

	الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
	People's Democratic Republic of Algeria	
	وزارة التعليم العالي و البحث العلمي	
	Ministry of Higher Education and Scientific Research	
	جامعة عبد الحميد بن باديس – مستغانم	
	Abdel Hamid Ibn Badis University – Mostaganem	
	كلية العلوم و التكنولوجيا	
	Faculty of Sciences and Technology	
	قسم الهندسة الميكانيكية	
	Department of Mechanical Engineering	

N° d'ordre : M2...../GM/2024

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

**Étude comparative des durées de vie des structures soumises à des
chargements cycliques non proportionnels**

Présenté par

HAMEL FEKHER EDDINE

Soutenu le 24/06/ 2024 devant le jury composé de :

Président :	M. GUECHICHI Hocine	Professeur	Université de Mostaganem UMAB
Examineurs :	M. BENKABOUCHE Salah-Eddine	Maitre de Conférences "B"	Université de Mostaganem UMAB
Encadrant :	M.BENKHETTAB Mohamed	Maitre de Conférences "B"	Université de Mostaganem UMAB

Année universitaire 2023 / 2024

Dédicaces

اهدي تحياتي إلى أعمالي الشاقة التي جعلت مني إنسان أقوى وإلى أحلامي وطموحاتي التي كانت تحفزني إلى بدل قصارى جهدي لتحقيقها وإلى أمي ركيزتي في دنيا التي ساندتني عندما كنت في أضعف حالي بكلماتها الطيبة التي زرعت بها البهجة في قلبي وعطرت نفسي بحنينها ودعائها الخالص، وإلى اب غير مبال بخسائره في سبيل نجاحي والذي كان لي عوناً على تحقيق أهدافي وطموحاتي فتراه يفرح بإنجازاتي ويقف معي في صدماتي فيا رب بارك له في عمره وهون عليه ولا تهن عليه وإلى كل من انتقدي وجعلني أحسن نسخة من نفسي وبدون أن أنسى إخوتي وأصدقائي الذين كانوا بمثابة الأهل وتقاسمت معهم مشقة الدرب ولكل من كان سبباً في زرع البسمة في قلبي وفوق كل من ذكرتهم احمد وأشكر من سخر لي كل الأسباب فلولاها لا تتم النعم فاللهم لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضى.

Remerciements

Au nom de Dieu, le Clément, le Miséricordieux,

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Dieu Tout-Puissant pour m'avoir accordé la force et la persévérance nécessaires pour mener à bien cet mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadrant, M. BENKHETTAB MOHAMED, pour son encadrement, ses précieux conseils et son soutien constant tout au long de ce travail. Sa disponibilité et ses encouragements ont été d'une grande aide et je lui en suis profondément reconnaissant.

Je remercie également l'ensemble des professeurs et du personnel d'Université de Mostaganem UMAB pour leur enseignement de qualité et leur soutien tout au long de mon parcours académique.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues et amis, dont la camaraderie et l'entraide ont rendu cette aventure académique encore plus enrichissante.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance infinie à ma famille, en particulier à mes parents, pour leur amour, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements constants. Leur foi en moi a été une source d'inspiration et de motivation inépuisable.

Enfin, merci à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse. Que Dieu vous bénisse tous.

Merci infiniment.

HAMEL FEKHER EDDINE

Liste des abréviations

E	La fonction de fatigue du critère
N	Durée de vie
f_{-1}	Limite d'endurance à la flexion alternée symétrique
σ_{-1}	Limite d'endurance à la traction alternée symétrique
τ_{-1}	Limite d'endurance à la torsion alternée symétrique
f_0	Limite d'endurance à flexion alterné symétrique
$\sigma_{ij}(t)$	Tenseur de chargement multiaxial
σ_0	Limite d'endurance à traction répété
E_{HP}	Fonction de fatigue de critère de Hohenemser & Prager
τ_a	Amplitude de la contrainte de cisaillement
σ_m	Contrainte monotone
R_m	Résistance maximale à la traction monotone
E_D	Fonction de fatigue de critère de Davies
f_a	Amplitude de contrainte de flexion
τ_m	Contrainte moyenne de cisaillement
τ_u	Contrainte ultime de cisaillement
E_C	Fonction de fatigue de critère de crossland
ε_a	Amplitude de la racine carrée du deuxième invariant de déviateur de contrainte
a,b	Paramètre de fatigue à N cycle

P_{max}	Pression hydrostatique maximal
$\sigma_{eq a}$	Contrainte alternée équivalente
E_S	Fonction de fatigue Critère de sines
ε_m	Contrainte moyenne de $\sqrt{J_2}$
E_{FL}	Fonction de fatigue Critère de Froustey & Lasserre
w_a	Énergie de déformation
W_m	Énergie de déformation moyenne
α, β, γ	Des constantes
W_{ij}^p	L'énergie de déformation plastique
σ, ε	Contrainte et déformation
ε_{ij}^p	Déformation plastique.
N_f^β	Nombre de cycles à rupture
E_h	Indicateur de dommage par plan
P_h	Pression hydrostatique
E_{DV1}	Fonction de fatigue Critère de Dang Van I
E_{DVII}	Fonction de fatigue Critère de Dang Van II
$S_{Ia}, S_{IIa}, S_{IIIa}$	Les valeurs principales du tenseur déviateur alterné
E_{MDI}	Fonction de fatigue Critère de Mc Diarmid I
σ_{hha}	Amplitude de la contrainte normale

A, B	Des constantes
E_{MDII}	Fonction de fatigue Critère de Mc Diarmid II
σ_{hm}	Contrainte normale moyenne.
R_m	Résistance maximale à la traction.
S-N	Stress - Number of cycles
N_R	Le nombre de cycles à la rupture
σ_a	L'amplitude de contrainte
σ_D	Limite d'endurance
Ta	L'amplitude de la cession généralisée
$\sigma_{H,m}$	Valeur moyenne de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,a}$	Amplitude de la pression hydrostatique macroscopique
$\sigma_{H,max}$	Pression hydrostatique maximale
φ et θ	Les coordonnées sphériques
α_∞ et γ_∞	Paramètres liés au matériau
N	La normale
l et r	Les vecteurs du repère local
M	Vecteur unitaire de la droite appartenant au plan
σ_y	Limite d'élasticité
R_m	Résistance à la rupture
E	Module d'élasticité longitudinal
G	Module d'élasticité Transversal

ν	Coefficient de Poisson
A	Allongement

Résumé

Résumé

Dans cette étude, nous avons comparé la durée de vie résultant du tenseur des contraintes pour un point matériel d'une structure soumis à des chargements non proportionnels, ce qui nous oblige à utiliser le critère du plan critique. Le critère du plan critique est l'outil adapté dans ce cas, car son rôle est de transformer la contrainte multiaxiale en contrainte uniaxiale, ce qui facilite le calcul de la durée de vie tout en la comparant à la courbe de fatigue appropriée. Le but de cette étude était de calculer la durée de vie en utilisant deux critères du plan critique, à savoir Papadopoulos et Findley. Pour ce faire, l'étude s'est déroulée en quatre étapes, la première étape consistait à appliquer la méthodologie à chaque critère de conditions et d'équations, la deuxième consistait à tester la convergence afin de déterminer le plan critique, la troisième consistait à tracer des trajets de chargement, et la quatrième à comparer la durée de vie résultant de chaque critère et à étudier l'effet de certaines grandeurs physiques, à savoir les impulsions et le déphasage.

Mots clés : Chargements non proportionnels, tenseur de contrainte, plan critique, durée de vie

الملخص:

في هذه الدراسة، قمنا بمقارنة العمر الناتج عن موتر الإجهاد لنقطة مادية من هيكل يتعرض للتحميل غير متناسب، الأمر الذي يتطلب منا استخدام معيار المستوى الحرج. معيار المستوى الحرج هو الأداة المناسبة في هذه الحالة، لأن دوره هو تحويل الإجهاد متعدد المحاور إلى إجهاد أحادي المحور، مما يسهل حساب عمر الخدمة مع مقارنته بمنحنى الكلال المناسب. كان الهدف من هذه الدراسة هو حساب العمر باستخدام اثنين من معايير المستوى الحرج، وهما بابادوبولوس وفيندلي. وللقيام بذلك، تمت الدراسة على أربع مراحل، المرحلة الأولى تتمثل في تطبيق المنهجية على كل معيار من الشروط والمعادلات، والثانية تتمثل في اختبار التقارب لتحديد المستوى الحرج، والثالثة تتمثل في تتبع مسارات التحميل، والرابع مقارنة العمر الناتج عن كل معيار ودراسة تأثير بعض الكميات الفيزيائية وهي النبضات وتحويل الطور.

الكلمات المفتاحية: الأحمال غير التناسبية، موتر الإجهاد، المستوى الحرج، عمر الخدمة

Abstract

In this study, we compared the lifespan resulting from the stress tensor for a material point of a structure subjected to non-proportional loading, which requires us to use the critical plane criterion. The critical plane criterion is the appropriate tool in this case, because its role is to transform the multiaxial stress into uniaxial stress, which facilitates the calculation of the service life while comparing it to the appropriate fatigue curve. The aim of this study was to calculate lifespan using two critical plane criteria, namely Papadopoulos and Findley. To do this, the study took place in four stages, the first stage consisted of applying the methodology to each criterion of conditions and equations, the second consisted of testing convergence in order to determine the critical plane, the third consisted to trace loading paths, and the fourth to compare the lifespan resulting from each criterion and to study the effect of certain physical quantities, namely pulses and phase shift.

Keywords: Non-proportional loadings, stress tensor, critical plane, service life

Table des matières

Sommaire

Titre	Page
Dédicaces	
Remerciements	
Liste des abréviations	
Résumé	

Introduction générale

Chapitre I : Généralités sur la fatigue et les Critères multiaxiaux

I.1 Introduction	5
I.2 Notion sur les chargements cycliques	6
I.2.1 Nature du chargement	8
I.2.2 Les différents états de contrainte	8
I.3 Définition de la fatigue	10
I.3.1 Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue	11
Domaine de la fatigue Olygocyclique	12
Domaine de la fatigue à endurance limitée	13
Domaine de la fatigue à endurance illimitée	13
Limite de fatigue	14
I.3.3 Formalisme des critères de fatigue multiaxiaux	15
I.3.4 Classification des critères de fatigue multiaxiaux	16
Les critères empiriques	16
Critère de Gough et Pollard	16
Critère de Hohenemser et Prager	16
Le critère de Davies	17
Critère de Nishihara et Kawamoto	17

Critère de Lee1	17
Critère de Lee2	18
Critères d'approche globale	18
Critère de Marin (1956)	18
Critère de Marin (1956)	18
Critère de Sines (1955)	19
Critère de Crossland (1956)	19
Critère de Kakunu-Kawada (1979)	19
Critère de Deitman et Isseler (1974)	20
Critère de Kinasushvili (1976)	20
Critère de Papadopoulos (1984)	21
Les approches énergétiques	22
Critères de type plan critique	22
Critère de stulen et Cummings (1954)	25
Critère de Findley (1957)	25
Critère de Dang-Van 1 (1973)	26
	27
Critère de Matake (1977)	
	27
Critère de Dang-Van 2 (1989)	
	27
Critère de Mc Dirmid 1 (1973)	
	28
Critère de Mc Dirmid 2 (1974)	
	28
Critère de Papuga	

Chapitre II : Application des critères a plan critique

II.1. Introduction	29
	29
Critère Papadopoulos	
	31
Critère Findley	
	32
II.4. Présentation du matériau étudié	
	32
II.4.1Caractéristiques du matériau étudié :	

II.4.2 Courbes de fatigue de l'acier SM 45C	33
II.5. Méthodologie adoptée	34
<i>II.5.1 Critère de Papadopoulos</i>	35
II.6 Teste de convergence	36
II.7 Troisième partie : les trajets de chargement	38
Le tenseur de contrainte	39
II.8 Étude comparative de l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue	49
II.1. Introduction	29
Critère Papadopoulos	29
Critère Findley	31
II.4. Présentation du matériau étudié	32
II.4.1 Caractéristiques du matériau étudié :	32
II.4.2 Courbes de fatigue de l'acier SM 45C	33
II.5. Méthodologie adoptée	34
<i>II.5.1 Critère de Papadopoulos</i>	35
II.6 Teste de convergence	36
II.7 Troisième partie : les trajets de chargement	38
Le tenseur de contrainte	39
II.8 Étude comparative de l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue	44
Conclusion générale	49
Bibliographie	52

Introduction générale

La fatigue multiaxiale a attiré beaucoup d'attention au cours des deux dernières décennies en raison de la présentation en conditions de chargement dans les composants techniques. De plus, La fatigue multiaxiale peut être catégorisée selon la nature du signal de contrainte, qui concerne deux aspects importants : la différence entre les valeurs d'amplitude et les déphasages des composantes du tenseur de contrainte. Cette distinction permet de distinguer entre les chargements proportionnels et non proportionnels. Dans certains cas, nous devons rechercher des solutions techniques adaptées pour améliorer la résistance à la fatigue et ainsi augmenter la durée de vie. En raison de ce besoin, il est nécessaire que les ingénieurs, lors de la conception de structures industrielles, prennent en considération la nature du signal de chargement multi-axial et vérifient la capacité des matériaux à résister de ces chargements. Pour atteindre cette valeur, les fabricants recherchent des critères permettant de prédire la durée de vie de leurs composants. Ces critères sont capables de calculer la durée de vie et de garantir la sécurité des structures. En revanche, les chargements non proportionnels se caractérisent par des variations dans les directions principales des contraintes au cours du cycle, rendant l'analyse plus complexe. Les critères de fatigue à plan critique doivent alors prendre en compte ces variations pour prédire avec précision les zones de défaillance potentielle.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une méthodologie de calcul prévisionnel pour les structures soumises à des chargements cycliques complexes, en accordant une attention particulière aux chargements cycliques proportionnels et non proportionnels. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser deux critères de Papadopoulos et Findley. L'étude consiste à développer un programme de calcul, utilisant le code Matlab, permettant de tracer les trajets de chargement, de déterminer la durée de vie des structures, et d'examiner l'influence de certains paramètres de chargement sur le comportement en fatigue. En outre, ce mémoire vise à comparer les durées de vie prédites par le critère de Papadopoulos avec celles obtenues en utilisant le critère de Findley. Cette comparaison a pour but de mettre en évidence les différences et similitudes entre ces deux critères, offrant ainsi une perspective plus complète sur l'évaluation de la fatigue multiaxiale des matériaux. En intégrant cette comparaison dans notre programme de calcul, nous pourrions déterminer lequel de ces critères fournit la meilleure prédiction de la durée de vie en fonction des différents types de chargements cycliques rencontrés dans les applications industrielles.

