REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
Département de Mathématiques et d'Informatique

Thèse de Doctorat Troisième Cycle

Spécialité: Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

MAZOUZ Said

THÈME

Propriétés des solutions de certaines classes d'équations différentielles au voisinage d'un point singuliers

Soutenue le 23/06/2024 devant le Jury

Mr. BELAIDI Benharrat	Président	Pr.	U. Mostaganem
Mr. BENHARRAT Mohammed	Examinateur	Pr.	E. N. Poly. Oran
Mme. HAMANI Karima	Examinateur	Pr.	U. Mostaganem
Mr. HAMOUDA Saâda	Encadreur	Pr.	U. Mostaganem

Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la santé, le courage et la volonté, pour réaliser cette thèse.

J'adresse particulièment mes vifs remerciements :

À mon directeur de thèse Pr. HAMOUDA Saada d'avoir accepté de diriger ma thèse. Je ne pourrai jamais le remercier assez pour son soutien et disponibilité durant ma formation doctorale, ainsi que pour les multiples échanges et réflexions qui m'ont aidé à achever ce travail.

Au professeur BELAIDI Benharrat pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, mais aussi d'avoir ouvert la formation doctorale en 2020-2021 sur la thèmatique de l'analyse fonctionnelle et qui m'a permis de travailler sur ce projet.

Mes remerciements vont également aux Professeur BENHARRAT Mohammed et Professeur HAMANI Karima pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ma thèse, mais surtout d'avoir accepté de faire partie du jury en tant qu'examinateurs. Vos remarques et critiques sont précieuses et vont certainement m'apporter une prévalue au manuscrit.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble de mes enseignants, qui ont contribué à ma formation.

Je remercie également tous mes amis qui m'ont encouragé et soutenu durant les moments les plus difficiles de ma thèse.

Enfin, j'adresse ma profonde affection et reconnaissance envers ma future épouse et toute ma famille, plus particulièrement mes parents. Sans leur soutien inconditionnel et leur amour, je ne serais pas là où je suis.

Résumé : Dans cette thèse nous étudions la croissance et l'oscillation des solutions de certaines classes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions analytiques dans un disque épointé. Pour celà, nous utilisons la théorie de Rolf Nevanlinna de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans le plan complexe avec des définitions adaptées au voisinage d'un point singulier fini isolé, notamment la fonction caractéristique, l'ordre de la croissance et l'exposant de convergence. Dans la majorité des cas nous prouvons que toutes les solutions non nulles sont d'ordre infini et d'exposant de convergence infini avec une précision de l'hyper-ordre, l'ordre itératif et l'exposant itératif. A la fin du dernier chapitre, nous étudions le comportement asymptotique des solutions d'ordre fini ainsi que leurs dérivées.

Mots clés : Equations différentielles linéaires, point singulier fini, disque épointé, croissance des solutions, oscillation, exposant de convergence, théorie de Nevanlinna, fonction entière, fonction méromorphe, fonction analytique.

Abstract : In this thesis, we study the growth and oscillation of solutions of certain classes of linear differential equations whose coefficients are analytic functions in a punctured disc. For that, we use the value distribution theory of Rolf Nevanlinna of a meromorphic function in the complex plane with adapted definitions near an isolated finite singular point, notably the characteristic function, the order of growth and the exponent of convergence. In the majority of cases, we prove that all non trivial solutions are of infinite order and infinite exponent of convergence with a precision of the hyper-order, iteratif order and iteratif exponent of convergence. In the end of the last chapter, we investigate the asymptotic behavior of finite order solutions as well as their derivatives.

Key words : Linear differential equations, finite singular point, punctured disc, growth of solutions, oscillation, exponent of convergence, Nevanlinna theory, entire function, meromorphic function, analytic function.

ملخص : في هذه الأطروحة ندرس تزايد وتذبذب حلول فئات معينة من المعادلات التفاضلية الخطية التي تكون معاملاتها دوال تحليلية في قرص منزوع المركز. ولهذا الغرض نستخدم نظرية رولف نيفانلينا لتوزيع قيم الدالة الميرومورفية في المستوى المركب مع تعريفات مكيفة مع جوار نقطة شاذة معزولة منتهية ولا سيما الدالة المميزة ورتبة التزايد وأس التقارب . في معظم الحالات، نثبت أن جميع الحلول غير الصفرية ذات رتبة تزايد لا نهائي وأس تقارب لا نهائي مع تحديد بدقة الترتيب الفائق والترتيب التكراري والأس التكراري. وفي نهاية الفصل الأخير نقوم بدراسة السلوك التقاربي للحلول ذات الرتبة المحدودة ومشتقاتها.
الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية الخطية، نقطة شاذة منتهية، قرص منزوع المركز، تزايد الحلول، التذبذب، أس التقارب، نظرية نيفانلينا، الدوال الصحيحة، الدوال الميرومورفية، الدوال التحليلية.

