



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministry of Higher Education and Scientific Research  
جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم  
Abdel Hamid Ibn Badis University – Mostaganem  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
Faculty of Sciences and Technology  
قسم الهندسة الميكانيكية



Department of Mechanical Engineering

N° d'ordre : M2...../GM/2024

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE

**Filière : Génie Mécanique**

**Spécialité : Construction Mécanique**

### Thème

**Analyse de flambement et vibration des plaques composites  
en utilisant la théorie HSDT**

Présenté par

❖ Khelifa wafaa

Soutenu le 24/06/ 2024 devant le jury composé de :

Présidente :	ZAOUI FATIMA ZOHRA	M. C. B	Université de Mostaganem UMAB
Examinatrice :	BELHACHEMI AMINA	M. A. A	Université de Mostaganem UMAB
Rapporteur :	OUINAS DJAMEL	Professeur	Université de Mostaganem UMAB

Année universitaire 2023 / 2024

# Dédicaces

Je dédie ce projet

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon très cher père

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourager.

A mon mari : Maizi Ahmed

Pour ton soutien inébranlable,

Ce travail est dédié à toi, en témoignage de ma gratitude et de mon affection.

A mes frères : Touati, Abdellah, Mohamed

A ma chère sœur T et ma belle-sœur F

A tous mes nièces et neveux, mes amies et cousines proches, Pour leur soutien moral, puisse Allah vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite,

A tout ceux qui m'aiment et que j'aime

**Khelifa Wafaa**

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance envers mon directeur de mémoire, professeur D. Ouinass pour son soutien inestimable, ses conseils judicieux et son encouragement,

Je souhaite également exprimer ma profonde gratitude envers Mme F.Z. Zaoui pour le temps qu'elle a consacré à m'apporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche, son exigence m'a grandement stimulé, ainsi que pour son assistance précieuse et ses commentaires constructifs qui ont contribué à l'amélioration de ce travail.

Je remercie en particulier les membres du jury pour leur temps, leur expertise et leur attention portée à mon travail lors de la soutenance de ce mémoire.

Je souhaite également adresser mes remerciements les plus chaleureux au département de génie mécanique pour son soutien continu tout au long de mes études.

# Liste des Figures

<b>Figure I-1</b> : Un exemple de matériau composite utilisé dans l'aéronautique : le PRFC [10]...	3
<b>Figure I-2</b> : Matériau composite [11].....	4
<b>Figure I-3</b> : Classifications des matériaux composites [12].....	5
<b>Figure I-4</b> : Constituants des matériaux composites [13]. ....	6
<b>Figure I-5</b> : Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié [1].....	7
<b>Figure I-6</b> : Nid d'abeille (matériaux composite) [14].....	7
<b>Figure I-7</b> : Types de renforts [15].....	8
<b>Figure II-1</b> : Système de coordonnées et numérotation des couches utilisés pour une plaque stratifiée typique [16] .....	13
<b>Figure III-1</b> : L'impact du rapport côté/épaisseur sur la charge de flambement uniaxiale non dimensionnée des stratifiés carrés antisymétriques à plis croisés $(0/90)_n$ simplement supportés.....	26
<b>Figure III-2</b> : Impact du rapport côté/épaisseur sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle de stratifiés carrés antisymétriques à plis d'angle simplement supportés $(45/-45)_n$ .....	26
<b>Figure III-3</b> : Effet du rapport de module d'élasticité sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle des stratifiés carrés antisymétriques à deux couches, simplement supportés et soumis à une charge transversale sinusoïdale ( $a/h = 10$ ). ....	27
<b>Figure III-4</b> : Variation de la charge critique du flambement en fonction du rapport $(b/a)$ pour une plaque rectangulaire stratifiée $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ .....	28
<b>Figure III-5</b> : Évolution de la fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques à plis angulaires $(45/-45)_n$ en fonction du rapport d'épaisseur (Matériau 2, avec $E_1 / E_2 = 40$ ).....	33
<b>Figure III-6</b> : Évolution de la fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques à plis croisés $(0/90)_n$ en fonction du rapport d'épaisseur (Matériau 2, avec $E_1 / E_2 = 40$ ).....	34
<b>Figure III-7</b> : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport $(b/a)$ pour une plaque en composites stratifié à angles croisés $(45/-45)$ .....	34
<b>Figure III-8</b> : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport $(b/a)$ pour une plaque en composites stratifié antisymétrique $(0/90)$ .....	35

# Liste des tableaux

<b>Tableau I-1 :</b> Exemples de matériaux composites, pris au sens large. [11].....	5
<b>Tableau III-1 :</b> Les propriétés des matériaux orthotropes .....	23
<b>Tableau III-2 :</b> La charge de flambement uniaxiale non-dimensionnelle d'un carré stratifié simplement supporté avec des plis transversaux antisymétriques (0/90/...) est évaluée pour un rapport de côté ( $a/h=10$ ). .....	24
<b>Tableau III-3 :</b> La charge de flambement uniaxiale non dimensionnelle de stratifiés carrés à deux couches ( $\theta/-\theta$ ) simplement supportés .....	25
<b>Tableau III-4 :</b> Fréquences fondamentales non dimensionnelles de plaques carrées antisymétriques pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec $a/h = 5$ . .....	30
<b>Tableau III-5 :</b> Les fréquences fondamentales adimensionnelles de plaques carrées antisymétriques pour différentes valeurs de $a/h$ avec un rapport $E_1/E_2$ de 40.....	30
<b>Tableau III-6 :</b> Fréquences fondamentales sans dimension pour une plaque carrée stratifiée avec des plis angulaires antisymétriques, simplement supportée.....	31
<b>Tableau III-7 :</b> Fréquence fondamentale sans dimension de la plaque carrée simplement supportée ( $\theta/-\theta/...$ ) (avec $E_1/E_2 = 40$ ). .....	32
<b>Tableau III-8 :</b> Fréquence fondamentale sans dimension d'une plaque carrée stratifiée avec un agencement antisymétrique des angles.....	33

# Liste des abréviations

$V_f$	Fraction volumique de fibre
$V_m$	Fraction volumique de matrice
$P_f$	Fraction massique de fibre
$P_m$	Fraction massique de matrice
$w_b$	Déplacement transversal de flexion
$w_s$	Déplacement transversal de cisaillement
$\varphi$	Rotation due au cisaillement
$g(z)\varphi$	Effet de l'étirement (effet de stritching)
$\sigma_z$	Contrainte normale transversal
$\sigma_x, \sigma_y$	Contrainte normale dans le plan
$U$	Déplacement dans la direction x
$V$	Déplacement dans la direction y
$u_b, v_b$	Composante de flexion
$u_s, v_s, w_s$	Composante de cisaillement
$\varepsilon$	Tenseur de déformation
$a, b$	Dimensions de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$Q_{ij}$	Rigidité plane
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de poisson
$G$	Module de Cisaillement
$f(z)$	La fonction de cisaillement
$q$	Charge répartie
$t$	Temps
$N_x, N_y, N_z, N_{xy}$	Efforts normaux dans la plaque
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moment de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment de cisaillement
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Efforts tranchants dans la plaque

$A_{ij}, B_{ij}$	Les rigidités de la plaque
$U$	Energie de déformation
$V$	Travail effectué par les forces appliqué
$T$	L'énergie cinétique de la plaque
$\rho$	Masse volumique
$I$	Moment d'inertie
$\delta$	Variation par rapport à x et y
$S_{ij}$	Coefficients de la matrice de rigidité
$m_{ij}$	Coefficient de la matrice masse
$\tau_{xy}, \tau_{yz}$	Contrainte de cisaillement en plan
$N_{cr}$	Charge critique de flambement
$\bar{\omega}$	Fréquence de vibration
$\partial$	Dérivée partielle
$\lambda$	constante
$N(\psi)$	Charge de flambement
$n$	Nombre de couche
$m, r$	Constantes

# Résumé

L'analyse du flambage et de la vibration libre des plaques composites est essentielle pour concevoir des structures légères et résistantes dans diverses applications industrielles. Dans cette étude, nous avons utilisé la théorie HSDT (théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur) pour modéliser le comportement du flambage et de vibration des plaques composites. Cette théorie, reposant sur des approximations simplifiées des déplacements, offre une précision adéquate pour de nombreuses applications d'ingénierie. Le modèle mathématique HSDT suppose que les déplacements dans la direction normale à la plaque sont représentés par une fonction cubique de la coordonnée dans cette direction, ce qui permet de mieux prendre en compte les effets de cisaillement par rapport aux approches plus simples. En utilisant ce modèle, nous avons analysé le comportement de flambage et de vibration des plaques composites sous différentes charges et conditions de chargement. Les résultats obtenus ont montré que la théorie HSDT permet une meilleure modélisation des comportements non linéaires des plaques composites en flambage et en vibration. Ces résultats offrent des informations précieuses pour la conception et l'optimisation des structures composites, contribuant ainsi à améliorer leur performance et leur durabilité dans divers environnements industriels.

**Mots clés :** théorie HSDT, flambage, charge critique, vibration libre, composite, plaque.



## ملخص

تحليل الإنبعاك و الإهتزاز الحر للألواح المركبة ضروري لتصميم هياكل خفيفة الوزن و قوية في مختلف التطبيقات الصناعية. في هذه الدراسة إستخدمنا نظرية التشوه العالي للإنزلاق لنمذجة سلوك الإنبعاك والاهتزاز للألواح المركبة. تعتمد هذه النظرية، التي تقوم على تقريبات بسيطة للتشوهات، على دقة كافية للعديد من التطبيقات الهندسية.

النموذج الرياضي لهذه النظرية يفترض أن التشوهات في اتجاه عمودي على اللوح يتمثل في دالة مكعبة للإحداثيات في هذا الاتجاه، مما يسمح باستيعاب تأثيرات القص بشكل أفضل مقارنة بالنهج الأبسط. باستخدام هذا النموذج، قمنا بتحليل سلوك الإنبعاك و الإهتزاز للألواح المركبة تحت أحمال مختلفة وظروف تحميل متنوعة. أظهرت النتائج المتحصل عليها أن هذه النظرية تسمح بنمذجة أفضل للسلوك غير الخطي للألواح المركبة في الإنبعاك والإهتزاز. توفر هذه النتائج معلومات قيمة لتصميم وتحسين هياكل الألياف الزجاجية، مما يساعد في تحسين أدائها ومثانتها في مختلف البيئات الصناعية.

**الكلمات الرئيسية:** نظرية التشوه العالي للإنزلاق، إنبعاك، حمولة حرجة، إهتزاز حر، مركب، لوحة.

# Abstract

Buckling and free vibration analysis of composite plates is essential for designing lightweight and strong structures in various industrial applications. In this study, we used HSDT (higher order shear deformation theory) for modeling the buckling and vibration behavior of composite plates. This theory, based on simplified approximations of displacements, provides adequate accuracy for many engineering applications.

The HSDT mathematical model assumes that the displacements in the direction normal to the plate are represented by a cubic function of the coordinate in this direction, which allows shear effects to be better taken into account compared to simpler approaches. Using this model, we analyzed the buckling and vibration behavior of composite plates under different loads and loading conditions. The results obtained showed that HSDT theory allows better modeling of the nonlinear behavior of composite plates in buckling and vibration. These results provide valuable information for the design and optimization of composite structures, thereby helping to improve their performance and durability in various industrial environments.

