



**RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDEL HAMID IBN BADIS DE
MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE**

Thèse Présentée par
GHEZZAR MOHAMMED AMINE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : CONTRÔLE

**ANALYSE ET SYNTHÈSE DE CERTAINES
CLASSES DE SYSTÈMES BIDIMENSIONNELS
FRACTIONNAIRES ET/OU SINGULIERS**

Date de soutenance : JJ MOIS AAAA

Devant le jury composé de :

DAHMANI ZOUBIR	Prof	UMAB	PRESIDENT
BOUAGADA DJILLALI	Prof	UMAB	DIRECTEUR
CHADLI MOHAMMED	MC-HDR	UPJV D'AMIENS	CO-DIRECTEUR
BENDOUKHA BERRABAH	Prof	UNIV. DE NAAMA	EXAMINATEUR
TERBECHÉ MEKKI	Prof	UNIV. D'ORAN 1	EXAMINATEUR
OULD ALI MOHAND	MCA	UMAB	EXAMINATEUR
BOUTOULOUE ALI	Prof	UNIV. DE MEKNES	INVITE

– Année Universitaire 2017/2018 –

Résumé Dans cette thèse, nous étudions l'analyse et la synthèse de quelques systèmes bidimensionnels. Nous avons porté notre étude sur la positivité d'une nouvelle classe de systèmes hybrides fractionnaires bidimensionnels, et établi des critères de positivité des systèmes fractionnaires discrets associés lors du passage à la discrétisation. Une autre partie de notre étude s'est portée sur la stabilité des systèmes de Lyapunov singuliers à deux dimensions hybrides ou discrets, et nous avons extrait des conditions de stabilité en terme de LMI's.

Title Analysis and synthesis of a certain class of fractional and/or singular bidimensional systems.

Abstract In this dissertation, we study the analysis and synthesis of some bidimensional systems. We have studied the positivity of a new class of bidimensional fractional hybrid systems and established criteria for the positivity of discrete fractional systems associated with the transition to discretization. Another part of our study focused on the stability of bidimensional continuous-discrete (hybrid) or discrete Lyapunov systems, and we extracted stability conditions in terms of LMI.

Keywords Bidimensional systems, hybrid systems, fractional systems, singular systems, positivity, discretization, stability, Lyapunov systems

Mots-clés Systèmes bidimensionnelles, Systèmes hybrides, Systèmes fractionnaires, Systèmes singuliers, Positivité, Discrétisation, Stabilité, Systèmes de Lyapunov

Laboratoire d'accueil Dépt. Maths-Info, Laboratoire LMPA, Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI); Université de Mostaganem

Dédicaces

A ma mère et à Mima *Allah yerhamhoum*.
A mon père.
A Ma petite famille.
A mon frère Imad et sa famille.
Speciale dédicace à toi Mouffok et à ta petite famille, merci pour tout.

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier le Professeur Djillali Bouagada d'avoir dirigé ma thèse, et de m'avoir initié à ce grand axe de recherche mathématiques et applications qu'est la théorie de contrôle, et de m'avoir ouvert les grandes portes de la recherche scientifique. Ses conseils, sa gentillesse, et sa clairvoyance mathématique m'ont permis d'achever un bout de ce travail, et bien sûr le reste, reste à venir.

Ma reconnaissance vient aussi au Dr. Mohammed Chadli, qui m'a accueilli au sein de son laboratoire MIS-UPJV d'Amiens dans le cadre du co-encadrement ; et cela durant les stages de formations de courtes durée et durant la bourse obtenue dans le cadre du programme Algéro-français PROFAS B+. Merci de m'avoir soutenu, conseillé, encouragé ; et m'avoir poussé vers l'avant.

Mes sincères remerciements aux Professeurs Zoubir Dahmani, Berrabah Bendoukha, Mekki Terbeche, et Mohand Ould Ali qui ont bien voulu expertiser ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et pour leurs nombreuses remarques et surtout d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance. Je les prie d'accepter mes vifs remerciements.

Je voudrais remercier tout mes collègues du département de mathématiques-informatique et d'ailleurs, qui m'ont accompagné pendant ces années. Merci à eux pour leurs gentillesse, leurs aides et pour leurs disponibilités.

Je remercie également le Professeur Paul Van Doreen pour les conseils lors des discussions pendant mon séjour au laboratoire ICTEAM de l'UCL-Belgique.

Liste des Publications

Revues Internationales

1. M.A. GHEZZAR, Dj. BOUAGADA, M. CHADLI , « Influence of the discretization step on the positivity of a certain class of fractional continuous-discrete 2D systems », IMA Journal of Mathematical Control and Information (2017), 1–16 doi : 10.1093/imamci/dnx005. Publication en ligne le 27-02-2017.

Conférences Nationales et Internationales

1. 29-30 Juin 2015 : M.A. GHEZZAR, D. BOUAGADA, M. CHADLI «On a certain class of fractional systems and discretization problem» 7ème workshop sur la modélisation, Analyse et Contrôle, MACS7-2015, El Djadida-Maroc
2. 12-14 Février 2015 : M.A. GHEZZAR, D. BOUAGADA, M. CHADLI «On discretization and positivity of a certain class of fractional models» 4ième Congrès de la SM2A, SM2A-2014, Oujda- Maroc 2015. (Oral presentation)
3. 24-26 Juin 2013 : M.A. GHEZZAR, S. Marir, D. BOUAGADA «Sur la solvabilité des systèmes fractionnaires implicites» 6ème workshop sur la modélisation, Analyse et Contrôle, MACS6-2013, Essaidia-Maroc
4. 02-05 Juin 2013 : M.A. GHEZZAR, S. MARIR, D. BOUAGADA «On solution of fractional singular linear systems and Kalman decomposition» , ICAAMM, Istanbul Turquie (Oral presentation)
5. 05-07 Mars 2013 : M.A. GHEZZAR, D. BOUAGADA « Problem of realization of fractional continuous time systems » CIED, Ghardaïa Algérie (Poster presentation)

Notations

\otimes	Produit de Kronecker
\mathbb{Z}_+	Corps des entiers non négatifs
\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}_+	Corps des nombres réels non négatifs
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs à n entrées réelles
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espace des matrices réelles de dimensions $n \times m$
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}_+^{n \times 1} := \mathbb{R}_+^n$	Espace des vecteurs à n entrées réelles non négatives
$\mathbb{R}_+^{n \times m}$	Espace des matrices à entrées réelles non négatives
\mathbb{M}_n	Ensemble des matrices de Metzler de dimensions $n \times n$
A^T	Transposée d'une matrice A
A^{-1}	Inverse d'une matrice A
I_n	Matrice identité de dimension n
$X(s)$	Transformée de Laplace
$X(z)$	Z-Transformée
$Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$Im(z)$	Partie imaginaire du nombre complexe z
$\ G\ _2$	Norme 2 de la matrice G
$\ G\ _\infty$	Norme ∞ de la matrice G
$i = \overline{p, q}$	$i \in \{p, p+1, p+2, \dots, q-1, q\}, p, q \in \mathbb{Z}_+$
$\rho(A)$	Rayon spectral de la matrice A
$\sigma(A)$	Spectre de la matrice A
IML	Inégalité matricielle linéaire
LMI's	(en anglais) Linear matrix inequalities

Table des matières

Table des matières	6
1 Introduction	8
2 Notions de base sur la théorie des matrices et du calcul fractionnaire	11
2.1 Matrices particulières	11
2.2 Quelques notions fondamentales sur le calcul fractionnaire	13
2.2.1 Définitions fondamentales	14
2.2.2 Les relations entre les dérivées fractionnaires	16
2.3 Étude des inégalités matricielles linéaires LMIs	17
2.3.1 Inégalité matricielle linéaire LMI	17
2.3.2 Problème de faisabilité	18
2.3.3 Lemme du complément de Schur	21
2.3.4 Les applications des LMIs	22
2.4 Conclusion	24
3 Positivité des systèmes bidimensionnels fractionnaires	25
3.1 Positivité des systèmes 2D	26
3.1.1 La discrétisation du système 2D linéaire fractionnaire à temps continu-discret	27
3.1.2 Solvabilité du système bidimensionnel fractionnaire discret	29
3.1.3 Les conditions de positivité	31
3.1.4 L'influence du pas de discrétisation sur la positivité	33
3.1.5 Discussions	35
3.2 Exemples numériques	36
3.3 Conclusion	42
4 Stabilité des systèmes de Lyapunov : Approche LMI's	43
4.1 Préliminaires	44
4.2 Le système 2D général de Lyapunov à temps discret	45
4.2.1 Stabilité des systèmes général 2D de Lyapunov	47
4.2.2 Conditions LMI pour le Test de Stabilité des systèmes 2D à temps discret	49

TABLE DES MATIÈRES

4.3	Systèmes générales linéaires 2D à temps continu-discret de Lyapunov	51
4.3.1	Stabilité du système général linéaires 2D à temps continu-discret de Lyapunov	51
4.3.2	Conditions LMI pour le Test de Stability des Systèmes généraux 2D à temps Continu-Discret de Lyapunov	52
4.4	Conclusion	54
5	Conclusion générale	55
A	The bidimensional Z-transform	56
B	The Kronecker Product	58
	Bibliographie	60

Chapitre 1

Introduction

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants, du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce projet est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des mathématiques en générale a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de la physique et de l'ingénierie.

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et l'ingénierie, est celle du calcul fractionnaire qui étant la dérivation et l'intégration aux ordres fractionnaires. Nous considérons dans ce projet une nouvelle classe de systèmes dits systèmes singuliers/fractionnaires bidimensionnels (2D). Ces systèmes sont décrits par l'équation différentielle à dérivée fractionnaire et sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme pour leurs homologues les systèmes singuliers linéaires d'ordre entier.

Les systèmes 2D sont des systèmes dont l'information se propage en deux directions et qui trouvent leurs applications en électronique, en imagerie et traitement du signal, en automatique, en biomathématiques, ainsi qu'en économie. Nous traitons le problème de solvabilité pour différents modèles (discret-continu, discret-discret) pour ensuite étudier le problème de discrétisation et l'influence du pas de discrétisation sur la positivité de ces systèmes. A l'instar des modèles standards, l'étude de la stabilité des systèmes singuliers est importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier la stabilité asymptotique. Contrairement au cas non singulier, la localisation des valeurs propres finies du faisceau singulier est insuffisante pour caractériser la stabilité (lorsque $\det(E)$ est non nul), d'autres propriétés doivent être vérifiées.

Nous signalons que très peu de contributions traitent les problèmes d'analyse

et de commande des systèmes singuliers fractionnaires. Nous nous intéressons à la classe des modèles 2D généralisés de type Lyapunov ; cela fera de même partie de cette thèse. Nous utilisons dans ce cas le formalisme LMI pour ce type de modèles. Nous insistons sur le fait que très peu de travaux traitent les problèmes d'analyse et de commande des systèmes singuliers fractionnaires. Les modèles 2D (hybrides, discret-discret, continu-continu) et les modèles de Lyapunov font de même partie de cette thèse. De récents travaux font état de la puissance de la discrétisation pour l'analyse des systèmes fractionnaires, étant donné que le passage du continu au discret en utilisant un formalisme mathématiques basé sur la théorie des méthodes numériques et du fractionnaire, connaît un essor faramineux. Il est bien connu que la positivité et la stabilité sont des notions importantes en théorie des systèmes et de contrôle. Précisément ; si on considère la classe des systèmes fractionnaires singuliers bidimensionnels, le problème de la positivité et la stabilité pour cette dernière paraît important et difficile. Nous nous intéresserons aussi à la stabilité des classes de modèles multidimensionnelles scalaires. Des méthodes de résolution de ces problèmes emploient à notre connaissance un grand nombre d'approches pour le cas standard. D'un autre côté, nous nous attaquerons à la classe des systèmes de type Lyapunov fractionnaires singuliers où nous envisageons d'améliorer les conditions de stabilité des modèles de Lyapunov, par des approches en LMI. De récents travaux ont démontré toute la puissance des LMI pour l'étude de l'analyse, la solvabilité et la stabilité de cette classe. Dans la première partie de notre travail, nous étudions une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires introduite dans [33]. La principale propriété de ces systèmes et que si l'état initiale est non négatif (resp. positif) la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non négatif (resp. positif). L'objectif du chapitre 1 est de rappeler quelques propriétés de la théorie des matrices, et des systèmes positifs. Dans le deuxième chapitre, nous étalons quelques grandes notions du calcul fractionnaire au sens de Caputo ; ainsi que de l'analyse fractionnaire. Dans le chapitre 3, nous étudions la positivité des systèmes hybrides et nous analysons l'impact de la discrétisation sur ces systèmes. Des critères pour la préservation de la positivité sont établis.

Dans la deuxième partie de notre travail, l'analyse de la stabilité d'une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels ; dite systèmes de Lyapunov introduite dans [38],[48],[37] et [47] est considérée.

Les Inégalités Matricielles Linéaires ou IML's (LMI en anglais) ; jouent un rôle important dans les méthodes modernes pour l'analyse de stabilité des systèmes linéaires. Dans par exemple l'automatisme, de nombreux résultats trouvent leurs formulations en terme de LMI ; et ce formalisme a permis la résolution de quelques problèmes qui n'avaient pas encore trouver de solution LMI pour la commande des systèmes linéaires. En nous basant sur les travaux de Lyapunov, nous verrons que les LMI permettent l'analyse de la stabilité. La formulation LMI (Linear Matrix Inequality) est aujourd'hui un outil efficace

pour la résolution de nombreux problèmes d'automatique, grâce aux avancées du début des années 90 [3] et des logiciels conviviaux tels que Matlab via son tool Yalmip. L'optimisation convexe sous contraintes LMIs a émergé comme un outil incontournable en automatique. Son émergence est en partie le résultat de la prise de conscience au sein des chercheurs en analyse des systèmes de la place centrale de la complexité algorithmique pour la mise au point de méthodes de commande et/ou d'analyse des systèmes (voir [7], [11], [10]). Les problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI ont le grand intérêt d'avoir des algorithmes de résolution efficaces, largement disponibles dans les logiciels de calcul scientifiques généraux.

Le travail s'inscrit dans le cadre d'un co-encadrement en thèse avec le Professeur Chadli Mohammed du laboratoire MIS de l'université de Picardie Jules-Verne d'Amiens (France).

Chapitre 2

Notions de base sur la théorie des matrices et du calcul fractionnaire

Nous présentons dans ce premier chapitre la théorie générale des matrices non-négatives, des matrices positives et des matrices de Metzler. Dans la littérature, on peut trouver une multitude de références sur ces classes de matrices (voir [2], [4], [5]). Nous commençons par donner les définitions et quelques propriétés générales relatives à ces matrices. Ces matrices rentrent dans la caractérisation de la positivité des systèmes linéaires. L'analyse de ces systèmes fera l'objet du chapitre 3. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous donnons les notions générales du calculs fractionnaires, nous définissons la dérivée d'ordre non entier d'une fonction réelle au sens de Caputo, ainsi que quelques unes de ses propriétés importantes.

2.1 Matrices particulières

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des matrices à entrées réelles.

Définition 2.1. On dit que A est une matrice non-négative si $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m} : a_{ij} \geq 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives. Une telle matrice est notée $A \geq 0$ ou $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Définition 2.2. On dit que A est une matrice positive si A est non-négative et $\exists k = \overline{1, n}$, $\exists l = \overline{1, m} : a_{kl} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont non-négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$.