Table des Matières

Introduction

La théorie de Rolf Nevanlinna fondée dans les années 1920's a donné une forte impulsion au développement de la théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe. Elle occupe une place axiale dans l'analyse complexe dans lequel beaucoup de problèmes ont été résolus avec cette théorie dont les applications se sont étendues sur d'autres domaines, notamment à la théorie analytique des équations différentielles. Elle constitue un outil important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles à coefficients fonctions de variable complexe, notamment, l'équation différentielle linéaire suivante

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \tag{1}$$

Il est très connu que si les coefficients $A_i(z)$ $(i = 0, ..., n-1)$ sont des fonctions entières, alors toutes les solutions sont également des fonctions entières et si les coefficients sont des fonctions méromorphes les solutions pourraient être non méromorphes. En 1956, Frei a démontré dans [18] que si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est entière transcendante (non polynôme), alors il existe au maximum p solutions indépendantes d'ordre fini de l'équation différentielle (Pour la définition de l'ordre d'une fonction entière f, voir la page 12). Un autre résultat classique dû à Wittich [51] affirme que toutes les solutions de (1) sont d'ordre fini si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle (1) sont des polynômes. Pour une analyse complète sur l'ordre des solutions dans le cas des coefficients polynomiaux voir [21]. Depuis ces résultats, des recherches actives dans ce sens se sont lancés dans l'étude de la croissance des solutions et par conséquent, plusieurs articles ont été publiés concernant la relation entre la croissance des coefficients et la coissance des solutions. En 1982, la théorie de l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été introduite pour la première fois par Bank et Laine [2] suite à l'étude du problème de l'oscillation des équations différentielles de la forme $f'' + A(z) f = 0$ où $A(z)$ est une fonction entière; puis en 1983, ils ont élargis leurs champs d'étude aux zéros des solutions des équations différentielles linéaires de second ordre $f'' + A(z) f' + B(z) f = 0$.

Depuis le début des années 2000, plusieurs chercheurs essayent d'étendre certains résultats du plan complexe vers le disque unité en utilisant la théorie de Nevanlinna: c'est à dire de passer des fonctions entières ou méromorphes dans le plan complexe aux fonctions analytiques ou méromorphes seulement dans le disque unité; voir à titre d'exemples [30, 29, 16, 8, 22, 25].

En générale, l'étude des propriétés asymptotiques des solutions de l'équation différentielle (1) dans le plan complexe ou dans le disque unité se base sur la domination d'un coefficient par rapport aux autres au sens de l'ordre de la croissance, type ou degrée; voir par exemple [10, 19, 29, 33]. Dans [22], Hamouda a utilisé une nouvelle idée de domination pour étudier la croissance des solutions de certaines classes d'équations différentielles dans le disque unité en utilisant le comportement asymptotique des coefficients au voisinage d'un point sur le bord du disque. Cette idée a été l'inspiration à un autre travail de Fettouch et Hamouda [17] qui consiste à étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage d'un point singulier isolé fini, c'est-à-dire les coefficients sont analytiques dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Pour celà, les auteurs ont pu adapter la fonction caractéristique et autres résultats préliminaires pour cette nouvelle situation. Par la suite, une série d'articles a été publiés dans se sens; voir par exemple [23, 12, 13, 14, 15]. L'outil le plus important dans toutes ces études est l'estimation des dérivées logarithmiques

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right|. \tag{2}$$

Dans [20], Gundersen a donné plusieurs estimations de (2) pour les fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ puis en 2003 des estimations de (2) ont été données pour les fonctions méromorphes dans le disque unité dans [16]. Pour les fonctions méromorphes dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, des estimations de (2) ont été données dans [17, 23]. Une question ouverte a été posée dans [23] sur la possibilité de donner des estimations de (2) pour le cas où la fonction $f(z)$ est analytique ou méromorphe dans un disque épointé $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$. La réponse a été positive dans [24]; ce qui a donné une autre fois des perspectives dans cette direction de recherche. Le travail de cette thèse est une suite naturel de cet avancement et dans laquelle on va étudier la croissance et l'oscillation de certaines classes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont analytiques ou méromorphes dans le disque épointé $D(0,R)$.

Cette thèse se compose d'une introduction et de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans les chapitres suivants, en mettant en exergue quelques éléments de la théorie de Nevanlinna dans le plan complexe et dans le disque unité et aussi son extension vers le voisinage d'un point singulier fini isolé dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ et $D(0,R)$.

Le deuxième chapitre est la première partie de notre travail qui consiste à étudier la croissance et l'oscillation, au voisinage du point singulier $z = 0$, des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + \left(A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} + A_0(z)\right) f' + \left(B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} + B_0(z)\right) f = H(z),$$

où $A(z), A_0(z), B(z), B_0(z), H(z)$ sont des fonctions analytiques dans le disque épointé $D(0,R)$ et a, b sont des constantes complexes non nulles.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\} f^{(k-1)} + ... + A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\} f = F(z),$$

où $A_j(z)$ sont des fonctions analytiques dans $D(0,R)$ et a_j $(j = 0, ..., k-1)$ sont des nombres complexes. On peut dire que ce chapitre est la généralisation du deuxième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, on va se baser sur la domination d'un coefficient sur seulement une partie d'une courbe tendant vers le point singulier zéro dans deux cas: tout d'abord nous prouvons que toutes les solutions non triviales sont d'ordre infini lorsque $A_0(z)$ domine les autres coefficients et dans le cas contraire on étudie le comportement des solutions d'ordre fini au voisinage du point singulier $z = 0$ ainsi que leurs dérivées.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de Nevanlinna

Dans cette partie, on va citer quelques définitions, notations et résultats sur les fonctions méromorphes et analytiques dont on aura besoin par la suite.

Définition 1.0.1 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe, n'étant pas identiquement égal à $a \in \mathbb{C}$. Soit $i(z,a,f)$ désignant la multiplicité de a-point de f à z, Ainsi, on définit*

$$n\left(r,a,f\right) = n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=a}} i\left(z,a,f\right).$$

c'est-à-dire, $n(r,a,f)$ est le nombre de racines de $f(z) = a$ dans $|z| \leq r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité; pour les pôles de f, nous définissons

$$n\left(r,\infty,f\right) = n\left(r,f\right) = \sum_{\substack{|z| \leq r \\ f(z)=\infty}} i\left(z,\infty,f\right);$$

aussi $n\left(r,f\right)$ est le nombre de pôles de $f(z)$ dans $|z| \leq r$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.