**Key words:** HSDT theory, buckling, critical load, free vibration, composite, plate.

# Table des matières

Dédicaces .....	i
Remerciements .....	ii
Liste des Figures.....	iii
Liste des tableaux .....	iv
Liste des abréviations .....	v
Résumé.....	vii
ملخص.....	viii
Abstract .....	ix
Introduction générale.....	1
Chapitre I :.....	3
Généralités sur les matériaux composites .....	3
I.1 Introduction : .....	3
I.2 L'utilisation des matériaux composites :.....	3
I.3 Caractéristique générale : .....	4
I.4 Classification des matériaux composites : .....	5
I.4.1 Classification selon la forme des constituants :.....	6
I.4.2 Classification selon l'orientation :.....	6
I.4.3 Les panneaux sandwich :.....	7
I.4.4 Classification suivant la nature des constituants : .....	7
I.5 Fractions volumiques et massiques :.....	9
I.5.1 Fraction volumique :.....	9
I.5.2 Fraction massique : .....	9
I.6 Conclusion :.....	10
Chapitre II : .....	11

Modélisation mathématique .....	11
II.1 Introduction :.....	11
II.2 Théorie raffinée des plaques stratifiées en composites .....	11
II.2.1 Hypothèses de base : .....	11
II.2.2 Cinématique : .....	12
II.3 Équations constitutives : .....	13
II.4 Équations régissant : .....	15
II.5 Solutions analytiques .....	18
II.5.1 Solutions analytiques pour les stratifiés .....	18
II.5.2 Solutions analytiques pour antisymétrique stratifiés à plis angulaires :.....	20
II.6 Conclusion : .....	22
Chapitre III : .....	23
Analyse de vibration et flambement sur les plaques composites .....	23
III.1 Introduction :.....	23
III.2 Les résultats numériques :.....	23
III.3 L'analyse du flambement de la plaque : .....	23
III.4 L'analyse des vibrations libre des plaques composites : .....	28
III.5 Conclusion : .....	35
Conclusion générale .....	36
Bibliographie .....	37

## Introduction générale

Les composites sont actuellement largement utilisés dans divers secteurs, notamment dans l'automobile (pour les ailes et les toits de voiture), l'aéronautique (pour les éléments de fuselage des avions), l'aérospatial (pour les barrières thermiques des navettes spatiales), la construction navale (pour les coques de bateaux), la microélectronique (pour les microcomposants électroniques et les circuits imprimés), les nanotechnologies (pour les microsystèmes électromécaniques), le domaine militaire (pour le blindage), la médecine (pour les prothèses), ainsi que dans le domaine du sport et des loisirs (pour les cadres de vélo) [1].

Les matériaux composites, constitués d'une matrice et d'un renfort, offrent une alternative prometteuse aux matériaux conventionnels. Ils permettent de combiner les avantages de leurs composants pour améliorer diverses propriétés. Par exemple, un composite avec une matrice en polymère et des fibres de carbone peut allier la résistance des fibres de carbone à la légèreté du polymère. Ces matériaux sont ajustables en pourcentage de renfort et en orientation des fibres, offrant ainsi des propriétés personnalisées. Leur utilisation est particulièrement répandue dans des secteurs comme l'aéronautique, où environ 50% des composants des avions, comme l'Airbus A350, sont en composites [1].

Les méthodes de calcul des structures composites diffèrent de celles employées pour les matériaux conventionnels. En raison de l'hétérogénéité résultant de la présence de phases multiples, l'application directe des formules de la mécanique des milieux continus est impossible. Pour pallier cela, des approches basées sur l'homogénéisation ont été développées pour fournir une formulation relativement simplifiée du comportement des composites. La compréhension de la rupture des matériaux composites a fait l'objet de nombreuses recherches scientifiques, avec le développement des modèles visant à prédire leur défaillance. Ce domaine de recherche reste actif, soutenu par le développement de méthodes de calcul avancées, notamment grâce à des logiciels et des ordinateurs performants, permettant aux chercheurs de mener des analyses approfondies pour prédire de manière fiable les dommages survenant dans les composites [1].

On peut développer ces modèles en se fondant soit sur des théories du déplacement (lorsqu'on utilise le principe du travail virtuel) soit sur des théories des contraintes de déplacement (lorsqu'on applique le théorème variationnel mixte de Reissner). Généralement, on peut les regrouper en trois principales catégories : la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT) et la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) [2].

Le CPT, qui ignore les effets de déformation par cisaillement transversal, offre des résultats précis pour les plaques minces. Toutefois, pour les plaques moyennement épaisses, il sous-estime les déformations et surestime les charges de flambage ainsi que les vibrations naturelles. Le FSDT prend en compte l'effet de déformation par cisaillement transversal, mais nécessite un facteur de correction du cisaillement pour satisfaire aux conditions de contrainte de cisaillement transversale libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Bien qu'il offre une description suffisamment précise de la réponse pour les plaques minces à

moyennement épaisses, il est peu pratique à utiliser en raison de la difficulté à déterminer la valeur correcte du facteur de correction du cisaillement [2].

Pour contourner cette difficulté, de nombreuses théories HSDT ont été développées en se basant sur l'hypothèse de variations quadratiques, cubiques ou d'ordre supérieur des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque, tels que : Reddy [3], Karama [4], Whitney et al.[5], Ren [6], Xiang et al. [7] et Swaminathan [8] ;

Même si les théories HSDT, avec leurs cinq inconnues, offrent une précision adéquate pour prédire le comportement des tôles minces à épaisses, leurs équations de mouvement sont bien plus complexes que celles du FSDT et du CPT [2].

Dans ce mémoire, trois chapitres sont présentés ; nous commençons d'abord par des généralités sur les matériaux composites dans le chapitre I, et puis la modélisation mathématique de la théorie HSDT dans le chapitre II. Le chapitre III porte sur notre travail, l'analyse de flambement des plaques en composites via la théorie HSDT.

Nous terminerons notre mémoire par une conclusion.

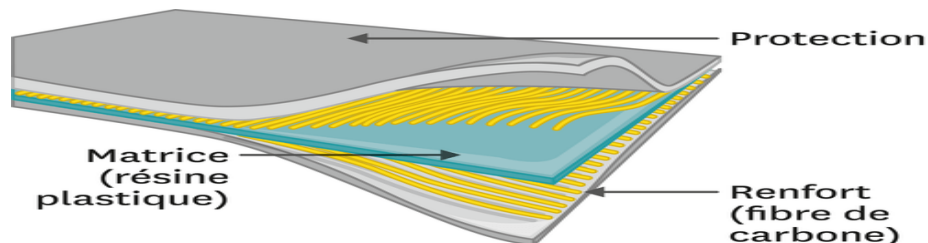
# Chapitre I :

## Généralités sur les matériaux composites

### I.1 Introduction

Les matériaux sont sélectionnés pour leurs propriétés spécifiques et transformés pour créer des objets selon des géométries précises et des fonctions déterminées. Ils sont classés en métaux, céramiques et polymères en fonction de leurs liaisons atomiques. Les composites, semi-conducteurs et biomatériaux sont aussi des catégories importantes. L'utilisation de fibres résistantes pour renforcer des matériaux abordables est une pratique ancienne. Les composites, notamment les polymères renforcés de fibres de verre et de carbone, ont connu un développement rapide ces dernières décennies [1].

Un composite est constitué de renforts et d'une matrice étroitement liée pour éviter tout glissement ou séparation. Les renforts, qu'ils soient sous forme de fibres continues ou discontinues, fournissent la résistance mécanique, tandis que la matrice assure la cohésion et la répartition des forces. L'agencement et l'orientation des fibres renforcent les propriétés mécaniques de la structure. Les composites à renfort de fibres longues sont utilisés dans divers secteurs industriels tels que le nautisme, l'automobile, l'aérospatiale et l'aéronautique. Les pièces structurales sont fabriquées par empilement de couches pour optimiser l'orientation des renforts en fonction des charges. Le choix de la résine ou du renfort dépend de l'application finale [9].



**Figure I-1** : Un exemple de matériau composite utilisé dans l'aéronautique : le PRFC [10].

### I.2 L'utilisation des matériaux composites

Le marché des matériaux composites représente des millions de tonnes, mais il reste nettement inférieur à celui des aciers, qui le dépasse de plusieurs centaines de fois. Les matériaux composites à haute performance sont principalement utilisés dans les domaines suivants :

- Automobile : toits, habitacles, coques de voitures de course, etc.
- Énergies renouvelables : pales d'éoliennes, supports de panneaux solaires, etc.
- Constructions civiles : toitures, cloisons, canalisations, etc.
- Constructions nautiques : coques de bateaux, etc.
- Aéronautique (airbus A350 avec plus de 50% des matériaux sont en composites, NH90 Eurocopter avec plus de 85% des matériaux sont en composites...)

- Électricité et électronique (circuits imprimés à base de fibres, coques de téléphones de haute qualité...);
- Sport et loisir (raquette de tennis, cadre de vélo, canne à pêche...);
- Matériel médical (prothèses dentaires, chaises roulantes...) [1].

### I.3 Caractéristique générale

Les matériaux composites sont constitués de phases discontinues dispersées dans une phase continue. Lorsqu'ils contiennent plusieurs phases discontinues de natures différentes, on les appelle des matériaux composites hybrides. Habituellement, la phase discontinue, plus dure et aux propriétés mécaniques supérieures, est appelée renfort, tandis que la phase continue est la matrice. Une exception est observée dans les polymères modifiés par des élastomères, où la matrice rigide reste inchangée tandis que la résistance aux chocs est améliorée. Les propriétés des matériaux composites dépendent des matériaux constitutifs, de leur distribution géométrique et de leurs interactions [11].

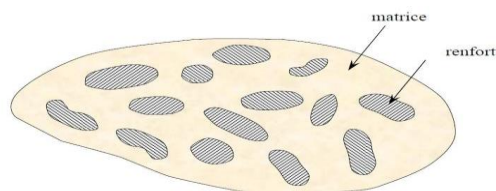


Figure I-2 : Matériau composite [11].

Tableau I-1 : Exemples de matériaux composites, pris au sens large [11].

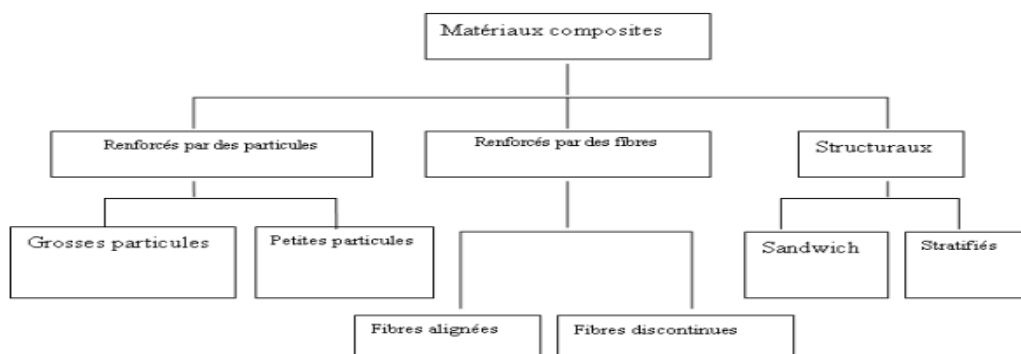
Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2 Composites à matrice minérale Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, biomédecine, etc. Pièces thermo-mécaniques
3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de	Espace



	carbone	
4. Sandwiches <ul style="list-style-type: none"> <li>• Peaux</li> <li>• Ames</li> </ul>	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

#### I.4 Classification des matériaux composites

Les matériaux composites sont regroupés en trois catégories principales, avec plusieurs sous-catégories, comme indiqué dans la **figure I-3**. D'autres matériaux tels que les matériaux FGM, le bois et certaines structures tissées sont également considérés comme des composites par certains scientifiques [1].

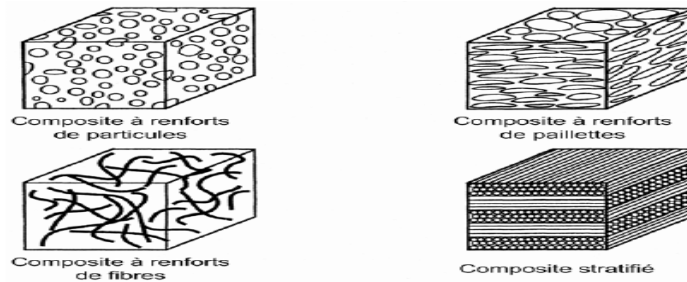


**Figure I-3** : Classifications des matériaux composites [12].

La description d'un matériau composite nécessite la spécification de plusieurs éléments :

- La nature et les propriétés des constituants.
- La géométrie et la distribution du renfort.
- La nature de l'interface entre la matrice et le renfort.