Définition 2.3. On dit que A est une matrice stictement positive si $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m} : a_{ij} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice $A >> 0$.

Remarque 2.1. Les définitions précédentes restent valables pour les vecteurs de dimensions n , où $n \geq 2$. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif $\varphi \gg 0$ coïncide avec $\varphi > 0$.

Définition 2.4. On dit que A est une matrice de Metzler si $\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$, i.e., toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ est noté \mathbb{M}_n .

Exemple 2.1. La matrice G suivante est une matrice de Metzler.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les matrices de Metzler trouvent leurs applications majeurs dans l'analyse de stabilité et la positivité des systèmes linéaires. les livres de Berman et Plemmons [4], [5] donnent 50 conditions équivalentes pour qu'une matrice de Metzler soit asymptotiquement stable. Pour cela, nous devons rappeler deux notions primaires du calcul matriciel, qui sont :

Le module de stabilité $s(A)$ d'une matrice A , défini comme étant la plus grande partie réelle des valeurs propres de A ; i.e.,

$$s(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$$

où $\sigma(A)$ est le spectre de la matrice A .

Le rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice A , défini comme étant le plus grand module des valeurs propres de A , c-à-d,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Nous pouvons alors, citer ces quelques résultats suivants :

Lemme 2.1. A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. où e^{At} étant l'exponentiel de la matrice At .

Théorème 2.2. Si A est une matrice de Metzler, son module de stabilité est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre v dans l'orthant positif tel que : $Av = s(A)v$ où $s(A)$ étant le module de stabilité de A .

Théorème 2.3. (Perron-Frobenius classique)

Le rayon spectral d'une matrice positive $A \geq 0$ est une valeur propre à laquelle correspond un vecteur propre de l'orthant positif. Si $A \geq 0$ est en plus irréductible alors le vecteur propre correspondant est dans l'intérieur de l'orthant positif.

Décomposition régulière : soit une matrice de Metzler A inversible. On appelle décomposition régulière de A , toute décomposition de la forme :

$$A = F + V$$

où $F \geq 0$ et V une matrice de Metzler asymptotiquement stable.

Théorème 2.4. (Varga) [5] *Il est équivalent de dire, que pour toute décomposition régulière d'une matrice de Metzler inversible A :*

1. A est asymptotiquement stable
2. $\rho(-FV^{-1}) < 1$

Théorème 2.5. *Le système linéaire $\dot{x} = Ax$ laisse invariant l'orthant positif si et seulement si A est une matrice de Metzler.*

Le système linéaire $\dot{x} = Ax + B$ laisse invariant l'orthant positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \geq 0$

Conclusion : Dans cette partie, nous avons tenu, à rappeler quelques définitions et théorèmes importants dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Certains modèles mathématiques en automatisme ou en cinétique chimique, sont régis par des EDO de la forme $\dot{x} = Ax + B$, où A est une matrice de Metzler. Il est donc des plus important d'étudier les propriétés fondamentales de ce type de matrices.

2.2 Quelques notions fondamentales sur le calcul fractionnaire

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul différentiel classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz posaient les fondements du calcul différentiel et intégral. La question a été abordée dès 1695 par Leibniz dans une lettre à l'Hospital [45], mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre 1/2 de la fonction x , Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), Grünwald, Letnikov ...etc. Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- Les différences finies d'une fonction se généralisent sous la forme de Grünwald-Letnikov, très utile numériquement,

- L'intégration, opération inverse de la dérivation, mène, via la formule intégrale de Liouville, aux formules de Riemann-Liouville et aux formules de Caputo,
- Les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(j\omega)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Donc L'idée de base de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation des dérivations et d'intégrations standards. Le mot fractionnaire est un terme trompeur mais il a été conventionnellement retenu.

2.2.1 Définitions fondamentales

Dans cette partie, nous allons exposer quelques notions fondamentales indispensables pour la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 2.5. La fonction Gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, alors la fonction Gamma notée Γ est définie :

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (2.2)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad Re(\alpha) > 0 \quad (2.3)$$

En particulier :

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.4)$$

Définition 2.6. La fonction de Mittag-Leffler

Pour $\theta \in \mathbb{C}$ et $0 < \alpha < 1$, on appelle fonction de Mittag-Leffler et on note $E_\alpha(\cdot)$ la fonction suivante :

$$E_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (2.5)$$

On remarque bien sur que $E_1(\theta) \equiv e^\theta$.

Définition 2.7. L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors les intégrales $I_{a+}^{(\alpha)} f(x)$ et $I_{b-}^{(\alpha)} f(x)$ sont définis par ce qui suit :

$$I_{a_+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a \in]-\infty, +\infty[\quad (2.6)$$

est appelé intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α .
L'intégrale $I_{b_-}^{(\alpha)}$ définie par :

$$I_{b_-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad b \in]-\infty, +\infty[\quad (2.7)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α .

Théorème 2.6. [45] Pour $f \in C[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe, c-à-d,

$$I_{a_+}^{(\alpha)} [I_{a_+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a_+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons que l'intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α et nous omettons l'indice a_+ , et nous avons par convention : $I_{a_+}^{(\alpha)} = I^{(\alpha)}$

Définition 2.8. La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville
Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (avec $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}_+^*$), alors la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f et notée ${}^R D^\alpha$ est définie par :

$${}^R D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} (I^{(n-\alpha)} f(t)) \quad (2.10)$$

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle très important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires, à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (résolution des équations différentielles d'ordre entier, sommation des séries,...etc.). De nombreux nouveaux résultats des travaux de recherche sont apparus, spécialement sur la théorie de viscoélasticité et des mécaniques du solide, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une bonne description des propriétés des matériaux. Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a); f'(a), \dots$ etc.

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement (analytiquement ou numériquement) (voir par exemple les solutions données dans [45]). La solution de ce problème a été proposée par M. Caputo dans les années soixante (voir [9]) dans sa définition qu'il a adapté avec Mainardi dans la structure de la théorie de la

viscoélasticité [39]. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire où elle s'introduit naturellement, est lié à la modélisation mécanique des gommés et des caoutchoucs, et en général toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit visco-élastique.

Définition 2.9. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$ et la fonction f vérifiant $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a, b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (à gauche) au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^C D_t^\alpha$ (ou simplement ${}^C D^\alpha$) est définie par la relation suivante :

$${}^C D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

ou

$${}^C D^\alpha f(t) = I^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (2.12)$$

Définition 2.10. La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée principale dans cette approche est de généraliser les grands classiques de la dérivation standard (entière) d'une fonction à des ordres arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier k (si α est positif) et l'intégrale répétée ($-k$) fois (si k est négatif) d'une fonction f par la relation suivante :

$$D^k f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-k} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{k}{p} f(t - hp) \quad (2.13)$$

avec $\binom{k}{p} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{p!}$.

La généralisation de cette formule pour α non entier (avec $0 < n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$) est appelée dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, notée ${}^{GL} D^\alpha f(t)$ et définie par la relation suivante :

$${}^{GL} D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(t - hp) \quad (2.14)$$

2.2.2 Les relations entre les dérivées fractionnaires

Dans ce qui suit, nous allons donner quelques résultats sur la relation entre les dérivées fractionnaires [45].

Soit $\alpha > 0$ vérifiant $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Supposons que f est une fonction dont les dérivées ${}^C D^\alpha f$ et ${}^R D^\alpha f$ existent alors,

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} \quad (2.15)$$

Nous en déduisons que si toutes les conditions initiales $f^{(p)}(a) = 0$ pour tout $p = 0, (n-1)$, alors ${}^C D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t)$.

Si la fonction f est de classe C^n , alors en faisant des intégrations par parties nous obtenons ce qui suit :

$${}^R D^\alpha f(t) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{f^{(p)}(a)(t-a)^{p-\alpha}}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)} d\tau \quad (2.16)$$

Nous en déduisons que les deux approches de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville sont équivalentes, c-à-d, ${}^G D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t)$.

2.3 Étude des inégalités matricielles linéaires LMIs

Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'automatique, (problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système, ...) qui sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. L'intérêt des méthodes basées sur les LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus.

Les notions des LMIs se retrouvent dans plusieurs travaux depuis de nombreuses années. Ainsi Lyapunov a conditionné la stabilité d'un système par LMI. Plus tard, Kalman, Yakubovich et Popov ont généralisé le résultat de stabilité proposé par Lyapunov. La terminologie des LMIs a été utilisée par Willems en 1971. En 1994, Nesterov et Nemirovski ont trouvé une solution pour résoudre les LMIs de manière efficace en utilisant des méthodes basées sur les points intérieurs.

Ce chapitre présente un ensemble des notions et propriétés concernant les inégalités matricielles linéaires LMIs et leurs applications en commande des systèmes.

2.3.1 Inégalité matricielle linéaire LMI

Définition 2.11. On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques :

$F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ et $x \in \mathbb{R}^m$ telles que :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.17)$$

L'inégalité (2.17) implique que : $F(x)$ est une matrice définie positive c'est-à-dire :

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \text{ et } z \neq 0 : z^T F(x) z > 0. \quad (2.18)$$

De manière équivalente, la valeur propre la plus petit de $F(x)$ est positive.

Les matrices symétriques F_i sont fixées (connues) et $x = [x_1, x_2 \dots, x_m]^T$ est un vecteur de valeurs inconnues (variables). On dit que $F(x) > 0$ est une LMI affine des éléments de x .

Remarque 2.2. L'inégalité (2.17) est une LMI stricte si $F(x)$ est seulement définie positive (non négative) autrement LMI est dite non stricte.

Le succès des LMIs vient du développement des méthodes dites *du point intérieur* qui permettent de résoudre ces problèmes de manière efficace.

2.3.2 Problème de faisabilité

Le problème de faisabilité d'une LMI est le problème de trouver l'ensemble des points : $x \in C$ où

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) > 0\} \text{ qui vérifient LMI : } F(x) > 0, \quad (2.19)$$

alors le problème $F(x) > 0$ est dit faisable (ou réalisable) et ces points appelées points faisables.

Exemple 2.2. Les LMIs ne se présentent pas souvent directement sous la forme (2.17) prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.20)$$

Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T > 0$ de même dimensions que A telle que :

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.21)$$

Considérons à titre d'exemple le cas où A est une matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

La matrice symétrique P dépend alors de 3 paramètres x_i avec $i = 1, 2, 3$. On peut s'écrire :

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

La condition de positivité $P > 0$ s'écrit :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0. \quad (2.24)$$

L'inégalité de Lyapunov $ATP + PA < 0$, peut se réécrire sous la forme suivante :

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0. \quad (2.25)$$

Cette inégalité est une LMI affine des éléments : x_1, x_2, x_3 .

Propriétés

Parmi les propriétés les plus importantes des inégalités matricielles linéaires, on peut mentionner : [LMIs multiples peuvent être écrites comme une seule LMI] Parmi les propriétés remarquables des LMIs, la possibilité de regrouper plusieurs LMIs

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x) > 0, \quad (2.26)$$

en une seule LMI bloc diagonale :

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_n(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.27)$$

[La convexité] La convexité est une propriété géométrique importante, qu'on trouve dans la théorie d'optimisation globale.

Définition 2.12 (Un ensemble convexe). Un ensemble C est dit convexe si pour toutes les points : $(x_1, x_2) \in C$ et $0 < \lambda < 1$, alors :

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in C. \quad (2.28)$$

Définition 2.13. Soit une fonction f avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction f est convexe si :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$, alors :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (2.29)$$

La fonction f est convexe si pour tous les pairs $(x, y) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ est toujours en bas de $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

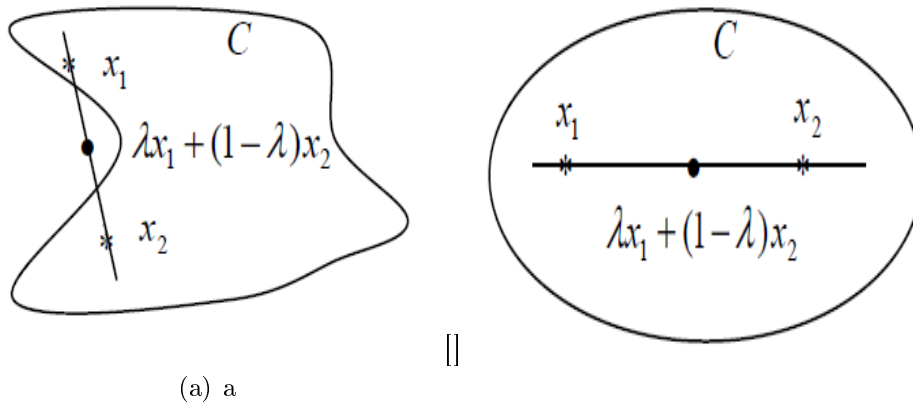


FIGURE 2.1 – Représentation d'un ensemble convexe et non convexe. (a). Ensemble convexe ; (b). Ensemble non convexe.

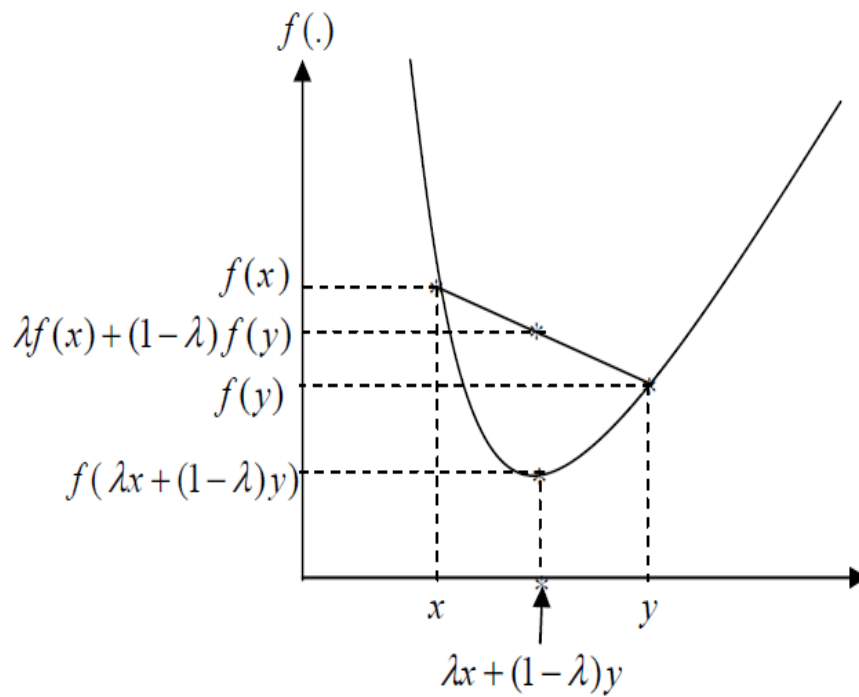


FIGURE 2.2 – Graphe d'une fonction convexe

Définition 2.14 (Contrainte LMI convexe). Une importante propriété des LMIs est que l'ensemble : $C = \{x : F(x) > 0\}$ est convexe. C'est-à-dire LMI (2.17) définit un ensemble convexe sur la variable x .