1.1 Fonction de comptage

Définition 1.1.1 *[27, 37] Pour la fonction méromorphe f, on définit*

$$N\left(r,a,f\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int\limits_0^r \frac{n\left(t,a,f\right) - n\left(0,a,f\right)}{t} dt + n\left(0,a,f\right)\log r$$

pour $a \neq \infty$ *et*

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt + n(0,\infty,f)\log r$$

$N(r,a,f)$ *est appelée fonction de comptage a-points de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq r$.

1.2 Fonction de proximité

Définition 1.2.1 *[27, 37] Pour la fonction méromorphe* f*, on définit*

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi, \ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi,$$

où $\log^+ \alpha = \max(0, \log \alpha)$. $m(r,a,f)$ est appelée la fonction de proximité de la fonction f au point a.

1.3 Fonction caractéristique

Définition 1.3.1 *[27, 37] La fonction caractéristique de la fonction méromorphe* f *est définie comme suit*

$$T(r,f) = N(r,f) + m(r,f).$$

Exemple 1.3.1 *Pour la fonction* $f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *on a* $m(r,f) = \frac{|a|r}{\pi}$, $N(r,f) = 0$ *d'où* $T(r,f) = \frac{|a|r}{\pi}$.

Remarque 1.3.1 *[27, 37] Les définitions en dessus restent valables pour les fonctions méromorphes dans le disque unité et pour celà il suffit de prendre* $0 < r < 1$.

Exemple 1.3.2 *Soit* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^\lambda}\right\}$ $(\lambda > 1)$. *Il est claire que* $N(r,f) = 0$. *D'aprés [45], on a* $T(r,f) = \frac{c}{(1-r)^{\lambda-1}}(1 + o(1))\,(c > 0, \ r \to 1^-)$.

Les propriétés de la fonction caractéristique se base essentiellement sur les propriétés du logarithme tronqué $\log^+$ qui sont contenues dans le lemme suivant.

Lemme 1.3.1 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha_i > 0$. On a les propriétés suivantes.*
(a) $\log \alpha \leq \log^+ \alpha,$
(b) $\log^+ \alpha \leq \log^+ \beta$ *pour* $\alpha \leq \beta,$
(c) $\log \alpha = \log^+ \alpha - \log^+ \frac{1}{\alpha},$
(d) $|\log \alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ \frac{1}{\alpha},$
(e) $\log^+ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i,$
(f) $\log^+ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \log^+ \alpha_i + \log n.$

Preuve : A titre d'exemple, on donne seulement la démontrati0n de (e) et (f).
(e) Si $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$, l'inégalité est triviale et si $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$, on a

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i.$$

(f) De (e) on a

$$\begin{aligned} \ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) &\leq \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \leq \ln n + \ln^+ \left(n \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i. \end{aligned}$$

Voici les propriétés fondamentales des fonctions $m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$.

Lemme 1.3.2 *[27, 37] Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Alors*
(A) $m \left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \log n,$
(B) $m \left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} m(r, f_i),$
(C) $N \left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i),$
(D) $N \left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} N(r, f_i),$
(E) $T \left(r, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \log n,$ *pour* $n \geq 1,$
(F) $T \left(r, \prod\limits_{i=1}^{n} f_i \right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} T(r, f_i),$ *pour* $n \geq 1,$
(G) $T(r, f^n) = nT(r, f),$ *pour* $(n \geq 1),$
(H) $T \left(r, \frac{af+b}{cf+d} \right) = T(r, f) + O(1),$ $f \not\equiv -\frac{d}{c}.$

Preuve : On va donner ici à titre d'exemple la démonstration de quelques propriétés.
(E) On a

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} m\left(r, f_j\right) + \ln n + \sum_{j=1}^{n} N\left(r, f_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} T\left(r, f_j\right) + \ln n. \end{aligned}$$

(F) on a

$$m\left(r, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} m\left(r, f_j\right)$$

et

$$N\left(r, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} N\left(r, f_j\right)$$

donc

$$T\left(r, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) = m\left(r, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) + N\left(r, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{p} T\left(r, f_j\right).$$

(G) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1 \Leftrightarrow |f| \leq 1$.
Si $|f| \leq 1$, alors

$$T\left(r, f^n\right) = N\left(r, f^n\right) = nN\left(r, f\right).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) = nT\left(r, f\right). \end{aligned}$$

(H) Posons $f_0 = f,\ f_1 = f_0 + \frac{d}{c},\ f_2 = cf_1,\ f_3 = \frac{1}{f_2}$,

$f_4 = \frac{bc-ad}{c} f_3,\ f_5 = f_4 + \frac{a}{c}$,si $c \neq 0, T(r, f_{k+1}) = T(r, f_k) + O\left(1\right).$
D'où le résultat.

1.4 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.4.1 *[37, 27] Soit f une fonction méromorphe non constante et $a \in \mathbb{C}$. Soit le développement de Laurent de $f\left(z\right) - a$ autour du point d'origine*

$$f\left(z\right) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}.$$

Alors
$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\log|c_m|+\varphi\left(r,a\right),$$
où
$$|\varphi\left(r,a\right)|\leq\log^{+}|a|+\log 2.$$

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin des résultats suivants.