La géométrie du renfort, comprenant sa forme, taille, concentration et disposition, influence les propriétés du composite. Une distribution uniforme du renfort garantit l'homogénéité des propriétés, tandis qu'une distribution inégale peut causer des défaillances prématurées. L'orientation des fibres dans les composites renforcés par des fibres détermine l'anisotropie, essentielle pour contrôler les propriétés finales par une conception et une fabrication appropriée [11].



**Figure I-4** : Constituants des matériaux composites [13].

#### **I.4.1 Classification selon la forme des constituants**

Selon la forme de leurs constituants, les composites se divisent en deux grandes catégories : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres [11].

##### **I.4.1.1 Composites à fibres**

Un matériau composite à fibres utilise des fibres comme renfort, qui peuvent être continues ou discontinues, pour contrôler les propriétés mécaniques. Cela permet de créer une gamme de matériaux allant de fortement anisotropes à isotropes. Les concepteurs peuvent ainsi ajuster les constituants et l'orientation des fibres pour personnaliser les comportements mécaniques et physiques du matériau selon les besoins spécifiques du projet [11].

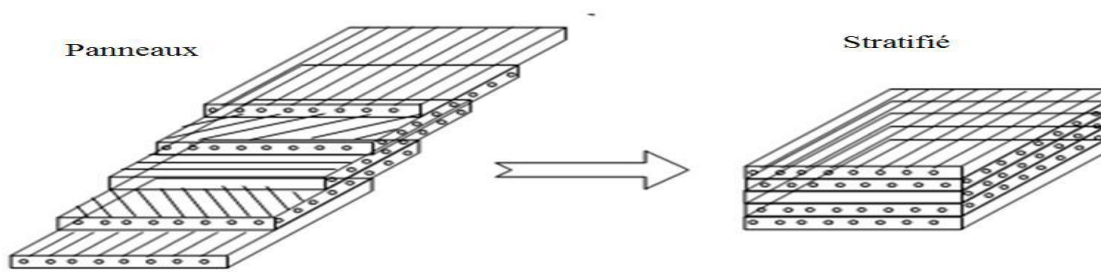
L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude approfondie de leurs comportements mécaniques [11].

##### **I.4.1.2 Composites à particules**

Un matériau composite est classé comme un composite à particules lorsqu'il utilise des particules comme renfort. Contrairement aux fibres, ces particules n'ont pas de dimension privilégiée. Elles sont souvent utilisées pour améliorer diverses propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la résistance à la température, ou pour réduire les coûts sans altérer les caractéristiques du matériau. Le choix de la combinaison matrice-particules dépend des propriétés souhaitées ; par exemple, l'ajout de plomb dans des alliages de cuivre facilite l'usinage. Bien que les composites à particules couvrent un large domaine d'applications, leur diversité rend leur étude moins répandue [11].

#### **I.4.2 Classification selon l'orientation**

Un stratifié est un composite de plusieurs couches avec des propriétés variées selon leur orientation. Ces couches sont liées ensemble de façon à ce que leur résistance principale diffère d'une couche à l'autre, comme montré dans la **figure I-5** [1].



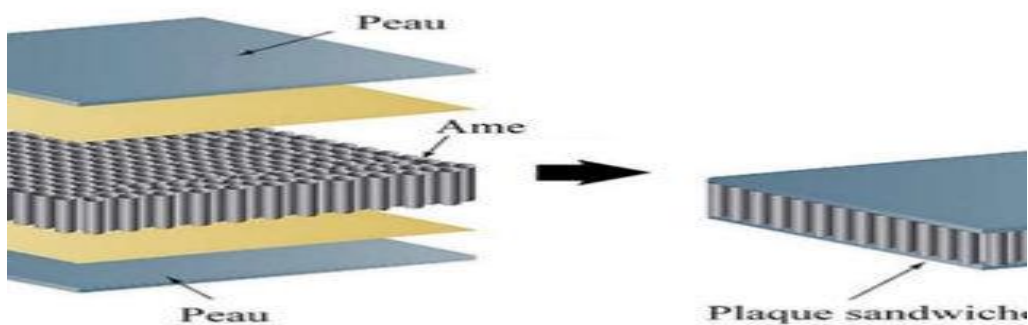
**Figure I-5 :** Principe d'empilement de panneaux pour constituer un stratifié [1].

Un stratifié est identifié selon les principes suivants :

- Les couches sont désignées successivement, de la face inférieure à la face supérieure, entre crochets et séparées par le symbole « / », par exemple :  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ .
- Les couches du même matériau et de même orientation sont identifiées par un indice numérique :  $[0/45_2/90/-45_2/0]$ .
- Pour les structures symétriques, indiquée par le symbole « s », comme dans l'exemple de  $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ , qui devient  $[-45/45/-45]_s$  [9].

#### I.4.3 Les panneaux sandwich

Ces matériaux composites sont constitués de deux couches d'un matériau hautement résistant, séparées par un noyau composé d'un matériau moins dense, moins rigide et moins résistant, comme indiqué dans la **figure I-6** [1].



**Figure I-6 :** Nid d'abeille (matériaux composite) [14].

#### I.4.4 Classification suivant la nature des constituants

Les matériaux composites sont classés en fonction de la nature de leur matrice ;

1. Composites à matrice organique (résine, charges), comprenant :

- Des fibres minérales telles que le verre, le carbone, etc.
  - Des fibres organiques comme le Kevlar, les polyamides, etc.
  - Des fibres métalliques telles que le bore, l'aluminium, etc.
2. Les composites à matrice métallique comprennent des alliages légers et ultra-légers tels que l'aluminium, le magnésium et le titane, associés à :
- Des fibres minérales comme le carbone, le carbure de silicium (SiC),
  - Des fibres métalliques telles que le bore,
3. Les composites à matrice minérale, principalement céramiques, sont associés à :
- Des fibres métalliques comme le bore,
  - Des particules métalliques telles que les cermets,
  - Des particules minérales comme les carbures, les nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique sont généralement limités à des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, tandis que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés à des températures plus élevées : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique et jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique [11].

#### I.4.4.1 Additifs

Des substances ajoutées à la résine améliorent ses propriétés mécaniques, comme des charges de renforcement (5 à 150 µm) ou des additifs comme des colorants ou des agents de démoulage. L'utilisation de charges non renforçantes réduit les coûts des résines [9].

#### I.4.4.2 Renforts

La **figure I-7** présente la classification des types de renforts généralement observés.



**Figure I-7** : Types de renforts [15].

## I.5 Fractions volumiques et massiques

Un facteur crucial influençant les propriétés mécaniques des matériaux composites est la proportion relative entre la matrice et le renfort, exprimée en fraction volumique ou massique. Les fractions massiques sont plus pratiques à mesurer lors de la fabrication, tandis que les fractions volumiques sont utilisées directement dans les modèles théoriques [11].

### I.5.1 Fraction volumique

Prenons en considération un volume  $V_c$  de matériau composite, constitué d'un volume  $V_f$  de fibres et d'un volume  $V_m$  de matrice. Par la suite, les indices  $c$ ,  $f$  et  $m$  seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice. La fraction volumique de fibres peut être exprimée par [11] :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad (\text{I-1})$$

La fraction volumique de matrice est :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (\text{I-2})$$

Avec

$$V_m = 1 - V_f \quad (\text{I-3})$$

Et

$$v_c = v_f + v_m \quad (\text{I-4})$$

### I.5.2 Fraction massique

Les fractions massiques sont déterminées de manière similaire à partir des masses  $p_c$ ,  $p_f$  et  $p_m$  respectives du matériau composite, des fibres et de la matrice. Les fractions massiques, ou fractions en masse, des fibres et de la matrice s'écrivent respectivement [11] :

$$P_f = \frac{p_f}{p_c} \quad (\text{I-5})$$

$$P_m = \frac{p_m}{p_c} \quad (\text{I-6})$$

Avec

$$P_m = 1 - P_f \quad (\text{I-7})$$

## **I.6 Conclusion**

Les composites sont des matériaux résultant de la combinaison de plusieurs composants distincts, préservant chacun leurs caractéristiques individuelles pour produire des propriétés améliorées. Ils sont largement utilisés dans des secteurs variés comme l'aérospatiale, l'automobile et la construction en raison de leur légèreté, leur résistance et leur flexibilité de conception. Typiquement composés d'une matrice et de renforts tels que les fibres de carbone ou de verre, les composites peuvent être fabriqués selon divers procédés comme le tissage ou le moulage par injection. Cette polyvalence pose cependant des défis en matière de modélisation et d'analyse des structures, nécessitant le développement de méthodes précises pour optimiser leurs performances et leur durabilité.

## Chapitre II : Modélisation mathématique

### II.1 Introduction :

L'utilisation du modèle mathématique avec la théorie HSDT représente une avancée majeure dans la modélisation et l'analyse des matériaux composites. Cette approche permet une meilleure compréhension des comportements mécaniques complexes de ces matériaux, ouvrant la voie à des innovations futures dans divers domaines d'application. En améliorant continuellement ce modèle, nous pourrions exploiter pleinement le potentiel des matériaux composites pour relever les défis technologiques du XXI<sup>e</sup> siècle.

### II.2 Théorie raffinée des plaques stratifiées en composites

#### II.2.1 Hypothèses de base

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur totale  $h$  composée de  $n$  couches orthotropes, avec un système de coordonnées comme illustré à la **figure II-1**. Les hypothèses de la théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend trois composantes : la flexion  $w_b$  et le cisaillement  $w_s$ . Ces composantes sont des fonctions des coordonnées  $x, y$  et du temps  $t$  uniquement.

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z)\varphi_z(x, y, t) \quad (\text{II-8})$$

La contrainte normale transversale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

Les déplacements  $U$  dans la direction  $x$  et  $V$  dans la direction  $y$  sont constitués de composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, V = v + v_b + v_s \quad (\text{II-9})$$

Les composantes de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont supposées être similaires aux déplacements décrits par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions pour  $u_b$  et  $v_b$  peuvent être données comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II-10a})$$

– Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$ , en conjonction avec  $w_s$ , induisent des variations paraboliques des déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ , et par conséquent des contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque. Ces contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont nulles aux faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour  $u_s$  et  $v_s$  peuvent être données comme suit :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II-10b})$$

### II.2.2 Cinématique

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations (8) à (10) comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z)\varphi(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II-11a})$$

où  $u$  et  $v$  représentent les déplacements dans le plan médian de la plaque, respectivement dans les directions  $x$  et  $y$ ;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, tandis que  $f(z)$  désigne les fonctions de forme déterminant la répartition des déformations et contraintes de cisaillement transversal sur l'épaisseur. La fonction  $f(z)$  est une fonction cubique selon la théorie de la déformation par cisaillement cubique.

$$f(z) = -z \left( \frac{1}{4} - \frac{5z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-11b})$$