Prenons : x et y deux vecteurs, avec : $F(x) > 0$, $F(y) > 0$ et $0 < \lambda < 1$ si :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) > 0. \quad (2.30)$$

Donc : on peut écrire :

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) > 0. \quad (2.31)$$

[Intersection de deux ensembles convexes] Soit : $F(x) > 0$ et $G(x) > 0$ deux LMIs, liées respectivement avec les deux ensembles convexes suivants :

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^m / F(x) > 0\} \text{ et } C_2 = \{x \in \mathbb{R}^m / G(x) > 0\}. \quad (2.32)$$

Alors l'intersection de C_1 et C_2 est définie par l'ensemble convexe suivant :

$$C_1 \cup C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^m / \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & G(x) \end{bmatrix} > 0 \right\}. \quad (2.33)$$

Alors l'intersection de deux ensembles convexes donne un ensemble convexe.

2.3.3 Lemme du complément de Schur

Le lemme du complément de Schur converti une classe des inégalités non linéaires à des inégalités matricielles linéaires LMIs convexes qui apparaissent régulièrement dans les problèmes de commande.

Les inégalités non linéaires convexes sont :

$$\begin{aligned} R(x) &> 0, \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) &> 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

où : $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ et $S(x)$ dépend d'une manière affine de x .

Le lemme du complément de Schur converti ces inégalités non linéaires convexes à une LMI équivalente :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.35)$$

Exemple 2.3. Soit l'inégalité matricielle quadratique suivante :

$$\begin{aligned} R(x) &> 0, \\ A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q &> 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

où : $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$ sont des matrices données et $P = P^T$ est la variable.

On peut reformuler cette inégalité matricielle quadratique sous forme d'une inégalité matricielle plus simple, en utilisant le lemme du complément de Schur :

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0. \quad (2.37)$$

2.3.4 Les applications des LMIs

Nous allons donner quelques problèmes qui font appel aux LMIs :

Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov proposée en 1982 dans le cadre de l'étude de stabilité des systèmes linéaires. Étant donné un système LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.38)$$

Ce système est stable s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive telle que sa dérivée est définie négative :

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \quad (2.39)$$

où : P est une matrice symétrique et définie positive : $P = P^T > 0$

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x. \quad (2.40)$$

La condition de stabilité consiste à trouver la matrice P qui vérifie l'inégalité matricielle :

$$A^T P + PA < 0. \quad (2.41)$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases}. \quad (2.42)$$

Donc il résulte :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{bmatrix} > 0. \quad (2.43)$$

Le système (2.39) est stable lorsque l'inégalité matricielle (2.43) est faisable.

Problème de stabilité quadratique des systèmes incertains

La notion de stabilité quadratique est le prolongement de la notion de stabilité de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes incertains, nous supposons que les matrices incertaines A du modèle d'état appartiennent à des ensembles compacts Ω .

Nous considérons le système linéaire incertain suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (2.44)$$

Ce système est dit stable quadratiquement lorsqu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que quelle que soit la matrice A appartenant à l'ensemble Ω nous avons $\dot{V}(x) < 0$:

$$x^T(A^T(t)P + PA(t))x < 0. \quad (2.45)$$

Nous pouvons alors montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique du système incertain (2.44) est :

- Dans le cas des incertitudes bornées en norme avec l'ensemble compacts :

$$\Omega = \{A_0 + DF(t)E, \|F(t)\|_2 \geq 1\} \quad (2.46)$$

avec $\|F(t)\|_2 = \lambda_{\max}(F^T F)$ où λ_{\max} représente la valeur propre maximale de $F^T F$.

Il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_0^T P + PA_0 + PDD^T P + E^T E < 0, \quad (2.47)$$

soit vérifiée, pour une matrice nominale A_0 et des matrices constantes D, E données.

- Dans le cas des incertitudes polytopiques avec : $\Omega = Co\{A_1, \dots, A_n\}$ où Co représente l'ensemble convexe et $\{A_1, \dots, A_n\}$ une série de matrices constantes données.

Il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.48)$$

Soit vérifiée.

Notons que ces conditions sont uniquement suffisantes pour assurer la stabilité robuste du système incertain (2.44), c'est à dire sa stabilité pour toute incertitude admissible. De manière générale la stabilité quadratique implique la stabilité robuste mais l'inverse n'est pas vrai.

Problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs

Beaucoup de problèmes d'automatique et particulièrement les problèmes de contrôle des systèmes peuvent se formuler comme des problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs. Et plusieurs problèmes sont mieux écrits

en termes d'une simple ou multiple fonction objectif avec un ensemble des contraintes LMIs, car les problèmes d'optimisation convexe apparaissent souvent en pratique. Ceci est la force de l'utilisation des formulations LMIs dans les applications réelles qui concernent les lois de commande des divers systèmes. L'introduction des contraintes LMIs permet de définir un ensemble de problèmes d'optimisation suivants :

Programmation Semi Définie (SDP) La programmation semi définie SDP appelé aussi problème d'optimisation LMI, est une généralisation de la programmation linéaire (LP), où l'égalité de contrainte remplace par une LMI, un problème SDP formulé comme suivant :

$$\begin{aligned} \min(c^T x) \\ F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

avec :

- $x \in \mathbb{R}^m$: vecteur des variables de décision.
- c^T : vecteur ligne donnée
- $F(x)$: contrainte LMI.

Problèmes des valeurs propres (Eigenvalue Problem EVP) Un large nombre de propriétés de commande peuvent être calculés comme un problème de valeur propre (EVP) qui est le problème de minimisation de la valeur propre maximale λ_{\max} d'une matrice $A(x) > 0$ qui dépend affinement de la variable x , soumise à une contrainte LMI $F(x) > 0$.

Plusieurs tests d'analyse de performance, tel que le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ peuvent être écrits sous forme d'un problème des valeurs propres (EVP) avec contrainte LMI.

On écrit la forme générale d'un problème des valeurs propres (EVP) comme suivant :

$$\begin{aligned} \min \lambda, \\ \lambda I - A(x) > 0, \\ F(x) > 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.4 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'un rappels de quelques notions fondamentales de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire utilisées essentiellement dans la première partie de notre travail qui concerne la positivité d'une certaine classe de systèmes 2D fractionnaires linéaires hybrides.

Quelques notions sur les inégalités matricielles linéaires (LMI's) ont été présentées dans le but de leurs exploitations dans la deuxième partie du travail laquelle concerne l'étude de l'analyse de la stabilité des systèmes de Lyapunov 2D.

Chapitre 3

Positivité des systèmes bidimensionnels fractionnaires

Dans les dernières décennies ; il a eu un intérêt croissant pour les systèmes bidimensionnels fractionnaires qui sont sujets à des contraintes de positivité de leurs variables dynamiques. Ces systèmes positifs doivent avoir pour des conditions initiales non-négatives, des variables d'état non-négatifs. Ces systèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs [15], [29] dans différentes applications, et apparaissent naturellement dans les réacteurs industriels chimiques, les échangeurs de chaleurs, l'épidémiologie, les circuits, les systèmes de stockages de mémoires ...etc. Dans les 3 dernières décennies, plusieurs efforts ont été entrepris pour développer des systèmes fractionnaires, dans les différents champs de recherche, où le calcul fractionnaire est mis à l'avant comme outils puissant pour la modélisation des phénomènes.

Actuellement, nous pouvons trouver plusieurs articles et livres devenus à aspects théoriques et aux applications, voir par exemple les travaux de Oustaloup [44], Machado [50], [1], Kaczorek [34], Podlubny [45], Monje [41]. Une variété de modèles fractionnaires qui suivent les comportements de systèmes linéaires fractionnaires positifs peuvent être trouvés en ingénierie, biologie, management, médecine, dynamique des fluides, robotique, aéronautique et le contrôle automatique. Quelques applications des systèmes fractionnaires positifs ont été proposées dans [34] où un aperçu de l'état de l'art sur la théorie des systèmes linéaires positifs fractionnaires a été énoncé. Le problème de la positivité des systèmes linéaires fractionnaires bidimensionnels a été envisagé par Kaczorek [34], et la notion de contraintes bidimensionnelles positives en temps continu et discret a été introduite dans [33]. Le problème de la discrétisation a été étudié pour le système linéaire en temps continu 1D dans [35] et plus tard dans [36] pour les systèmes linéaires fractionnaires en temps continu 1D. Dans ce chapitre, nous considérons la classe des systèmes linéaires à temps discret discontinu 2D qui ont été introduits dans [33], et l'objectif est de faire une extension des résultats déjà démontrés dans [6] pour les systèmes 2D stan-

dards ; aux systèmes positifs fractionnaires à temps continu-discret linéaires. Des conditions nécessaires et suffisantes sur le pas de discrétisation sont établies pour conserver la positivité.

3.1 Positivité des systèmes 2D

Dans [33] une nouvelles classe de systèmes 2D fractionnaires à été introduite. Nous allons tout d'abord, définir le concept de positivité puis ; entamé une discrétisation sur ce type de système.

Considérons le système linéaire 2D fractionnaire à temps continu-discret introduit dans [33] et défini pour $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ par les équations d'état suivante :

$$\frac{d^\alpha x(t, i + 1)}{dt^\alpha} = A_0 x(t, i) + A_1 x(t, i + 1) + Bu(t, i) \quad (3.1)$$

$$y(t, i) = Cx(t, i) + Du(t, i) \quad (3.2)$$

où $x(t, i) \in \mathbb{R}^n$, $y(t, i) \in \mathbb{R}^p$, $u(t, i) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie, et les matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Les états $x(t, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$ sont les conditions initiales.

Notons que la dérivation fractionnaire de l'équation (3.1) est définie au sens de Caputo, i.e.,

$$\frac{d^\alpha x(t, i + 1)}{dt^\alpha} = {}^C D^\alpha x(t, i + 1) = {}_0^C D_t^\alpha x(t, i + 1)$$

Nous supposons que la variable continue t et la variable discrète i sont indépendantes.

Notons que nous traitons ici, un cas particulier du système générale donné dans [33], qui ne dépend que d'une seule dérivée fractionnaire $\frac{d^\alpha x(t, i+1)}{dt^\alpha}$. Par la suite nous énonçons la définition de la positivité et le théorème régissant la positivité du système (3.1)-(3.2).

Définition 3.1. Le système 2D linéaire fractionnaire (3.1)-(3.2) est dit positif si tout les états et toutes les sorties sont positifs i.e. : $x(k, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(k, i) \in \mathbb{R}_+^p$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$, pour toutes les conditions initiales $x(k, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$, et toutes les entrées $u(k, i) \in \mathbb{R}_+^m$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

Théorème 3.1. [33] *Le système (3.1)-(3.2) est positif si et seulement si :*

1. $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$,

2. A_1 une matrice de Metzler.

L'objectif de notre chapitre est de voir l'influence du pas de discrétisation sur la positivité du système (3.1)-(3.2). Pour cela nous allons utiliser la formulation discretisée de la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov, définie comme suit :

Définition 3.2. [41] Soit $h > 0$ le pas de discrétisation α l'ordre de dérivation fractionnaire, vérifiant $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{Z}_+^*$. L'approximation généralisée de l'opérateur de différentiation fractionnaire est défini pour tout pas h et tout $t = kh$ avec $k \in \mathbb{Z}_+$ par la formule :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = D^\alpha x(kh) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{p=0}^{k+1} c_\alpha(p) x((k+1-p)h) \quad (3.3)$$

où

$$c_\alpha(p) = (-1)^p \binom{\alpha}{p} \quad (3.4)$$

avec

$$\binom{\alpha}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-p+1)}{p!} & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Il s'en suit de l'équation (3.3) que

$$D^\alpha x(kh) = h^{-\alpha} [x((k+1)h) - \alpha x(kh) + \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) x((k+1-p)h)] \quad (3.6)$$

et

$$x((k+1)h) = h^\alpha D^\alpha x(kh) + \alpha x(kh) - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) x((k+1-p)h) \quad (3.7)$$

Remarque 3.1. Notons que la relation (3.6) est une généralisation de la dérivée usuelle, dans le cas ou $\alpha = 1$, autrement dit la formule discrète fractionnaire de Grunwald-Letnikov est une généralisation des différences finies dans le cas standard.

3.1.1 La discrétisation du système 2D linéaire fractionnaire à temps continu-discret

Les relations (3.3) et (3.7) peuvent être étendu au fonctions 2D, et nous les appliquons au système (3.1)-(3.2). Ainsi,

$$\frac{d^\alpha x(t, i+1)}{dt^\alpha} = D^\alpha x(kh, i+1) = h^{-\alpha} \sum_{p=0}^{k+1} c_\alpha(p) x((k+1-p)h, i+1) \quad (3.8)$$

et

$$x((k+1)h, i+1) = h^\alpha D^\alpha x(kh, i+1) + \alpha x(kh, i+1) - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) x((k+1-p)h, i+1) \quad (3.9)$$

Dorénavant et par convention, le pas d'échantillonnage h est omis des 2D suites discrétisées, i.e., $x(kh, i) = x(k, i)$, $y(kh, i) = y(k, i)$ et $u(kh, i) = u(k, i)$ pour tout $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

Théorème 3.2. *Considérons $h > 0$. Le système 2D Linéaire fractionnaire hybride (3.1)-(3.2) où $0 < \alpha < 1$ est discrétisé en un système 2D linéaire à temps discret d'ordre fractionnaire α défini par les équations suivantes :*

$$x(k+1, i+1) = \hat{A}_0 x(k, i) + \hat{A}_1 x(k, i+1) + \hat{B}u(k, i) - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) x(k+1-p, i+1) \quad (3.10)$$

$$y(k, i) = Cx(k, i) + Du(k, i) \quad (3.11)$$

pour tout $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

avec les matrices \hat{A}_j , pour $j = 0, 1$ et \hat{B} définies par les relations suivantes :

$$\hat{A}_0 = h^\alpha A_0, \quad \hat{A}_1 = h^\alpha A_1 + \alpha I_n, \quad \hat{B} = h^\alpha B$$

et avec les conditions initiales : $x(k, 0) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$ et $x(0, i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_+$.

Démonstration. Soit $h > 0$ et l'équation (3.1) pour $t = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$. alors nous avons

$$D^\alpha x(k, i+1) = \frac{d^\alpha x(k, i+1)}{dt^\alpha} = A_0 x(k, i) + A_1 x(k, i+1) + Bu(k, i) \quad (3.12)$$

En remplaçant la relation (3.12) dans (3.9) nous obtenons :

$$x(k+1, i+1) = h^\alpha [A_0 x(k, i) + A_1 x(k, i+1) + Bu(k, i)] + \alpha x(k, i+1) - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) x(k+1-p, i+1) \quad (3.13)$$

qui donne la relation (3.10). □

Remarque 3.2. Il est important de savoir, que le système 2D linéaire discret (3.10)-(3.11) est un modèle assez spécifique, du fait, qu'il soit fractionnaire pour la première direction et standard pour la deuxième direction, et que dans la littérature il n'a pas encore été analysé. C'est pour cette raison, qu'il est essentiel pour nous de calculer ses solutions, et d'étudier la problématique de sa positivité.

3.1.2 Solvabilité du système bidimensionnel fractionnaire discret

Nous entamons notre étude de solvabilité, par énoncer un outils puissant utilisé dans la résolution des systèmes différentiels à temps discret. Etant donné l'aspect discrétisé du système (3.10)-(3.11), il est impossible d'utiliser les transformées de Laplace d'une fonction continue en temps, mais plutôt la Z-transformée connue pour être l'équivalent des transformées de Laplace pour les temps discrets. Nous énonçons la définition de la Z-transformée bidimensionnelle, i.e, d'une fonction à deux dimensions pour les variables discrètes, et nous donnerons quelques unes de ses propriétés en annexe.

