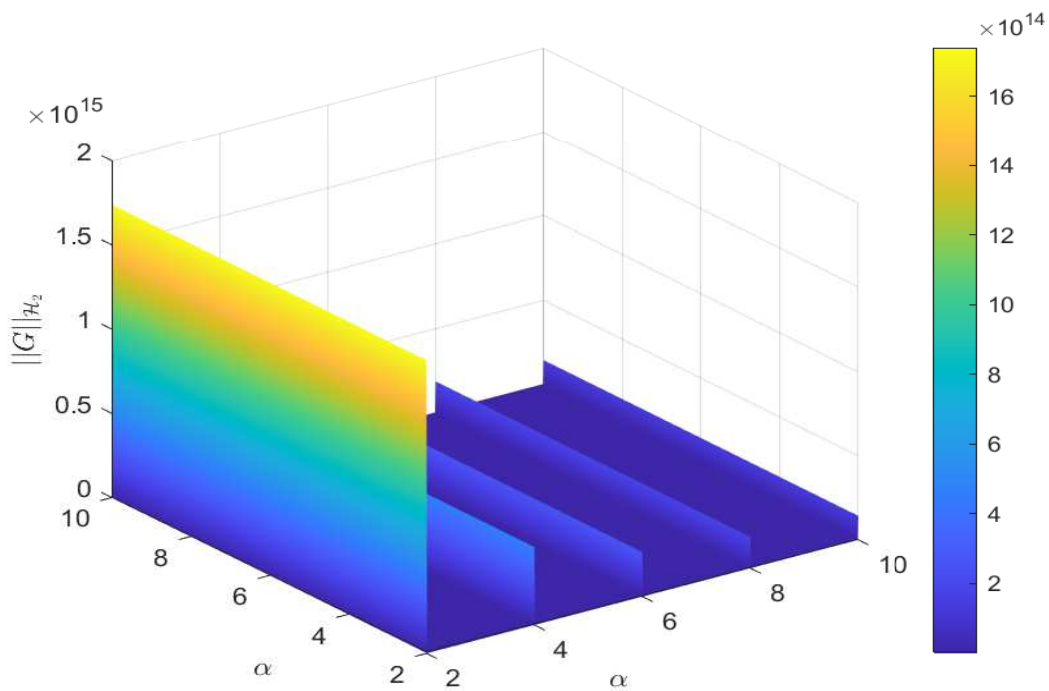


FIGURE 4.6 – Valeurs de la norme \mathcal{H}_2 pour $G(s_1, s_2) = \frac{2}{(s_1^\alpha + 2e^{j\frac{\pi}{12}})(s_1^\alpha + 2e^{-j\frac{\pi}{12}})(s_2^\alpha + 4e^{j\frac{\pi}{14}})(s_2^\alpha + 4e^{-j\frac{\pi}{14}})}$ avec $\alpha \geq 2$: Instabilité du système dynamique d'ordre fractionnaire.

4 Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la validation numérique illustrant les performances de la technique proposée où nous avons calculé la norme \mathcal{H}_2 pour un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel associé à une fonction de transfert du second type et pour une certaine classe de système dynamique d'ordre fractionnaire bi-dimensionnel pour différentes valeurs de α .

Conclusion

Nous nous sommes intéressés tout au long de ce travail au calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire pour des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels et bidimensionnels, en utilisant une nouvelle approche.

L'idée principale de l'approche proposée est l'utilisation de la représentation en espace d'état, de la matrice de transfert parahermitienne, des matrices de transformation et des transformations intégrales.

Tous les outils mathématiques nécessaires pour établir nos résultats ont été présentés comme les dérivées d'ordre fractionnaire, les transformations intégrales et les différentes représentations d'un système dynamique en une et deux dimensions.

Ensuite, nous avons présenté les étapes de la démarche du calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour une fonction de transfert d'ordre fractionnaire du second type, puis, nous avons essayé d'étendre l'approche proposée pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 de tous types de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels. Il est à noter que l'utilisation de la réponse impulsionnelle associée à un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel a été utilisée pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 . Cependant, dans les deux cas, la difficulté était de trouver l'expression de l'équation de Lyapunov fractionnaire.

D'autre part, l'extension de la méthode proposée pour le calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'un système dynamique d'ordre fractionnaire bidimensionnel a été présentée.

En dernier, la validation numérique des résultats obtenus a été testée via des exemples académiques où un code MATLAB a été généré.