La mémoire est divisée en deux chapitres. Le premier chapitre, était consacré à une étude bibliographique des notions sur les chargements cyclique, nature du chargement, des différents états de contrainte, des différents critères de fatigue multiaxiale, de la courbe de Wöhler avec ses domaines et la limite de fatigue. Le deuxième chapitre est réservé au travail personnel, qui consiste à développer un programme de calcul au sous le code MATLAB permettant de calculer la durée de vie dans un état de fatigue multiaxiale pour le matériau SM45C, soumis à un chargement multiaxial non proportionnel, en utilisant deux critères à plan critique de comparaison, qui sont Papadopoulos et Findley.

-La première partie s'intéresse à l'explication de la méthodologie et la formulation mathématique qui donne un aperçu sur les deux critères de Papadopolous et Findley.

-La seconde partie se focalise sur la comparaison de la durée de vie calculée par les deux critères.

-La troisième partie étudie l'influence de plusieurs paramètres de chargement sur le comportement du matériau étudié.

Enfin, nous présentons une conclusion générale qui résume les résultats obtenus par la présente étude.

I.1 Introduction

La fatigue dans les matériaux est un domaine largement étudié, à la fois sur les plans expérimental et théorique. Ce phénomène se manifeste lorsqu'une ou plusieurs charges répétées ou alternées sont appliquées sur des composants mécaniques au fil du temps. L'objectif principal des essais de fatigue est de déterminer le nombre de cycles nécessaires pour provoquer la rupture d'un matériau sous une charge spécifique. Cette rupture survient lorsque le matériau n'est plus en mesure de supporter les contraintes appliquées.

Pour approfondir cette compréhension, des essais expérimentaux ont été menés sur divers matériaux, soumis à différents types de sollicitations, telles que l'axiale, la multiaxiale, ou encore l'aléatoire. L'enjeu est de développer des modèles sous forme de formules mathématiques, qui peuvent ensuite être intégrées dans le processus de conception des composants mécaniques. L'un des buts principaux est de prédire la durée de vie de ces composants, permettant ainsi de planifier les périodes d'entretien pour prévenir toute défaillance ou panne imprévue pendant leur fonctionnement.

La sollicitation multiaxiale, en particulier, est due à l'application de charges dans plusieurs directions. Par exemple, une roue mal équilibrée sur une voiture roulant sur une route irrégulière illustre la fatigue multiaxiale. Dans ce cas, l'état de contraintes au niveau des zones où les contraintes sont les plus concentrées est de nature multiaxiale. Cette complexité ajoute un niveau supplémentaire de défi dans l'analyse et la modélisation de la fatigue des matériaux.

I.2 Notion sur les chargements cycliques [1]

La grande majorité des systèmes mécaniques et des structures sont soumis à des charges variables dans le temps, comprenant des forces, des moments et des déplacements. Ces variations génèrent des contraintes et des déformations dans les composants, qui évoluent de manière cyclique au fil du temps. Contrairement aux essais de traction ou de compression quasi-statiques, où les charges sont strictement monotones, ces charges cycliques induisent ce que l'on appelle un chargement de fatigue. La Figure I.1 illustre quelques exemples de ces chargements, soulignant leur diversité.[1]

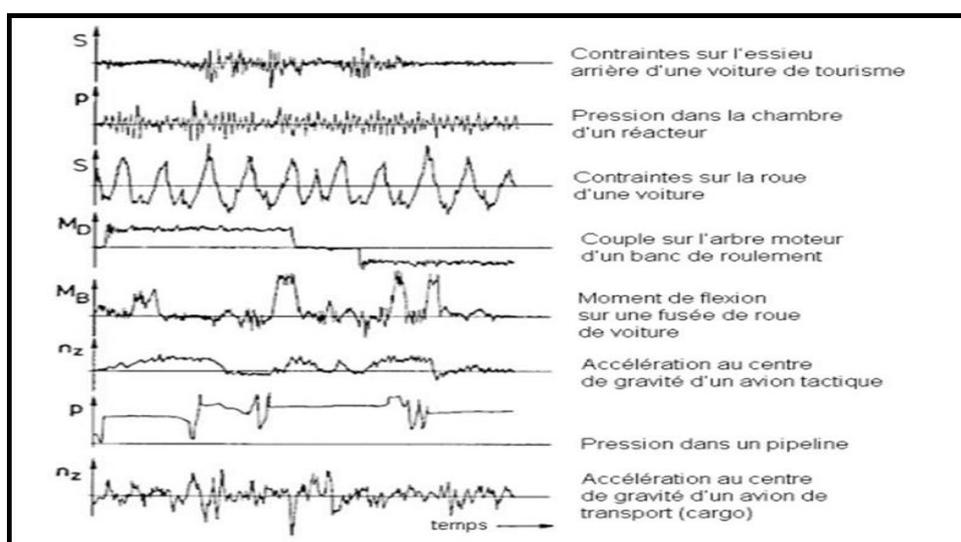


Figure I.1 : Notion de chargement cyclique.

Lorsque les forces ou les moments appliqués aux composants mécaniques sont orientés selon des directions variées, on évoque le phénomène de fatigue multiaxiale. La Figure I.2 illustre un exemple de ce type de chargement, où l'on identifie trois composantes de forces et une composante de moment.

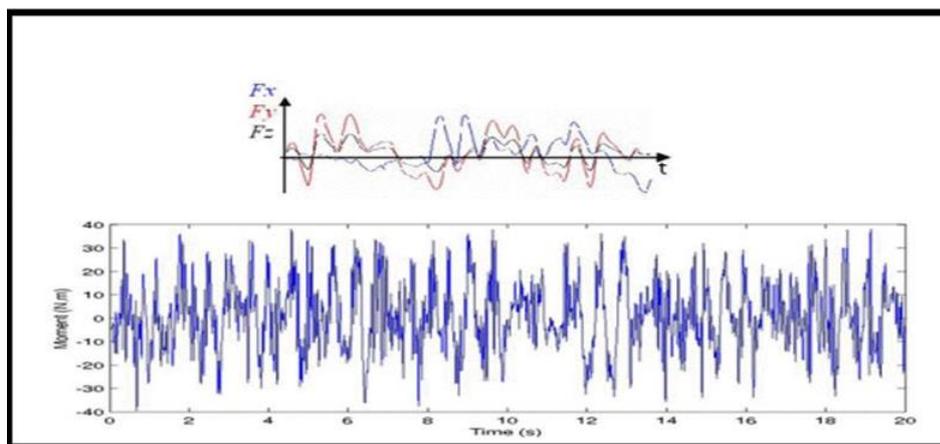


Figure I.2: Exemple de chargement multiaxial d'amplitude variable.

Un chargement est considéré comme étant d'amplitude constante lorsqu'il est représenté par une forme d'onde sinusoïdale simple, ou triangulaire dans le cadre d'un essai en laboratoire, avec une moyenne et une amplitude constante dans le temps. En revanche, si ces caractéristiques varient, le chargement est qualifié d'amplitude variable. Le chargement présenté à gauche dans la Figure I.3 illustre un exemple de chargement cyclique à amplitude constante, tandis que celui à droite présente une amplitude variable.

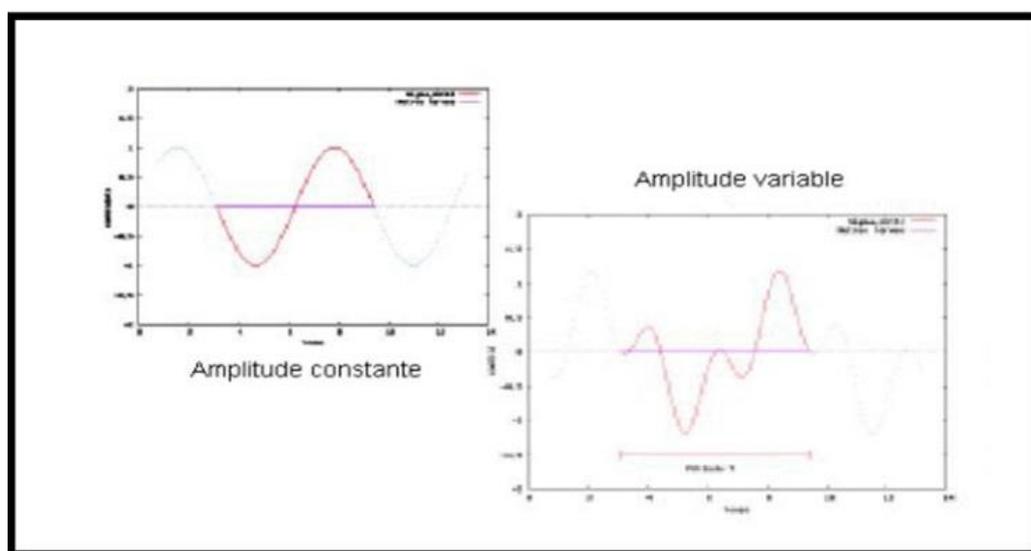


Figure I.3 : Chargement cyclique à amplitude constante ou à amplitudes variables.

Dans le cadre de cette étude, notre examen se focalisera exclusivement sur les chargements sinusoïdaux d'amplitude constante. Nous introduisons ici quelques concepts fondamentaux largement employés dans le domaine de la fatigue des matériaux et des structures. La maîtrise de ces termes permettra de faciliter la compréhension ultérieure de notre analyse.

I.2.1 Nature du chargement [1]

Il est crucial de distinguer entre les chargements (forces, moments, déplacements) et les contraintes dans l'analyse des structures. Un chargement est qualifié de multiaxial lorsque les forces (ou moments) appliqués varient dans des directions différentes, c'est-à-dire non parallèles. De manière similaire, un état de contraintes est considéré comme multiaxial lorsqu'il présente au moins deux contraintes principales non nulles. Il convient de souligner que tout chargement multiaxial induit nécessairement un état de contrainte multiaxial. En revanche, un chargement uniaxial ne conduit pas automatiquement à un état de contrainte uniaxial en raison de la géométrie de la pièce et des éventuelles concentrations de contrainte qui en résultent. En effet, l'état de contraintes est un concept global s'appliquant à l'ensemble de la pièce ou de la structure étudiée.

I.2.2 Les différents états de contrainte [1]

Nous considérons un élément de volume d_v auquel est associée une base fixe $(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$. Un état de contrainte est qualifié d'uniaxial lorsque seule une contrainte principale est non nulle sur l'ensemble d'un cycle de chargement. La Figure 4 offre une représentation schématique d'un tel état de contrainte uniaxial appliqué à un élément de volume d_v , ici représenté par un cube élémentaire.

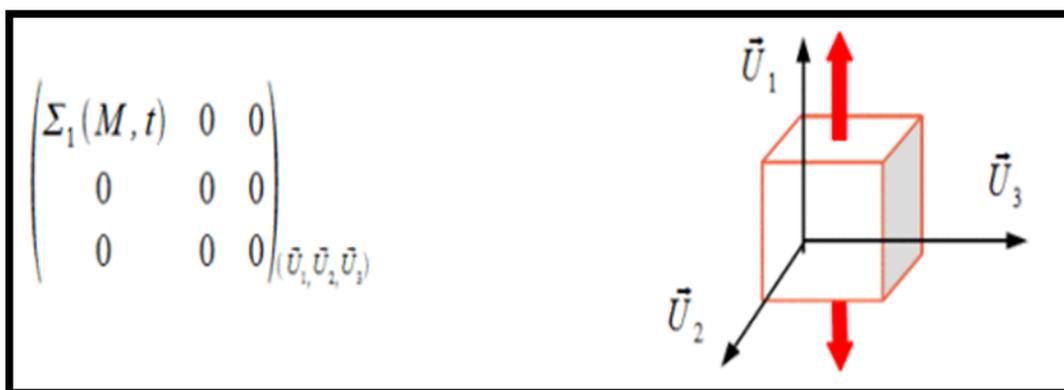


Figure I.4 : État de contrainte uniaxial.

Un état de contraintes est qualifié de multiaxial lorsque le tenseur de contraintes présente au moins deux valeurs non nulles. La Figure 5 propose une représentation schématique d'un tel

état de contraintes multiaxial appliqué à un élément de volume d_v , ici représenté par un cube élémentaire.

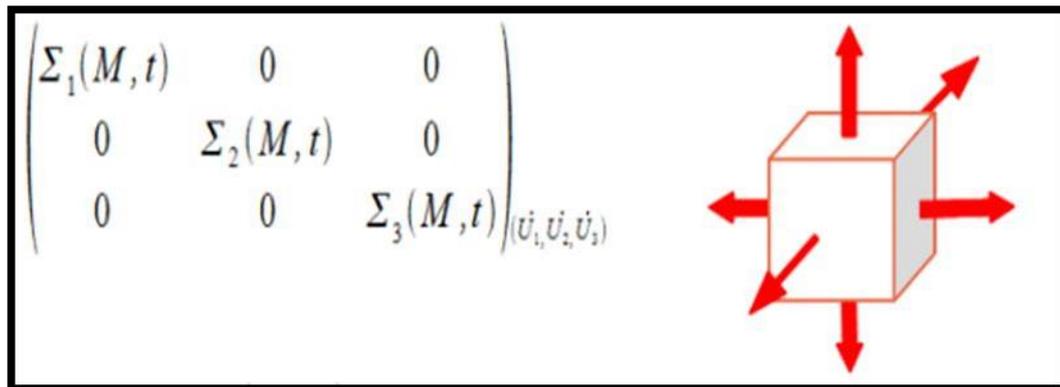


Figure I.5 : État de contrainte multiaxiale.

Le trajet de chargement représente l'évolution des coordonnées de l'extrémité du vecteur dans le repère principal des contraintes, où $S_i(t)$ désigne les contraintes principales pour $i = 1$ à 3 . Lorsque le repère principal des contraintes reste fixe par rapport à la pièce et que les contraintes principales sont proportionnelles deux à deux à chaque instant (t), telles que $S_1(t) = kS_2(t) = qS_3(t)$, où k et q sont des constantes réelles sur la période de chargement, le trajet est qualifié de proportionnel.

Si l'une au moins des deux conditions précédentes n'est pas satisfaite, le trajet de chargement est qualifié de non proportionnel.