Proposition 1.4.1 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*
$$f\left(z\right)=\sum_{i=m}^{\infty}c_iz^i,\quad c_m\neq 0, m\in\mathbb{Z}.$$
Alors
$$\log|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

1.5 Théorème de Jensen

Théorème 1.5.1 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe telle que $f\left(0\right)\neq 0,\infty$. Soient $a_1,...,a_n$ les zéros et $b_1,b_2,...,b_n$ les pôles de f, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*
$$\log|f\left(0\right)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+\sum_{0<|b_j|\leq r}\log\frac{r}{|b_j|}-\sum_{0<|a_j|\leq r}\log\frac{r}{|a_j|}.$$

Lemme 1.5.1 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe avec a-point $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ dans le disque $|z|\leq r$, tel que $0<\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n<r$ étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*
$$\int_0^r\frac{n\left(t,a,f\right)}{t}dt=\int_0^r\frac{n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)}{t}dt=\sum_{0<|\alpha_j|\leq r}\log\frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Preuve : On considère la fonction $h\left(z\right)=f\left(z\right)z^{-m}$. Il est clair que $h\left(0\right)\neq 0$, et
$$m=n\left(0,0,f\right)-n\left(0,\infty,f\right).$$
En fait, si $m>0$ alors
$$n\left(0,0,f\right)=m \text{ et } n\left(0,\infty,f\right)=0.$$
Si $m<0$ alors
$$n\left(0,0,f\right)=0 \text{ et } n\left(0,\infty,f\right)=-m.$$
Si, $m=0$ alors
$$n\left(0,0,f\right)=n\left(0,\infty,f\right)=0.$$

Donc les fonctions f et h ont les même zéros et même pôles dans $0 < |z| \leq r$. Du théorème de Jensen et Lemme 1.5.1, on a

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \ln|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - m\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right]\ln r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r \\
&\quad - \left[\int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt + n(0,0,f)\ln r\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Preuve : (du Théorème 1.4.1)
1) Montrons le théorème pour $a = 0$. D'après la Proposition 1.4.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

D'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}d\theta + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= T(r,f) - T\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|c_m|,$$

avec $\varphi(r,0)=0$
2) Montrons le théorème pour $a\neq 0$. Posons $h=f-a$, alors

$$\begin{aligned} N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right), \\ N(r,h) &= N(r,f-a)=N(r,f), \\ m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right), \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \ln^+|h| &= \ln^+|f-a|\leq \ln^+|f|+\ln^+|a|+\ln 2. \\ \ln^+|f| &= \ln^+|f-a+a|=\ln^+|h+a| \\ &\leq \ln^+|h|+\ln^+|a|+\ln 2. \end{aligned}$$

En intégrant les deux membres de 0 à 2π, on trouve

$$\begin{aligned} m(r,h) &\leq m(r,f)+\ln^+|a|+\ln 2. \\ m(r,f) &\leq m(r,h)+\ln^+|a|+\ln 2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\varphi(r,a)=m(r,h)-m(r,f).$$

Alors

$$\varphi\,|(r,a)|\leq \ln^+|a|+\ln 2.$$

D'après le $1^{er} cas$, on a

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{h}\right)+N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= T(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,h)+N(r,h)-\ln|c_m| \\ &= m(r,f)+\varphi(r,a)+N(r,f)-\ln|c_m| \\ &= T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f)=T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\ln|c_m|+\varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)|\leq \ln^+|a|+\ln 2.$$

Remarque 1.5.1 *Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit*

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)+O(1)$$

pour tout $a\in\mathbb{C}$.

Remarque 1.5.2 *Le premier théorème fondamental reste valable aussi dans le disque unité en prenant* $0 < r < 1$.

La proposition suivante donne une relation entre $T(r,f)$ et $M(r,f)$ pour les fonctions entières ou analytiques.

Proposition 1.5.1 *[27, 37] Soit g une fonction analytique dans le disque $D = \{z : |z| < R\}$ et $0 < r < R < \infty$. Posons $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ et supposons que $M(r,f) \geq 1$. Alors, on a*

$$T(r,f) \leq \log M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,f).$$

Définition 1.5.1 *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,+\infty)$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1,+\infty)$ est définie par

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt$$

Exemple 1.5.1 *Pour $E = [a,b]$, on a $m(E) = b - a$, $lm(E) = \ln \frac{b}{a}$.*

Définition 1.5.2 *La mesure logarithmique d'un ensemble $E \subset (0,1)$ dans le disque unité est définie par*

$$\int\limits_E \frac{dr}{1-r}.$$

Exemple 1.5.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [a,b] \subset (0,1)$ dans le disque unité est égale à $\ln \frac{1-a}{1-b}$.*

1.6 Lemme des dérivées logarithmiques

Parmi les résultats remarquables des dérivées logarithmiques, on cite les résultats suivants.

Lemme 1.6.1 *[27, 37] Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT(r,f)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Lemme 1.6.2 *[30] Soient f une fonction méromorphe dans le disque unité et $k \geq 1$ un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log^{+} T\left(r, f\right) + \log \frac{1}{1-r}\right),$$

où $r \notin E \subset (0,1)$ de mesure logarithmique finie, $\int\limits_{E} \frac{dr}{1-r} < \infty$. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

1.7 Croissance et oscillation d'une fonction méromorphe dans le plan complexe au voisinage de l'infini

Définition 1.7.1 *[27, 37] Soit f une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\sigma\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log M\left(r, f\right)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M\left(r, f\right)}{\log r},$$

où $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. En générale, si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log r}$$

et

$$\sigma_2\left(f\right) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log T\left(r, f\right)}{\log r},$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de f.

Remarque 1.7.1 *L'ordre d'une fonction entière définie par $f\left(z\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est égale à*

$$\sigma\left(f\right) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|},$$

voir [7].