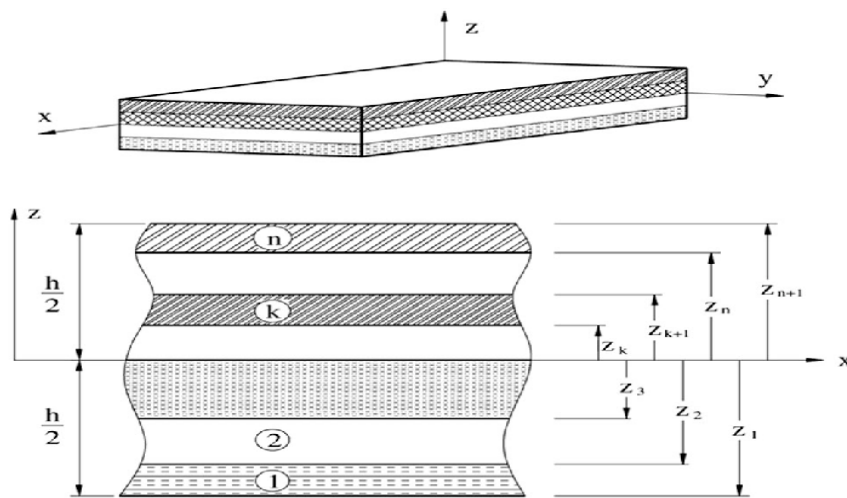
Il est important de noter que, contrairement à la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction du cisaillement. Les déformations associées aux déplacements dans l'équation (11) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^s \\ \varepsilon_z &= g' \varepsilon_z^0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

Où :



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \\
 k_{xy}^s &= -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \varepsilon_z^0 = \varphi, \\
 g(z) &= 1 - f'(z), f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.
 \end{aligned}
 \tag{II-13}$$



**Figure II-1 :** Système de coordonnées et numérotation des couches utilisés pour une plaque stratifiée typique [16].

### II.3 Équations constitutives

En supposant que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan  $x - y$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}
 \tag{II-14}$$

où  $Q_{ij}$  représentent les rigidités planes réduites en contraintes et sont exprimées en termes de constantes d'ingénierie dans les axes matériels de la couche :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\lambda}, Q_{12} = \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{31} + \nu_{23})}{\lambda}, Q_{13} = \frac{E_1(\nu_{31} + \nu_{21} + \nu_{32})}{\lambda} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\lambda}, Q_{23} = \frac{E_2(\nu_{32} + \nu_{12} + \nu_{31})}{\lambda}, Q_{33} = \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\lambda} \\
 Q_{44} &= G_{23}, Q_{55} = G_{13}, Q_{66} = G_{12} \\
 \lambda &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}
 \end{aligned} \tag{II-15}$$

Étant donné que le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes dont les axes matériels sont orientés de manière arbitraire par rapport aux coordonnées du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans les coordonnées du stratifié  $(x, y, z)$ . Les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié pour la  $k$ -ième couche sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{II-16}$$

où  $Q_{ij}$  représentent les constantes matérielles transformées, exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos(\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + Q_{22} \sin(\theta)^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + Q_{12} (\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4) \\
 \bar{Q}_{13} &= Q_{13} \cos(\theta)^2 + Q_{23} \sin(\theta)^2 \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin(\theta)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + 2Q_{22} \cos(\theta)^4 \\
 \bar{Q}_{23} &= Q_{23} \sin(\theta)^2 + Q_{23} \cos(\theta)^2 \\
 \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos(\theta)^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta)^3 \cos(\theta) \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta)^3 \cos(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 + Q_{66} (\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4) \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos(\theta)^2 + Q_{55} \sin(\theta)^2 \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos(\theta)^2 + Q_{44} \sin(\theta)^2
 \end{aligned} \tag{II-17}$$

Où  $\theta$  est l'angle entre l'axe  $x$  global et l'axe  $x$  local de chaque couche.

### II.4 Équations régissantes :

On peut exprimer l'énergie de déformation de la plaque comme suit : On peut exprimer l'énergie de déformation de la plaque comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (\text{II-18})$$

En substituant les équations (12) et (16) par l'équation (18) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être reformulée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s \\ + Q_{yz}^s \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \gamma_{xz}^s \end{array} \right\} dx dy \quad (\text{II-19})$$

où les composantes de contraintes  $N, M$  et  $Q$  sont caractérisées par

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_z, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

En substituant l'équation (16) par l'équation (20) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultats des contraintes sont exprimés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} (A_{11} & A_{12} & A_{16}) \\ (A_{21} & A_{22} & A_{26}) \\ (A_{31} & A_{32} & A_{66}) \\ (B_{11} & B_{12} & B_{16}) \\ (B_{12} & B_{22} & B_{26}) \\ (B_{31} & A_{26} & A_{66}) \\ (B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S) \\ (B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S) \\ (B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} (B_{11} & B_{12} & B_{16}) \\ (B_{12} & B_{22} & B_{26}) \\ (B_{16} & A_{26} & A_{66}) \\ (D_{11} & D_{12} & D_{16}) \\ (D_{12} & D_{22} & D_{26}) \\ (D_{16} & D_{26} & D_{66}) \\ (D_{11}^S & D_{12}^S & D_{16}^S) \\ (D_{12}^S & D_{22}^S & D_{26}^S) \\ (D_{16}^S & D_{26}^S & D_{66}^S) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{array} \right] \quad (\text{II-21a})$$

$$N_z = X_{13} \varepsilon_x^0 - X_{13}^b k_x^b - X_{13}^s k_x^s + X_{23} \varepsilon_y^0 - X_{23}^b k_y^b - X_{23}^s k_y^s + Z_{33} \varepsilon_z^0 \quad (\text{II-21b})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{II-21c})$$

où  $A_{ij}, B_{ij}$ , etc., représentent les rigidités des plaques, définies comme

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz, (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{II-22a})$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} [g(z)]^2 dz, (i, j) = (4, 5) \quad (\text{II-22b})$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Y_{ij}^s, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} g'(z)(1, z, f(z), g'(z)) dz, (i, j) = (1, 2, 3) \quad (\text{II-22c})$$

Le travail effectué par les forces appliquées peut s'écrire :

$$V = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (\text{II-23})$$

où  $N_x^0, N_y^0$ , et  $N_{xy}^0$  représentent les forces distribuées dans le plan. L'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \ddot{u}_i \ddot{u}_i dV = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \begin{array}{l} \delta u \left[ I_1 \ddot{u} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \omega - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right] + \delta v \left[ I_1 \ddot{v} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right] + \\ \delta w_b \left[ I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] + \\ \delta w_s \left[ I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left( \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] + \\ \delta \phi \left[ I_7 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_8 \ddot{\phi} \right] \end{array} \right\} dx dy \quad (\text{II-24})$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de la plaque et  $I_i$  sont les inerties définies par

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2, f(z), [f(z)]^2, g(z), [g(z)]^2) dz \quad (\text{II-25})$$

Le principe de Hamilton [18] est employé ici pour obtenir les équations de mouvement adaptées au champ de déplacement ainsi qu'à l'équation constitutive. Ce principe peut être formulé de manière analytique comme suit :

$$\int_0^t \delta(U + V - T) dt = 0 \quad (\text{II-26})$$

En utilisant  $\delta$  pour représenter une variation par rapport à  $x$  et  $y$ , en substituant les équations (19), (23) et (24) dans l'équation (26), puis en intégrant cette équation par parties et en regroupant les coefficients de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w_b$ ,  $\delta w_s$  et  $\delta \varphi$  on obtient les équations de mouvement de la plaque stratifiée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
 \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{v} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N(\psi) &= I_2 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} + I_1 \ddot{w}_b - I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \\
 &- I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} + I_1 \ddot{w}_s + I_7 \ddot{\varphi} \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + N(\psi) &= I_4 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_4 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} + I_1 \ddot{w}_b - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \\
 &- I_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - I_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} + I_1 \ddot{w}_s + I_7 \ddot{\varphi} \\
 \delta \varphi : N_z - \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} &= -I_7 \ddot{w}_b - I_7 \ddot{w}_s - I_8 \ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{II-27}$$

Où  $N(\psi)$  est définie :

$$N(\psi) = N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \tag{II-28}$$

L'équation (27) peut être réécrite en fonction des déplacements ( $u, v, w_b, w_s, \varphi$ ) en utilisant les contraintes résultantes de l'équation (21). Pour les stratifiés homogènes, les équations de mouvement (27) prennent la forme suivante.

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{12}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66}^s \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
 - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - B_{12}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66}^s \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + X_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\
 I_1 \ddot{u} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{II-29a}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{12}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - B_{12}^b \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - 2B_{66}^s \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{12}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^b \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - B_{66}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} + X_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\
 & I_1 \ddot{v} - I_2 \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{II-29b}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{12}^b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_{12}^b \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + 2B_{66}^b \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + B_{12}^b \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{12}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 4D_{66}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - D_{12}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + X_{23}^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + X_{13}^b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N(\psi) = \\
 & I_2 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} - I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} \\
 & - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} + I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_7 \ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{II-29c}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_{12}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + B_{12}^s \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 2B_{66}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2B_{66}^s \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 & - D_{12}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial x^2} - D_{12}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 4D_{66}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} \\
 & - H_{12}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 4H_{66}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + X_{13}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + X_{23}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\
 & + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N(\psi) = I_4 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + I_4 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - I_5 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} - I_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - I_6 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \\
 & + I_1 \ddot{w}_b + I_1 \ddot{w}_s + I_7 \ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{II-29d}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{23} \frac{\partial v}{\partial y} - B_{13}^b \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - B_{23}^b \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - B_{13}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - B_{23}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 & + X_{33} \varphi - A_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + N(\psi) = -I_7 \ddot{w}_b - I_7 \ddot{w}_s - I_8 \ddot{\varphi}
 \end{aligned} \tag{II-29e}$$

## II.5 Solutions analytiques

### II.5.1 Solutions analytiques pour les stratifiés

(Antisymétriques à plis croisés)

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\
 B_{12} &= B_{26} = B_{16} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \\
 B_{22} &= -B_{11} \\
 B_{22}^s &= -B_{11}^s
 \end{aligned} \tag{II-30}$$

Les conditions limites suivantes pour les stratifiés antisymétriques à plis croisés peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 v(0, y) &= w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\
 v(a, y) &= w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\
 N_x(0, y) &= M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) \\
 &= M_x^s(a, y) = 0 \\
 v(x, 0) &= w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\
 u(x, b) &= w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\
 N_y(x, 0) &= M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) \\
 &= M_y^s(x, b) = 0
 \end{aligned} \tag{II-31}$$

Les extensions suivantes satisfont aux conditions limites de l'équation (31) :

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)
 \end{aligned} \tag{II-32}$$

Les paramètres inconnus  $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$  et  $\varphi_{mn}$  doivent être déterminés, où  $\omega$  est la fréquence propre associée au mode propre  $(m, r)$ , et  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$  et  $\beta = \frac{r\pi}{a}$ . En substituant les équations (30) et (32) dans l'équation (29), la solution de Navier du pli croisé antisymétrique est obtenue.