Les figures 6 et 7 présentent respectivement un exemple de chargement proportionnel et un exemple de chargement non proportionnel.

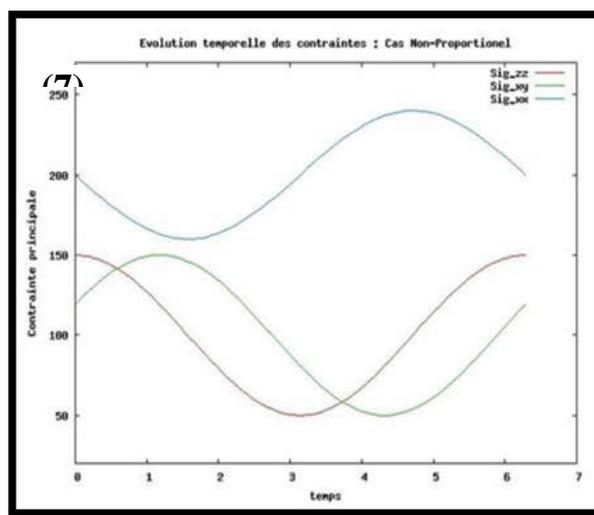
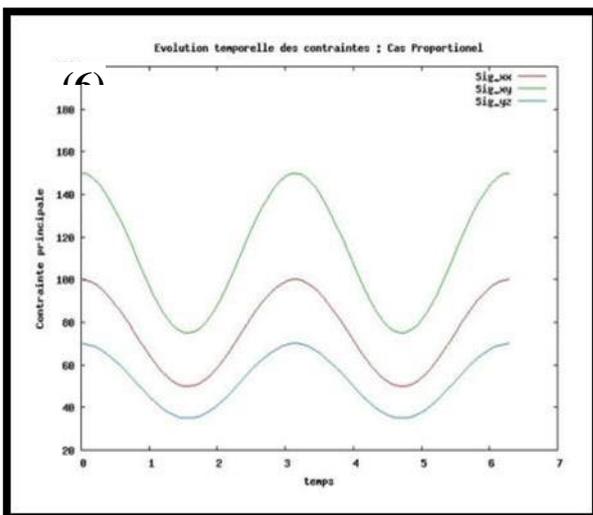


Figure I.6 et I.7 : Chargement proportionnel et non proportionnel

Il convient de noter que le chargement est qualifié de proportionnel affine lorsque le trajet tracé par l'extrémité du vecteur, dont les coordonnées correspondent aux trois contraintes principales, forme un segment de droite ne passant pas par l'origine du repère principal. Si toutes les contraintes principales ont une valeur moyenne nulle, le chargement est appelé proportionnel radial. En revanche, dans le cas d'un chargement non proportionnel, la courbe tracée n'est plus une droite.

I.3 Définition de la fatigue [2]

La fatigue dans les matériaux est un phénomène complexe où des dommages locaux se développent au sein d'un composant sous l'effet de sollicitations variables, telles que des forces appliquées ou des vibrations. Même si le composant est conçu pour résister à des charges spécifiques, la répétition d'efforts inférieurs à ceux nécessaires pour provoquer une rupture immédiate peut, à terme, entraîner une défaillance. Les tests de fatigue sont essentiels pour évaluer la résilience des matériaux face à ces sollicitations répétées et de faible intensité.

Pour illustrer ceci de manière simple, considérons l'exemple d'un fil d'acier que l'on peut comparer à une poutre. Lorsqu'on applique une force à ce fil, la fibre AB est soit étirée (créant une contrainte positive), soit comprimée (générant une contrainte négative) selon la direction de la force. En répétant ce processus plusieurs fois, le fil finira par se rompre. Ce processus illustre le phénomène de fatigue dans les matériaux, où la répétition de charges alternées, même de faible intensité, peut mener à la rupture.

I.3.1 Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue [3]

La courbe de Wöhler, connue internationalement sous le nom de courbe S-N (Stress - Number of cycles) dans les pays anglophones, est un outil essentiel en mécanique des matériaux pour analyser la résistance à la fatigue. Elle établit une relation entre la contrainte appliquée σ (parfois notée S) et le nombre de cycles jusqu'à la rupture (défini comme le nombre de cycles pour lequel on constate un pourcentage $P\%$ de ruptures). Couramment, la courbe de Wöhler est tracée pour une probabilité de rupture de ($p = 0.5$).

Pour obtenir cette courbe, on réalise des tests avec lesquels chaque échantillon est soumis à des cycles d'efforts périodiques de charge constante fluctuant autour d'une moyenne fixe, enregistrant le nombre de cycles au moment de l'amorçage de la fissure, ou nombre de cycles

à la rupture. Pour faciliter l'interprétation, ce nombre de cycles est tracé sur une échelle logarithmique en abscisse, tandis que l'amplitude de la contrainte est représentée sur une échelle linéaire en ordonnée. Chaque échantillon testé donne un point sur le graphique σN , et à partir d'un certain nombre d'essais, souvent à contraintes décroissantes, il est possible d'établir la courbe de Wöhler, qui possède une allure caractéristique.

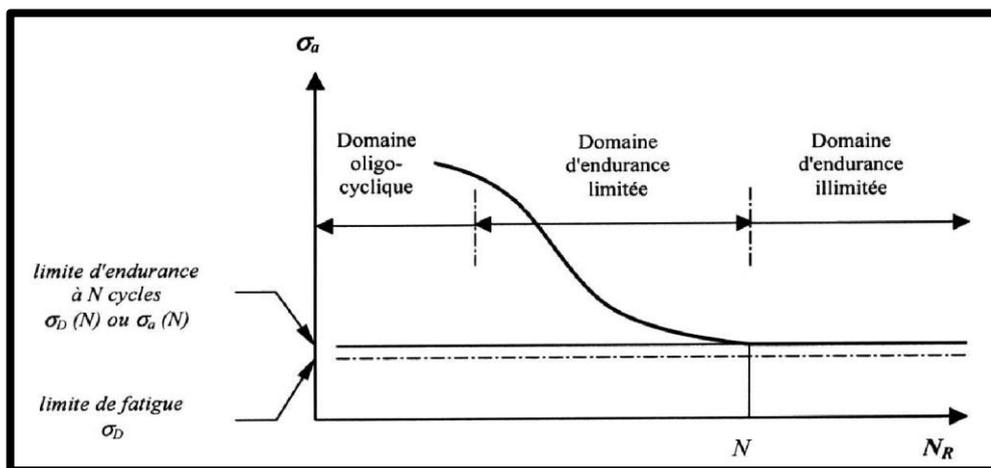


Figure I.8: Courbe de Wöhler et les différents domaines de fatigue

La courbe de Wöhler est un outil fondamental dans l'étude de la fatigue des matériaux, caractérisée par la distinction de trois domaines clés :

- **Domaine de la fatigue olygocyclique** [2]

La courbe de Wöhler décrit la fatigue des matériaux en termes de durée de vie selon la contrainte appliquée. La durée de vie la plus courte, correspondant à un quart de cycle, se produit à la contrainte maximale. Entre cette contrainte maximale et la limite d'élasticité, le matériau entre en phase de plasticité, pouvant endurer entre 10^4 et 10^5 cycles de fatigue selon l'amplitude de la déformation plastique. La durabilité dans cette phase dépend fortement du comportement élastoplastique du matériau. Deux phénomènes clés, l'accommodation et le rochet, caractérisent la réaction du matériau sous des charges cycliques.

. L'accommodation plastique désigne la réponse périodique d'une éprouvette sous charges répétées, où se forme un cycle d'hystérésis élastoplastique, Ce cycle représente l'équilibre entre déformation élastique et plastique du matériau.

. Le phénomène de rochet survient lorsque la réponse d'une éprouvette sous charge cyclique ne parvient pas à atteindre un état périodique stable. Dans ce cas, la déformation plastique

augmente progressivement à chaque cycle, conduisant finalement à la défaillance de la structure après un nombre relativement restreint de cycles. Qui montre l'accumulation continue de déformation plastique jusqu'à la rupture.

- **Domaine de la fatigue à endurance limitée [2]**

Dans le cas des sollicitations appliquées en dessous de la limite d'élasticité, la rupture d'une éprouvette se produit après un nombre de cycles compris entre environ 10^4 et 10^6 , pouvant aller jusqu'à 10^7 cycles. Cette rupture survient sans déformation plastique significative. Initialement, l'éprouvette peut subir une légère déformation plastique, mais avec la répétition des cycles et sous l'effet de l'écrouissage, la réponse du matériau devient purement élastique. Cela conduit à un régime adapté élastique, où la déformation plastique, présente lors des premiers cycles, se stabilise et ne varie plus.

Ce domaine de sollicitations sous la limite d'élasticité est celui dans lequel opèrent la majorité des structures, en particulier celles qui requièrent une réduction impérative de masse et de volume, comme c'est le cas pour les structures dans les secteurs aéronautique, automobile, ou nucléaire. Pour ces applications, il existe une multitude de relations mathématiques qui établissent un lien entre l'amplitude de la contrainte appliquée et le nombre de cycles nécessaires pour entraîner la rupture.

- **Domaine de la fatigue à endurance illimitée [2]**

Dans ce domaine spécifique, les charges appliquées restent en dessous de la limite d'endurance, entraînant un comportement essentiellement élastique du matériau. Au-delà du point C de la courbe de fatigue tend vers une asymptote parallèle à l'axe des N . En deçà de cette limite de contrainte σ_D aucune rupture par fatigue n'est observée, indépendamment du nombre de cycles. σ_D est désignée comme la limite de fatigue ou la limite d'endurance. Toutefois, il est important de noter que cette limite peut être inexistante ou mal définie pour certains matériaux, tels que les aciers à haute résistance ou les métaux non ferreux.

D'autres expressions analytiques existent pour représenter les courbes de Wöhler, notamment dans les domaines de l'endurance limitée ou illimitée, quand elles sont spécifiquement connues pour un matériau ou une pièce donnée.

La courbe de Wöhler est un outil précieux dans la conception et l'évaluation de la durabilité des matériaux dans diverses applications industrielles, fournissant une base essentielle pour comprendre comment les matériaux réagissent sous des charges cycliques répétées.

I.3.2 Limite de fatigue [2]

Dans le domaine de la fatigue, la courbe S-N est fréquemment utilisée pour établir des règles de dimensionnement. Cependant, les études en fatigue giga cyclique 10^9 cycles ont remis en question l'exactitude de ces règles. Selon la norme internationale, la courbe S-N est décrite comme hyperbolique pour les aciers et quasi-hyperbolique pour d'autres alliages. D'après cette hypothèse, la durée de vie en fatigue s'approcherait de l'infini au-delà de 10^7 cycles. On observe également que la valeur asymptotique de la contrainte cyclique à 10^7 cycles est souvent utilisée comme une limite de fatigue, établie selon une approche statistique basée sur une distribution log-normale. Toutefois, cette hypothèse est remise en cause par les résultats obtenus en fatigue giga cyclique. L'analyse reste limitée par le faible nombre de données disponibles pour des durées de vie aussi longues que le milliard de cycles.

Dans le domaine de la mécanique de la rupture, des efforts ont été faits pour établir un lien entre le seuil de non-propagation de fissure Δk_s et la limite de fatigue indiquée par la courbe S-N. Cette relation n'est valable que si la limite de fatigue, ou la résistance à la fatigue, est précisément déterminée. Dans la formule

$\Delta k_s = \sigma_D \sqrt{\pi a}$, l'erreur sur Δk_s est relativement faible en raison de la pente presque verticale de la courbe de propagation de fissure à ce niveau. Cependant, les observations pratiques suggèrent qu'entre la limite de fatigue σ_D pour 10^6 à 10^9 cycles, il peut y avoir une variation significative, parfois supérieure à 30%.

Des études ont révélé que la résistance à la fatigue peut diminuer de 100 à 200 MPa entre 10^6 et 10^9 cycles jusqu'à la rupture, remettant ainsi en question l'idée d'une limite infinie de fatigue. Par conséquent, une limite de fatigue définie statistiquement entre 10^6 et 10^7 cycles ne peut assurer une durabilité infinie sous fatigue.

Dans le contexte de la longévité et de la sécurité des équipements soumis à des chargements cycliques ou des vibrations, tels que les automobiles, les rails de chemin de fer, les avions, les compresseurs et les turbines, qui peuvent atteindre 10^6 cycles au cours de leur utilisation,

il devient crucial de déterminer une limite d'endurance fiable pour 10^9 cycles. Ce besoin a été souligné par Bathias en 1999, mettant en lumière l'importance de garantir la sécurité et la durabilité des équipements dans ces conditions d'utilisation prolongée.

I.3.3 Formalisme des critères de fatigue multiaxiaux [1]

Dans le contexte de la fatigue à grand nombre de cycles, les critères multiaxiaux jouent un rôle clé en évaluant la résistance des matériaux sous des sollicitations complexes. Ces critères, similaires aux critères de résistance classiques comme ceux de Rankine, Tresca ou Von Mises, permettent de déterminer si la limite d'endurance ou la limite de fatigue pour un nombre donné de cycles est atteinte sous des états de contraintes multiaxiales cycliques. Un critère de fatigue multiaxiale est intrinsèquement plus complexe qu'un critère de résistance en raison de la variation des contraintes durant le cycle, ce qui est caractéristique du phénomène de fatigue.

Le chargement le plus complexe est le chargement multiaxial d'amplitude variable, souvent qualifié de multiaxial aléatoire. Il existe une grande variété de critères de fatigue multiaxiaux, plus de 40 selon la littérature. Beaucoup de ces critères, développés principalement dès les années 50, se basent sur une fonction scalaire, généralement désignée par E . Cette fonction établit une relation entre les variables du cycle multiaxial de contraintes sur une période T (telles que les amplitudes, valeurs moyennes, valeurs maximales, et parties alternées) et les limites d'endurance ou les limites de fatigue à N cycles pour différents modes de sollicitations simples.

La durée de vie N pour un état de contrainte multiaxiale est estimée lorsque la fonction de fatigue E atteint l'unité $E = 1$. La fonction E peut prendre trois valeurs :

- $E > 1$: Le critère prévoit une fissure au-delà de N cycles.
- $E < 1$: Il y a risque de fissure avant d'atteindre N cycles.
- $E = 1$: La durée de vie estimée correspond à la durée de vie réelle du matériau sous les limites d'endurance définies.