Définition 1.7.2 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre n-itératif de la fonction f par*

$$\sigma_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n T(r, f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière, on définit aussi l'ordre n-ordre itératif de f par

$$\sigma_{M,n}(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_{n+1} M(r, f)}{\log r},$$

où $\log_{n+1}(x) = \log \log_n(x)$ *($n \geqslant 1$ entier naturel).*

Remarque 1.7.2 *En utilisant la Proposition 1.5.1, pour $n \geq 1$, on obtient*

$$\sigma_{M,n}(f) = \sigma_n(f).$$

Exemple 1.7.1 *La fonction $f(z) = \exp\{\exp z\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 1$.*

Lemme 1.7.1 *[50] Si f est une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{C}$, alors $\sigma(f^{(k)}) = \sigma(f)$, $k \in \mathbb{N}^*$.*

Définition 1.7.3 *La fonction méromorphe $a(z)$ est appelée petite fonction par rapport à la fonction méromorphe f si $T(r, a) = o(T(r, f))$ quand $r \to \infty$ à l'extérieur d'un ensemble de mesure linéaire finie.*

Définition 1.7.4 *[43, 44] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$ et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par*

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque* $|z| \leq t$.
De même on définit l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f au voisinage de 0 *par*

$$\lambda_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n N_0\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r};$$

et l'exposant n-itératif de convergence des zéros distincts par

$$\overline{\lambda}_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log_n \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.7.2 *L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^z - 1$ est égal à* 1.

1.8 Croissance et oscillation d'une fonction méromorphe dans le disque unité

Définition 1.8.1 *[27, 37] Soit f une fonction analytique dans le disque unité $D = \{z : |z| < 1\}$. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par*

$$\sigma_M(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log \log M(r, f)}{-\log(1-r)}$$

et

$$\sigma_{M,2}(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log \log \log M(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} f(z)$. En générale, si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log T(r, f)}{-\log(1-r)}$$

et

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log \log T(r, f)}{-\log(1-r)},$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de f.

Définition 1.8.2 *[27, 37] Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre n-itératif de la fonction f par*

$$\sigma_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log_n T(r, f)}{-\log(1-r)}.$$

Si f est une fonction analytique dans D, on définit l'ordre n-itératif de f par

$$\sigma_{M,n}(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1} \frac{\log_{n+1} M(r,f)}{-\log(1-r)},$$

Remarque 1.8.1 *Si f est une fonction analytique dans D, on a*

$$\sigma(f) \leq \sigma_M(f) \leq \sigma(f) + 1. \tag{1.1}$$

Cette double inégalité est exacte dans le sens où il existent deux fonctions analytiques g et h telles que $\sigma(g) = \sigma_M(g)$ et $\sigma_M(h) = \sigma(h) + 1$, comme le montre l'exemple suivant; pour plus de détail voir [16]. De toute évidence, on a

$$\sigma(f) < \infty \text{ si et seulement si } \sigma_M(f) < \infty.$$

Cependant, en utilisant Proposition 1.5.1, pour $n \geq 2$, on obtient

$$\sigma_{M,n}(f) = \sigma_n(f).$$

Exemple 1.8.1 *Pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{(1-z)^\mu}\right\}, (\mu \geq 1)$, on a $\sigma_1(f) = \mu - 1$ et $\sigma_{M,1}(f) = \mu$. Par contre, pour la fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\}$, on a*

$$\sigma(f) = \sigma_M(f) = 0.$$

Exemple 1.8.2 *La fonction $f(z) = \exp\{\exp\frac{1}{(1-z)^n}\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = n$.*

Définition 1.8.3 *[43, 44] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité. On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}.$$

De même on définit l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f dans le disque unité par

$$\lambda_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{\log_n N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)};$$

et des zéros distincts par

$$\overline{\lambda}_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{\log_n \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{-\log(1-r)}.$$

1.9 Fonction caractéristique d'une fonction méromorphe au voisinage d'un point singulier fini isolé

Sans perte de généralité, on suppose que le point singulier est le point d'origine. On va définir la fonction caractéristique dans deux cas.

Premier cas: Fonction méromorphe dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Définition 1.9.1 *[17, 13] Soit f une fonction méromorphe dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.*
(1) On définit la fonction de comptage au voisinage de 0 par

$$N_0 (r, f) = \int_r^{\infty} \frac{n (t, f) - n (\infty, f)}{t} dt - n (\infty, f) \log r,$$

où $n (t, f)$ désigne le nombre de poles de $f (z)$ dans la region $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z|\} \cup \{\infty\}$, chaque pôle est compté avec son ordre de multiplicité.
(2) On définit la fonction de proximité par

$$m_0 (r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f \left(re^{i\varphi} \right) \right| d\varphi.$$

(3) La fonction caractéristique de $f (z)$ est définit par

$$T_0 (r, f) = m_0 (r, f) + N_0 (r, f) .$$

Deuxième cas: Fonction méromorphe dans $D (0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$.

Définition 1.9.2 *[25] Soit f une fonction méromorphe dans le disque épointé $D (0, R)$.*
(1) On définit la fonction de comptage au voisinage de 0 par

$$N_0 (r, R', f) = \int_r^{R'} \frac{n (t, f)}{t} dt, \tag{1.2}$$

où $n (t, f)$ désigne le nombre de poles de $f (z)$ dans la region $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z| \leq R'\}$ et $0 < R' < R$; chaque pole est compté avec son ordre de multiplicité.
(2) On définit la fonction de proximité par

$$m_0 (r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f \left(re^{i\varphi} \right) \right| d\varphi.$$

(3) La fonction caractéristique de $f (z)$ est définit par

$$T_0 (r, R', f) = m_0 (r, f) + N_0 (r, R', f) .$$

Remarque 1.9.1 *Le choix de R' dans (1.2) n'a aucune influence dans le calcul de l'ordre de la croissance et l'exposant de convergence. En effet, si on prend deux valeurs de R', notamment $0 < R'_1 < R'_2 < R$, alors on a*

$$\int_{R'_1}^{R'_2} \frac{n(t,f)}{t} dt = p \log \frac{R'_2}{R'_1},$$

où p designe le nombre de pôles de $f(z)$ dans la region $\{z \in \mathbb{C} : R'_1 \leq |z| \leq R'_2\}$ qui est bornée. Par conséquent, $N_0(r, R'_1, f) = N_0(r, R'_2, f) + C$ et $T_0(r, R'_1, f) = T_0(r, R'_2, f) + C$ où C est une constante réelle. Alors, on peut écrire brievement $T_0(r,f)$ au lieu de $T_0(r, R', f)$.