Définition 3.3. La Z-transformée d'une fonction bidimensionnelle discrète $x(k, i)$ est la fonction bidimensionnelle notée $X(z_1, z_2)$ et définie par la relation suivante :

$$X(z_1, z_2) = Z[x(k, i)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x(k, i) z_1^{-k} z_2^{-i} \quad (3.14)$$

où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Pour plus de détails sur les définitions et les propriétés de la Z-transformée à une et deux dimensions se référer au livre de Jaya [23]. Nous pouvons maintenant calculer les solutions de l'équation (3.10).

Théorème 3.3. La solution de l'équation (3.10) avec les conditions initiales

$$x(k, 0) \in \mathbb{R}^n \text{ et } x(0, i) \in \mathbb{R}^n \quad \text{pour } k, i \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.15)$$

prend la forme suivante

$$\begin{aligned} x(k, i) = & \sum_{e=0}^k \sum_{f=0}^i T_{k-e-1, i-f-1} \hat{B}u(e, f) \\ & + \sum_{e=1}^k \left[T_{k-e-1, i-1} \hat{A}_0 - \sum_{p=2}^{k-e} c_\alpha(k-e-p) T_{p, i} \right] x(e, 0) + \sum_{f=1}^i \left[T_{k-1, i-f-1} \hat{A}_1 \right. \\ & \left. - \sum_{p=2}^{k-1} c_\alpha(k-p) T_{p, f} \right] x(0, f) + \left[T_{k-1, i-1} \hat{A}_0 - \sum_{p=0}^{k-1} c_\alpha(k-p) T_{k-p, i} \right] x(0, 0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où les matrices T_{ef} sont définies comme suit :

$$T_{ef} = \begin{cases} I_n & \text{si } e = f = 0 \\ \hat{A}_0 T_{e-1, f-1} + \hat{A}_1 T_{e-1, f} - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) T_{e-p, f} & \text{si } e + f > 0 \\ 0_n \text{ (zero matrix)} & \text{si } e < 0 \text{ et/ou } f < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Dans la littérature (voir [34], [41]) les matrices T_{ef} sont appelées les matrices de transition.

Démonstration. En appliquant les propriétés de la Z-transformée bidimensionnelle sur les deux membres de l'équation (3.10) nous aurons,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0) - X(0, z_2) + x(0, 0)] &= \hat{A}_0 X(z_1, z_2) \\ + \hat{A}_1 z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)] & \\ - \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) z_1^{-p+1} z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)] &+ \hat{B}U(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $X(z_1, z_2) = Z[x(k, i)]$ et $U(z_1, z_2) = Z[u(k, i)]$. Multiplions les deux membres de l'équations (3.18) par la valeur $z_1^{-1} z_2^{-1}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} GX(z_1, z_2) &= X(0, z_2) - x(0, 0) + z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{B}U(z_1, z_2) \\ + \left[I_n - z_1^{-1} \hat{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) z_1^{-p} I_n \right] X(z_1, 0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où la matrice G est définie par la relation suivante

$$G = \left[I_n - z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{A}_0 - z_1^{-1} \hat{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) z_1^{-p} I_n \right] \quad (3.20)$$

La matrice G est inversible i.e

$$\det(G) = \sum_{p=0}^{2k+2} \sum_{q=0}^{2k+2} a_{pq} z_1^{-p} z_2^{-q} \neq 0$$

pour quelques $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, où a_{pq} pour $1 \leq p \leq 2k+2$, $1 \leq q \leq 2k+2$ sont des coefficients réels et dépendent des matrices \hat{A}_0, \hat{A}_1 .

Dans ce cas l'inverse de la matrice polynômiale G peut être exprimé sous la forme de la somme suivante

$$G^{-1} = \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} z_1^{-e} z_2^{-f} \quad (3.21)$$

par conséquent, de la relation (3.19) nous arrivons à,

$$\begin{aligned} X(z_1, z_2) &= G^{-1} \left[X(0, z_2) - x(0, 0) + \left[I_n - z_1^{-1} \hat{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) z_1^{-p} I_n \right] X(z_1, 0) \right. \\ &\quad \left. + z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{B}U(z_1, z_2) \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le calcul de la Z-transformée $X(z_1, z_2)$ de la solution de l'équation (3.10) se base sur la valeur de la matrice G^{-1} , et par conséquent sur les valeurs des matrices de transition T_{ef} .

puisque $G.G^{-1} = G^{-1}.G = I_n$, cela donne

$$\left[\sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} z_1^{-e} z_2^{-f} \right] \left[I_n - z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{A}_0 - z_1^{-1} \hat{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} c_\alpha(p) z_1^{-p} I_n \right] = I_n \quad (3.23)$$

ainsi

$$\sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} \left[T_{ef} - \hat{A}_0 T_{e-1,f-1} - \hat{A}_1 T_{e-1,f} + \sum_{p=2}^{k+1} c_{\alpha}(p) T_{e-p,f} \right] = I_n \quad (3.24)$$

En comparant les coefficients de mêmes puissances de z_1 et z_2 de la relation (3.24), cela nous donne (3.17).

Les matrices de transition sont alors définies par la relation de recurrence (3.17) et nous pouvons remarquer que $T_{10} = \hat{A}_1$ et $T_{01} = 0_n$.

En remplaçant la relation (3.21) dans (3.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} X(z_1, z_2) = & \left(\sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} z_1^{-e} z_2^{-f} \right) \left[I_n - z_1^{-1} \hat{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} c_{\alpha}(p) T_{ef} z_1^{-p-e} z_2^{-f} \right] X(z_1, 0) \\ & + \left(\sum_{e=0}^{\infty} \sum_{f=0}^{\infty} T_{ef} z_1^{-e} z_2^{-f} \right) \left[X(0, z_2) - x(0, 0) + z_1^{-1} z_2^{-1} \hat{B}U(z_1, z_2) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Enfin, en appliquant l'inverse de la Z-transformée et le théorème de convolution à la relation (3.25) nous obtenons la solution (3.16) de l'équation (3.10). \square

3.1.3 Les conditions de positivité

Notre but principal, est d'étudier l'influence du pas de discrétisation sur la positivité lors d'un passage d'un système 2D continu-discret à un système 2D-discret. Pour cela, nous devons extraire des conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité du système (3.10)-(3.11).

Définition 3.4. Le système 2D linéaire fractionnaire à temps discret (3.10)-(3.11) est positif si tous les états et tout les sorties sont positifs i.e. : $x(k, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $y(k, i) \in \mathbb{R}_+^p$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$, pour toutes les conditions initiales positives $x(k, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $x(0, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$, et toutes les entrées $u(k, i) \in \mathbb{R}_+^n$, $k, i \in \mathbb{Z}_+$.

Dans le lemme suivant, nous rappelons un résultat connu que nous démontrons par une autre technique.

Lemme 3.4. Soit $0 < \alpha < 1$, alors $c_{\alpha}(p) < 0$, pour tout $p \geq 1$.

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 1$ et $p \geq 1$, alors

$$c_{\alpha}(p) = (-1)^p \binom{\alpha}{p}$$

avec

$$\binom{\alpha}{p} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}$$

alors, nous avons p facteurs dans le produit $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-p+1)$ et α est le seul facteur positif. Donc, deux cas sont possibles

1. si l'entier p is pair alors $(p - 1)$ est impair, donc $(-1)^p > 0$ et
$$\underbrace{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - p + 1)}_{(p-1) \text{ valeurs negatives}} < 0$$
2. si l'entier p is impair alors $(p - 1)$ est pair, donc $(-1)^p < 0$ et
$$\underbrace{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - p + 1)}_{(p-1) \text{ valeurs negatives}} > 0$$

Par conséquent nous déduisons que dans tout les cas, les valeurs de $(-1)^p$ et du produit $(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - p + 1)$ sont de signes différents. \square

Remarque 3.3. Notons que ce lemme a été démontré par recurrence dans plusieurs références.

Nous énonçons dans ce qui suit le théorème qui caractérise la positivité du système discret (3.10)-(3.11).

Théorème 3.5. *Le système fractionnaire 2D discret (3.10)-(3.11) est positif si et seulement si les matrices $\hat{A}_0, \hat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$*

Démonstration. a) Condition Suffisante :

Du lemme (3.4) nous avons $-c_\alpha(p) > 0$.

Si les matrices vérifient $\hat{A}_0, \hat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$, et si $u(k, i) \in \mathbb{R}^+$ avec toutes les conditions initiales positives, alors en se basant sur les relations (3.16), (3.17) nous concluons que les matrices de transition T_{ef} sont positives et par conséquent la solution $x(k, i)$ est positive pour toutes les conditions initiales positives.

b) Condition nécessaire :

L'idée nous vient des résultats de [33]. Nous supposons que le système (3.10)-(3.11) est positif, et nous démontrons la positivité des matrices $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{B}, C, D$.

- Supposons que $x(0, 0) = e_{ni}, i = \overline{1, n}$, où e_{ni} est la i^{me} colonne la matrice identité I_n , i.e. : $e_{ni} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$. Aussi supposons que $x(1, 0) = 0$ et $u(0, 0) = 0$. De l'équation (3.10) nous obtenons que $x(1, 1) = \hat{A}_0 x(0, 0) = \hat{A}_0 e_{ni} = \hat{A}_{0i}$, tel que \hat{A}_{0i} est la i^{me} colonne de la matrice \hat{A}_0 . donc, $\hat{A}_{0i} = x(1, 1) \in \mathbb{R}_+^n$.

En continuant notre raisonnement tout au long des autre colonnes, nous déduisons que $\hat{A}_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

Par la même analogie

- Supposons que $x(0, 1) = e_{ni}, i = \overline{1, n}, x(0, 0) = 0$ et que $u(0, 0) = 0$. En remplaçant dans l'équation (3.10) nous obtenons $x(1, 1) = \hat{A}_1 x(0, 1) = \hat{A}_1 e_{ni} = \hat{A}_{1i}$, tel que \hat{A}_{1i} est la i^{me} colonne de la matrice \hat{A}_1 . Ainsi, $\hat{A}_{1i} = x(1, 1) \in \mathbb{R}_+^n$. Par conséquent la matrice $\hat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^n$.

— Si maintenant on suppose que $x(0,0) = x(0,1) = 0$ et que $u(0,0) = e_{ni}$, $i = \overline{1,m}$, alors en remplaçant dans l'équation (3.10) nous obtenons, $x(1,1) = \hat{B}u(0,0) = \hat{B}e_{ni} = \hat{B}_i$ où \hat{B}_i est la i^{me} colonne de la matrice \hat{B} . Puisque $x(1,1)$ est positif, soit $\hat{B}_i \in \mathbb{R}_+^m$.

Par conséquent la matrice \hat{B} est positive; à cause de la positivité de toutes ses colonnes \hat{B}_i , $i = \overline{1,m}$.

Le procédé est le même et en suivant le même raisonnement, on peut démontrer la positivité des matrices C et D en utilisant l'équation (3.11). \square

3.1.4 L'influence du pas de discrétisation sur la positivité

Dans cette section, nous voulons connaître les conditions qui garantissent que le système 2D fractionnaire (3.10)-(3.11) obtenu par discrétisation preserve la positivité quand le système initial continu-discret (3.1)-(3.2) est supposé positif.

Théorème 3.6. *Soit $h > 0$ le pas de discrétisation. Supposons que les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées. Alors nous avons un des deux cas suivants :*

1. *Si la matrice A_1 est de Metzler positive, alors le système (3.10)-(3.11) restera positif pour toute valeur de $h > 0$.*
2. *Si la matrice A_1 est de Metzler non-positive, alors le système (3.10)-(3.11) restera positif si et seulement si*

$$0 < h \leq \left(\frac{\alpha}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad i = \overline{1,n} \quad (3.26)$$

où $a_{ii}^{(1)}$, pour $i = \overline{1,n}$, sont les entrées diagonales strictement négatives de la matrice A_1 .

Démonstration. Soit $h > 0$ et supposons que le système (3.1)-(3.2) est positif, ie :

1. $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$,
2. A_1 est une matrice de Metzler.

Puisque $0 < \alpha < 1$ et $h > 0$ nous avons $\hat{A}_0 = h^\alpha A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $\hat{B} = h^\alpha B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Ainsi, en appliquant le théorème 3.5, le système (3.10)-(3.11) est positif si et

seulement si la matrice $\hat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.

Nous avons $\hat{A}_1 = h^\alpha A_1 + \alpha I_n$ avec A_1 une matrice de Metzler.

Alors l'inégalité $\hat{A}_1 \geq 0$ est équivalente à $A_1 \geq \frac{-\alpha}{h^\alpha} I_n$. Donc, nous devons considérer deux cas possibles :

1. Si A_1 est une matrice de Metzler positive, alors la dernière relation est évidente.
2. Si A_1 est une matrice de Metzler non-positive ; c-à-d, il existe au moins une entrée diagonale de la matrice A_1 qui soit strictement négative ; ainsi la matrice \hat{A}_1 n'est pas nécessairement positive.

— Condition nécessaire : Puisque toutes les entrées hors diagonales de la matrice A_1 sont positives, et ceux de la matrice $\frac{-\alpha}{h^\alpha} I_n$ sont nulles, il est évident, la comparaison matricielle est basée sur la comparaison entre les éléments diagonaux de A_1 et la valeur de $\frac{-\alpha}{h^\alpha}$.

Soit $a_{ii}^{(1)}$ les éléments diagonaux de la matrice A_1 .

(a) il est facile de démontrer que si tout $a_{ii}^{(1)} \geq 0$ alors $a_{ii}^{(1)} \geq 0 > \frac{-\alpha}{h^\alpha}$

(b) Pour $a_{ii}^{(1)} < 0$ alors $0 > a_{ii}^{(1)} \geq \frac{-\alpha}{h^\alpha}$

ainsi

$$h^\alpha \leq \frac{-\alpha}{a_{ii}^{(1)}}$$

donc

$$0 < h \leq \left(\frac{\alpha}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

— Condition suffisante : Supposons que la matrice A_1 est de Metzler avec au moins une entrée diagonale strictement négative, et nous allons démontrer que la matrice \hat{A}_1 is positive.

Il est clair que puisque $a_{ij}^{(1)} \geq 0$ pour $i \neq j$, les éléments hors diagonaux de $\hat{A}_1 = h^\alpha A_1 + \alpha I_n$ sont tous positifs.

Aussi, si $a_{ii}^{(1)} \geq 0$, les éléments diagonaux de la matrice \hat{A}_1 sont positifs.

Pour les entrées strictement négatives de la matrice A_1 vérifiant

$$0 < h \leq \left(\frac{\alpha}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Nous avons pour chaque entrée diagonale $a_{ii}^{(1)} < 0$

$$0 < h^\alpha \leq \frac{\alpha}{|a_{ii}^{(1)}|}$$

ainsi

$$a_{ii}^{(1)} + \frac{\alpha}{h^\alpha} \geq 0$$

Nous concluons que tout les éléments diagonaux de la matrice $\hat{A}_1 = h^\alpha A_1 + \alpha I_n$ sont positifs.

□

Remarque 3.4. Notons qu'on peut remplacer la condition du premier cas dans le théorème 3.6 par la condition "Si la matrice A_1 est positive", car évidemment, toutes les matrices positives sont des matrices de Metzler (la réciproque est fausse évidemment).