L'objectif est de rassembler le maximum de ces critères de fatigue multiaxiaux pour créer une base de données. Ces critères peuvent être classifiés en trois catégories : empiriques, globaux et plan critique.

I.3.4 Classification des critères de fatigue multiaxiaux

Les critères empiriques [2]

Cette méthode, basée sur des données expérimentales acquises typiquement par l'application de sollicitations multiaxiales (la traction, la torsion, et la flexion) sur un matériau spécifique, comprend divers critères de fatigue.

a) Critère de Gough et Pollard [7]

Le critère de Gough & Pollard, conçu après des tests de flexion et torsion, comprend deux formules : une pour les matériaux ductiles et une autre pour les matériaux fragiles, basées sur les contraintes de flexion et de cisaillement.

Les créateurs de ce critère partent du principe que l'impact combiné d'une traction statique et d'une flexion alternée est insignifiant en ce qui concerne la résistance à la fatigue.

$$\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1 \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\tau_a^2}{\tau_{-1}^2} + \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \left(2 + \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right) = 1 \quad (\text{I.2})$$

b) Critère de Hohenemser et Prager [7-8]

Le critère développé par Hohenemser et Prager, reconnu comme le premier du genre, a été formulé en 1933. Ce critère a été dérivé à partir d'expérimentations en traction-torsion, dans lesquelles le cisaillement changeait tandis que la contrainte normale était maintenue en traction statique.

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \frac{\sigma_n}{R_m} \leq 1 \quad (\text{I.3})$$

c) Le critère de Davies [9]

L'auteur de ce critère utilise une approche similaire à celle de Hohenemser et Prager. Au lieu de modéliser la variation de l'amplitude de cisaillement acceptable en fonction d'une contrainte normale statique, il inverse la démarche en examinant l'amplitude de la contrainte de cisaillement statique. Sur la base de ses observations, il développe le modèle suivant

$$\left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 + \frac{\tau_m}{\tau_u} \leq 1 \quad (I.4)$$

d) Critère de Nishihara et Kawamoto (1941) [4]

Les auteurs présentent deux modèles, développés à partir de leurs expériences, qui diffèrent selon le rapport $\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}$. Chacun de ces modèles est formulé selon une équation spécifique.

$$E_{NK} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 \text{ si } \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \geq \sqrt{3} \quad E_{NK} = \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \right] \frac{f_a}{f_{-1}} + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{f_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \right] \left(\frac{f_a}{f_{-1}}\right)^2 \text{ si } \frac{f_{-1}}{\tau_{-1}} \leq \sqrt{3} \quad (I.5)$$

e) Critère de Lee1 (1980) [4]

L'auteur introduit un critère basé sur des tests de flexion-torsion non synchronisés. Ce critère inclut un exposant qui varie en fonction du décalage de phase entre les différentes sollicitations, exprimé par une formule spécifique.

$$E_{lee1} = f_a \left[1 + \left(\frac{\tau_a \cdot f_{-1}}{f_a \tau_{-1}}\right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (I.6)$$

f) **Critère de Lee2 (1989)** [10]

L'auteur intègre l'effet de la contrainte moyenne de flexion dans son critère, qui se formule donc en tenant compte de cette influence.

$$E_{Lee2} = \frac{E_{Lee1}}{\left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^n\right]} \quad (I.7)$$

Critères d'approche globale [2]

Ces critères s'appuient sur les invariants du tenseur des contraintes ou de leurs déviateurs, sur la moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement par plan, ou encore sur un concept basé sur l'énergie. Ils présentent une approche globale dans leur formulation. Certains critères utilisent soit le premier invariant du tenseur de contraintes, soit le deuxième invariant du tenseur déviateur. Cette méthode peut être vue comme un compromis entre les approches de critère de plan critique et les approches globales, car ces deux mesures de contraintes sont liées aux contraintes normales et tangentielles agissant sur le plan octaédrique, un plan de référence spécifique.

a) **Critère de Marin (1956)** [2]

Cette approche représente une extension de l'ellipse de Marin, qui est elle-même une relation uniaxiale reflétant l'impact de la contrainte moyenne de traction sur la limite d'endurance en traction-compression asymétrique, mais étendue à un état de contraintes multiaxiales. Marin modifie cette relation en substituant la contrainte de traction par la racine carrée du second invariant J_2 du déviateur des contraintes, et en ajoutant un facteur multiplicatif. En résulte le critère suivant :

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{f} \xi_a \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{R_m} \xi_m \right|^2 \leq 1 \quad (I.8)$$

ξ_a et ξ_m Sont respectivement l'amplitude et la contrainte moyenne de $\sqrt{J_2}$.

Le facteur $\sqrt{3}$ est nécessaire pour ce critère.

b) Critère de Sines (1955) [4]

D'après Sines, la contrainte équivalente est définie comme une combinaison linéaire de τ_a l'amplitude de $\sqrt{J_2}$ et de p_m qui représente la valeur moyenne de la pression hydrostatique.

$$\tau_a + a \cdot p_m \leq b \quad (I.9)$$

Les constantes a et b , sont identifiables par des essais en torsion alternée et en flexion répétée :

$$b = \tau_{-1} \quad (I.10)$$

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_0}{\sqrt{3}}}{\frac{f_0}{\sqrt{3}}} \quad (I.11)$$

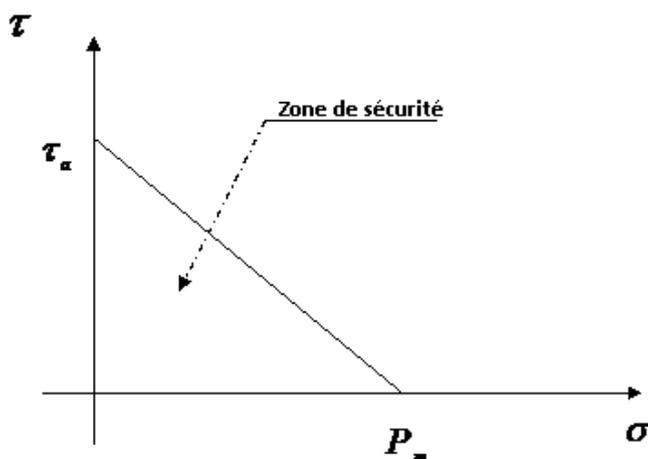


Figure I.9: Diagramme de Sines

c) Critère de Kakunu-Kawada (1979) [11]

Ce critère s'écrit de la façon suivante :

$$\xi_a + aP_m + cP \leq b \quad (I.12)$$

$$b = \tau_{-1} \quad (I.13)$$

$$a = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_0}{\sqrt{3}}}{\frac{f_0}{\sqrt{3}}} - C \quad (\text{I.14})$$

$$C = \frac{\tau_{-1} - \frac{f_0}{\sqrt{3}}}{\frac{f_0}{\sqrt{3}}} \quad (\text{I.15})$$

Ce critère combine les approches de Sines et de Crossland. Son principal inconvénient réside dans la nécessité d'identifier une constante supplémentaire pour son application.

d) Critère de Deitman et Isseler (1974) [4]

Les créateurs de ce critère se sont basés sur la représentation du diagramme de Haigh à travers la parabole de Gerber et ont formulé le critère en conséquence.

$$E_{DI} = \left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{J_2 a}}{f_{-1}} \right] + 3 \frac{P_{Hm}}{R_m} \quad (\text{I.16})$$

e) Critère de Kinasushvili (1976) [4]

L'auteur a établi son critère en intégrant le deuxième invariant des parties moyennes J_{2m} ainsi que la partie alternée J_a du tenseur déviateur des contraintes. La formule correspondante est la suivante :

$$E_{KS} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{J_2 a}}{\alpha} + \beta \sqrt{J_{2m}} \quad (\text{I.17})$$

Les constantes du critère sont données par :

$$\alpha = \sigma_{-1} \quad (\text{I.18})$$

$$\beta = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_a}{\sigma_{-1} \sigma_a} \quad (\text{I.19})$$

f) Critère de Papadopoulos (1984) [4]

Ce critère est proche de celui de Dang Van 2, sa formule est donnée par :

$$E_{PA} = \frac{K^* + \alpha P_{Hmax}}{\beta} \quad (\text{I.20})$$

$$K^* = \text{Max}_t(\sqrt{J_{2m}(t)}) \quad (\text{I.21})$$

K^* Représente le rayon des plus petites hypersphères englobant le cycle multiaxial de contraintes dans l'espace du déviateur des contraintes. Pour les chargements proportionnels, ce critère correspond à celui de Crossland, car $\text{Max}_t(\sqrt{J_m(t)}) = \sqrt{J_{2a}}$. Les constantes de ce critère sont déterminées à partir d'essais simples tels que la traction et la torsion.

$$\beta = \tau_{-1} \quad (\text{I.22})$$

$$\alpha = 3 \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \sqrt{3} \quad (\text{I.23})$$

Le critère est valable si $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \sqrt{3}$

Les approches énergétiques [5]

Les Cette catégorie de critères peut être divisée en trois groupes distincts :

. Critères utilisant des invariants (I_1, J_2) du tenseur des contraintes ou de son déviateur Les principaux auteurs de critères d'approche globale de ce type incluent Sines et Crossland.

. Critères utilisant une moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement : La fonction de fatigue est obtenue à l'aide d'une moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement F_h sur l'ensemble des plans possibles passant par le point matériel où l'analyse en fatigue est réalisée. Le caractère global de l'approche provient de la contribution de tous les plans à la fonction de fatigue du critère.

. Critères basés sur une approche énergétique : Dans cette approche, la fonction de fatigue combine les énergies de changement de volume et de changement de forme développées par les contraintes au cours du cycle.

Critères de type plan critique [2]

Ces auteurs postulent que l'endommagement du matériau se localise sur un plan spécifique, considéré comme critique, déterminé par le cycle multiaxial en question. La définition de ce plan critique, présumé être le siège de la fissure, repose sur les paramètres des contraintes agissant sur ce plan et des paramètres dérivés des invariants du tenseur de contraintes ou de son déviateur.

Les contraintes prises en compte dans ce type de critère incluent les contraintes normales et tangentielles qui agissent sur le plan critique p_c de normale \vec{n} . Cette normale est définie par

les angles θ et ϕ par rapport à un repère fixe associé au matériau. Le vecteur de contrainte \vec{S}_n en tout point O relié à la direction \vec{n} est déterminé par la relation suivante :

$$\vec{S}_n(O) = \bar{\sigma}(O) \cdot \vec{n} \quad (I.23)$$

La composante normale de \vec{S}_n du vecteur contraint \vec{S}_n s'écrit :

$$\bar{\sigma}_n = (\vec{n}^t \cdot \bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (I.24)$$

Sur un cycle de chargement (de période T), on peut définir alors :

- La contrainte normale maximale : $\sigma_n^{max} = \max(\sigma_n(t))$ (I.25)

- La contrainte normale minimale : $\sigma_n^{min} = \min(\sigma_n(t))$ (I.26)

- La contrainte normale moyenne : $\underline{\sigma}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_n(t) \cdot dt$ (I.27)

- L'amplitude de la contrainte normale : $\sigma_{n,a} = \frac{|\sigma_n^{max} - \sigma_n^{min}|}{2}$ (I.28)

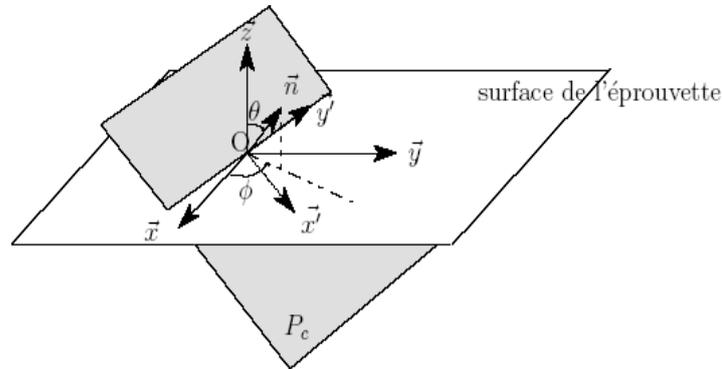


Figure I.10: Orientation du plan critique au point O considéré.

Le vecteur contraint de cisaillement \vec{C}_n associé au vecteur contrainte \vec{S}_n est donné par la relation :

$$\vec{C}_n = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = (\vec{n}^t \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (I.29)$$

Au cours d'un cycle de chargement, l'extrémité du vecteur de cisaillement trace une courbe fermée (illustrée par la Figure 1-15). L'amplitude du cisaillement, notée C_a correspond au rayon du plus petit cercle entourant cette trajectoire. Le cisaillement moyen C_m durant le cycle est représenté par la distance entre le centre de ce cercle et l'origine OO_1 .

Cette configuration permet également de définir la partie alternée du cisaillement à un instant t , désignée par $\vec{C}_a(t) = \vec{C}(t) - \vec{C}_m$, également connue sous le nom de partie dynamique du cisaillement (voir figure I-15).