1.10 Croissance et oscillation d'une fonction méromorphe et analytique au voisinage d'un point singulier fini isolé

Définition 1.10.1 *[25] Soit f une fonction méromorphe dans $D(0,R)$. On définit l'ordre et l'hyper-ordre de la fonction méromorphe $f(z)$ au voisinage de 0 par*

$$\sigma_T(f,0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ T_0(r,f)}{-\log r},$$

$$\sigma_{2,T}(f,0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ T_0(r,f)}{-\log r}.$$

Pour une fonction analytique $f(z)$ dans $D(0,R)$ on a aussi

$$\sigma_M(f,0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ M_0(r,f)}{-\log r}, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{2,M}(f,0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log^+ \log^+ \log^+ M_0(r,f)}{-\log r}, \tag{1.4}$$

où $M_0(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Définition 1.10.2 *[25] Soit f une fonction méromorphe dans $D(0,R)$. On définit l'ordre n-itératif de la fonction f par*

$$\sigma_{T,n}(f) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log_n T(r,f)}{-\log r}.$$

Si f est une fonction analytique $f(z)$ dans $D(0,R)$, on a aussi

$$\sigma_{M,n}(f) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log_{n+1} M(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.10.1 *Dans [24, Remark 1.5], on a montré, pour une fonction méromorphe* $f(z)$ *dans* $D(0,R)$, *que pour tout entier* $n \geq 1$, $\sigma_{T,n}(f) = \sigma_{M,n}(f)$. *Alors, on peut utiliser la notation* $\sigma(f,0)$, $\sigma_2(f,0)$, $\sigma_n(f,0)$ *sans aucune ambiguité.*

Exemple 1.10.1 *Pour la fonction* $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{z^2}\right\}$, *on a*

$$T_0(r,f) = m_0(r,f) = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Alors $\sigma_T(f,0) = 2$. *De l'autre côté, on a*

$$M_0(r,f) = \exp\left\{\frac{1}{r^2}\right\};$$

alors $\sigma_M(f,0) = 2$.

Exemple 1.10.2 *Pour la fonction* $f(z) = \exp\exp\left\{\frac{1}{z^3}\right\}$, *on a*

$$M_0(r,f) = \exp\exp\left\{\frac{1}{r^3}\right\}.$$

Par conséquent, on a $\sigma(f,0) = +\infty$, $\sigma_2(f,0) = 3$.

Définition 1.10.3 *[25] Soit* f *une fonction méromorphe dans* $D(0,R)$.
(1) On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f *au voisinage de* 0 *par*

$$\lambda(f,0) = \limsup_{r\longrightarrow 0} \frac{\log N_0\left(r,R',\frac{1}{f}\right)}{-\log r}$$

où

$$N_0\left(r,R',\frac{1}{f}\right) = \int_r^{R'} \frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt,$$

où $n\left(t,\frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros de* $f(z)$ *dans la region* $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z| \leq R'\}$ $(0 < R' < R)$, *chaque zéro est compté avec sa multiplicite; et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* f *au voisinage de* 0 *par*

$$\overline{\lambda}(f,0) = \limsup_{r\longrightarrow 0} \frac{\log \overline{N}_0\left(r,R',\frac{1}{f}\right)}{-\log r}$$

où

$$\overline{N}_0\left(r,R',\frac{1}{f}\right) = \int_r^{R'} \frac{\overline{n}\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt,$$

où $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ *désigne le nombre de zéros distincts de* $f(z)$ *dans la region* $\{z \in \mathbb{C} : t \leq |z| \leq R'\}$ $(0 < R' < R)$,
(2) On définit l'hyper-exposant de convergence des zéros de la fonction f *au voisinage de* 0 *par*

$$\lambda_2(f, 0) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log \log N_0\left(r, R', \frac{1}{f}\right)}{-\log r}$$

et l'hyper-exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f *au voisinage de* 0 *par*

$$\overline{\lambda}_2(f, 0) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log \log \overline{N}_0\left(r, R', \frac{1}{f}\right)}{-\log r}$$

En générale, on peut définir l'exposant n-itératif de convergence des zéros de la fonction f *au voisinage de* 0 *par*

$$\lambda_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log_n N_0\left(r, R', \frac{1}{f}\right)}{-\log(r)};$$

et des zéros distincts par

$$\overline{\lambda}_n(f) = \limsup_{r \longrightarrow 0} \frac{\log_n \overline{N}_0\left(r, R', \frac{1}{f}\right)}{-\log(r)}.$$

Exemple 1.10.3 *L'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction* $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1$ *est égal à* 1. *En effet, on a*

$$e^{\frac{1}{z}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}} = e^{i2k\pi} \Leftrightarrow z = \frac{1}{i2k\pi} = \frac{-i}{2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

et

$$\begin{aligned}
t &\leq |z| \leq R' \Rightarrow t \leq \frac{1}{2|k|\pi} \leq R' \\
&\Rightarrow \frac{1}{2\pi R'} \leq |k| \leq \frac{1}{2\pi t} \\
&\Rightarrow \overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{1}{\pi t},\ t \to 0 \\
&\Rightarrow \overline{N}\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{1}{\pi r},\ r \to 0 \\
&\Rightarrow \overline{\lambda}(f) = 1.
\end{aligned}$$