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \varphi_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{bmn} \\ \ddot{W}_{smn} \\ \ddot{\varphi}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-33})$$

Où

$$\begin{aligned} s_{11} &= -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2 \\ s_{12} &= -A_{12}\alpha\beta - A_{66}\alpha\beta \\ s_{13} &= B_{11}^b\alpha^3 + B_{12}^b\alpha\beta^2 + 2B_{66}^s\alpha\beta^2 \\ s_{14} &= B_{11}^s\alpha^3 + B_{12}^s\alpha\beta^2 + 2B_{66}^s\alpha\beta^2 \\ s_{15} &= X_{13} \\ s_{22} &= -A_{22}\beta^2 - A_{66}\alpha^2 \\ s_{23} &= B_{12}^b\alpha^2\beta + B_{12}^b\beta^3 + 2B_{66}^s\alpha^2\beta \\ s_{24} &= B_{12}^s\alpha^2\beta + B_{22}^s\beta^3 + B_{66}^s\alpha^2\beta \\ s_{25} &= X_{23}\beta \\ s_{33} &= -2D_{12}\alpha^2\beta^2 - D_{22}\beta^4 - 4D_{66}\alpha^2\beta^2 - D_{11}\alpha^4 + k \\ s_{34} &= -2D_{12}^s\alpha^2\beta^2 - D_{22}^s\beta^4 - 4D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - D_{11}^s\alpha^4 + k \\ s_{35} &= -X_{23}^b\beta^2 - X_{13}^b\alpha^2 + k \\ s_{44} &= -H_{11}^s\alpha^4 - 2H_{12}^s\alpha^2\beta^2 - H_{11}^s\beta^4 - 4H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - A_{55}^s\alpha^2 - A_{44}\beta^2 + k \\ s_{45} &= -X_{13}^s\alpha^2 - X_{23}^s\beta^2 - A_{44}\beta^2 + k \\ s_{55} &= X_{33} + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}\beta^2 + k \\ m_{11} &= -I_1, m_{12} = m_{15} = m_{25} = 0, m_{13} = I_2, m_{14} = I_4 \\ m_{22} &= -I_1, m_{23} = I_2\beta, m_{24} = I_4\beta, m_{33} = -I_3\alpha^2 - I_3\beta^2 - I_1 \\ m_{34} &= -I_5\alpha^2 - I_5\beta^2 - I_1, m_{35} = -I_7, m_{44} = -I_6\alpha^2 - I_6\beta^2 - I_1 \\ m_{45} &= I_7, m_{55} = I_8 \\ k &= -N_x^0\alpha^2 - N_y^0\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{II-34})$$

### II.5.2 Solutions analytiques pour antisymétrique stratifiés à plis angulaires

Pour les stratifiés antisymétriques à plis angulaires, les rigidités des plaques suivantes sont toutes nulles :

$$\begin{aligned} A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} + D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\ B_{11} &= B_{12} = B_{22} = B_{66} = B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-35})$$



Les conditions limites suivantes pour les stratifiés à plis angulaires antisymétriques peuvent être formulées de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) &= 0 \\
 u(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) &= 0 \\
 N_{xy}(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^b(a, y) \\
 &= M_x^s(a, y) = 0 \\
 v(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) &= 0 \\
 v(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) &= 0 \\
 N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) \\
 &= M_y^s(x, 0) = 0
 \end{aligned} \tag{II-36}$$

Les conditions limites de l'équation (36) sont respectées par les extensions suivantes

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \varphi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)
 \end{aligned} \tag{II-37}$$

En substituant les équations (35) et (37) dans l'équation (29), on obtient des équations de forme similaire à l'équation (33), avec les coefficients suivants

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2, s_{12} = -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), s_{13} = B_{11}^b\alpha^3 + B_{12}^b\alpha\beta^2 + 2B_{66}^b\alpha\beta^2, \\
 s_{14} &= B_{11}^s\alpha^3 + B_{12}^s\alpha\beta^2 + 2B_{66}^s\alpha\beta^2, s_{15} = A_{13}\alpha \\
 s_{22} &= -A_{22}\beta^2 - A_{66}\alpha^2, s_{23} = -B_{22}^s\beta^3 - 2B_{66}^s\alpha^2\beta - B_{12}^b\alpha^2\beta \\
 s_{24} &= -B_{12}^s\alpha^2\beta - B_{22}^s\beta^3 - 2B_{66}^s\alpha^2\beta, s_{25} = A_{23}\beta \\
 s_{33} &= -D_{12}\alpha^2\beta^2 - D_{22}\beta^4 - 4D_{66}\alpha^2\beta^2 - D_{11}\alpha^4 - D_{12}\alpha^2\beta^2 \\
 s_{34} &= -D_{12}^s\alpha^2\beta^2 - D_{22}^s\beta^4 - 4D_{66}^s\alpha^2\beta^2 - D_{11}^s\alpha^4 - D_{12}^s\alpha^2\beta^2 \\
 s_{35} &= B_{13}^b\alpha^2 + B_{23}^b\beta^2, \\
 s_{44} &= H_{11}^s\alpha^4 - 2H_{12}^s\alpha^2\beta^2 - H_{11}^s\beta^4 - 4H_{66}^s\alpha^2\beta^2, \\
 s_{45} &= B_{13}^s\alpha^2 + B_{23}^s\beta^2 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}\beta^2, \\
 s_{55} &= X_{33} + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}\beta^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= m_{22} = -I_1, m_{33} = -I_3\beta^2 - I_1, \\
 m_{34} &= -I_5\alpha^2 - I_5\beta^2 - I_1, m_{35} = -I_7, \\
 m_{44} &= -I_6\alpha^2 - I_6\beta^2 - I_1, m_{45} = -I_7 \\
 m_{55} &= -I_8 \\
 k &= -N_x^0\alpha^2 - N_y^0\beta^2
 \end{aligned}$$

(II-38)

## II.6 Conclusion

L'utilisation d'un modèle mathématique constitue une approche essentielle pour comprendre et analyser les mécanismes d'un système complexe. En choisissant judicieusement les variables et en formulant des équations qui décrivent les interactions pertinentes. Cependant, la précision et l'application du modèle dépendent de la qualité des données utilisées pour le calibrer, ainsi que les hypothèses simplificatrices sur lesquelles il repose. Ainsi, l'évaluation continue et la validation du modèle sont cruciales pour garantir sa fiabilité et sa pertinence dans l'interprétation des phénomènes physiques réels.

# Chapitre III :

## Analyse de vibration et flambement sur les plaques composites

### III.1 Introduction

Cette étude propose une analyse du flambage et des vibrations libres de plaques composites stratifiées, incluant des stratifiés antisymétriques à plis croisés et à plis angulaires, en utilisant une théorie de déformation par cisaillement actuelle pour les plaques stratifiées. Les solutions Navier pour les vibrations libres des plaques composites stratifiées sont obtenues en résolvant des équations aux valeurs propres. Pour validation, les résultats issus de ce modèle sont comparés à ceux des théories classiques des plaques stratifiées (CLPT, FSDT, HSDT) ainsi qu'à la solution exacte de l'élasticité tridimensionnelle.

**Tableau III-1** : Les propriétés des matériaux orthotropes

Matériau1[17]	$E_1=40E_2$	$G_{12}=G_{13}=0.6E_2$	$G_{23}=0.5E_2$	$\nu_{12}=0.25$
Matériau2[6]	$E_1=40E_2$	$G_{12}=G_{13}=0.5E_2$	$G_{23}=0.6E_2$	$\nu_{12}=0.25$
Matériau3[18]	$E_1=25E_2$	$G_{12}=G_{13}=0.5E_2$	$G_{23}=0.2E_2$	$\nu_{12}=0.25$

### III.2 Les résultats numériques

Les propriétés des laminés présentées dans le **tableau III-1** sont employées. Pour plus de clarté, les résultats numériques sont présentés de manière non-dimensionnelle, à la fois sous forme graphique et tabulaire.

$$\bar{N} = N_{cr} \left( \frac{a^2}{E_2 h^3} \right), \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (\text{III-39})$$

### III.3 L'analyse du flambement de la plaque

Dans l'analyse de flambage, on suppose que les charges appliquées sont des forces agissant dans le plan.

$$N_x^0 = -N_0, N_y^0 = -\gamma N_0, \gamma = \frac{N_x^0}{N_y^0}, N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{III-40})$$

La solution de flambement peut être déduite de l'équation (33) en supposant que les termes de dérivée temporelle et les forces transversales sont nuls :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) & s_{34} - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) & s_{44} - N_0(\alpha^2 + \gamma\beta^2) & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \varphi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-41})$$

On considère un stratifié carré à plis croisés antisymétriques simplement supporté  $(0/90)_n$  ( $n = 2, 3, 5$ ) soumis à une charge de compression uniaxiale. Sur le **tableau III-2** on compare les résultats obtenus à l'aide de différents modèles avec les solutions d'élasticité tridimensionnelle fournies par Noor [17].

Le tableau III-3 exhibe les résultats de diverses théories à différentes configurations de couches (4, 6, et 10). Globalement, il est à observer que les valeurs augmentent à mesure que le nombre de couches augmente, ce qui montre l'importance de la charge critique dans les prédictions du comportement mécanique des structures. Chaque théorie présente des nuances dans ses résultats en fonction du nombre de couches, illustrant la diversité des approches théoriques et leur impact sur les performances attendues des structures étudiées.

**Tableau III-2 :** Charge de flambement uniaxiale non-dimensionnelle d'une plaque stratifiée carrée simplement supportée avec des plis transversaux antisymétriques (0/90/...) pour un rapport ( $a/h = 10$ ).

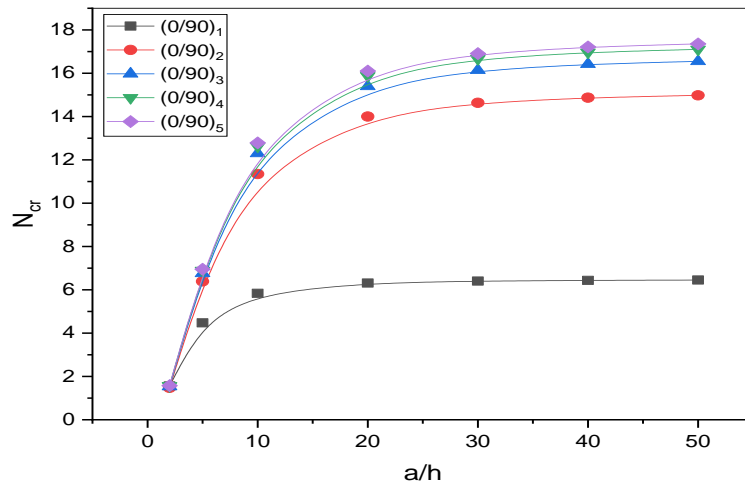
N° de couches	Théories	$\bar{N}$
4	Présente	22.5789
	Adim et al. [20]	22.5821
	Exacte [17]	21.9796
	Reddy [3]	22.5790
	FSDT [19]	22.8060
	CLPT	30.3591
6	Présente	24.4573
	Adim et al. [20]	24.4605
	Exacte [17]	23.6689
	Reddy [3]	24.4596
	FSDT [19]	24.5777
	CLPT	33.5817
10	Présente	25.4224
	Adim et al. [20]	25.4223
	Exacte [17]	24.9636
	Reddy [3]	25.4225
	FSDT [19]	25.4500
	CLPT	35.2316

Dans le **tableau III-3**, on examine l'évolution de la charge critique adimensionnelle de flambement d'un stratifié carré antisymétrique à deux couches ( $\theta / -\theta$ ) simplement supporté, soumis à une charge de compression uniaxiale. Les résultats obtenus à partir de différentes théories appliquées à des structures avec des plis orientés à des angles  $30^\circ$  et  $45^\circ$ , avec un changement de rapport  $a/h$  de 4, 10 et 100. On observe une tendance générale à l'augmentation des valeurs des charges à mesure que l'angle augmente. Cette constatation suggère une sensibilité significative de la réponse structurale de la géométrie de la plaque. Les variations entre les valeurs pour chaque théorie à des angles différents indiquent des différences dans les prédictions théoriques, mettant en évidence l'importance critique du choix de la théorie appropriée pour modéliser et optimiser les performances des structures soumises à des conditions spécifiques de flambage.