La scission résolue $\tau(t)$ est définie comme la projection du vecteur de cisaillement $\vec{C}(t)$ sur une ligne L dans le plan matériel considéré, où $\vec{m}(\Psi)$ est le vecteur unitaire orientant cette ligne, formant un angle Ψ avec l'axe ox du repère $(0, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ contenu dans le plan P_c .

$$\tau(t) = \vec{C}(t) \cdot \vec{m} \quad (I.30)$$

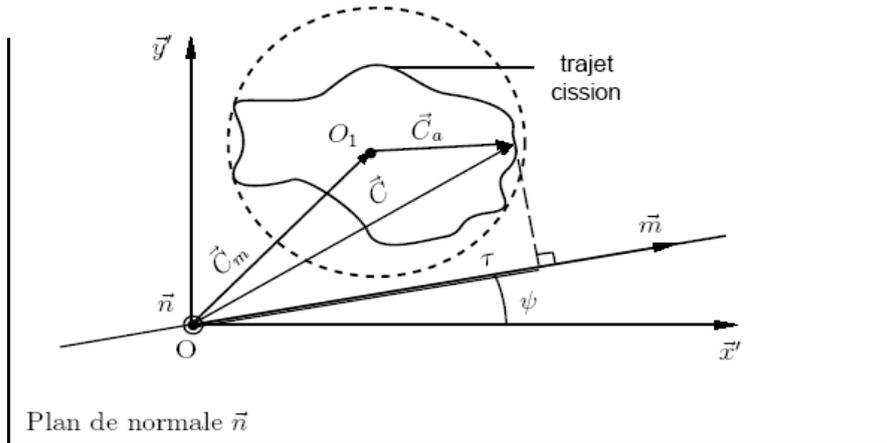


Figure I.11: Définition des termes relatifs à la contrainte de cission

L'amplitude de la scission agissant sur P_c dans la direction L est définie par la relation :

$$\tau(t) = \vec{C}(t) \cdot \vec{m} \quad (I.31)$$

a) Critère de Stulen et Cummings (1954) [6]

Ce critère recherche le plan critique en balayant tous les plans possibles afin de trouver celui où la quantité P_c ci-dessous est maximale :

$$P_c = \max \left| \frac{\tau_a}{\beta - \alpha \sigma_n^{max}} \right| \quad (I.32)$$

La fonction de fatigue s'obtient, sur le plan critique de la façon suivante :

$$\frac{\tau_a - \alpha \sigma_n^{max}}{\beta} \leq 1 \quad (I.33)$$

Les constantes α, β ont été déterminées à partir de deux limites de fatigue σ_{-1} et τ_{-1} du matériau respectivement en traction et en torsion alternées symétriques :

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma_{-1}-2}{\tau_{-1}}}{2 \sqrt{\frac{\sigma_{-1}-1}{\tau_{-1}}-1}} \quad (I.34)$$

$$\beta = \frac{\tau_{-1}}{2 \sqrt{\frac{\sigma_{-1}-1}{\tau_{-1}}-1}} \quad (I.35)$$

b) Critère de Findley (1957) [12]

Il est semblable à celui de Stulen et Cummings, il s'en différencie par le choix du plan critique, obtenu en recherchant le plan où la combinaison linéaire $\tau_a + \alpha \sigma_n^{max}$ est maximale. Le critère s'écrit par la relation suivante :

$$\tau_a + \alpha \sigma_n^{max} \leq \beta \quad (I.36)$$

Les constantes α, β sont déterminées par les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{\frac{2\tau_{-1}-1}{f_{-1}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}-1}{f_{-1}}\right)^2}} \quad (I.37)$$

$$\beta = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}-1}{f_{-1}}\right)^2}} \quad (I.38)$$

c) Critère de Dang-Van 1 (1973) [2]

Il existe deux versions de ce critère, la première version utilise les grandeurs macroscopiques des contraintes qui sont la partie alternée du cisaillement et la pression hydrostatique. La fonction de fatigue est une maximisation d'un indicateur de dommage par le plan défini par :

$$E_{DV1} = \max_t \left\{ \frac{\tau_a(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \right\} \quad (I.39)$$

Avec
$$P_H(t) = \frac{\sigma_{11}(t) + \sigma_{22}(t) + \sigma_{33}(t)}{3} \quad (I.40)$$

Les constantes α, β sont déterminées par :

$$\alpha = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \quad (I.40)$$

$$\beta = \tau_{-1} \quad (I.41)$$

La condition de validité de cette version du critère est :

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2} \quad (I.42)$$

Avec τ_{-1} et σ_{-1} sont respectivement les limites d'endurance en torsion alternée et flexion plane symétrique.

La deuxième version du critère a pour objectif d'accélérer les calculs en évitant de balayer de l'ensemble des plans physiques pour la détermination du plan critique, en introduisant la racine carrée du second invariant du déviateur de contraintes. Cette version garde les mêmes relations pour déterminer les constantes α, β .

d) Critère de Matake (1977) [2]

Matake a formulé son critère à la base de ceux de Stulen – Cummings et de Findly. La différence réside dans le choix du plan critique, celui où l'amplitude de cisaillement est maximale dans le plan normal ; la fonction de fatigue est donnée par :

$$\tau_a + \alpha \sigma_n^{max} \leq \beta \quad (I.43)$$

Les constantes α, β sont déterminées par :

$$\alpha = \frac{\tau_{-1} \cdot \frac{f-1}{2}}{\frac{f-1}{2}} \quad (\text{I.44})$$

$$\beta = \tau_{-1} \quad (\text{I.45})$$

e) Critère de Dang-Van 2 (1989) [1]

L'objectif de cette version est d'accélérer les calculs en évitant le balayage de tous les plans, la fonction de fatigue devient :

$$E_{DV2} = \text{Max}_t = \frac{\tau_{pr}(t) + \alpha P_H(t)}{\beta} \quad (\text{I.46})$$

$$\text{Avec } \tau_{pr}(t) = \frac{1}{2} \text{Max}(|S_{Ia} - S_{IIa}|, |S_{IIa} - S_{IIIa}|, |S_{IIIa} - S_{Ia}|) \quad (\text{I.47})$$

Où S_{Ia} , S_{IIa} , S_{IIIa} sont les valeurs principales du tenseur déviateur alterné.

f) Critère de Mc Dirmid 1 (1973) [2]

L'auteur a proposé la formule de fatigue suivante :

$$E_{MD1} = \frac{\tau_a - B(\sigma_{n,a})^{\frac{3}{2}}}{A} \quad (\text{I.48})$$

A et B sont des constantes déterminées en vérifiant le critère à $E_{MD1} = 1$, et pour les limites de fatigue en traction et en torsion alternée, les constantes sont données par :

$$A = \tau_{-1} \quad (\text{I.49})$$

$$B = \frac{\tau_{-1} \cdot \frac{\sigma_{-1}}{2}}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{I.50})$$

Le critère est vérifié sous la condition :

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2} \quad (\text{I.51})$$

g) Critère de Mc Dirmid 2 (1974) [1]

L'auteur a ajouté l'influence de la valeur moyenne de la contrainte normale. La nouvelle formule s'écrit :

$$E_{MD2} = \frac{\left(1 - \frac{2\sigma_n}{R_m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_a + B(\sigma_{n,a})^{\frac{3}{2}}}{A} \quad (\text{I.52})$$

Le critère est valable pour

$$\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} > \frac{1}{2}, \quad \frac{\sigma_n}{R_m} > \frac{1}{2} \quad (\text{I.53})$$

Critère de Papuga [6]

Récemment, [Papuga et Růžička 2008] ont proposé un critère basé sur l'intégration d'un paramètre de fatigue sur l'ensemble des plans matériels possibles.

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{5}{2} C_a^2 + \alpha \left(N_a + \frac{f_{-1}}{t_{-1}} N_m \right) \right] \sin\theta d\theta d\varphi} \leq \beta \quad (\text{I.54})$$

Les valeurs, C_a, N_a et N_m représentent respectivement l'amplitude de cisaillement, l'amplitude, et la valeur moyenne de la contrainte normale associées à un plan matériel donné. Les constantes α et β peuvent être déterminées en utilisant les deux limites de fatigue en torsion alternée et en flexion alternée.

$$\alpha = f_{-1} \left(3 \frac{t_{-1}^2}{f_{-1}^2} \right) \quad (\text{I.55})$$

$$\beta = t_{-1} \quad (\text{I.56})$$

II.1. Introduction

Lorsqu'une structure est sollicitée à des chargements cycliques multiaxial non proportionnels, il est nécessaire de déterminer le comportement du matériau afin d'estimer sa durée de vie. Cette estimation utilise des critères de fatigue prenant en compte les trajets de chargement. Ceci nécessite d'utiliser des critères de fatigue de type « plan critique ». L'objectif principal de notre étude est de proposer une méthodologie de calcul basée sur ces critères de plan critique, qui sont nombreux. Parmi lesquels nous avons choisi deux critères, à savoir Findley et Papadopoulos, afin de comparer les deux critères en termes de durée de vie et, d'autre part, d'étudier certains des paramètres qui affectent sur la durée de vie. Dans cette étude, elle a été scindée en quatre étapes : la première étape a été consacrée à la méthodologie de suivi et aux équations mathématiques pour les critères de Papadopoulos et de Findley. La deuxième étape a été consacrée aux tests de convergence qui déterminé le plan critique pour les deux critères. La troisième étape a été consacrée à l'étude des trajets de chargement, et la quatrième étape a été consacrée à la comparaison de la durée de vie entre les deux critères, avec l'étude de l'effet de certains paramètres de tenseur de contrainte sur la durée de vie.

II.2. Critère Papadopoulos

Papadopoulos avait consacré une grande partie de ses travaux à l'étude de la fatigue polycyclique en endurance illimitée. Récemment, il a commencé à étudier le domaine de l'endurance limitée. En 2001, l'auteur établit une méthode de prévision de durée de vie qui traite les signaux proportionnels et non proportionnels d'amplitude constante pour des chargements multiaxiaux, cette méthode finalement est transformé à un critère catégorisé dans la famille des critères de plan critique.

Le critère formulé par l'auteur repose sur le concept de plane critique, qui peut s'exprimer comme une relation linéaire entre la pression hydrostatique maximale et le paramètre T_a , qui représente une valeur moyenne de la contrainte tangentielle résultant de l'intégrale. Pour calculer la valeur de T_a , un plan est défini par des coordonnées sphériques et quelques vecteurs normaux et tangentiels sur le plan, puis on recherche le niveau critique auquel la contrainte équivalente à ce critère est à sa valeur maximale.

Ce plan est défini dans le trièdre (Oxyz) par les coordonnées sphériques φ et θ de son vecteur normal \vec{n} (Fig. II.1). Il en résulte que T_a est fonction de φ et θ . Le plan critique est défini par l'auteur comme étant celui sur $T_a(\varphi, \theta)$ lequel atteint sa valeur maximale, c'est-à-dire : . La condition d'endurance est alors donnée par l'expression suivante :

$$\max T_a = \max_{(\varphi, \theta)} T_a(\varphi, \theta)$$

$$(T_a + \alpha_\infty \sigma_{H, max}) \leq \gamma_\infty \quad (II.1)$$

Où α_∞ et γ_∞ sont deux paramètres liés au matériau. L'indice ∞ a été utilisé par Papadopoulos pour rappeler que le critère de fatigue (Eq. II.1) délimite (au moins théoriquement) le domaine de fatigue de durée de vie illimitée. Pour calculer la valeur de l'amplitude de la cission T_a , nous devons déterminer le trajet de chargement pour chacun des plans physiques Δ , pour en extraire la valeur maximale [2].

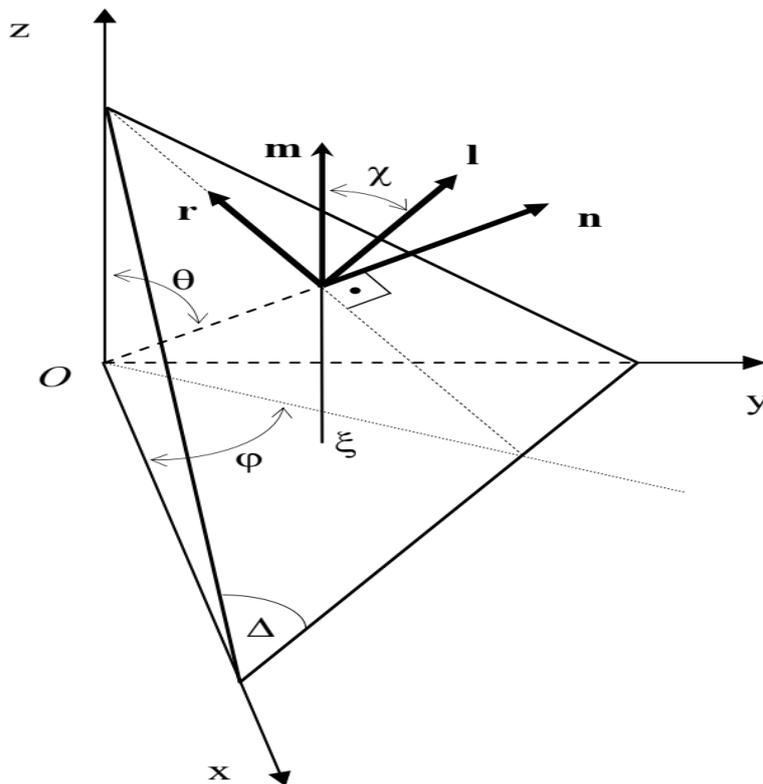


Figure II.1 : Plan Δ et le repère direct (l, r, n) associé.

II.3. Critère Findley

Findley [13,14] a défini son critère comme une combinaison linéaire de contrainte de cisaillement et de contrainte normale agissant sur le plan critique. La durée de vie en fatigue du composant est ensuite calculée sur un plan avec la valeur maximale de combinaison linéaire de contraintes et peut être calculée à l'aide de la formulation suivante :

$$(\tau_a + \alpha \cdot \sigma_n^{max}) \leq \beta$$

Où τ_a est l'amplitude de la contrainte de cisaillement agissant sur le plan, σ_n^{max} est la contrainte normale maximale agissant sur le plan pendant le cycle de chargement, α et β sont des constantes déterminées par les formules suivantes.

$$\alpha = \frac{\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1\right)^2}} \dots\dots\dots(\text{II.2})$$

$$\beta = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1\right)^2}} \dots\dots\dots(\text{II.3})$$

II.4. Présentation du matériau étudié

II.4.1Caractéristiques du matériau étudié :

Le matériau utilise dans cette étude est l'acier SM45C, la teneur en carbone variant entre 0.42% et 0.50% qui est de type d'acier au carbone moyen. Ses caractéristiques mécaniques et sa composition chimique sont respectivement récapitulées dans les tableaux II.1 et II.2 [7].

Tableau II.1 : Composition chimique de l’acier SM45C

C	Mn	P	S	Si	Ni	Cr	Cu
0.42	0.73	0.02	0.012	0.28	0.14	0.18	0.13

Tableau II.2 : Caractéristiques mécaniques de l’acier SM45C.

Limite d'élasticité σ_y (MPa)	638
Résistance à la rupture R_m (MPa)	824
Module d'élasticité longitudinal (Young) E (MPa)	213
Module d'élasticité Transversal G (MPa)	82.5
Coefficient de Poisson ν	0.29
Allongement A (%)	22

II.4.2 Courbes de fatigue de l'acier SM 45C

Les figures II.2 et II.3 montre les courbes de Wöhler (essais de fatigue uniaxial) réalisées par Lee dans le cas de flexion et torsion alternées.

Les courbes de Wöhler de l'acier SM45C sont données par les équations suivantes :

1-torsion alternée

$$\tau_{-1}(N) = \frac{311}{1 - 62.3 \cdot N^{-0.53}} \dots\dots\dots(\text{II.4})$$

2-flexion alternée $f_{-1}(N) = \frac{442}{1 - 62.3 \cdot N^{-0.53}}$ (II.5)

Les courbes de Wöhler sont présentées par les figures II.2 et II.3.