Définition 1.10.4 *La mesure logarithmique d'un ensemble* $E \subset (0, R)$ *au voisinage du point singulier* 0 *est définie par*

$$\int_E \frac{dr}{r}.$$

Exemple 1.10.4 *La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [a, b]$ au voisinage du point singulier 0 est égale à $\ln \frac{b}{a}$.*

Définition 1.10.5 *[23] Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ une fonction analytique dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Alors, pour tout $|z - z_0| = r > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \frac{1}{r^n} = 0;$$

d'où le terme maximale

$$\mu(r) = \mu(r, f) = \max_{n\geq 0} |a_n| \frac{1}{r^n}$$

est bien défini. On définit l'indice centrale de $f(z)$ par

$$V_{z_0}(r) = V_{z_0}(r, f) = \max_{m\geq 0} \left\{ m : |a_m| \frac{1}{r^m} = \mu(r) \right\}.$$

Lemme 1.10.1 *[23, Theorem 8] Soit f une fonction analytique dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Alors, il existe un ensemble $E \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $j = 0, 1, ..., k$, on a*

$$\frac{f^{(j)}(z_r)}{f(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V_{z_0}(r)}{z_r - z_0} \right)^j,$$

quand $r \to 0$, $r \notin E$, où $V_{z_0}(r)$ est l'indice centrale de f et z_r est un point sur le cercle $|z_0 - z| = r$ qui vérifie $|f(z_r)| = \max\limits_{|z_0-z|=r} |f(z)|$.

1.11 Lemme de décomposition de Valiron

Lemme 1.11.1 *[47, 40] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans la région $D(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ et $R_1 < R' < R_2$. Alors, $f(z)$ peut être écrite sous la forme*

$$f(z) = z^m \phi(z) \mu(z),$$

où
a) Les pôles et les zéros de f dans $D(R_1, R')$ sont précisément les pôles et les zéros de $\phi(z)$. Les pôles et les zéros de f dans $D(R', R_2)$ sont précisément les pôles et zéros de $\mu(z)$.
b) $\phi(z)$ est méromorphe dans $D(R_1, \infty]$ et analytique et non nulle dans $D[R', \infty]$.
c) $\mu(z)$ est méromorphe dans $D(R_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_2\}$ et analytique et non nulle dans $D(R')$.
d) $m \in \mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Croissance et oscillation des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires de second ordre dans un disque épointé

2.1 Introduction et présentation des résultats

L'équation différentielle

$$f'' + A(z)\, e^{az} f' + B(z)\, e^{bz} f = H(z)\,,$$

où $A(z)\,, B(z)\,, H(z)$ sont des fonctions entières a été étudié par plusieurs chercheurs; voir [1, 3, 9, 10, 19, 36, 31, 48]. Dans [17] Fettouch et Hamouda ont étudié la croissance locale au voisinage du point singulier z_0 des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + A(z) \exp\left\{\frac{a}{(z_0 - z)^n}\right\} f' + B(z) \exp\left\{\frac{b}{(z_0 - z)^n}\right\} f = 0,$$

où $A(z)\,, B(z)$ sont des fonctions analytiques dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb\ (0 < c < 1)$. Le cas $c > 1$ a été complété récemment par Cherief et Hamouda dans [12].

Dans ce chapitre, on va étudier la croissance et l'oscillation locales, au voisinage du point singulier $z = 0$, des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + \left(A(z) \exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} + A_0(z)\right) f' + \left(B(z) \exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} + B_0(z)\right) f = F(z)\,,$$

où $A(z)\,, A_0(z)\,, B(z)\,, B_0(z)\,, F(z)$ sont des fonctions analytiques dans $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$ et a, b sont des constantes complexes non nulles. En fait, on a établi les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 *[41] Soient* $A(z) \not\equiv 0, B(z) \not\equiv 0, F(z)$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que* $\max\{\sigma(A,0), \sigma(B,0), \sigma(F,0)\} < n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *; soient* a, b *des constantes complexes telles que* $ab \neq 0$ *and* $a \neq b$*. Alors, toute solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f'' + A(z) \exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} f' + B(z) \exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} f = F(z), \tag{2.1}$$

satisfait $\sigma(f,0) = \infty$*. De plus, si* $F(z) \not\equiv 0$*, on a*

$$\bar{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \sigma(f,0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \sigma_2(f,0) \leq n.$$

Théorème 2.1.2 *[41] Soient* $A(z) \not\equiv 0, A_0(z), B(z) \not\equiv 0, B_0(z), F(z)$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que*

$$\max\{\sigma(A_0,0), \sigma(B_0,0), \sigma(A,0), \sigma(B,0), \sigma(F,0)\} < n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$$

et a, b *sont des constantes complexes telles que* $ab \neq 0$ *et* $a = cb,\ c < 0$*. Alors, chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équations différentielles*

$$f'' + \left(A(z) \exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} + A_0(z)\right) f' + \left(B(z) \exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} + B_0(z)\right) f = F(z), \tag{2.2}$$

satisfait $\sigma(f,0) = \infty$*. De plus, si* $F(z) \not\equiv 0$*, on a*

$$\bar{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \sigma(f,0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \sigma_2(f,0) \leq n.$$