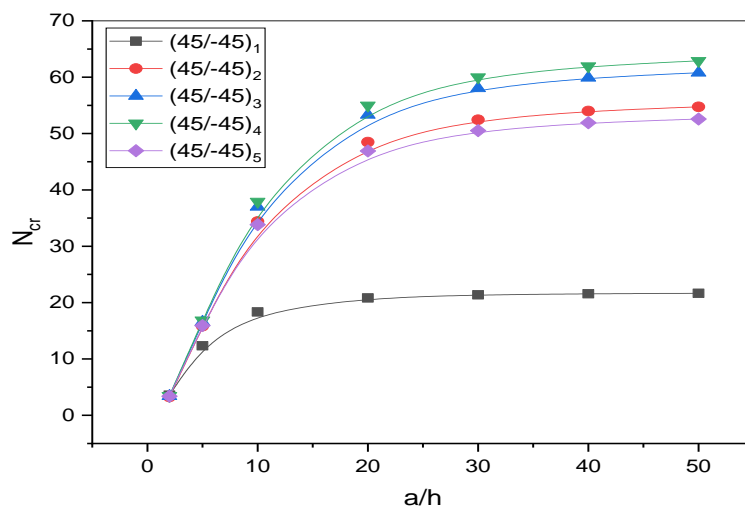
**Tableau III-3** : Charge de flambement uni-axiale non-dimensionnelle des stratifiés carrés à deux couches ( $\theta / -\theta$ ) simplement supportés

$a/h$	Théories	$\bar{N}$	
		$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$
4	Présente	9.5028	9.8581
	Adim et al. [20]	9.5554	9.9145
	Ren [6]	9.5368	9.8200
	Reddy [3]	9.3391	8.2377
	FSDT [19]	7.5450	6.7858
10	Présente	17.4156	18.3477
	Adim et al. [20]	17.2737	18.1473
	Ren [6]	15.7517	16.4558
	Reddy [3]	17.1269	18.1544
	FSDT [19]	16.6132	17.5522
100	Présente	20.5330	21.7769
	Adim et al. [20]	20.5040	21.6662
	Ren [6]	20.4793	21.6384
	Reddy [3]	20.5017	21.6663
	FSDT [19]	20.4944	21.6576

L'effet du rapport côté/épaisseur sur la charge de flambement des stratifiés carrés à quatre couches (0/90/0/90) simplement supportés est également illustré sur les **figures III-1** et **III-2**.

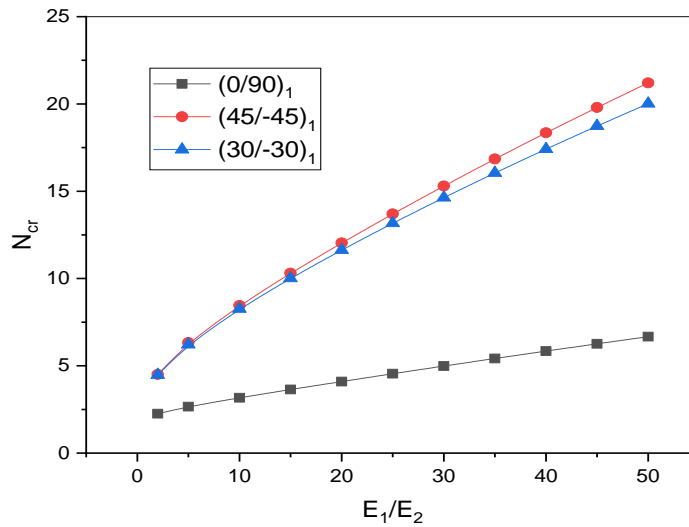


**Figure III-1:** Impact du rapport côté/épaisseur sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle des stratifiés carrés antisymétriques à plis croisés  $(0/90)_n$  simplement supportés.



**Figure III-2 :** Impact du rapport côté/épaisseur sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle des stratifiés carrés antisymétriques à plis d'angle  $(45/-45)_n$  simplement supportés.

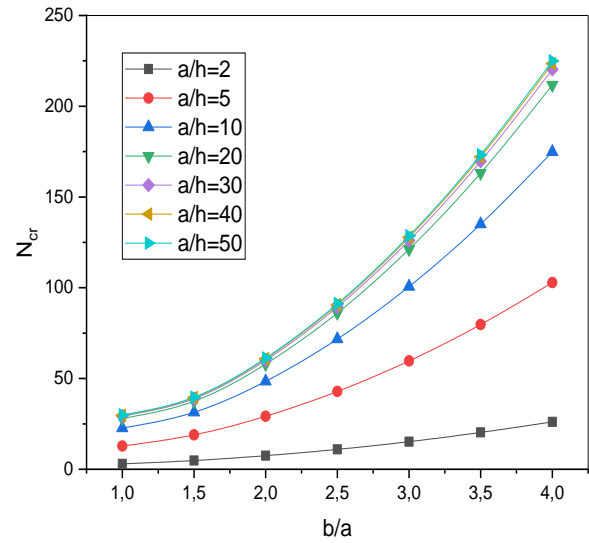
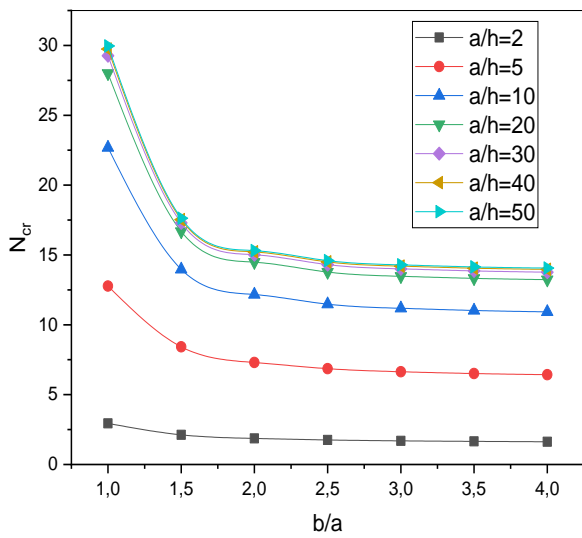
La **figure III-3** illustre l'effet du rapport de module sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle d'un stratifié carré à deux couches  $(45/-45)$  simplement supporté ( $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25, a/h = 10$ ).



**Figure III-3 :** Effet du rapport de module d'élasticité sur la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle des stratifiés carrés antisymétriques à deux couches, simplement supportés et soumis à une charge transversale sinusoïdale ( $a/h = 10$ ).

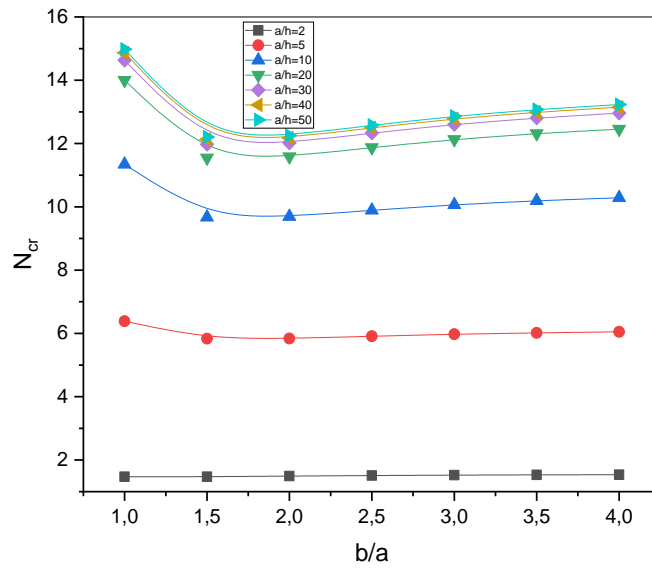
Il est à noter que la charge critique de flambement augmente linéairement en fonction des rapports des modules d'élasticité. Les plus grandes valeurs sont obtenues pour la stratifié (45/-45).

Les variations de la charge critique de flambement non dimensionnelle en fonction du rapport  $(b/a)$  pour les plaques rectangulaires composites stratifiées symétriques à plis croisés à quatre couches sont illustrées à la **figure III-4**. Cette dernière montre que la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport d'aspect de la plaque lorsqu'une plaque est soumise à une compression uni-axiale dans la direction  $x$  et à une compression bi-axiale, et augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect de la plaque lorsqu'elle est soumise à une compression uni-axiale dans la direction  $y$ . Donc, l'augmentation et la diminution dépend fortement de la direction des fibres du stratifié.



(a) Compression uni-axiale dans l'axe(x) ( $\gamma_2 = 0$ )

(b) Compression uni-axiale dans l'axe (y) ( $\gamma_1 = 0$ )



(c) Compression bi-axiale ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ )

**Figure III-4 :** Variation de la charge critique du flambement en fonction du rapport (b/a) pour une plaque rectangulaire stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ )

### III.4 Analyse des vibrations libre des plaques composites

Dans le cas des vibrations libres, les fréquences propres des stratifiés peuvent être déterminées en annulant le déterminant de la matrice de coefficients suivants.



$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-42})$$

Dans les **tableaux III-4** et **III-5**, les fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques stratifiées à couches croisées antisymétriques sont obtenues en utilisant différentes théories de déformation par cisaillement qui sont présentées pour diverses valeurs de rapports a/h et modules de Young. On observe que, de manière générale, le modèle actuel prédit les fréquences naturelles avec plus de précision que ceux de Reddy [3], Karama [4] et la solution d'élasticité tridimensionnelle [21]. Il est important de noter que le modèle actuel utilise quatre variables inconnues, tandis que les théories Whitney et al.[5] (FSDT) et les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur [3, 4] en utilisent cinq. On peut en conclure que le modèle actuel est non seulement précis, mais aussi plus simple pour prédire les fréquences naturelles des plaques stratifiées.

**Tableau III-4 :** Fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques carrées antisymétriques pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie avec a/h = 5.

N°de couche	Théories	E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>				
		3	10	20	30	40
(0° / 90°) <sub>1</sub>	Présente	6.2735	7.0520	7.8964	8.5901	9.1783
	Exacte [21]	6.2578	6.9845	7.645	8.1763	8.5625
	Adim et al.[20]	6.2168	6.9881	7.8198	8.5028	9.0841
	Reddy [3]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Karama [4]	6.2224	7.0066	7.8584	8.5630	9.1661
	Whitney et al.[5]	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
(0° / 90°) <sub>2</sub>	Présente	6.5626	8.2630	9.6575	10.5013	11.0652
	Exacte [21]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	Adim et al.[20]	6.5009	8.1958	9.6273	10.5359	11.1728
	Reddy [3]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Karama [4]	6.5034	8.1939	9.6201	10.5261	11.1628
	Whitney et al.[5]	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
(0° / 90°) <sub>3</sub>	Présente	6.6191	8.4765	9.9467	10.8094	11.3748
	Exacte [21]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	Adim et al.[20]	6.5558	8.4053	9.9182	10.8546	11.5009
	Reddy [3]	6.5558	8.4052	9.9181	1.8547	11.5012
	Karama [4]	6.5595	6.5595	9.9313	10.8756	11.5314

	Whitney et al.[5]	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
$(0^\circ / 90^\circ)_5$	Présente	6.6484	8.5856	10.0939	10.9667	11.5341
	Exacte [21]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	Adim et al.[20]	6.5842	8.5126	10.0671	11.0119	11.6721
	Reddy [3]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Karama [4]	6.5885	8.5229	10.0881	11.0522	11.7180
	Whitney et al.[5]	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444

**Tableau III-5 :** Fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques carrées antisymétriques pour différentes valeurs de a/h avec un rapport  $E_1/E_2 = 40$ .