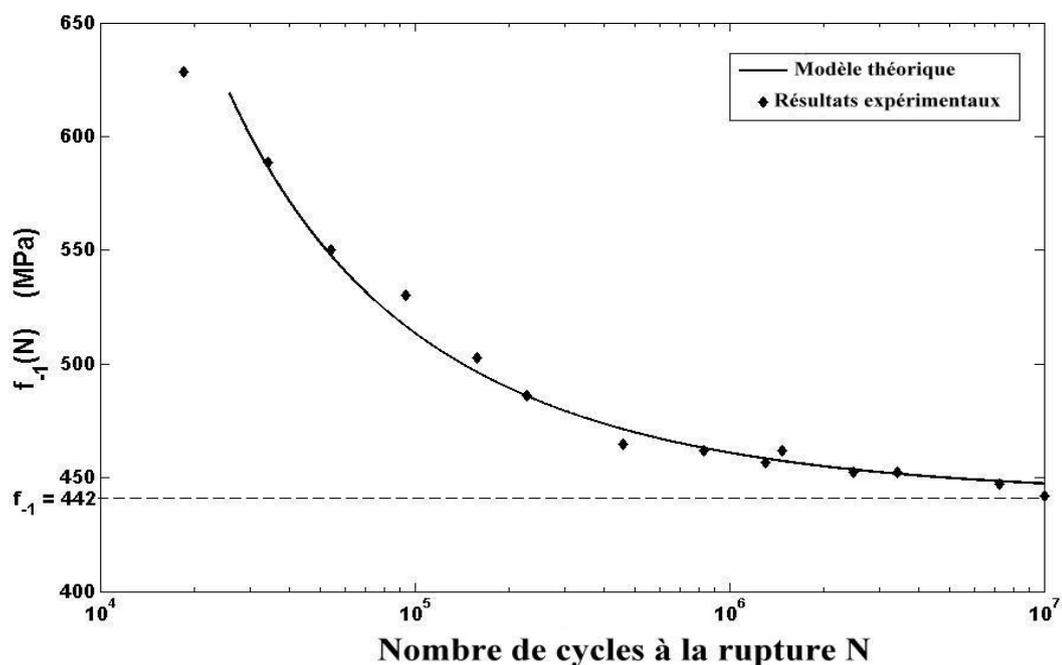
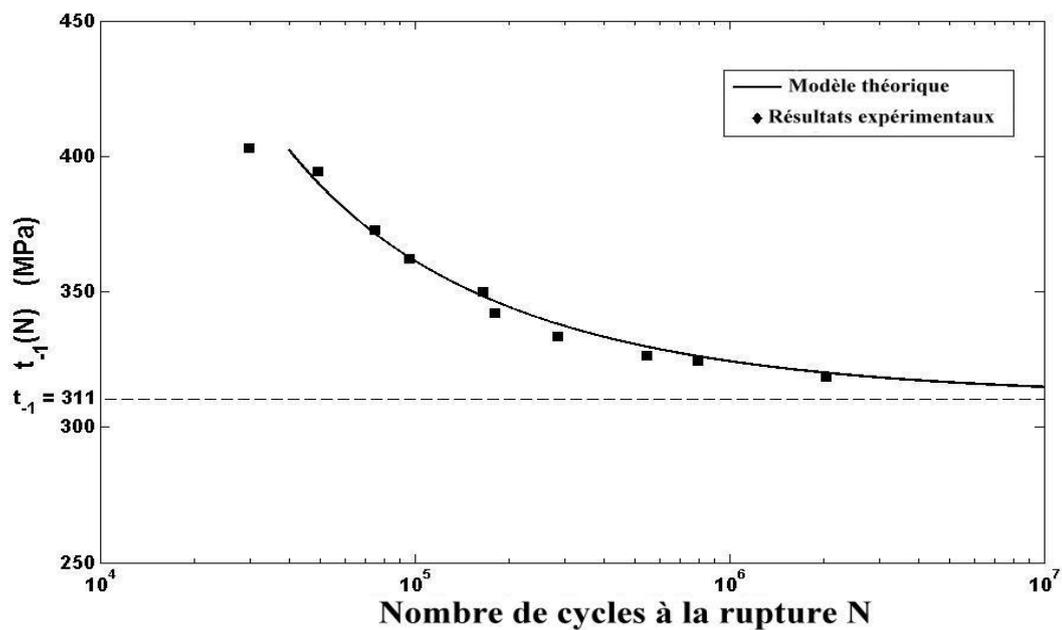


Figure II.2.et II.3. Courbe de fatigue en torsion et en flexion purement alternée de l'acier SM45C.

II.5. Méthodologie adoptée

Dans le but d’élaborer un programme de calcul de durée de vie, sous le code Matlab, notre travail a été composé de trois parties :

-La première partie s’intéresse à l’explication de la méthodologie et la formulation mathématique qui donne un aperçu sur les deux critères de Papadopoulos et Findley.

La seconde partie se focalise sur les tests de convergence dans le cas de critère de Papadopoulos et Findley.

-La troisième partie est réservée à la détermination des trajets de chargement.

-La quatrième partie est réservée à l’étude de l’influence de plusieurs paramètres de chargement sur la durée de vie avec la comparaison de deux critères.

- **Pour la 1^{ère} partie :**

Consiste à connaître les limites de fatigue en torsion et flexion purement alternée symétrique(τ_{-1}, f_{-1}), la période et le tenseur de contrainte appliqué. À partir des données, on identifie des constantes de Papadopoulos et Findley, lesquelles sont déterminées par les équations suivantes :

$$\gamma_{\infty} = \tau_{-1} \tag{II.6}$$

$$\alpha_{\infty} = 3 \left(\frac{\tau_{-1}}{f_{-1}} - \frac{1}{2} \right) \tag{II.7}$$

$$\alpha = \frac{\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1 \right)^2}} \dots\dots\dots(II.8)$$

$$\beta = \frac{\tau_{-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tau_{-1}}{f_{-1}} - 1 \right)^2}} \dots\dots\dots(II.9)$$

II.5.1 Critère de Papadopoulos

Le but de cette étape est la détermination des trajets de chargement (*cette étape est valable seulement pour le critère de Papadopoulos*). Chaque plan Δ est caractérisé par le vecteur normal \vec{n} . Les deux angles θ et φ définissent le vecteur \vec{n} dont les composantes se calculent comme suit :

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Dans le plan Δ on définit deux vecteurs unitaires orthogonaux \vec{l} et \vec{r} tels que :

$$l = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

On calcule, à chaque instant t, des deux composantes tangentielles $\vec{\tau}_l(t)$ et $\vec{\tau}_r(t)$ du vecteur contraint tangentielle agissant sur le plan Δ . Ces deux composantes sont calculées comme suit :

$$\vec{\tau}_l(t) = \vec{l} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.7})$$

$$\vec{\tau}_r(t) = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{II.13})$$

En effet $\vec{\tau}_l(t)$ et $\tau_r(t)$ être présentent respectivement les projections du vecteur contrainte tangentielle sur les vecteurs unitaires orthogonaux \vec{l} et \vec{r} .

Enfin, Le trajet de chargement consiste à déterminer et tracer, en fonction du temps, de la courbe de variation

$$\vec{\tau}_l(t) = f[\vec{\tau}_r(t)]. \quad (\text{II.14})$$

II.5.2 Critère de Findley

Le critère de Findley a possédé le même principe comme le critère de Papadoplous (rotation des plans, et recherche du plan critique), mais la différence entre les deux est dans les grandeurs physiques qui forment les équations de chaque critère. Pour expliquer plus, nous avons les équations suivantes :

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$n = [n_x \ n_y \ n_z] = [\sin\phi\cos\varphi \ \sin\theta\sin\varphi \ \cos\theta] \quad (\text{II.15})$$

La contrainte normale max σ_n^{max}

$$\sigma_n^{max} = \max(\vec{n}^t \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \quad (\text{II.16})$$

L'amplitude de la contrainte tangentielle τ_a

$$\tau_a = \frac{\max(|\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \sigma_n \vec{n}|) - \min(|\vec{\sigma} \cdot \vec{n} - \sigma_n \vec{n}|)}{2} \quad (\text{II.17})$$

- Pour la 2^{ème} partie :

II.6 Test de convergence

Pour faire ce que nous avons mentionné dans la méthodologie, nous devons effectuer un test de convergence pour chacun des deux critères. Le critère de Papadopoulos comporte trois tests et celui de Findley en comporte deux.

Le premier test de convergence concerne l'amplitude de la contrainte tangentielle du tenseur de contraint en fonction de temps, c.-à-d. Le maillage de signal par rapport au temps (le nombre des points sur un période). L'objective de ce test est de calculer la valeur stable d'amplitude de la contrainte tangentielle en fonction de nombre de maillage (N) montré sur la figure (II.4).

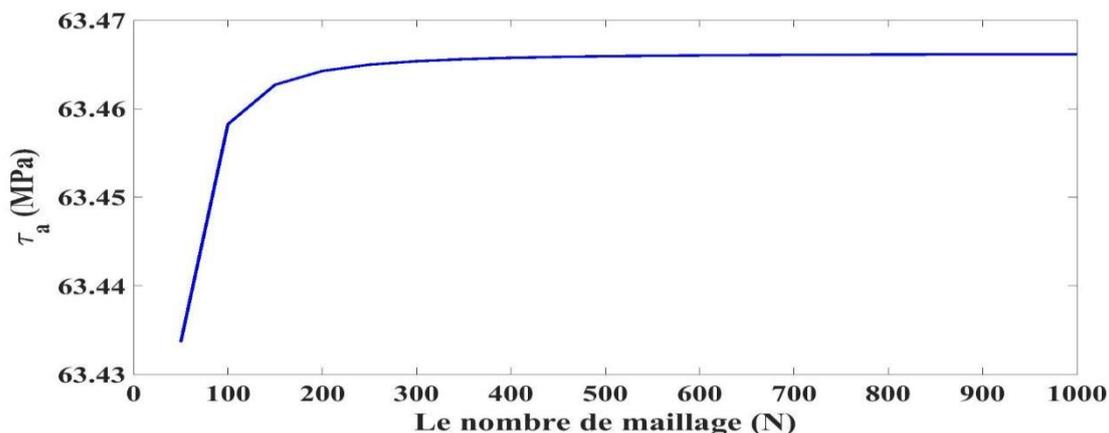
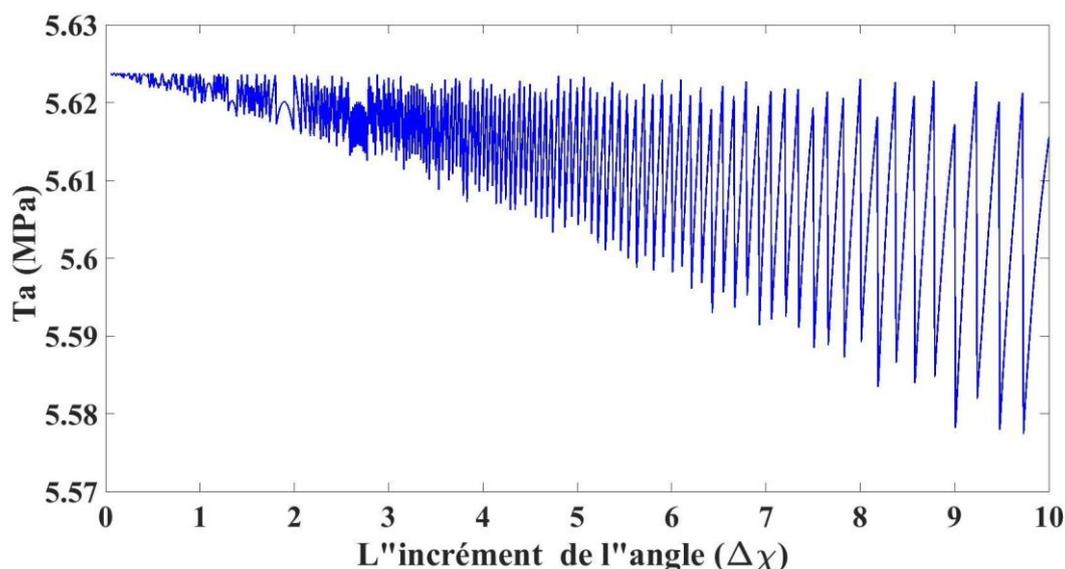


Figure.II.4 : Effet de maillage (N) sur la converge de l'amplitude de la contrainte tangentielle.

La figure montre la convergence de l'amplitude à partir de N=200, une autre remarque que la différence entre le point initial N=50 et N=1000 est de l'ordre $(63.4662 - 63.4336) = 0.0325$ MPa.

Le deuxième test de convergence concerne l'effet de pas de l'angle (χ) (Chi) sur la valeur de **Ta**, l'objectif est étudié l'effet de pas de l'angle (χ) sur la convergence de la grandeur Ta. L'angle (χ) varie de 0 à 360 avec pas défini, la valeur de pas varie avec incrément de 10° jusqu'à 0.05° avec un pas de 0.01° . L'objective de ce test est de calculer la valeur stable de la grandeur **Ta** en fonction de la valeur de pas ($\Delta\chi$) montré sur la figure (II.5).



La figure II.5 : Effet de pas de l'Angel ($\Delta\chi$) sur la convergence de Ta

La figure monte la convergence de Ta pour les petites valeurs de ($\Delta\chi$) , mais si on remarque bien la différence entre la valeur de Ta pour ($\Delta\chi$) égale 10° et 0.05° on trouve que la différence est de l'ordre de (0.0082 MPa).

Le troisième test de convergence n'est pas possible à réaliser, car il dépend des deux tests précédents que nous avons effectués, et cette impossibilité est due au facteur temps. Parce qu'en prenant la précision du premier test et la précision du deuxième test, le temps nécessaire pour atteindre à la convergence est de l'ordre de quelques mois. Finalement, nous avons choisi l'incrément d'un degré pour les deux angles Phi et Thêta.

II.7 Troisième partie : les trajets de chargement

Le traçage des trajets de chargement, il est valable seulement pour le critère de Papadopoulos, le trajet de chargement notion est basé sur l'existence de l'angle (χ) sur le

plan étudié). Dans cette partie, il est réservé à la présentation graphique de quelques trajets de chargement selon les différents cas de tenseur de contrainte applique au point matériel.