3.1.5 Discussions

Il est à noter qu'en se basant sur le théorème 3.6 et pour une matrice de Metzler nonpositive A_1 , le choix du pas d'échantillonnage dépend de la valeur de l'ordre de dérivation fractionnaire α et du scalaire $\max_i |a_{ii}^{(1)}|$, tel que $a_{ii}^{(1)}$ sont les entrées diagonales strictement négatives de la matrice A_1 .

Nous notons l'intervalle de confiance $I_{\alpha, M} =]0, (\frac{\alpha}{M})^{\frac{1}{\alpha}}]$ où $M = \max_i |a_{ii}^{(1)}|$ pour $i = \overline{1, n}$. Alors nous déduisons que pour conserver la positivité du système (3.10)-(3.11), le pas de discrétisation h doit rester dans $I_{\alpha, M}$. La longueur de l'intervalle de confiance $I_{\alpha, M}$ peut accroître ou décroître dépendement des valeurs strictement positive de α et M . Alors nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. Considérons le système (3.1)-(3.2), et supposons que la matrice A_1 soit une matrice de Metzler non-positive, alors

$$L_{max} = \begin{cases} e^{\frac{1}{M\alpha}} & \text{si } M < e^{-1} \\ \frac{1}{M} & \text{si } M \geq e^{-1} \end{cases} \quad (3.27)$$

où $L_{max} = \max_{\alpha} \{l(I_{\alpha, M}), \text{ pour } 0 < \alpha < 1\}$, et $l(I_{\alpha, M})$ désigne la longueur de l'intervale $I_{\alpha, M}$

Démonstration. Soit la fonction $l(I_{\alpha, M}) = l_M(\alpha)$ de la variable $\alpha \in]0, 1[$ qui désigne la longueur de l'intervale de confiance $I_{\alpha, M}$. Alors $l_M(\alpha)$ est définie par la relation

$$l_M(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.28)$$

En dérivant, on a

$$l'_M(\alpha) = \left[\frac{1 - \ln\left(\frac{\alpha}{M}\right)}{\alpha^2} \right] l_M(\alpha)$$

. Nous aurons alors, un des deux cas,

1. Si $0 < M < \frac{1}{e}$ alors

α	0	Me	1
variations de l_M	0	$\nearrow \exp\left(\frac{1}{Me}\right)$	$\searrow \frac{1}{M}$

ainsi $0 < l_M(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{Me}\right)$.

2. Si $M \geq \frac{1}{e}$ alors $0 < l_M(\alpha) < \frac{1}{M}$.

α	0	1
variations de l_M	0	$\nearrow \frac{1}{M}$

ainsi $0 < l_M(\alpha) < \frac{1}{M}$.

□

Remarque 3.5. Le corollaire 3.1 démontre que la longueur de l'intervalle de confiance accroît dans le cas où $0 < M < \frac{1}{e} \approx 0.3679$, et le choix du pas h ne va pas trop être contraignant ; Contrairement lorsque $M \geq 0.3679$ ce choix sera établi dans un intervalle plus petit. Dans les deux cas, puisque $\lim_{\alpha \rightarrow 0} l_M(\alpha) = 0$ les valeurs trop petites de l'ordre de dérivation fractionnaire, donnerons des valeurs plus petites pour h .

3.2 Exemples numériques

Dans cette section nous présentons, quelques exemples numériques pour illustrer les résultats obtenus dans la section précédentes.

Exemple 3.1. Considérons le système (3.1)-(3.2) pour $\alpha = 0.5$ avec les matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C = [\ 2 \ 3] \text{ avec } D = 0.$$

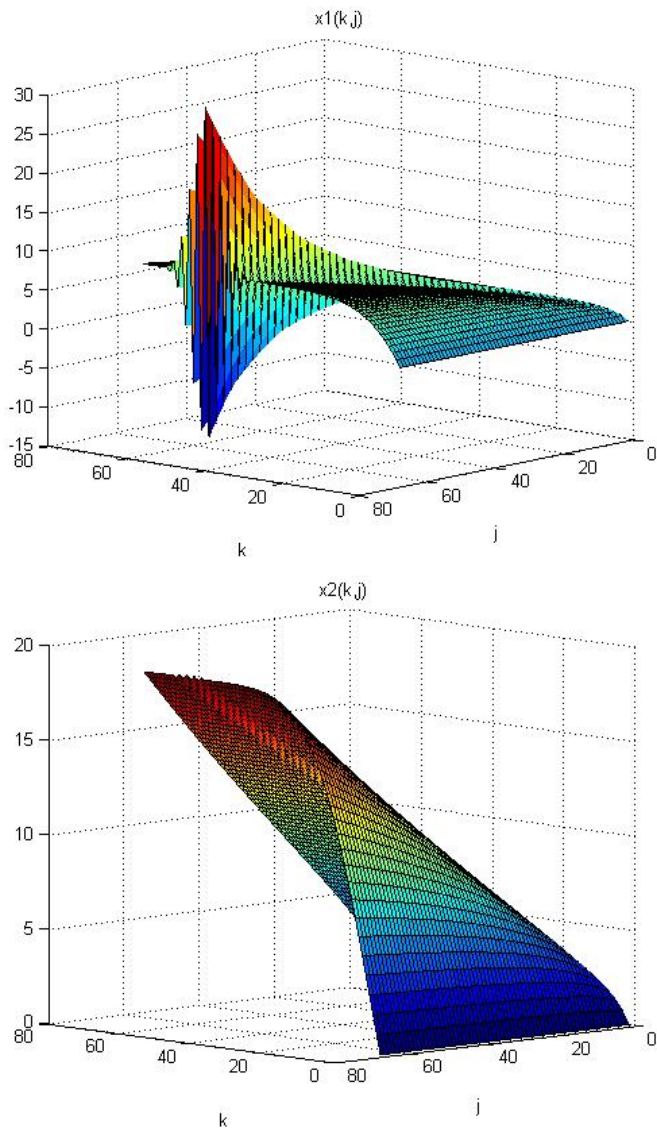


FIGURE 3.1 – Vecteur d'état du système de l'exemple 3.1.2 avec $h = 0.72$

L'entrée $u(t, j) = 1$ pour $t \geq 0$ et $j \in \mathbb{Z}_+$ avec les conditions initiales $x(t, 0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ pour $t \geq 0$ et $x(0, j) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ pour $j \in \mathbb{Z}_+$. En appliquant le théorème 3.1, alors le système (3.1)-(3.2) est positif.

En appliquant le théorème 3.6, et puisque la matrice A_1 est une matrice de Metzler non-positive, alors pour préserver la positivité après discrétisation, nous devons opter pour un pas h vérifiant la relation (3.26); alors

$$0 < h \leq \left(\frac{0.5}{\max_i |a_{ii}^{(1)}|} \right)^{\frac{1}{0.5}}$$

donc $0 < h \leq 0.25$.

La matrice \hat{A}_1 est définie $\hat{A}_1 = h^{0.5}A_1 + 0.5I_2$, il vient,

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -h^{0.5} + 0.5 & 0 \\ h^{0.5} & 2h^{0.5} + 0.5 \end{bmatrix}$$

Les matrices \hat{A}_0, \hat{B} sont évidemment positives.

Soit $\epsilon > 0$.

1. Pour $h = h_1 = 0.25 + \epsilon > 0$, les entrées $h_1^{0.5}$ et $2h_1^{0.5} + 0.5$ sont positives à l'exception de $-h_1^{0.5} + 0.5$; puisque $\epsilon > 0$, nous avons $-(\epsilon + 0.25)^{0.5} < -0.5$

par conséquent $-h_1^{0.5} + 0.5 < 0$.

Ainsi, le système 2D fractionnaire à temps-discret (3.10)-(3.11) obtenu par discrétisation du système hybride associé n'est pas positif pour $h = 0.72$, voir la figure Fig.3.1.

2. Pour $h = h_2 = 0.25 - \epsilon > 0$ les entrées $-h_2^{0.5} + 0.5$, $h_2^{0.5}$ et $2h_2^{0.5} + 0.5$ sont positives car $-\epsilon < 0$ we have $-(-\epsilon + 0.25)^{0.5} > -0.5$

ainsi $-h_2^{0.5} + 0.5 > 0$ donc, la matrice $\hat{A}_1 \in \mathbb{R}_+^{2 \times 2}$, par conséquent le système (3.10)-(3.11) est positif. Pour $h = 0.2$, voir la figure Fig.3.2.

Exemple 3.2. Considérons maintenant le système (3.1)-(3.2) pour $0 < \alpha < 1$ et les matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 1.2 & 0.51 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.46 & 0 \\ 2.1 & 2.02 \end{bmatrix}$$

,

$$B = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 1.02 \end{bmatrix}, \quad C = [0.22 \quad 0.33], \quad \text{et } D = 0$$

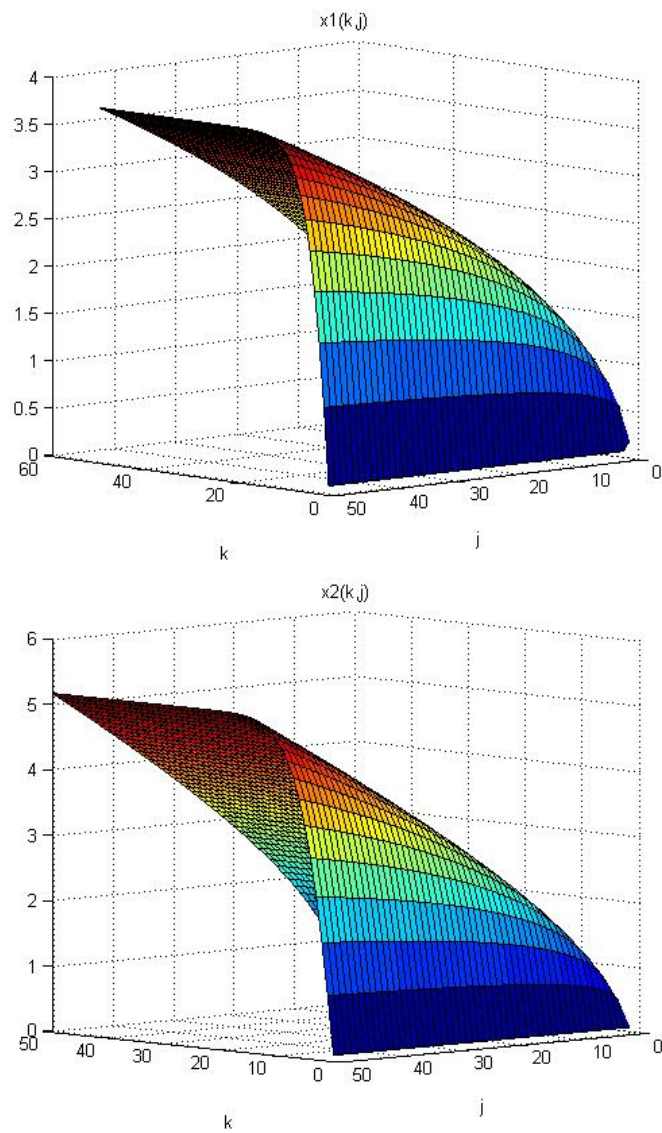


FIGURE 3.2 – Vecteurs d'état du système de l'exemple 3.1.2 avec $h = 0.2$

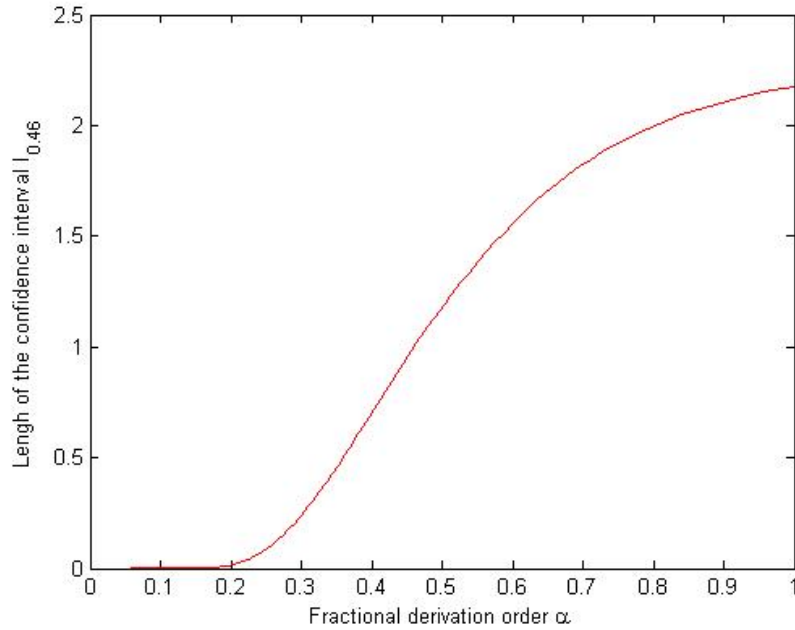


FIGURE 3.3 – Variations de $l_{0.46}$ en fonction de l'ordre de dérivation fractionnaire α

Nous avons $M = 0.46 \geq \frac{1}{e}$.

La figure (3.3) montre que la variation de la longueur de l'intervalle de confiance $I_{\alpha,0.46}$ dépend explicitement de la valeur de $\alpha \in]0, 1[$.

La fonction $l_M = l_{0.46}$ est définie par la relation suivante :

$$l_{0.46}(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{0.46}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ainsi, la valeur maximal de h dans l'intervalle de confiance $I_{\alpha,0.46}$ est $L_{max} = 2.174$ à $\alpha \approx 1$. De la figure (3.3), nous pouvons conclure que pour des valeurs de l'ordre α vérifiant $0 < \alpha < 0.2$ le pas h doit prendre de petites valeurs aussi vérifiant $h < 0.0155$, ce qui pourrait affecter la complexité du problème quand il s'agit d'une simulation numérique. Le problème est posé pour des modèles avec un ordre de dérivation fractionnaire infiniment petit.

Exemple 3.3. Considérons le système (3.1)-(3.2) pour $0 < \alpha < 1$ et les matrices d'état suivantes :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.3 & 1.23 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.15 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.52 \\ 1.11 \end{bmatrix}, \quad C = [1.42 \quad 0.53] \quad \text{et} \quad D = 0$$

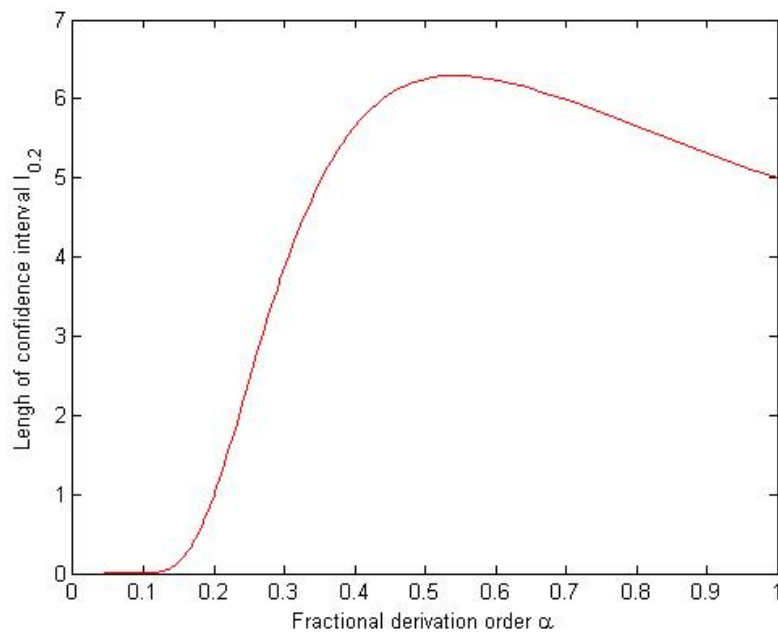


FIGURE 3.4 – Variations de $l_{0.2}$ longueur de l'intervalle de confiance en fonction de α

Nous avons $M = 0.2 < \frac{1}{e}$.
 La fonction correspondante $l_M = l_{0.2}$ est définie par la relation suivante

$$l_{0.2}(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{0.2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

La figure (3.4) montre la variation de la longueur de $l_{0.2}(\alpha)$ en fonction de $\alpha \in]0, 1[$.