N°de couches	Théories	a/h					
		2	4	10	20	50	100
$(0^\circ / 90^\circ)_1$	Présente	4.5149	8.4186	10.5980	11.1153	11.2784	11.3029
	Adim et al. [20]	5.7100	8.3507	10.5669	11.1048	11.2750	11.3001
	Karama [4]	5.8948	8.4561	10.5964	11.1132	11.2764	11.3005
	Reddy [3]	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	Whitney et al.[5]	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	CLPT	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
$(0^\circ / 90^\circ)_2$	Présente	4.4195	9.3961	14.8725	16.5782	17.1860	17.2792
	Adim et al. [20]	5.7528	9.7366	14.8474	16.5737	17.1850	17.2781
	Karama[4]	5.8129	9.7362	14.8338	16.5683	17.1840	17.2781
	Reddy [3]	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	Whitney et al.[5]	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	CLPT	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3083
$(0^\circ / 90^\circ)_3$	Présente	4.4722	9.6002	15.4983	17.3845	18.0650	18.1698
	Adim et al. [20]	5.8702	9.9870	15.4635	17.3774	18.0644	18.1699
	Karama [4]	5.9888	10.0323	15.4702	17.3787	18.0646	18.1699
	Reddy [3]	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	Whitney et al.[5]	5.6992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	CLPT	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
$(0^\circ / 90^\circ)_5$	Présente	4.5093	9.7090	12.7849	17.7841	18.5003	18.6109
	Adim et al[20]	5.9476	10.1226	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	Karama [4]	6.0889	10.1854	15.7817	17.7784	18.4991	18.6099
	Reddy [3]	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	Whitney et al.[5]	5.7140	10.0628	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	CLPT	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457

Le **tableau III-6** présente des résultats numériques pour différentes théories à divers rapports a/h et nombre de couches. Les valeurs de la fréquence propre augmentent généralement avec

le rapport  $a/h$ , soulignant l'importance de la géométrie pour les performances structurales. Les résultats varient entre les théories telles que Adim et al. [20], Reddy [3], et Swaminathan [8], en illustrant différentes approches théoriques et leurs impacts sur les prédictions des fréquences. En revanche, sur le **tableau III-7** on compare les performances pour différentes configurations de couches (10, 20, 50, 100), montrant une augmentation des valeurs de la fréquence naturelle avec le nombre de couches. Les théories étudiées, Adim et al. [20], Reddy [3], et Xiang et al. [7], confirment cette tendance, montrant l'importance cruciale du choix théorique et de la configuration de couches pour optimiser les structures selon les conditions spécifiques de chaque application.

La différence entre les modèles tend à se réduire pour les plaques fines et relativement fines. Quelle que soit l'épaisseur, la différence entre les théories [3, 8] augmente avec l'augmentation du degré d'anisotropie.

**Tableau III-6 :** Fréquences fondamentales sans dimension pour une plaque carrée stratifiée avec des plis angulaires antisymétriques, simplement supportée.

N° de couches	Les théories	a/h								
		2	4	5	10	12.5	20	25	50	100
$(45^\circ / -45^\circ)_1$	Présente	5.1258	9.6973	10.8805	13.3099	13.7450	14.2830	14.4191	14.6088	14.6578
	Adim et al[20]	6.3247	9.7517	10.8336	13.2605	13.7058	14.2455	14.3823	14.5722	14.6211
	Reddy[3]	6.2837	9.7593	10.8401	13.2630	13.7040	14.2463	14.3827	14.5723	14.6214
	Swaminathan[8]	5.3325	8.8426	10.0350	12.9115	13.4690	14.1705	14.3500	14.6012	14.6668
$(45^\circ / -45^\circ)_2$	Présente	4.9911	10.2462	12.3391	18.3543	19.7917	21.8216	22.3913	23.2308	23.4572
	Adim et al[20]	6.1019	10.6508	12.5342	18.3240	19.7645	21.8072	22.3804	23.2238	23.4508
	Reddy[3]	6.1067	10.6507	12.5331	18.3221	19.7621	21.8063	22.3798	23.2236	23.4507
	Swaminathan[8]	5.5674	10.0731	11.9465	17.8773	19.4064	21.6229	22.2554	23.1949	23.4499
$(45^\circ / -45^\circ)_4$	Présente	5.0648	10.4337	12.6170	19.0516	20.6288	22.8885	23.5302	24.4826	24.7408
	Adim et al[20]	6.3049	10.9870	12.9697	19.2659	20.8885	23.2390	23.9092	24.9046	25.1745
	Reddy[3]	6.2836	10.9905	12.9719	19.2659	20.8884	23.2388	23.9091	24.9046	25.1744
	Swaminathan[8]	5.9234	10.7473	12.7523	19.1258	20.7784	23.1829	23.8713	24.8959	25.1741

Les fréquences fondamentales sans dimensions sont présentées dans le **tableau III-8** pour différentes valeurs du rapport de module de Young et du nombre de plis. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D rapportées par la théorie de Reddy [3]. Ainsi, les résultats obtenus par le modèle FSDT actuel sont presque identiques à ceux prédits par le modèle FSDT de Thai et al. [22]. Cette affirmation est clairement démontrée dans les figures III-13 et III-14, où les résultats obtenus par la présente théorie montrent un excellent accord pour une large gamme de rapports d'épaisseur  $a/h$ . D'après les tableaux **III-7** et **III-8**, les résultats actuels sont en bon accord avec ceux de la théorie PSDT de Reddy [3], de Swaminathan [8], Adim et al. [20] et de Xiang et al. [7].

**Tableau III-7 :** Fréquence fondamentale adimensionnelle de la plaque carrée simplement supportée ( $\theta / -\theta / \dots$ ) (avec  $E_1/E_2 = 40$ ).

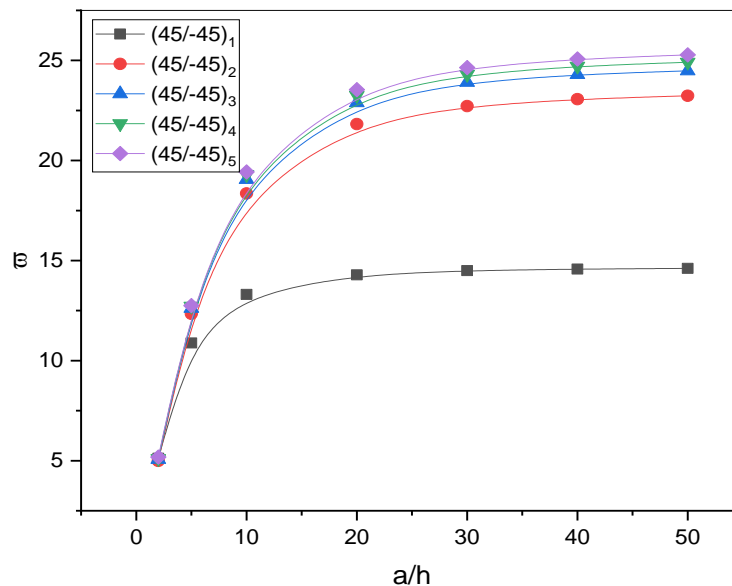
Les couches	Théories	a/h

		10	20	50	100
(5/-5/5/-5/5/-5)	Presente	15.9639	18.0118	18.7585	18.8738
	Adim et al.[20]	15.9840	18.0774	18.8394	18.9568
	Reddy[3]	14.848	17.619	18.753	18.935
	Xiang et al. [7]	15.405	17.943	18.942	19.206
(30/-30/30/-30/30/-30)	Presente	17.4286	20.2066	21.2808	21.4502
	Adim et al.[20]	18.3356	21.7196	23.0815	23.2988
	Reddy[3]	18.170	21.648	23.067	23.295
	Xiang et al. [7]	19.075	22.304	23.579	23.968
(45/-45/45/-45/45/-45)	Presente	19.0516	22.8885	24.4826	24.7408
	Adim et al.[20]	19.0252	22.8770	24.4802	24.7392
	Reddy[3]	19.025	22.877	24.480	24.739
	Xiang et al. [7]	20.027	23.623	25.061	25.478

**Tableau III-8 :** Fréquence fondamentale sans dimension d'une plaque carrée stratifiée avec un agencement antisymétrique des angles.

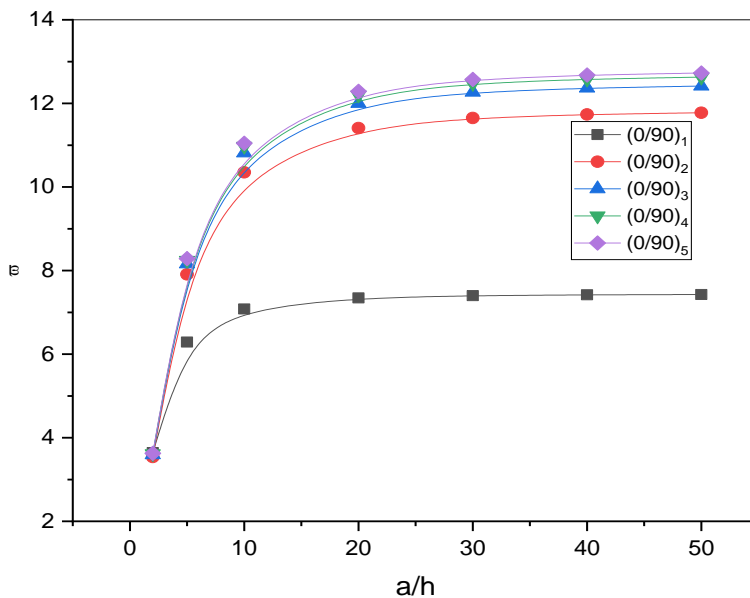
N°de couches	$E_1 / E_2$	Théorie	$a / h$					
			2	4	10	20	50	100
$(45^\circ / -45^\circ)_1$	3	Presente	4.4062	6.1733	7.0999	7.2898	7.3472	7.3556
		Adim et al. [20]	4.5045	6.0858	7.0739	7.2704	7.3293	7.3378
		Reddy [3]	4.5052	6.0861	7.0739	7.2704	7.3292	7.3373
		Thai et al. [22]	4.4556	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378
		Swaminathan[8]	4.5312	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666
	10	Presente	4.6893	7.4392	9.0133	9.3679	9.4785	9.4947
		Adim et al. [20]	5.1686	7.3454	8.9656	9.3264	9.4377	9.4540
		Reddy [3]	5.1718	7.3469	8.9660	9.3265	9.4377	9.4538
		FSDT [22]	4.9316	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537
		Swaminathan[8]	4.9742	7.2647	8.9893	9.3753	9.4943	9.5123
	20	Presente	4.8843	8.4732	10.7639	11.3192	11.4970	11.5234
		Adim et al. [20]	5.7028	8.4115	10.7141	11.2769	11.4553	11.4816
		Reddy [3]	5.7094	8.4151	10.7151	11.2772	11.4553	11.4819
		Thai et al. [22]	5.2387	8.1185	10.6265	11.2517	11.4511	11.4806
		Swaminathan[8]	5.1817	8.0490	10.6412	11.2975	10.5074	11.5385
	30	Presente	5.0167	9.1789	12.1449	12.9052	13.1545	13.1917
		Adim et al. [20]	6.0590	9.1696	12.0954	12.8654	13.1153	13.1524
		Reddy [3]	6.0681	9.1752	12.0971	12.8659	13.1154	13.1521
		FSDT [22]	5.4104	8.7213	11.9456	12.8208	13.1077	13.1505
		Swaminathan[8]	5.2771	8.5212	11.8926	12.8422	13.1566	13.2035
40	Presente	5.1258	9.6973	13.3099	13.3099	14.6088	14.6578	
	Adim et al. [20]	6.3246	9.7517	13.2605	14.2455	14.5722	14.6211	
	Reddy [3]	6.2837	9.7593	13.2630	14.2463	14.5723	14.6214	
	Thai et al. [22]	5.5205	9.1609	13.0439	14.1790	14.5608	14.6183	
	Swaminathan[8]	5.3325	8.8426	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668	
3	Presente	3.0986	4.6396	5.4424	5.6083	5.6587	5.6660	
	Adim et al. [20]	4.6545	6.4555	7.6268	7.8650	7.9367	7.9471	
	Reddy [3]	4.6546	6.4554	7.6267	7.8649	7.9366	7.9472	
	Thai et al. [22]	4.6519	6.4626	7.6293	7.8657	7.9368	7.9472	
	Swaminathan[8]	4.6498	6.4597	7.6339	7.8724	7.9442	7.9545	
10	Presente	3.2407	6.0049	8.1571	8.6999	8.8762	8.9024	
	Adim et al. [20]	5.3882	8.5126	11.4678	12.2381	12.4867	12.5236	
	Reddy [3]	5.3887	8.5119	11.4674	12.2380	12.4866	12.5238	
	Thai et al. [22]	5.3765	8.5634	11.4939	12.2463	12.4881	12.5239	
	Swaminathan[8]	5.2061	8.3447	11.4116	12.2294	12.4952	12.5351	
	Presente	3.3390	6.6971	10.4054	11.5732	11.9851	12.0480	