Le tenseur de contrainte

Nous examinons un état de contraintes multiaxiales où les signaux sont sinusoïdaux et les périodes des contraintes varient. Les amplitudes des contraintes sont déphasées les unes par rapport aux autres. Ce déphasage entre les périodes et les amplitudes indique que le chargement est non proportionnel. Le tenseur de contrainte est représenté de la manière suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = [\sigma_{xx}(t) \ \sigma_{xy}(t) \ \sigma_{xz}(t) \ \sigma_{xy}(t) \ \sigma_{yy}(t) \ \sigma_{yz}(t) \ \sigma_{xz}(t) \ \sigma_{yz}(t) \ \sigma_{zz}(t)]$$

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xxa} \cdot \sin(\omega_{xx} \cdot t + \delta_{xx}) + \sigma_{xxm}$$

$$\sigma_{yy}(t) = \sigma_{yya} \cdot \sin(\omega_{yy} \cdot t + \delta_{yy}) + \sigma_{yyym}$$

$$\sigma_{zz}(t) = \sigma_{zza} \cdot \sin(\omega_{zz} \cdot t + \delta_{zz}) + \sigma_{zzm}$$

$$\sigma_{xy}(t) = \sigma_{xya} \cdot \sin(\omega_{xy} \cdot t + \delta_{xy}) + \sigma_{xym}$$

$$\sigma_{xz}(t) = \sigma_{xza} \cdot \sin(\omega_{xz} \cdot t + \delta_{xz}) + \sigma_{xzm}$$

$$\sigma_{yz}(t) = \sigma_{yza} \cdot \sin(\omega_{yz} \cdot t + \delta_{yz}) + \sigma_{yzm}$$

Dans cette partie l'étude est scindée en deux parties, la première partie est réservée au traçage de trajet de chargement dû à des cas suivants, présenté par le tableau :

Tableau II.3 le tenseur de contrainte pour un chargement multiaxial

σ_{xxa}	σ_{yya}	σ_{zza}	σ_{xya}	σ_{xza}	σ_{yza}
300MPa	200MPa	350MPa	250MPa	150MPa	300MPa
σ_{xxm}	σ_{yyym}	σ_{zzm}	σ_{xym}	σ_{xzm}	σ_{yzm}
0	0	0	0	0	0

ω_{xx}	ω_{yy}	ω_{zz}	ω_{xy}	ω_{xz}	ω_{yz}
$\frac{2 \cdot \pi}{P}$	$9\omega_{xx}$	$1\omega_{xx}$	$2\omega_{xx}$	$3\omega_{xx}$	$9\omega_{xx}$
δ_{xx}	δ_{yy}	δ_{zz}	δ_{xy}	δ_{xz}	δ_{yz}
0°	0°	0°	0°	0°	0°
σ_{xxa}	σ_{yya}	σ_{zza}	σ_{xya}	σ_{xza}	σ_{yza}
$600MPa$	$400MPa$	$700MPa$	$500MPa$	$300MPa$	$600MPa$
σ_{xxm}	σ_{yym}	σ_{zzm}	σ_{xym}	σ_{xzm}	σ_{yzm}
40	30	10	20	0	60
ω_{xx}	ω_{yy}	ω_{zz}	ω_{xy}	ω_{xz}	ω_{yz}
$\frac{2 \cdot \pi}{P}$	$9\omega_{xx}$	$1\omega_{xx}$	$2\omega_{xx}$	$3\omega_{xx}$	$9\omega_{xx}$
δ_{xx}	δ_{yy}	δ_{zz}	δ_{xy}	δ_{xz}	δ_{yz}
30°	60°	90°	110°	10°	0°

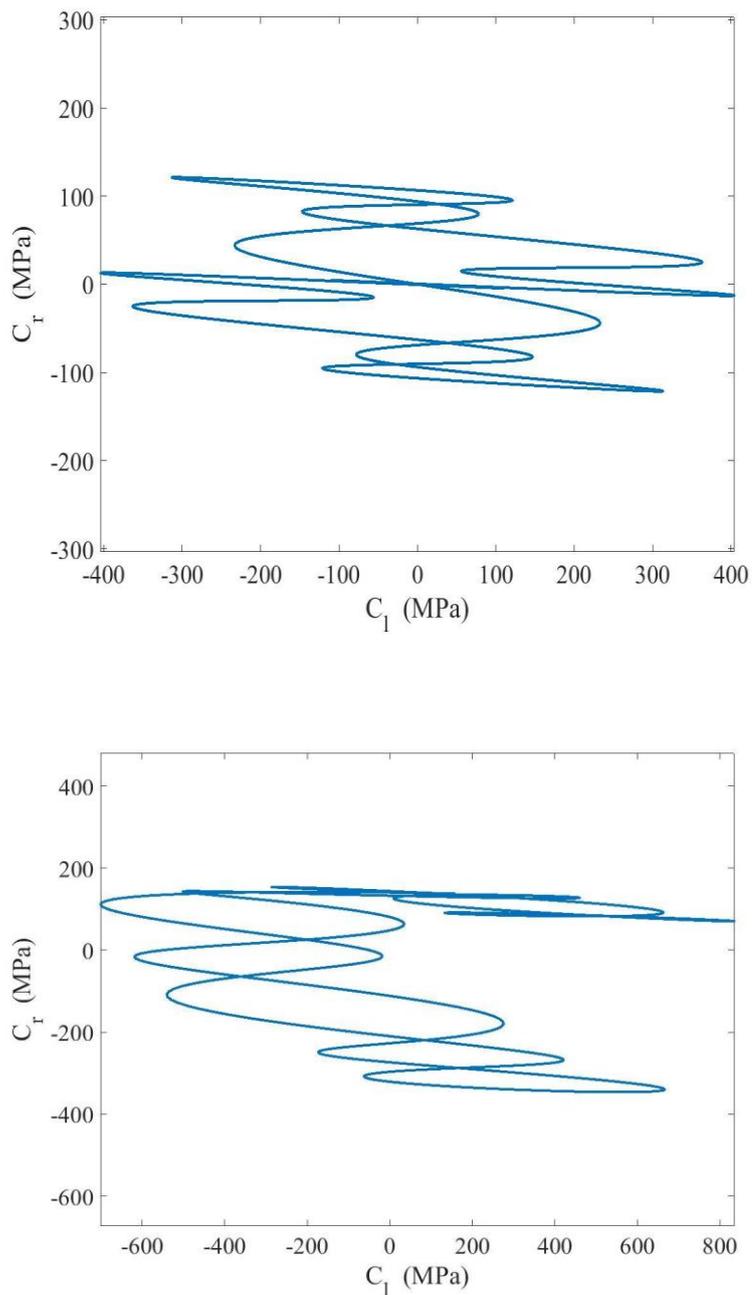


Figure II.6 : Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes multiaxiales

La deuxième partie est réservée au traçage de trajet de chargement dû à un tenseur biaxial, présenté par le tableau :

Tableau II.4 le tenseur de contrainte pour un chargement biaxial

σ_{xxa}	σ_{yya}	σ_{zza}	σ_{xya}	σ_{xza}	σ_{yza}
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

300MPa	0	0	250MPa	0	0
σ_{xxm}	$\sigma_{yy m}$	σ_{zzm}	σ_{xym}	σ_{xzm}	σ_{yzm}
0	0	0	0	0	0
ω_{xx}	ω_{yy}	ω_{zz}	ω_{xy}	ω_{xz}	ω_{yz}
$\frac{2 \cdot \pi}{P}$	0	0	$7\omega_{xx}$	0	0
δ_{xx}	δ_{yy}	δ_{zz}	δ_{xy}	δ_{xz}	δ_{yz}
0°	0°	0°	0°	0°	0°
σ_{xxa}	σ_{yya}	σ_{zza}	σ_{xya}	σ_{xza}	σ_{yza}
600MPa	0	0	500MPa	0	0
σ_{xxm}	$\sigma_{yy m}$	σ_{zzm}	σ_{xym}	σ_{xzm}	σ_{yzm}
40	0	0	20	0	0
ω_{xx}	ω_{yy}	ω_{zz}	ω_{xy}	ω_{xz}	ω_{yz}
$\frac{2 \cdot \pi}{P}$	0	0	$4\omega_{xx}$	0	0
δ_{xx}	δ_{yy}	δ_{zz}	δ_{xy}	δ_{xz}	δ_{yz}
30°	0°	0°	110°	0°	0°

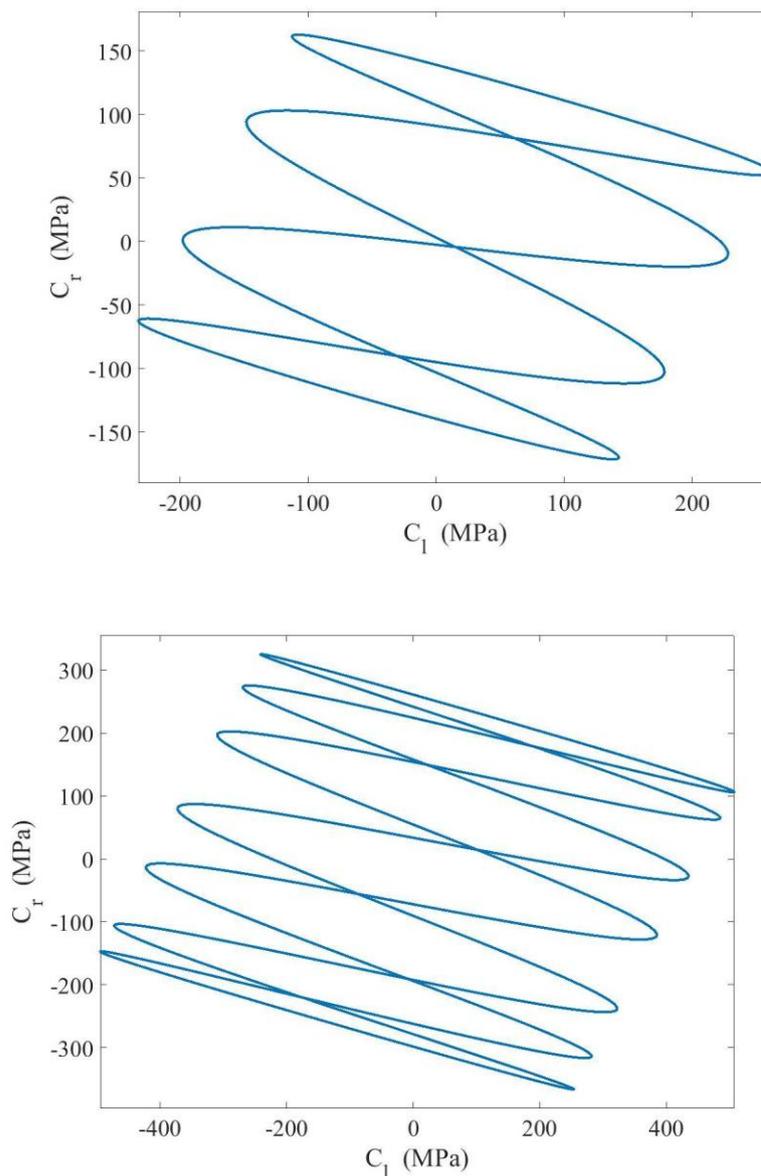


Figure II.7 : Trajets de chargement dans le cas d'un état de contraintes biaxiales

Les figures II.6 et II.7 représente les différents trajets de chargement dû à l'application du tenseur des contraintes, mentionné sur les tableaux II.3 et II.4, le premier tableau représente le cas général (multiaxial) au toutes les composantes et les paramètres défèrent de zéro. Le deuxième tableau représente le cas simplifié du tenseur, le tenseur est composé de sollicitation, de traction suivent la direction de (x) et un cisaillement sur le plan (oxy). L'objective de traçage de trajet de chargement est l'utilisation de cercle circonférentiel (figure II.5). Cette méthode (de cercle circonférentiel) utilisé dans certaine publication de Papadopoulos pour calculer la valeur de T_a , mais notre étude, nous avons utilisé la formule de l'intégrale.

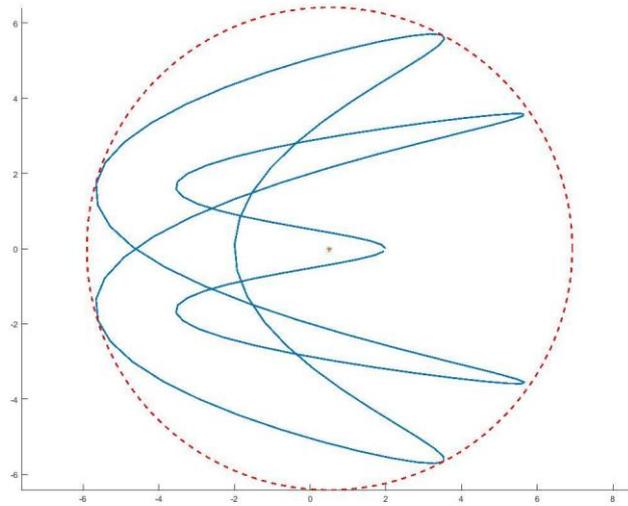


Figure II.8 : Trajets de chargement entouré par le plus petit cercle circonférentiel

II.8 Étude comparative de l'influence des paramètres de chargement sur la tenue en fatigue

Nous avons étudié l'influence des paramètres de chargement sur la résistance à la fatigue dans un état de contraintes biaxiales. Le tenseur de contrainte utilisé est de la forme suivante :

$$\bar{\sigma}(t) = [\sigma_{xx}(t) \ \sigma_{xy}(t) \ 0 \ \sigma_{xy}(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xxa} \cdot \sin \sin (\omega_{xx} \cdot t + \delta_{xx}) + \sigma_{xxm}$$

$$\sigma_{xy}(t) = \sigma_{xya} \cdot \sin \sin (\omega_{xy} \cdot t + \delta_{xy}) + \sigma_{xym}$$

Avec $\alpha = \frac{\omega_{xy}}{\omega_{xx}}$ et $\sigma_{xxm} = 20 \text{ MPa}$ $\delta_{xx} = 30^\circ$ $\delta_{xy} = 0$

$$\sigma_{xxa} = 500 \text{ MPa} \ \sigma_{xya} = 400 \text{ MPa} \ \omega_{xx} = \frac{2\pi}{P}$$

Pour chaque paramètre étudié, nous avons comparé les durées de vie de deux critères.