Ainsi, la valeur maximale pour h est 6.28 qui correspond à $L_{max} = l_{0.2}(\alpha) = \exp(0.2e) \approx 6.29$ pour $\alpha = 0.2e \approx 0.542$.

Par suite, de la figure (3.4) nous pouvons déduire que pour les valeurs de α vérifiant $0 < \alpha < 0.11$, le pas h ne doit pas dépasser 0.005 pour garantir la conservation de la positivité ; par contre, pour les autres valeurs $\alpha \geq 0.11$, le pas h peut prendre des valeurs acceptables.

Exemple 3.4. Considérons le système (3.1)-(3.2) pour $0 < \alpha < 1$ et les matrices d'état suivantes :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.42 & 2 \\ 0.53 & 5.23 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.004 & 0 \\ 0.1 & 0.515 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.52 \\ 2.11 \end{bmatrix}, C = [6.42 \quad 8.53] \text{ et } D = 0$$

Nous avons $M = 0.004 < \frac{1}{e}$.
La fonction correspondante $l_M = l_{0.004}$ est définie par la relation suivante

$$l_{0.004}(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{0.004} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

montre la variation de la longueur de $l_{0.004}(\alpha)$ en fonction de $\alpha \in]0, 1[$.
Ainsi, la valeur maximale pour h est 0.029556 qui correspond à $L_{max} = l_{0.004}(\alpha) = \exp((0.004e)^{-1}) \approx 0.029556$.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de l'influence de la valeur du pas de discrétisation sur la positivité d'une classe de système bidimensionnel fractionnaire à temps continu-discret, a été étudiée. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été extraites et des exemples numériques ont été illustrés, pour prouver la pertinence de notre approche. Le résultat principal, prouve que si la matrice de Metzler est non positive, alors le pas de discrétisation doit être obligatoirement choisi dans l'intervalle de confiance. Sinon le système initial hybride, va perdre sa propriété de la positivité. Ces problèmes sont fréquents lorsque la modélisation d'un phénomène passe par la discrétisation. Les quantités modélisées perdent leurs positivité lors de la discrétisation, et on se demanderait pourquoi.

Chapitre 4

Stabilité des systèmes de Lyapunov : Approche LMI's

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème de stabilité du modèle général 2D-discret de Lyapunov et aussi le modèle général 2D-continu discret de Lyapunov, où l'approche des inégalités linéaires matricielles (LMI's) est appliquée pour extraire de nouvelles conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique. Le plus populaire des modèles linéaires à deux dimensions, étant les modèles introduits par Roesser [49], Fornasini-Marchecini [16], [17]. Ces modèles ont été généralisés aux cas singuliers par Kurek [40], Kaczorek dans [25; 26; 27? ; 30]. On trouve beaucoup de leurs applications dans la théorie du contrôle, le design des circuits modernes et le traitement d'images numériques, en seismologie, le traitement des données géographiques, la transmission d'énergie ...etc. Le test de stabilité est le problème le plus important et le plus fondamental pour la conception et l'analyse des systèmes. Un certain nombre de tests de stabilité de systèmes 2D ont été étudiés. La stabilité interne et le comportement asymptotique des modèles linéaires bidimensionnels ont été traités par Valcher [53] et la stabilité asymptotique des systèmes 2D linéaires ont été étudiés dans [31],[56],[24],[51],[14],[22] et [42].

Une approche LMI pour vérifier la stabilité des systèmes 2D a été proposée par Twardy [52], avec des généralisations aux systèmes 2D positifs à retards dans Kaczorek [32]. Dans [56], des conditions LMI suffisantes pour la stabilité interne des systèmes linéaires singuliers 2D en termes d'acceptabilité et de modes de saut ont été données. Une autre approche LMI pour la stabilité des modèles 2D singuliers d'espace d'état généralisés a été étudiée par Bouagada et Van Dooren dans [7], [8] et aussi par [56], [54], [12], [13].

Au cours des dernières années, une nouvelle classe de systèmes linéaires à temps discret et à temps continu 1D et 2D a été introduite. Dans les systèmes de Lyapunov 2D décrits par le modèle de Roesser, les variables indépendantes sont discrètes et/ou continues et se propagent dans deux directions différentes. De tels modèles apparaissent par exemple dans la conception de circuits, l'amé-

lioration des images radiologiques. La contrôlabilité et l'observabilité des systèmes de Lyapunov ont été traitées dans Murty et Apparao [43]; Les systèmes positives de Lyapunov en temps discret 1D et 2D en temps continu et en temps discret dans [38], [48]. Les systèmes à cônes de Lyapunov à temps discret et à temps continu ont été considérés par [37] et [47].

Dans ce travail, le nouveau système général de Lyapunov 2D à temps discret et aussi le systèmes de Lyapunov 2D à temps continu-discret ont été considérés. Le but principal de notre travail est de présenter des conditions suffisantes pour le test de stabilité asymptotique en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). L'approche d'une LMI est utilisée pour produire de nouveaux résultats hautement significatifs sur l'analyse de stabilité de ces processus et pour concevoir les schémas de contrôle de ces modèles.

4.1 Préliminaires

Nous désignons par $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$), l'ensemble des matrices réelles (complexes) avec m lignes et n colonnes et par \mathbb{R}^m (\mathbb{C}^m), l'ensemble des vecteurs réels (complexes). De plus, \mathbb{Z}_+ désigne les entiers positifs et \mathbb{R}_+ la droite réelle positive. Quelques définitions et résultats suivants peuvent être trouvés dans [25].

Définition 4.1. Soient les matrices $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, donc le produit de Kronecker $A \otimes B$ des matrices A et B est la matrice en blocs

$$A \otimes B = [a_{ij}B] \in \mathbb{R}^{mq \times np} \quad (4.1)$$

pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$

La matrice $A \otimes B$ est une matrice d'ordre $(mq \times np)$ à (mn) blocs $[a_{ij}B]$ chacun d'ordre (pq) .

Nous allons maintenant, mentionner quelques propriétés et règles pour le produit de Kronecker.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (4.2)$$

$$\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(A) \cdot \text{rank}(B) \quad (4.3)$$

Définition 4.2. A chaque matrice $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on associe le vecteur $\text{vec}(A) \in \mathbb{R}^{mn}$ défini par

$$\text{vec}(A) = [a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^T$$

(les vecteurs colonnes de chaque colonne séquentielle sont empilés les uns sur les autres)

Théorème 4.1. Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ données et soit $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ une matrice inconnue. Alors, en utilisant le produit de Kronecker des matrices A et B^T , on peut transformer l'équation matricielle $AXB = C$ en un système linéaire de nq équations en np inconnues données par la relation :

$$(A \otimes B^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(C) \quad (4.4)$$

Nous renvoyons le lecteur à [28] pour la preuve.

4.2 Le système 2D général de Lyapunov à temps discret

Nous allons maintenant, introduire la définition du modèle proposé pour l'étude et quelques résultats concernant ces systèmes. Voir [52], [7], [8] pour plus de détails.

Nous considérons le système

$$E \begin{bmatrix} X^h(i+1, j) \\ X^v(i, j+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} X^h(i, j) \\ X^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^h(i, j) \\ X^v(i, j) \end{bmatrix} A_1 + BU(i, j) \quad (4.5)$$

$$Y(i, j) = CX(i, j) + DU(i, j), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.6)$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}; \quad A_s = \begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12}^s \\ A_{21}^s & A_{22}^s \end{bmatrix} \quad \text{pour } s = 0, 1;$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad \text{et } C = [C_1 \quad C_2].$$

$X^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ et $X^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ représentent les matrices d'état horizontal et vertical au point (i, j) avec $n = n_1 + n_2$. La matrice $U(i, j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ étant la matrice d'entrée et $Y(i, j) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ étant la matrice de sortie au point (i, j) . $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E_{kl} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}$, $A_{kl}^s \in \mathbb{R}^{n_k \times n_l}$ pour $k, l = 1, 2$ et $s = 0, 1$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Le système (4.5) est appelé système 2D général de Lyapunov à temps discret de type Roesser.

En appliquant le théorème 4.1 et la propriété B.1 (Voir annexe B), le système général de Lyapunov 4.5 est transformé en un modèle de Roesser équivalent, i.e., au modèle général 2D à temps discret (2D-GRM).

$$\hat{E} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(i+1, j) \\ \hat{X}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(i, j) \\ \hat{X}^v(i, j) \end{bmatrix} + \hat{B}\hat{U}(i, j) \quad (4.7)$$

$$\hat{Y}(i, j) = \hat{C}\hat{X}(i, j) + \hat{D}\hat{U}(i, j), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.8)$$

où $\hat{X}^h(i, j) \in \mathbb{R}^{n.n_1}$; $\hat{X}^v(i, j) \in \mathbb{R}^{n.n_2}$ sont respectivement les vecteurs d'état horizontal et vertical ; $\hat{U}(i, j) \in \mathbb{R}^{m.n}$ étant le vecteur d'entrée, $\hat{Y}(i, j) \in \mathbb{R}^{n.p}$ étant le vecteur de sortie et

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} \\ \hat{E}_{21} & \hat{E}_{22} \end{bmatrix}; \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix};$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2]$$

où les matrices $\hat{E} \in \mathbb{R}^{(n^2) \times (n^2)}$; $\hat{E}_{kl} \in \mathbb{R}^{(n_k.n) \times (n_l.n)}$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(n^2) \times (n^2)}$;
 $\hat{B} \in \mathbb{R}^{(n^2) \times (m.n)}$; $\hat{C} \in \mathbb{R}^{(p.n) \times (n^2)}$; $\hat{D} \in \mathbb{R}^{(p.n) \times (m.n)}$, sont définies par les relations suivantes :

$$\hat{E} = E \otimes I_n \quad (4.9)$$

$$\hat{E}_{kl} = E_{kl} \otimes I_n \quad (4.10)$$

$$\hat{B}_k = B_k \otimes I_n \quad (4.11)$$

$$\hat{A} = (A_0 \otimes I_n) + (I_n \otimes A_1^T) \quad (4.12)$$

$$\hat{B} = B \otimes I_n \quad (4.13)$$

$$\hat{C} = C \otimes I_n \quad (4.14)$$

$$\hat{D} = D \otimes I_n \quad (4.15)$$

$$\hat{A}_{11} = (A_{11}^0 \otimes I_n) + (I_{n_1} + A_1^T) \quad (4.16)$$

$$\hat{A}_{12} = A_{12}^0 \otimes I_n \quad (4.17)$$

$$\hat{A}_{21} = A_{21}^0 \otimes I_n \quad (4.18)$$

$$\hat{A}_{22} = (A_{22}^0 \otimes I_n) + (I_{n_2} + A_1^T) \quad (4.19)$$

4.2.1 Stabilité des systèmes général 2D de Lyapunov

Introduisons d'abord la notion de stabilité asymptotique du système 2D Lyapunov-GRM et du système général de Lyapunov 2D.

Définition 4.3. Considérons le système (4.7)-(4.8) avec des entrées nulles (ie : $\hat{U}(i, j) = 0$ pour $i \geq 0, j \geq 0$), donc le système (4.7)-(4.8), devient :

$$\hat{E} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(i+1, j) \\ \hat{X}^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(i, j) \\ \hat{X}^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\hat{Y}(i, j) = \hat{C}\hat{X}(i, j) \quad (4.21)$$

Définition 4.4. Le système 2D-GRM (4.20) est asymptotiquement stable si la réponse converge vers zero pour toutes conditions initiales bornées, i.e pour toutes $\sup_i \|\hat{X}(i, 0)\|_2 < \infty, \sup_j \|\hat{X}(0, j)\|_2 < \infty$ on aura :

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \hat{X}(i, j) = 0 \quad (4.22)$$

Le polynôme caractéristique du 2D-GRM (4.7) (voir [56],[54]) est défini par

$$H(z_1, z_2) = \det[\hat{E} \text{diag}(z_1 I_{n.n_1}, z_2 I_{n.n_2}) - \hat{A}] \quad (4.23)$$

$$= \sum_{k=0}^{\bar{n}_1} \sum_{l=0}^{\bar{n}_2} a_{kl} z_1^k z_2^l \quad (4.24)$$

où $0 \leq \bar{n}_k \leq n.n_k$ pour $k = 1, 2$ et

$$\text{diag}(z_1 I_{n.n_1}, z_2 I_{n.n_2}) = \begin{bmatrix} z_1 I_{n.n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n.n_2} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Nous supposons que $a_{\bar{n}_1, \bar{n}_2} \neq 0$ ce qui garantit l'acceptabilité du système (4.7) (voir [56]), et que le système (4.7) est sans impulsion (free of jump) [56] et

causal, et qui est garantie par la relation suivante : $\text{deg det}[s\hat{E} - \hat{A}] = \text{rank}\hat{E} = \text{rank}(E \otimes I_n) = n \cdot \text{rank}(E)$.

En se basant sur [24],[51] et [14], nous adaptions les conditions de stabilité nécessaires et suffisantes suivantes pour le modèle 2D-GRM en termes de polynôme caractéristique.

Théorème 4.2. *Le système général 2D de Lyapunov (4.5) est asymptotiquement stable si et seulement si $H(z_1, z_2) \neq 0$ pour chaque couple (z_1, z_2) tel que $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$.*

Démonstration. Soit

$$H(z_1, z_2) = \frac{\hat{A}(z_1, z_2)}{\hat{B}(z_1, z_2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_{kl} z_1^k z_2^l \quad (4.26)$$

où les coefficients h_{mn} représentent la réponse impulsionnelle du filtre.

Signalons au passage qu'une fonction rationnelle $H(z_1, z_2)$ est dite stable si et seulement si la réponse impulsionnelle converge vers zéro pour tout z_1, z_2 dans le polydisque unité $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$.

En utilisant les propriétés de convergences des séries, cette convergence sera équivalente au fait que la fonction $H(z_1, z_2)$ soit analytique pour chaque paire (z_1, z_2) vérifiant $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$.

Finalement, pour les fonctions rationnelles ; c'est prouvé que c'est équivalent à l'absence de racines de $H(z_1, z_2)$ dans le polydisque unité $\{z \in \mathbb{C} / |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$. \square

Remarque 4.1. Certains auteurs préfèrent représenter l'opérateur de retard des systèmes à temps discret par z^{-1} plutôt que z , ce qui explique pourquoi différentes formes de conditions sont trouvées dans la littérature. Ces résultats peuvent facilement être réadaptés lors du passage d'une convention à une autre.