$(45^\circ / -45^\circ)_2$	20	Adim et al. [20]	5.7414	9.6863	14.6619	16.3150	16.8964	16.9851
		Reddy [3]	5.7431	9.6855	14.6609	16.3146	16.8964	16.9848
		Thai et al. [22]	5.6542	9.7575	14.7292	16.3394	16.9008	16.9862
		Swaminathan[8]	5.4140	9.3306	14.4735	16.2570	16.8949	16.9927
Presente	30	Presente	3.4203	7.0173	11.8918	13.7140	14.4058	14.5142
		Adim et al. [20]	5.9449	10.2790	16.7765	19.3506	20.3278	20.4806
		Reddy [3]	5.9481	10.2785	16.7750	19.3499	20.3277	20.4807
		Thai et al. [22]	5.7641	10.3391	16.8825	19.3944	20.3361	20.4827
		Swaminathan[8]	5.5079	9.7966	16.4543	19.2323	20.3134	20.4839
Presente	40	Presente	3.4957	7.2105	12.9772	15.4473	16.4498	16.6107
		Adim et al. [20]	6.1019	10.6507	18.3240	21.8072	23.2239	23.4508
		Reddy [3]	6.1067	10.6507	18.3221	21.8063	23.2236	23.4507
		Thai et al. [22]	5.8228	10.6839	18.4633	21.8722	23.2368	23.4541
		Swaminathan[8]	5.5674	10.0731	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499

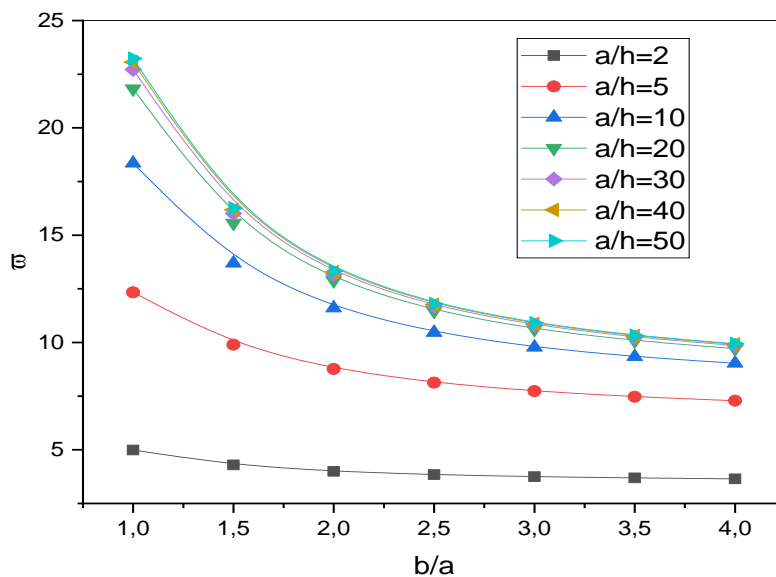


**Figure III-5 :** Évolution de la fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques à plis angulaires  $(45 / -45)_n$  en fonction du rapport d'épaisseur (Matériau 2, avec  $E_1 / E_2 = 40$ ).

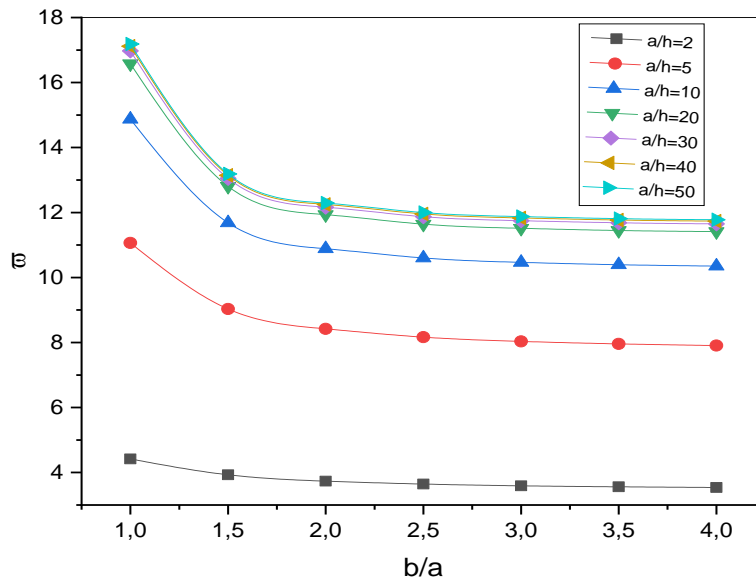
Via les figures III-7 et III-8 , on montre l'effet de la dimension de la plaque stratifiée  $(45/-45)$  et  $(0/90)$  sur la variation de la pulsation propre pour diverses valeurs du rapport géométrique  $a/h$ . Il est à signaler que la pulsation décroît en fonction de l'accroissement du rapport  $b/a$  et les plus faibles valeurs sont obtenues pour le plus faible rapport  $a/h$ .



**Figure III-6 :** Évolution de la fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques à plis croisés  $(0/90)_n$  en fonction du rapport d'épaisseur (Matériau 2, avec  $E_1 / E_2 = 40$ ).



**Figure III-7 :** Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport  $(b/a)$  pour une plaque en composites stratifiée à plis angulaire  $(45/-45)$ .



**Figure III-8:** Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport (b/a) pour une plaque en composites stratifié antisymétrique (0/90)

### III.5 Conclusion

Une théorie de déformation plus sophistiquée pour les plaques a été élaborée avec succès pour analyser le flambage et la vibration libre des plaques laminées simplement supportées. Cette théorie permet une variation quadratique des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en respectant les conditions de bord à traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure sans nécessiter de correction de cisaillement. Les équations de mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. L'efficacité et la précision du modèle actuel ont été démontrées pour étudier les comportements de flambage et de vibration libre des laminés à plis croisés antisymétriques et à plis d'angle. Les conclusions de cette théorie sont les suivantes :

- La charge de flambage obtenue à l'aide du modèle actuel, avec cinq inconnues, est en bon accord avec la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé de Reddy [3].
- Comparé à la solution d'élasticité tridimensionnelle, le modèle actuel offre des résultats plus précis en termes de charge de flambage que la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé.

Les fréquences naturelles obtenues par le modèle proposé, avec quatre inconnues, sont presque identiques à celles prédites par les théories de déformation par cisaillement impliquant cinq inconnues.

En conclusion, le modèle proposé s'avère précis pour analyser les comportements de flambage des plaques composites laminées à plis croisés antisymétriques et à plis d'angle, et efficace pour prédire leurs réponses vibratoires.

## Conclusion générale

L'analyse de flambage des plaques composites en utilisant la théorie HSDT offre une perspective approfondie sur le comportement mécanique de ces structures sous chargement de compression. La théorie HSDT, en prenant en compte les déformations transversales, permet une modélisation plus précise des plaques composites par rapport aux approches traditionnelles telles que la théorie FSDT.

Cette analyse a démontré que la théorie HSDT est une méthode efficace pour prédire le mode de flambage des plaques composites dans une variété de conditions de chargement et de configurations géométriques. En intégrant les effets de cisaillement et de flexion, cette approche fournit des résultats plus précis et réaliste, ce qui est crucial pour la conception et l'optimisation des structures composites dans des applications pratiques.

De plus, cette étude a également mis en évidence l'importance de considérer les propriétés matérielles spécifiques des composites, telles que la matrice, les fibres et leur orientation, dans l'analyse de flambage. Ces facteurs influencent significativement le comportement de flambage des plaques composites et doivent donc être pris en compte de manière appropriée dans les modèles théoriques.

Enfin, cette recherche ouvre la voie à de nouvelles possibilités dans le domaine de l'ingénierie des matériaux composites, en permettant une analyse plus approfondie et une conception plus précise des structures sujettes au flambage. En continuant à développer et à affiner les modèles basés sur la théorie HSDT, nous pourrions optimiser davantage les performances des plaques composites et relever les défis technologiques dans diverses industries telles que l'aérospatiale, l'automobile et le génie civil.



## Bibliographie

- [1] Soufyane BELHNINI, Matériaux Composites Notes de cours, 2023, Univ-temouchent.edu.dz.
- [2] Reziga Miloud Habib, Mechai Ismail, « Utilisation d'une Nouvelle Théorie De Déformation par Cisaillement Sinusoïdal pour la Flexion, Le Flambement, et la Vibration des Plaques en FGM ». 25 juin 2023. Université de Mostaganem.
- [3] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, J. Appl. Mech. Trans. ASME 51 (1984) 745–752
- [4] M. Karama, K.S. Afaq, S. Mistou, Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Struct. 40 (2003) 1525–1546
- [5] J.M. Whitney, N.J. Pagano, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, J. Appl. Mech. 37 (1970) 1031–1036
- [6] J.G. Ren, Bending, vibration and buckling of laminated plates, in: N.P. Cheremisinoff (Ed.), Handbook of ceramics and composites, Marcel Dekker, New York, 1990, Vol. 1, pp. 413–50
- [7] Song Xiang, Guang-chao Li, Wei Zhang, Ming-sui Yang A meshless local radial point collocation method for free vibration analysis of laminated composite plates, Compos. Struct. 93 (2011) 280–286
- [8] K. Swaminathan, S. Patil, Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates, Compos. Struct. 82 (2008) 209–216
- [9] G. Laurent, « Généralités sur les matériaux composites », 6 avril 2010. Disponible sur: [cel.hal.science/cel-00470296v1](http://cel.hal.science/cel-00470296v1)
- [10] Nicolas Franchot, académie de Nantes, « Physique Chimie 3<sup>e</sup> ». Collection 2017. Disponible sur : [www.lelivrescolaire.fr/](http://www.lelivrescolaire.fr/)
- [11] B. Jean-Marie, *mécanique des matériaux et structures composites*. Dunod 2013.
- [12] A. B. Farid Touloum Abdelhak Kaci, Nouveau bio-composite local à base de fibres cellulósiques. Application à l'isolation thermique en bâtiment, 7 décembre 2011. [
- [13] Z. Khaled, Analyse, Evaluation et Réduction des Risques d'un Parc Eolien », 13 juillet 2017. Disponible sur: [hal.science/tel-01561938](http://hal.science/tel-01561938)
- [14] Daikh Ahmed Amine, Vibration libre et flambement des structures sandwichs en FGM, Université de Djillali Liabes Sidi-Belabes, 2017-2018.
- [15] C.-I. ZENONE, Modélisation et caractérisation de l'interaction fluide-structure lors de la mise en œuvre d'un matériau composite par infusion sous vide », université de Lille, 2019.
- [16] F. Chattibi, B. Kouider Halim, B. Abdelkader, K. Nedri, et T. Abdelouahed, Thermomechanical effects on the bending of antisymmetric cross-ply composite plates using a four variable sinusoidal theory, vol., No. 1 93-110 2015. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.19.1.093>
- [17] A.K. Noor, Stability of multilayered composite plate, Fibre Sci. Technol. 8 (1975) 81–89
- [18] K. Nedri, N. El Meiche, A. Tounsi, Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory, J. Mech. Comp. Mat. 49 (2013) 943–958
- [19] J.M. Whitney, N.J. Pagano, Shear deformation in hetero-geneous anisotropic plates, J. Appl. Mech. Trans. ASME 37 (1970) 1031–1036

- [20] J.N. Reddy, An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates, *Compos. Struct.* 25 (1993) 21–35
- [21] K. Noor, Free vibrations of multilayered composite plates, *AIAA J.* 11 (1973) 1038–1039
- [22] Huu-Tai Thai, Dong-Ho Choi, A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates, *Compos. Struct.* 106 (2013) 754–763