II.8.1 Etude de l'effet de pulsation sur la durée de vie pour les deux critères

Nous faisons varier la valeur du rapport de la pulsation α afin d'étudier son affect sur la durée de vie. Pour ce faire, nous prenons les valeurs comme suit :

$$\alpha = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$$

La courbe (figure II.9) et le tableau II.5 montre la variation de la durée de vie pour les deux critères en fonction du rapport de la pulsation α

Tableau II.4 Comparaison entre les durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de rapport de pulsation.

α	Papadopoulos	Ta (MPa)	Pmax (MPa)	σ_{eq1} (MPa)	N1 (N de cycles)	Findley	τ_a (MPa)	σ_n^{max} (MPa)	σ_{eq2} (MPa)	N2 (N de cycles)
1		275,35	249,99	403,34	39255,95		297,97	1066,77	475,78	17976,42
2		274,22	249,99	402,21	39966,37		281,28	1087,12	484,86	16836,33
3		294,40	249,99	422,39	30062,64		258,32	1029,14	459,00	20573,05
4		296,18	249,99	424,18	29406,99		326,11	1098,19	489,79	16278,30
5		300,25	249,99	428,24	28011,83		358,99	1099,84	490,53	16198,14
6		303,30	249,99	431,30	27045,37		366,85	1081,77	482,47	17120,84
7		302,87	249,99	430,86	27179,49		363,51	1100,16	490,67	16182,99
8		303,71	249,99	431,71	26921,03		350,73	1100,68	490,90	16158,09
9		305,39	249,99	433,38	26421,10		341,45	1093,53	487,71	16508,49
10		305,31	249,99	433,31	26443,93		359,90	1102,44	491,69	16074,23

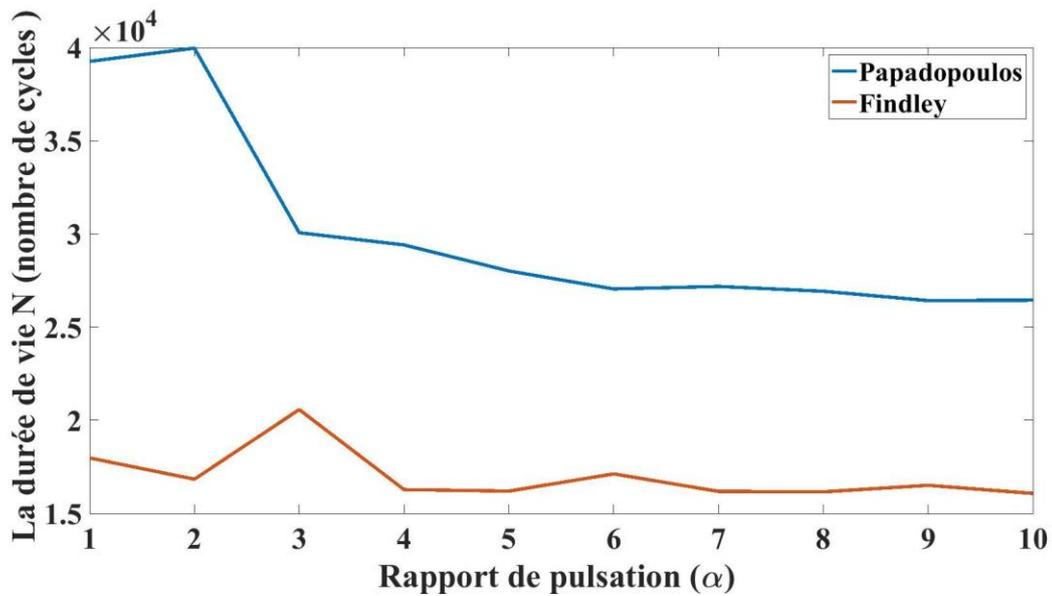


Figure II.9 Variation des durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de rapport de pulsation.

La figure (II.9) représente la variation des durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de rapport de pulsation, en remarque pour les critère de Papadopoulos que la durée de vie diminue en fonction de la rapport de pulsation, mais pour le critère de Findley est quasi stable, autre remarque que la durée de vie calculé par le critère de Papadoplous est toujours plus grande que la durée de vie de Findley.

II.8.1 Etude de l'effet de déphasage sur la durée de vie pour les deux critères

Nous faisons varier la valeur du déphasage δ_{xx} et en met $\delta_{xy} = 0$ afin d'étudier son affect sur la durée de vie. Pour ce faire, nous prenons les valeurs comme suit de 0° jusqu'à 180° avec un pas de 20° :

$$\delta_{xx} = [0: 20: 180]$$

Le tenseur appliqué avec la variation de déphasage

$$\bar{\sigma}(t) = [\sigma_{xx}(t) \ \sigma_{xy}(t) \ 0 \ \sigma_{xy}(t) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xxa} \cdot \sin \sin (\omega_{xx} \cdot t + \delta_{xx}) + \sigma_{xxm}$$

$$\sigma_{xy}(t) = \sigma_{xya} \cdot \sin \sin (\omega_{xy} \cdot t + \delta_{xy}) + \sigma_{xym}$$

Avec $\alpha = \frac{\omega_{xy}}{\omega_{xx}} = 1$ et $\sigma_{xxm} = 20 \text{ MPa}$ $\delta_{xx} = \text{variable}$ $\delta_{xy} = 0$

$\sigma_{xxa} = 900 \text{ MPa}$ $\sigma_{xya} = 800 \text{ MPa}$ $\omega_{xx} = \frac{2\pi}{P}$

La courbe (figure II.10) et le tableau II.6 montre la variation de la durée de vie pour les deux critères en fonction de déphasage δ_{xx}

Tableau II.4 Comparaison entre les durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de déphasage.

$\Delta\delta_{xx}$ (°)	Papadopoulos	Ta (MPa)	Pmax (MPa)	σ_{eq1} (MPa)	N1 (N de cycles)	Findley	τ_a (MPa)	σ_n^{max} (MPa)	σ_{eq2} (MPa)	N2 (N de cycles)
0		275,35	249,99	403,34	39255,95		297,97	1066,77	475,78	17976,42
20		274,22	249,99	402,21	39966,37		281,28	1087,12	484,86	16836,33
40		294,40	249,99	422,39	30062,64		258,32	1029,14	459,00	20573,05
60		296,18	249,99	424,18	29406,99		326,11	1098,19	489,79	16278,30
80		300,25	249,99	428,24	28011,83		358,99	1099,84	490,53	16198,14
100		303,30	249,99	431,30	27045,37		366,85	1081,77	482,47	17120,84
120		302,87	249,99	430,86	27179,49		363,51	1100,16	490,67	16182,99
140		303,71	249,99	431,71	26921,03		350,73	1100,68	490,90	16158,09
160		305,39	249,99	433,38	26421,10		341,45	1093,53	487,71	16508,49
180		305,31	249,99	433,31	26443,93		359,90	1102,44	491,69	16074,23

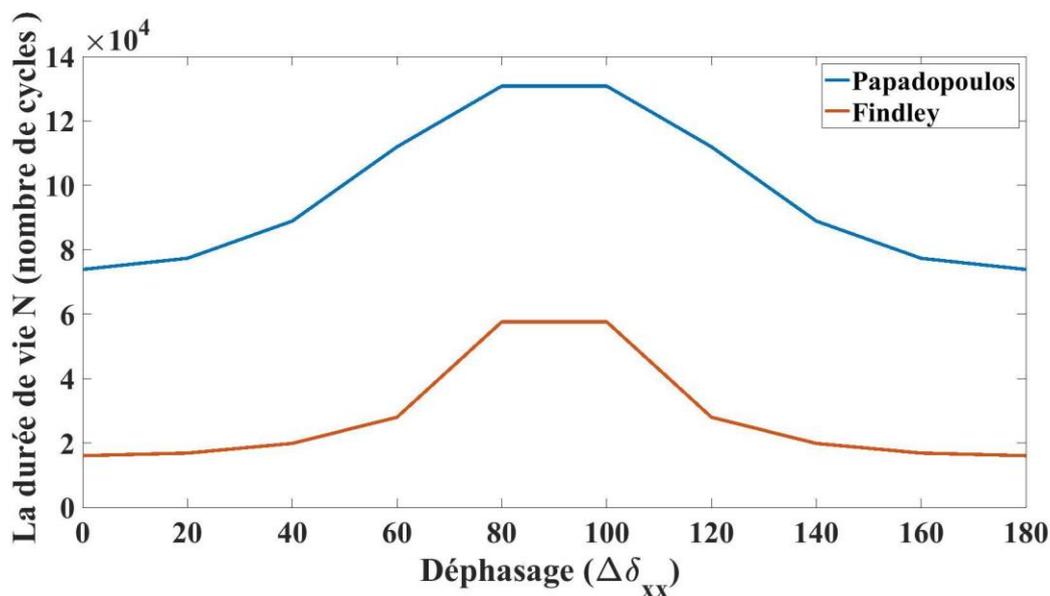


Figure II.10 Variation des durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de rapport de déphasage.

La figure (II.10) représente la variation des durées de vie de deux critères Papadopoulos et Findley en fonction de déphasage, en remarque pour les deux critères de Papadopoulos et Findley que les deux courbes de la durée de vie prendront une forme sinusoïdale en fonction du déphasage, même remarque que le cas de pulsation, la durée de vie calculé par le critère de Papadoplous est toujours plus grande que la durée de vie de Findley.

Conclusion générale et recommandations

Il existe plusieurs études précédentes qui ont traité du problème de la fatigue multiaxiale sous chargement proportionnel à amplitude constante, ainsi que d'autres études concernant la fatigue multiaxiale sous chargement non proportionnel à amplitude constante. Dans cette étude, nous nous sommes concentrés sur l'examen de plusieurs critères à plan critique afin de comparer deux critères spécifiques : ceux de Papadopoulos et de Findley. L'objectif était de procéder à une comparaison entre ces deux critères pour déterminer le critère le plus conservatif et de le comparer avec les résultats expérimentaux si l'existe.

Dans la pratique, la sécurité industrielle et le dimensionnement des pièces mécaniques sont des éléments essentiels pour la fabrication mécanique qui ne peuvent être négligés. Ils sont d'une importance cruciale, car ils sont étroitement liés à la durée de vie des structures. Pour cette raison, les ingénieurs utilisent diverses méthodes scientifiques offrant différentes solutions, représentées par l'utilisation des critères de fatigue multiaxial. Ces méthodes incluent le critère de plan critique, qui traite de la fatigue multiaxiale non proportionnelle à amplitude constante. En effet, le critère de fatigue multiaxiale est employé pour identifier le plan critique et trouver la contrainte tangentielle maximale. Pour réaliser cette tâche, le critère peut être considéré comme un convertisseur d'un état de fatigue multiaxial à un état de fatigue uniaxial, conduisant ainsi à l'utilisation d'une équation simple pour calculer la contrainte équivalente et la comparer à une courbe de fatigue uniaxiale afin de déterminer la durée de vie.

Dans le cadre de l'élaboration d'un programme de calcul de durée de vie sous le code Matlab, notre travail a été structuré en quatre parties principales. La première partie s'intéresse à l'explication de la méthodologie et à la formulation mathématique, fournissant un aperçu détaillé des critères de Papadopoulos et de Findley. Cette section pose les bases théoriques nécessaires pour comprendre les principes sous-jacents de ces deux critères de fatigue. La seconde partie se focalise sur les tests de convergence pour les critères de Papadopoulos et de Findley, permettant de vérifier la précision et la robustesse des calculs en répétant les étapes de programmation pour assurer des résultats fiables. La troisième partie est dédiée à la détermination des trajets de chargement, développant des méthodes pour tracer les

chemins de charge en fonction de la nature des contraintes appliquées, qu'elles soient biaxiales ou multiaxiales. Enfin, la quatrième partie examine l'influence de divers paramètres de chargement sur la durée de vie des matériaux et compare les deux critères, permettant de déterminer lequel des critères est le plus conservateur et le plus représentatif des conditions réelles de fatigue.

En perspectives, afin de compléter cette étude, nous recommandons ce qui suit :

- Élargi l'étude pour étudier et comparer plus de critères à plan critique plus la validation du modèle par les résultats expérimentaux,
- Étudier l'effet des traitements des surfaces sur la durée de vie, dans le cas de chargement non proportionnels,
- Étendre l'étude à l'endommagement en considérant des chargements avec des blocs à amplitudes variables.

Bibliographie

- [1] N. Abderrahmane et. L. Amina, « MEMOIRE DE FIN D'ETUDE : CRITERES DE FATIGUE MULTIAXIALE SOUS SOLLICITATIONS,» Abdelhamid Ibn Badis Université of Mostaganem, 2020.
- [2] Benkabouche S. Endommagement en fatigue multiaxiale des pièces traitées superficiellement, Thèse de doctorat, Université de Mostaganem, 2016
- [3] JABBADO, Mohamad. *Fatigue polycyclique des structures métalliques: durée de vie sous chargements variables*. 2006. PhD Thesis. Ecole Polytechnique X.
- [4] WEBER, Bastien. *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque/ Theses. fr*. 1999. PhD Thesis. Lyon, INSA.
- [5] S. A. ABDELSADOK et. M. GHALEM, « MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE Thème : Calcul en Fatigue des structures sollicitées sous chargements multiaxiaux d'amplitude constante,» Université Abdelhamid Ben Badais – Mostaganem-, 2019.
- [6] MOHAMED, Adjadj, et al. *République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*. 2020. PhD Thesis. Université de Mostaganem.
- [7] WANG, Ying-Yu; YAO, Wei-Xing. Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria. *International Journal of Fatigue*, 2004, 26.1: 17-25.
- [8] BANVILLET, Alexis. *Prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés*. 2001.
- [9] WEBER, Bastien. *Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque*. 1999. PhD Thesis. Lyon, INSA.
- [10] AID, A. Cumul d'endommagement en fatigue multiaxiale sous sollicitations variables. *Universite Djillali Liabes de Sidi-Bel-Abbes*, 2006.
- [11] NADOT, Y.; BILLAUDEAU, T. Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials. *Engineering fracture mechanics*, 2006, 73.1: 112-133.

BIBLIOGRAPHIE

[12] FINDLEY, William N. *Combined-stress fatigue strength of 76S-T61 aluminum alloy with superimposed mean stresses and corrections for yielding*. Washington, DC, USA: National Advisory Committee for Aeronautics, 1953.

[13] Findley WN. Fatigue of metals under combinations of stresses. *Trans ASME* 1957;79:1337–8.

[14] Findley WN. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Trans ASME* 1959;81:301–5.