La condition de certains Théorèmes implique de vérifier la non-singularité d'une matrice à deux variables dans un domaine 2D connexe. Un résultat intelligent fourni d'abord dans [24] et [22], et démontré après dans [14], prouve que cela peut être réduit à tester deux conditions plus simples.

Théorème 4.3. *Le système général 2D-discret (4.5) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$H(z_1, 0) \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1, \quad (4.27)$$

$$H(z_1, z_2) \neq 0 \text{ pour } |z_1| = 1 \text{ et } |z_2| \leq 1 \quad (4.28)$$

Démonstration. Ce théorème a été incorrectement prouvé dans [22], [24] et [51]. Les preuves corrigées sont apparues plus tard dans [14] et [42].

Toutes les preuves sont basées sur le fait que les fonctions avec z_1 et z_2 via le fait que $H(z_1, z_2) = 0$ sont des fonctions algébriques. \square

Dans la section suivante, nous transformons ces conditions en conditions LMI équivalentes, qui peuvent être vérifiées en temps polynomial.

4.2.2 Conditions LMI pour le Test de Stabilité des systèmes 2D à temps discret

Afin de réduire ce qui précède à une formulation LMI, nous aurons besoin du théorème suivant démontré dans [20] et [21] et exploité dans [8] pour caractériser les matrices polynomiales positives qui dépendent d'un paramètre réel ω sur le cercle unitaire.

Théorème 4.4. [8] *Un matrice polynômiale hermitienne $P(z) = \sum_{i=0}^2 P_i z^i$ par rapport à $P_{-i} = P_i^*$, est définie positive sur le cercle unité si et seulement s'il existe une matrice hermitienne X telle que :*

$$\begin{bmatrix} P_0 - X & P_1 \\ P_1^* & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.29)$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour la stabilité asymptotique du système général 2D de Lyapunov.

Théorème 4.5. *Le système général 2D de Lyapunov (4.5) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes X_0, X_1, X_2 avec $X_0 \geq 0, X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$ vérifiant la LMI suivante :*

$$(A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_1 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) - \bar{E}_{1,0}^T X_1 \bar{E}_{1,0} > 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_2 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) - X_0 & -(A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_2 \bar{E}_{1,0} \\ -\bar{E}_{1,0}^T X_2 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) & X_0 + \bar{E}_{1,0}^T X_2 \bar{E}_{1,0} + \bar{E}_{0,1}^T X_2 \bar{E}_{0,1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

avec

$$\bar{E}_{k,l} = (E \otimes I_n).diag(k.I_{n.n_1}, l.I_{n.n_2}) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \text{ pour } k, l = 0, 1 \quad (4.32)$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique du système 2D-GRM est défini par la relation suivante :

$$H(z_1, z_2) = det[\hat{E} diag(z_1 I_{n.n_1}, z_2 I_{n.n_2}) - \hat{A}] \quad (4.33)$$

avec $\hat{E} = E \otimes I_n$ et $\hat{A} = A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_0^T$

La condition (4.27) sur le polynôme caractéristique nous conduit à

$$H(z_1, 0) = det[z_1 \hat{E} diag(I_{n.n_1}, 0) - \hat{A}] \text{ pour } |z_1| \leq 1 \quad (4.34)$$

Cela est vérifié si et seulement si la LMI suivante est vérifiée

$$\hat{A}^T X_1 \hat{A} - \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) \hat{E}^T X_1 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0), X_1 > 0, X_1^* = X_1 \quad (4.35)$$

En remplaçant \hat{A} , \hat{E} et $\bar{E}_{1,0}$ nous aurons la LMI (4.30).

La condition (4.28) nous confirme que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $|z_2| \leq 1$ nous avons

$$H(e^{j\omega}, z_2) = \det[z_2 \hat{E} \text{diag}(0, I_{n.n_2}) + e^{j\omega} \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) - \hat{A}] \quad \text{pour } |z_2| \leq 1 \quad (4.36)$$

Cela est équivalent au fait que $\det(z_2 V - W) \neq 0$ avec $V = \hat{E} \text{diag}(0, I_{n.n_2})$ et $W = e^{j\omega} \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) - \hat{A}$ et qui est vérifié si et seulement si la LMI suivante est faisable.

$$W^* X_2 W - V^* X_2 V > 0, X_2^* = X_2, X_2 > 0 \quad (4.37)$$

où X_2 va dépendre de ω . Si nous imposons que X_2 étant constant alors la relation (4.36) est équivalente à la relation suivante :

$$e^{j\omega} P_1 + e^{-j\omega} P_1^* + P_0 > 0 \quad (4.38)$$

où

$$P_1 = -\hat{A} X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) \quad (4.39)$$

$$P_0 = -\hat{A} X_2 \hat{A} + \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) \hat{E}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) - \text{diag}(0, I_{n.n_2}) \hat{E}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(0, I_{n.n_2}) \quad (4.40)$$

Notons que $P_j^* = P_{-j}$. En appliquant le théorème (4.4) alors cela nous conduit à la condition suivante :

$$\begin{bmatrix} P_0 - X & P_1 \\ P_1^* & X \end{bmatrix} > 0$$

pour quelques matrices hermitiennes X .

Définissons maintenant une nouvelle matrice hermitienne X_0 par

$$X = X_0 + \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) \hat{E}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) + \text{diag}(0, I_{n.n_2}) \hat{E}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(0, I_{n.n_2}) \quad (4.42)$$

Alors, il est évident que $X_0^* = X_0$ et que

$$P_0 - X = \hat{A} X_2 \hat{A} - X_0 \quad (4.43)$$

En substituant \hat{E} , \hat{A} et $\bar{E}_{k,l}$, nous obtenons la LMI (4.31). \square

4.3 Systèmes générales linéaires 2D à temps continu-discret de Lyapunov

4.3.1 Stabilité du système général linéaires 2D à temps continu-discret de Lyapunov

Nous considérons ici le système 2D de Lyapunov à temps continu-discret défini similairement à celui de la section précédente.

Définition 4.5. Le système général 2D linéaire à temps continu-discret de Lyapunov de type Roesser est défini par les équations suivantes :

$$E \begin{bmatrix} \dot{X}^h(t, i) \\ X^v(t, i+1) \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} X^h(t, i) \\ X^v(t, i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X^h(t, i) \\ X^v(t, i) \end{bmatrix} A_1 + BU(t, i) \quad (4.44)$$

$$Y(t, i) = CX(t, i) + DU(t, i) \quad (4.45)$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}_+$ avec $\dot{X}^h(t, i) = \frac{\partial X^h(t, i)}{\partial t}$. $X^h(t, i) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n}$ et $X^v(t, i) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n}$ représentent les matrices d'état horizontales et les matrices d'état verticales au point (t, i) , et $n = n_1 + n_2$. Les matrices E , A_0 , A_1 , B , C , D sont de même dimensions comme pour la section précédente.

Par la même analogie montrée dans la section précédente, nous transformons le modèle (4.44)-(4.45) en son équivalent 2D-GRM.

Pour le système général 2D de Lyapunov (4.44) la vectorisation donne l'équivalent 2D-GRM

$$\hat{E} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(t, i) \\ \hat{X}^v(t, i+1) \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} \hat{X}^h(t, i) \\ \hat{X}^v(t, i) \end{bmatrix} + \hat{B}\hat{U}(t, i) \quad (4.46)$$

$$\hat{Y}(t, i) = \hat{C}\hat{X}(t, i) + \hat{D}\hat{U}(t, i), \quad (4.47)$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{Z}_+$, et les matrices \hat{E} , \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} ont les mêmes formes comme dans (4.9)-(4.15).

Le polynôme caractéristique du système (4.3.1) est défini par la relation

$$H(s, z) = \det[\hat{E} \text{diag}(sI_{n.n_1}, zI_{n.n_2}) - \hat{A}] \quad (4.48)$$

$$= \sum_{k=0}^{\bar{n}_1} \sum_{l=0}^{\bar{n}_2} a_{kl} s^k z^l \quad (4.49)$$

où $0 \leq \bar{n}_k \leq n.n_k$ pour $k = 1, 2$.

Nous supposons aussi que $a_{\bar{n}_1, \bar{n}_2} \neq 0$ ce qui garantit l'acceptabilité du système (4.3.1) et que le système (4.3.1) est sans impulsion [voir [56]], et qu'il soit causal i.e. : $\deg \det[s\hat{E} - \hat{A}] = \text{rank} \hat{E} = \text{rank}(E \otimes I_n) = n.\text{rank}(E)$.

Définition 4.6. Le système 2D-GRM (4.3.1), est dit asymptotiquement stable si pour toutes conditions aux limites bornées i.e. : $\hat{X}(t, 0) \in \mathbb{R}_+^{n^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $\hat{X}(0, i) \in \mathbb{R}_+^{n^2}$, $i \in \mathbb{Z}_+$ nous avons

$$\lim_{t,i \rightarrow \infty} \hat{X}(t, i) = 0 \quad (4.50)$$

Pour établir des conditions en LMI pour le système général 2D de Lyapunov, nous devons appliquer le résultat suivant établi dans [24] et dans [51].

Théorème 4.6. *Le système 2D-GRM à temps continu-discret (4.3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$H(s, 0) \neq 0 \text{ pour } \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (4.51)$$

$$H(s, z) \neq 0 \text{ pour } \operatorname{Re}(s) = 0 \text{ et } |z| \leq 1 \quad (4.52)$$

Théorème 4.7. [7] [8] *Une matrice polynômiale hermitienne $P(\omega) = \sum_{i=0}^2 P_i \omega^i$ with $P_i = P_i^*$, est définie positive pour $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe une matrice hermitienne X telle que*

$$\begin{bmatrix} P_0 & (P_1 - jX)/2 \\ (P_1 + jX)/2 & P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.53)$$

4.3.2 Conditions LMI pour le Test de Stability des Systèmes généraux 2D à temps Continu-Discret de Lyapunov

Sur la base des définitions et théorèmes cités ci-dessus, nous proposons maintenant des conditions LMI suffisantes pour la stabilité asymptotique des modèles 2D décrits en (4.44).

Théorème 4.8. *Le système général 2D linéaire à temps continu-discret de Lyapunov est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes X_0, X_1, X_2 avec $X_0 \geq 0, X_1 \geq 0$, et $X_2 \geq 0$ vérifiant les LMI's suivantes :*

$$\bar{E}_{1,0}^T X_1 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) + (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_1 \bar{E}_{1,0} < 0 \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_2 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) - \bar{E}_{0,1}^T X_2 \bar{E}_{1,0} & X_0 \\ -(A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T)^T X_2 \bar{E}_{1,0} + \bar{E}_{1,0}^T X_2 (A_0 \otimes I_n + I_n \otimes A_1^T) + X_0 & \bar{E}_{1,0}^T X_2 \bar{E}_{1,0} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.55)$$

où

$$\bar{E}_{k,l} = (E \otimes I_n).diag(kI_{n.n_1}, lI_{n.n_2}), k, l = 0, 1 \quad (4.56)$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique du système (4.3.1) est défini par la relation suivante :

$$H(s, z) = \det[\hat{E} \operatorname{diag}(sI_{n.n_1}, zI_{n.n_2}) - \hat{A}], \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (4.57)$$

de la condition (4.51) résulte

$$H(s, 0) = \det[s\hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0) - \hat{A}], \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (4.58)$$

En appliquant le fait que pour le cas à temps continu nous avons $\det(sV - W) \neq 0$ qui est équivalent à $W^*XV + V^*XW > 0$; $X > 0$, $X^* = X$ alors, il existe $X_1 > 0$ avec $X_1^* = X_1$ vérifiant

$$\operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_1 \hat{A} + \hat{A}^T X_1 \hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0) < 0 \quad (4.59)$$

En remplaçant \hat{E} , \hat{A} et $\bar{E}_{1,0}$, la LMI (4.54) est vérifiée.

La condition (4.52) nous conduit à

$$H(s, z) = \det[\hat{E} \operatorname{diag}(sI_{n.n_1}, zI_{n.n_2}) - \hat{A}], \operatorname{Re}(s) = 0, |z| \leq 1 \quad (4.60)$$

Posons $s = j\omega$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ alors nous avons $H(j\omega, z) \neq 0$ ce qui est équivalent à

$$\det[z\hat{E} \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2}) + j\omega\hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0) - \hat{A}] \neq 0, \omega \in \mathbb{R}, |z| \leq 1 \quad (4.61)$$

Etant donné que pour le temps discret nous avons l'équivalence suivante :

$\det(zV - W) \neq 0$ si et seulement si $W^*XW - V^*XV > 0$; $X > 0$, $X^* = X$.

Et si on pose $V = \hat{E} \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2})$ et $W = \hat{A} - j\omega\hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)$.

alors nous aurons de la relation (4.61) qu'il existe une matrice hermitienne définie positive X_2 vérifiant la relation suivante :

$$\begin{aligned} & [\hat{A}^T + j\omega \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T] X_2 [\hat{A} - j\omega\hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)] \\ & - \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2})\hat{E}^T X_2 \hat{E} \operatorname{diag}(0, I_{n.n_1}) > 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

par suite,

$$\begin{aligned} & \omega^2 [\operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)] \\ & + j\omega [\operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{A} - \hat{A}^T X_2 \hat{E} \operatorname{diag}(I_{n.n_1}, 0)] \\ & + [\hat{A}^T X_2 \hat{A} - \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2})\hat{E}^T X_2 \hat{E} \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2})] > 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

ce qui est sous la forme $P_2\omega^2 + P_1\omega + P_0 > 0$ où

$$P_0 = \hat{A}^T X_2 \hat{A} - \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2})\hat{E}^T X_2 \hat{E} \operatorname{diag}(0, I_{n.n_2}) \quad (4.64)$$

$$P_1 = j[\text{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{A} - \hat{A}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0)] \quad (4.65)$$

$$P_2 = \text{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) \quad (4.66)$$

Notons au passage que $P_k^* = P_k$ pour tout $k = 0, 1, 2$.

En appliquant le théorème (4.7), il s'en suit qu'il existe une matrice hermitienne X satisfaisant la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} P_0 & \frac{(P_1 - jX)}{2} \\ \frac{(P_1 + jX)}{2} & P_2 \end{bmatrix} > 0$$

Définissons maintenant une nouvelle matrice hermitienne X_0 par la relation suivante :

$$X = 2X_0 - \hat{A}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0) + \text{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{A} \quad (4.68)$$

(il est clair que $X_0^* = X_0$)

Puis si nous remplaçons la matrice X dans la relation (4.67), nous obtenons

$$\begin{bmatrix} P_0 & -jX_0 \\ j[X_0 + \text{diag}(I_{n.n_1}, 0)\hat{E}^T X_2 \hat{A} - \hat{A}^T X_2 \hat{E} \text{diag}(I_{n.n_1}, 0)] & P_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.69)$$

en multipliant la matrice de la relation (4.69) respectivement à gauche et à droite par une matrice de transformation de congruence diagonale par blocs respectivement $\text{diag}(I_{n.n_1}, jI_{n.n_2})^*$ et $\text{diag}(I_{n.n_1}, jI_{n.n_2})$, et en substituant les matrices \hat{E} , \hat{A} , et $\bar{E}_{0,1}$ par leurs matrices équivalentes, nous obtenons alors la LMI (4.55). \square

Remarque 4.2. Il est bien connu que pour matrice $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si M est définie positive alors pour tout $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice $X^* M X$ est semi-définie positive, et si la matrice X est non-singulière alors $X^* M X$ est définie positive. Il suffit dans notre cas d'observer la non-singulière de la matrice $\text{diag}(I_{n.n_1}, jI_{n.n_2})$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique des systèmes généraux 2D linéaires à temps discret et à temps continu-discret de type Lyapunov ont été dérivées. Nous avons développé un nouveau test de stabilité pour garantir cette stabilité. Une approche en formulation LMI a été décrite. Dans tout les cas, toutes les LMI's obtenues sont au maximum de dimensions $2n^2 \times 2n^2$.