Comme perspective, nous envisageons d'utiliser et/ou de développer des outils du calcul fractionnaire permettant de déterminer l'expression de l'équation de Lyapunov fractionnaire et de voir s'il y aura possibilité d'utiliser d'autres matrices de transformation afin de trouver l'expression de la norme \mathcal{H}_2 d'un système dynamique d'ordre fractionnaire unidimensionnel et bidimensionnel où les matrices $\{A, B, C\}$ sont de taille quelconque.

Bibliographie

- [1] **Bouagada, D., and Van Dooren, P.** (2012), *State space solution of implicit fractional continuous time systems*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **15**, **3**, 356 – 361. <https://doi.org/10.2478/s13540-012-0026-z> 17, 18, 19
- [2] **Butera, S., and Di Paola, M.** (2014), *Fractional differential equations solved by using mellin transform*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **19**, **7**, 2220 – 2227. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.11.022> 18
- [3] **Caputo, M.** (1969), *Elasticità e Dissipazione*, Zani-chelli, Bologna. 6
- [4] **Chesi, G., and Middleton, R. H.** (2015), *\mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 norms of 2-D mixed continuous-discrete-time systems via rationally-dependent complex lyapunov functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, **60**, **10**, 2614 – 2625. <https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2404491> 43
- [5] **Cohen, H.** (2007), *Number Theory. Volume II : Analytic and modern tools*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-49894-2> 9, 15
- [6] **Debnath, L.** (2016), *The double laplace transforms and their properties with applications to functional, integral and partial differential equations*, Int. J. Appl. Comput. Math 2, 223 – 241. <https://doi.org/10.1007/s40819-015-0057-3> 11, 12, 13
- [7] **Debnath, L., and Bhatta, D.** (2007), *Integral transforms and their applications*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton. 5, 8, 9
- [8] **Feulvarch, É., Roux, J. C., and Bergheau, J. M.** (2009), *Modélisation d'un phénomène d'oxydation interne par la méthode X-FEM*, 9eme Colloque national en calcul des structures. 1
- [9] **Gantmacher, F. R.** (2000), *The theory of matrices*, American Mathematical Society, Chelsea Publishing, Rhode Island. 37
- [10] **Genin, Y., Hachez, Y., Nesterov, Yu., Stefan, R., Van Dooren, P., and Xu, S.** (2002), *Positivity and linear matrix inequalities*, European Journal of Control, **8**, 275 – 298. <https://doi.org/10.3166/ejc.8.275-298> 27, 28, 35
- [11] **Gómez-Aguilar, J.F., Razo-Hernández, R., and Granados-Lieberman, D.** (2014), *A physical interpretation of fractional calculus in observables terms : Analysis of the fractional time constant and the transitory response*, Revista Mexicana de Fisica, **60**, **1**, 32 – 38. 1
- [12] **Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M.** (2007), *Table of integrals, series, and products*, Seventh Edition, Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-22516-5> 8, 9, 10, 14, 15
- [13] **Hilfer, R.** (2000), *Applications of fractional calculus in physics*, World scientific. 1

- [14] **Imran, M., Ghafoor, A., and Imran, M.** (2021), *Transformation of 2D Roesser into Causal Recursive Separable Denominator Model and Decomposition into 1D Systems*, *Circuits Syst Signal Process*, **40**, 3561 – 3572. <https://doi.org/10.1007/s00034-020-01642-0> 47
- [15] **Jackreece, P.C., Godspower, C.A., and Ugorji, H.C.** (2018), *Controllability of fractional-order dynamical system with time varying-delays*, *General Letters in Mathematics*, **5**, 3, 148 – 156. <https://doi.org/10.31559/glm2018.5.3.4> 35
- [16] **Jiao, Z., and Zhong, Y.** (2012), *Robust stability for fractional-order systems with structured and unstructured uncertainties*, *Computers and Mathematics with Applications*, **64**, 3258 – 3266. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.03.011> 24
- [17] **Kaczorek, T.** (2006), *Polynomial and rational matrices : Applications in dynamical systems theory*, *Communications and Control Engineering*, Springer London. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-605-6> 23
- [18] **Kaczorek, T.** (2011), *Selected problems of fractional systems theory*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20502-6> 18, 19
- [19] **Kaczorek, T., and Rogowski, K.** (2015), *Fractional linear systems and electrical circuits*, *Studies in Systems, Decision and Control* 13, Springer International Publishing, Switzerland. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11361-6> 1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 36, 37, 38, 39, 41
- [20] **Kaczorek, T., and Sajewski, L.** (2014), *The realization problem for positive and fractional systems*, *Studies in Systems, Decision and Control* 1, Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-04834-5> 17
- [21] **Kaiserli, Z., and Bouagada, D.** (2021), *Application of the sumudu transform to solve regular fractional continuous-time linear systems*, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **45**, 2, 267 – 274. 18
- [22] **Lewis, F.L., and Mertzios, B.G.** (1992), *On the analysis of two-dimensional discrete singular systems*, *Circuits Systems and Signal Process*, **11**, 3, 399 – 419. <https://doi.org/10.1007/BF01190984> 37
- [23] **Machado, J. T., Kiryakova, V., and Mainardi, F.** (2011), *Recent history of fractional calculus*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 3, 1140 – 1153. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.05.027> 1
- [24] **Malti, R., Aoun, M., Levron, F., and Oustaloup, A.** (2011), *Analytical computation of the \mathcal{H}_2 -norm of fractional commensurate transfer functions*, *Elsevier*, **47**, 11, 2425 – 2432. [10.1016/j.automatica.2011.08.021](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.021) 3, 23, 26, 49, 50
- [25] **Petráš, I.** (2019), *Handbook of fractional calculus with applications : Application in control*, **6**, De Gruyter, Berlin. 1, 35
- [26] **Podlubny, I.** (1999), *Fractional differential equations*, Academic press, San Diego. 7
- [27] **Podlubny, I.** (2001), *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, arXiv preprint math/0110241. 1
- [28] **Samuel, S., and Gill, V.** (2018), *Natural transform method to solve nonhomogeneous fractional ordinary differential equations*, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, **4**, 1, 49 – 57. <http://dx.doi.org/10.18576/pfda/040106> 18
- [29] **Valerio, D., and Da Costa, J.S.** (2013), *An introduction to fractional control*, The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom. <https://doi.org/10.1049/PBCE091E> 19, 26