Chapitre 5

Conclusion générale

Dans la première partie de notre travail, nous avons étudié une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels fractionnaires introduite dans [33]. La principale propriété de ces systèmes est que si l'état initial est non négatif (resp. positif) la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non négatif (resp. positif). L'objectif du chapitre 1 est de rappeler quelques propriétés de la théorie des matrices, et des systèmes positifs. Dans le deuxième chapitre, nous étalons quelques grandes notions du calcul fractionnaire au sens de Caputo; ainsi que de l'analyse fractionnaire. Dans le chapitre 3, nous étudions la positivité des systèmes hybrides et nous analysons l'impact de la discrétisation sur ces systèmes. des critères pour la préservation de la positivité ont été établis; et nous avons démontré que dans certains cas il est obligatoire que le pas d'échantillonnage soit choisi dans un interval de confiance, sinon le système discret associé au système hybride de départ perdra sa propriété de positivité après passage à la discrétisation.

Dans la deuxième partie de notre travail, l'analyse de la stabilité d'une nouvelle classe de systèmes bidimensionnels; dite systèmes de Lyapunov introduite dans [38], [48], [37] et [47] a été regardée. Nous avons étudié la stabilité de deux types de systèmes de Lyapunov, le 2D-continu-discret, et le 2D-discret, et nous avons établi des conditions de stabilité en terme de LMI's.

Annexe A

The bidimensional Z-transform

For more details about definitions, properties of the 2D Z-Transform see Poularikas [46].

Définition A.1. The Z-transform of a discrete bidimensional function $x(k, i)$ is the bidimensional function $X(z_1, z_2)$ defined by the formula

$$X(z_1, z_2) = Z[x(k, i)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x(k, i) z_1^{-k} z_2^{-i} \quad (\text{A.1})$$

where $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

For more details about definition and properties of the bidimensional Z-transform, see [23]. We now derive the solution of the equation (3.10). From definition A.1 we obtain the following properties, useful for our further developments.

1. $Z[x(k+1, i+1)] = z_1 z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0) - X(0, z_2) + x(0, 0)]$
2. $Z[x(k, i+1)] = z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)]$
3. $Z[x(k+1, i)] = z_1 [X(z_1, z_2) - X(0, z_2)]$
4. $Z[x(k-p, i-q)] = z_1^{-p} z_2^{-q} X(z_1, z_2)$
5. $Z[x(k-p, i+1)] = z_1^{-p+1} z_2 [X(z_1, z_2) - X(z_1, 0)]$

Lemme A.1. Let $Z[x(n_1, n_2)] = X(z_1, z_2)$ and $Z[y(n_1, n_2)] = Y(z_1, z_2)$, so we have the following properties.

1. *Multiplication property :*

$$Z[x(n_1, n_2)y(n_1, n_2)] = \left(\frac{1}{2\pi j}\right)^2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} X\left(\frac{z_1}{\mu_1}, \frac{z_2}{\mu_2}\right) Y(z_1, z_2) \frac{d\mu_1}{\mu_1} \frac{d\mu_2}{\mu_2} \quad (\text{A.2})$$

2. *Convolution property :*

The Convolution product is defined by the following relation :

$$x(n_1, n_2) * y(n_1, n_2) = \sum_{p_1} \sum_{p_2} x(n_1 - p_1, n_2 - p_2) * y(p_1, p_2) \quad (\text{A.3})$$

So we have the following result :

$$Z [x(n_1, n_2) * y(n_1, n_2)] = X(z_1, z_2).Y(z_1, z_2) \quad (\text{A.4})$$

$$Z [x(n_1, n_2)y(n_1, n_2)] = \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} X\left(\frac{z_1}{\mu_1}, \frac{z_2}{\mu_2}\right) Y(z_1, z_2) \frac{d\mu_1}{\mu_1} \frac{d\mu_2}{\mu_2} \quad (\text{A.5})$$

Théorème A.2. Initial value Theorems

$$\lim_{z_2 \rightarrow \infty} X(z_1, z_2) = \sum_{n_1} x(n_1, 0) z_1^{-n_1} \quad (\text{A.6})$$

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} X(z_1, z_2) = \sum_{n_2} x(0, n_2) z_2^{-n_2} \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow \infty} X(z_1, z_2) = x(0, 0) \quad (\text{A.8})$$

Théorème A.3. The inverse Z-transform is defined by the relation

$$x(n_1, n_2) = Z^{-1} [X(z_1, z_2)] = \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^2 \oint_{c_1} \oint_{c_2} X(z_1, z_2) z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-2} dz_1 dz_2 \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

The Kronecker Product

Here we will mention some properties and rules for the Kronecker product. Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times s}$ then the following properties hold :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (\text{B.1})$$

$$\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(A) \cdot \text{rank}(B) \quad (\text{B.2})$$

If $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\det(A \otimes B) = (\det(A))^p \cdot (\det(B))^n \quad (\text{B.3})$$

$$I_n \otimes I_m = I_{nm} \quad (\text{B.4})$$

If A, B inversible, so

$$(A \otimes B)^{-1} = (A)^{-1} \otimes (B)^{-1} \quad (\text{B.5})$$

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (\text{B.6})$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad (\text{B.7})$$

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C) \quad (\text{B.8})$$

$$A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C) \quad (\text{B.9})$$

Définition B.1. With each matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, we associate the vector $\text{vec}(A) \in \mathbb{R}^{mn}$ defined by

$$\text{vec}(A) = [a_{11}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}]^T$$

(a column vector of each sequential column is stacked on top of one other).

B. The Kronecker Product

Théorème B.1. *Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ be given and let $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ unknown. Then, using the Kronecker product of the matrices A and B^T , we can transform the matrix equation $AXB = C$ into linear system of nq equations in np unknowns given by*

$$(A \otimes B^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(C) \tag{B.10}$$

Bibliographie

- [1] D. BALEANU, J.A.T. MACHADO, A.C.J. LUO "Fractional Dynamics and Control," *Springer Science and Business Media*, 2012.
- [2] R.B. BAPAT, T.E.S. RAGHAVAN, "Nonnegative matrices and applications", *Encyclopédia of mathematics and its applications 64*, Cambridge University press,1977.
- [3] B.R. BARMISH, "New Tools for Robustness of Linear Systems", *MacMillan Publishing Company*, 1994.
- [4] A. BERMAN, M. NEUMANN, R.J. STERN, "Nonnegative matrices in dynamic systems", *John Wiley and Sons*, 1989.
- [5] A. BERMAN, R.J. PLEMMONS, "Nonnegative matrices in the mathematical sciences", *Academic Press*, 1979.
- [6] D. BOUAGADA, "Influence of the value of discretization step on positivity of 2D linear continuous-discrete systems," *F. E. Jour. of Mathematical Sciences*, Vol. 15, no.1, pp. 107-112, 2004.
- [7] D. BOUAGADA, P. VAN DOOREN, "LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models", *Proc. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2010*, 2010.
- [8] D. BOUAGADA, P. VAN DOOREN, "On the stability of 2D state-space models", *Numerical Linear Algebra with Applications*, Vol 20(2), pp. 198-207, 2013.
- [9] M. CAPUTO, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent", *Part 2. Geophys. J. R. Astr. Soc.*, Vol 13, pp. 529-539, 1967.
- [10] M. CHADLI, P. BORNE, "Multimodèles en Automatique-Outils Avancés d'Analyses et de Synthèse". *Publisher : Hermès-Lavoisier*, p.192, ISBN : 978-2-7462-3825-1, 2012

- [11] M. CHADLI, P. BORNE, "Multiple Models Approach in Automation : Takagi-Sugeno Fuzzy Systems", *Wiley-ISTE*, ISBN : 978-1-84821-412-5, Hardcover, 208 pages, 2013
- [12] M. CHADLI, M. DAROUACH, "Robust Admissibility of Uncertain Switched Singular Systems", *International Journal of Control*, pp. 1-20, 2011.
- [13] M. CHADLI, M. DAROUACH, "Further enhancement on robust H_∞ control design for discrete-time singular systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013.
- [14] D.L. DAVIS, "A Correct proof of Huang theorem on stability," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 424-426, 1976.
- [15] L. FARINA, S. RINALDI, "Positive Linear Systems," *Theory and Applications, J. Wiley, New York*, 2000.
- [16] E. FORNASINI, G. MARCHESINI, "State-space realization theory of two-dimensional filters". *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol AC-21, pp. 484-492, 1976.
- [17] E. FORNASINI, G. MARCHESINI, "Doubly Indexed Dynamical Systems : State-space Models and Structural Properties", *Mathematical Systems Theory*, Vol 12, pp. 59-72, 1978.
- [18] F.R. GANTMACHER, "Théorie Des Matrices Tom 1", *Edition Dunod*, Paris 1966.
- [19] F.R. GANTMACHER, "Théorie Des Matrices Tom 2", *Edition Dunod*, Paris 1966.
- [20] Y. GENIN, Y. HACHEZ, Y. NESTEROV, R. STEFAN, P. VAN DOOREN, S. XU, "Positivity and linear matrix inequalities," *European Journal of Control*, Vol 8(3), pp. 275-298, 2002.
- [21] Y. GENIN, Y. HACHEZ, Y. NESTEROV, P. VAN DOOREN, "Optimization problems over positive pseudopolynomial matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol 25(1), pp. 57-79, 2003.
- [22] T. HUANG, "Stability of two dimensional recursive filters," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* Vol 20(2), pp. 158-163, 1972.
- [23] S. JAYARAMAN, S. ESAKKIRAJAN, T. VEERAKUMAR, "Digital Image Processing," *Tata Mc Graw-Hill Education*, 2011.
- [24] E.I. JURY, "Inners and Stability of Dynamic Systems," *John Wiley sons, New York. London. Sydney. Toronto*, 1973.

- [25] T. KACZOREK, "Two Dimensional Linear Systems", *Springer Verlag, Berlin*, 1985.
- [26] T. KACZOREK, "The Singular General Model of 2D systems and its solutions", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol 33(11), pp. 1060-1061, Nov. 1988.
- [27] T. KACZOREK, "Equivalence of Singular 2D Linear Models", *Bulletin Polish Academy of Sciences, Electronics and Electrotechnics*, Vol 37, 1989.
- [28] T. KACZOREK, "Vectors and Matrices in Automation and Electrotechnics", *WNT, Warsaw*, 1998.
- [29] T. KACZOREK, "Positive 1D and 2D Systems," *Springer-Verlag London Ltd.*, 2002.
- [30] T. KACZOREK, "Canonical forms of singular 1D and 2D linear systems", *Int. J. Appl. Math. Computer Science*, Vol 13(1), pp. 61-72, 2003.
- [31] T. KACZOREK, "Asymptotic stability of positive 2D linear systems", *Proc. 13th Scientific Conf. on Computer Applications in Electrical Engineering*, Poznan, Poland, 2008.
- [32] T. KACZOREK, "LMI approach to stability of 2D positive systems," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol 20 (1), pp. 39-54, 2008.
- [33] T. KACZOREK, "Positive fractional 2D hybrid linear systems", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences*, Vol. 59, no. 4, pp. 575-579, 2011.
- [34] T. KACZOREK, "Selected Problems of Fractional Systems Theory," *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg*, 2011.
- [35] T. KACZOREK, "Comparison of approximation methods of positive stable continuous-time linear systems by positive stable discrete-time systems," *Archives of Electrical Engineering*, Vol. 62, no. 2, pp. 345-355, 2013.
- [36] T. KACZOREK, "Approximation of fractional positive stable continuous-time linear systems by fractional positive stable discrete-time systems," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, Vol 23, no. 3, pp. 501-506, 2013.
- [37] T. KACZOREK, P. PRZYBOROWSKYI, "Continuous-time linear Lyapunov cone-systems," *Proc 13th IEEE IFAC, Inter. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics*, Vol 1, pp. 225-229, 2007.
- [38] T. KACZOREK, P. PRZYBOROWSKY, "Reachability, controllability of positive discrete-time Lyapunov systems", *Control and Cybernetics*, Vol 38(2), pp. 529-541, 2009.

- [39] A.A. KILBAS, H.M. SRIVASTAVA, and J.J. TRUJILLO, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", *North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam*, vol. 204, Elsevier, 2006.
- [40] J. KUREK, "The General State-Space Model for a two Dimensional Linear Digital System", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol AC-30, pp. 600-602, June 1985.
- [41] C.A. MONJE, Y. CHEN, B.M. VINAGRE, D. XUE, V. FELIU, "Fractional order Systems and Controls, Fundamentals and Applications," *Springer London*, 2010.
- [42] J. MURRAY, "Another proof and sharpening of Huang theorem," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol 25(6), pp. 581-582, 1977.
- [43] M.S.N. MURTY, B.V. APPARAO, "Controllability and observability of Lyapunov systems", *Ranchi University Mathematical Journal*", Vol 32, pp. 55-65, 2005.
- [44] A. OUSTALOUP, "La commande crone," *Hermes, Paris*, 1999.
- [45] I. PODLUBNY, "Fractional Differential Equations," *Academic Press, New york*, 1999.
- [46] A.D. POULARIKAS, "The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing", *Boca Raton : CRC Press LLC*, 1999.
- [47] P. PRZYBOROWSKI, T. KACZOREK, "Linear Lyapunov cone-systems," *J. I-Tech Education and Publishing, Automation and Robotics*, pp. 169-190, 2008.
- [48] P. PRZYBOROWSKY, T. KACZOREK, "Positive 2D discrete-time linear Lyapunov systems", *Inter. Jour. Applied Mathematics and Computer Science*, Vol 19(1), pp. 95-105, 2009.
- [49] R.P. ROESSER, "A discrete state space model for linear image processing", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol AC-20(1), pp. 1-10, 1975.
- [50] J. SABATIER, O.P. AGRAWAL, J.A.T. MACHADO, "Advances in fractional calculus," *Springer Dordrecht*, 2007.
- [51] D.D. SILJAK, "Stability criteria for two-variable polynomials," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol 22, pp. 185-189, 1975.
- [52] M. TWARDY, "An LMI approach to checking stability of 2D positive system", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences :Technical Sciences*, Vol 54(4), pp. 385-395, 2007.

- [53] M.E. VALCHER, "On the internal stability and asymptotic behavior of 2D positive systems", *IEEE Transactions On Circuits and Systems*, Vol 44(7), pp. 602-613, 1997.
- [54] H. XU, Y. ZOU, " H_∞ control for 2D singular delayed systems", *Int. Jour. Syst. Sci.* Vol 42(4), pp. 609-619, 2011.
- [55] Y. ZOU, H. HU, W. WANG, "Stability for two-dimensional singular discrete systems described by general model", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Vol 19, pp. 219-229, 2008.
- [56] Y. ZOU, S.L. CAMPBELL, "The jump behavior and stability analysis for 2D singular systems", *Multidimens. Syst. Signal Process*, Vol 11, pp. 321-338, 2000.