- [30] **Yang, R., Xie, L., and Zhang, C.** (2006), *\mathcal{H}_2 and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of two-dimensional systems in Roesser model*, Automatica, **42**, 1507 – 1514. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.04.002> 43
- [31] **Zhang, F.** (2005), *The Schur complement and its applications*, Numerical Methods and Algorithms, Springer-Verlag US. <https://doi.org/10.1007/b105056> 19, 25

calcul de la norme \mathcal{H}_2 d'une fonction de transfert fractionnaire du second type

Résumé : L'objectif principal de ce manuscrit est de calculer l'énergie de la réponse impulsionnelle, dite aussi norme \mathcal{H}_2 , d'une fonction de transfert fractionnaire unidimensionnel du second type par une nouvelle méthode. L'idée clé de la méthode proposée est l'utilisation de la représentation en espace d'état, des outils de la théorie des matrices et des transformations intégrales. Puis, nous avons tenté de généraliser le calcul de la norme \mathcal{H}_2 pour tout type de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire unidimensionnels. La difficulté réside dans l'expression de l'équation de Lyapunov fractionnaire. Ensuite, nous avons calculé la norme \mathcal{H}_2 d'une certaine classe de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire bidimensionnels, dite de Roesser, où la fonction de transfert bidimensionnel est le produit de deux fonctions de transfert unidimensionnelles du second type. En dernier, l'efficacité et la performance de l'approche proposée ont été prouvées par des exemples académiques en moyennant des codes MATLAB.

Mots-Clés. Complément de Schur, Dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Dérivée partielle fractionnaire, Énergie de la réponse impulsionnelle, Norme \mathcal{H}_2 , Fonction de transfert, Matrices de transformation, Représentation en espace d'état d'un modèle fractionnaire linéaire unidimensionnel/bidimensionnel.

Computation of \mathcal{H}_2 -norm of fractional transfer function of the second kind

Abstract : The main objective of this manuscript is to compute the impulse response energy, known as the \mathcal{H}_2 -norm, of a one-dimensional fractional transfer function of the second type using a new approach. The key idea of the proposed method is the use of state-space representation, matrix theory tools and integral transformations. We then attempted to generalise the computation of the \mathcal{H}_2 norm for all types of one-dimensional fractional-order dynamical systems. The difficulty lies in expressing the fractional Lyapunov equation. Thereafter, we have calculated the \mathcal{H}_2 -norm of a certain class of two-dimensional fractional-order dynamical systems, known as Roesser model, where the two-dimensional transfer function is the product of two one-dimensional transfer functions of the second type. Finally, the efficiency and performance of the proposed approach have been proven by academic examples using a MATLAB code.

Key Words. Schur complement, Caputo fractional derivative, Fractional partial derivative, Impulse response energy, \mathcal{H}_2 -norm, Transfer function, Matrix transformation, state-space representation of a one-dimensional/ two-dimensional linear fractional model.