Théorème 2.1.3 *[41] Soient* $A(z) \not\equiv 0, B(z) \not\equiv 0, F(z) \not\equiv 0$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que* $\max\{\sigma(A,0), \sigma(B,0), \sigma(F,0)\} < n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et* $P(z) \not\equiv 0, Q(z) \not\equiv 0$ *sont des polynômes. Soient* a, b *des nombres complexes tels que* $ab \neq 0, a \neq b$*. Alors, chaque solution* f *des équations différentielles*

$$f'' + P\left(\frac{1}{z}\right) \exp\{\frac{a}{z^n}\} f' + B(z) \exp\{\frac{b}{z^n}\} f = F(z) \exp\{\frac{a}{z^n}\}, \tag{2.3}$$

$$f'' + A(z) \exp\{\frac{a}{z^n}\} f' + Q(\frac{1}{z}) \exp\{\frac{b}{z^n}\} f = F(z) \exp\{\frac{b}{z^n}\} \tag{2.4}$$

satisfait

$$\bar{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \sigma(f,0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \sigma_2(f,0) \leq n$$

Si certaines conditions des théorèmes précédents ne sont pas satisfaites, les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) pourraient avoir des solutions d'ordre fini comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 2.1.1 *La fonction* $g(z) = \exp\left\{\frac{1}{z}\right\}$ *d'ordre* $\sigma(g,0) = 1$ *satisfait les équations différentielles*

$$f'' - \exp\left\{\frac{-1}{z}\right\} f' - \frac{1}{z^2}\exp\left\{\frac{-1}{z}\right\} f = \left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)\exp\left\{\frac{-1}{z}\right\},$$

$$f'' - \exp\left\{\frac{-1}{z}\right\} f' - \left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right) f = \frac{1}{z^2},$$

$$f'' + \exp\left\{\frac{-1}{z}\right\} f' + \left(\frac{1}{z^2}\exp\left\{\frac{-1}{z}\right\} - \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) f = 0.$$

Exemple 2.1.2 *La fonction* $h(z) = \frac{1}{z}$ *d'ordre* $\sigma(h,0) = 0$ *satisfait l'équation différentielle*

$$f'' - \exp\{\frac{a}{z^n}\}f' - \frac{1}{z^2}\exp\{\frac{b}{z^n}\}f = \frac{1}{z^2}\exp\{\frac{a}{z^n}\} - \frac{1}{z^3}\exp\{\frac{b}{z^n}\} + \frac{2}{z^3},$$

où a, b $(ab \neq 0)$ *sont des nombres complexes arbitraires.*

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 *[24] Soit* f *une fonction méromorphe non constante dans* $D(0,R)$ *avec un point singulier à l'origine, d'ordre fini :* $\sigma(f,0) = \sigma < \infty$*; soient* $\varepsilon > 0$ *une constante et* k *un entier positif. Alors les deux affirmations suivantes sont vraies.*
i) Il existe un ensemble $F \subset (0,R)$ *de mesure logarithmique finie* $\int_F \frac{dr}{r} < \infty$ *telle que pour tout* $r = |z|$ *satisfaisant* $r \in (0,R) \backslash F$*, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1}{r^{k(\sigma+1)+\varepsilon}}. \tag{2.5}$$

ii) Il existe un ensemble $E \subset [0,2\pi)$ *de mesure linéaire nulle telle que pour tout* $\theta \in [0,2\pi) \backslash E$ *il existe une constante* $r_0 = r_0(\theta) > 0$ *telle que pour tout* z *satisfaisant* $\arg(z) \in [0,2\pi) \backslash E$ *et* $r = |z| < r_0$ *l'inégalité (2.5) est vraie.*

Lemme 2.2.2 *[24] Soit* $A(z)$ *une fonction analytique non constante dans* $D(0,R)$ *avec* $\sigma(A,0) < n$*. Posons* $g(z) = A(z)\exp\left\{\dfrac{a}{z^n}\right\}$*, (*$n \geq 1$ *est un entier),* $a = \alpha + i\beta \neq 0$*,* $z = re^{i\varphi}$*,* $\delta_a(\varphi) = \alpha\cos(n\varphi) + \beta\sin(n\varphi)$ *et* $E = \{\varphi \in [0,2\pi) : \delta_a(\varphi) = 0\}$*, (évidemment,* E *est de mesure linéaire nulle). Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $\varphi \in [0,2\pi) \backslash E$*, il existe* $r_0 > 0$ *tel que pour* $0 < r < r_0$*, les deux affirmations suivantes sont vraies.*
(i) Si $\delta_a(\varphi) > 0$*, alors*

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{r^n}\right\} \leq |g(z)| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{r^n}\right\}. \tag{2.6}$$

(ii) Si $\delta_a(\varphi) < 0$, *alors*

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\} \leq |g(z)| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta_a(\varphi)\,\frac{1}{r^n}\right\}. \tag{2.7}$$

Lemme 2.2.3 *Soit* $f(z)$ *une fonction analytique dans* $D(0,R)$ *et supposons que*

$$G(z) := |z^\rho| \log^+ \left|f^{(k)}(z)\right|$$

est non-bornée lorsque $z \to 0$ *sur un rayon* $\arg z = \theta$, *où* $\rho > 0$. *Alors il existe une suite infinie de points* $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, *telle que* $G(z_m) \to +\infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq M,\ (M>0)\,(j = 0, 1, ..., k-1),$$

quand $m \to +\infty$.

Preuve

Soit $M(r,\theta,G)$ désigne le module maximal de $G(z)$ sur le segment de droite $\left[r_1 e^{i\theta}, re^{i\theta}\right]$. Clairement, on peut construire une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, telle que $M(r,\theta,G) = G(z_m) \to +\infty$. Puisque $G(z_m) \to +\infty$ quand $r_m \to 0$, alors $\left|f^{(k)}(z_m)\right| \to +\infty$. Pour chaque m, par intégration itérative $(k-j)$ fois le long du segment de droite $[z_1, z_m]$, on obtient

$$f^{(j)}(z_m) = f^{(j)}(z_1) + f^{(j+1)}(z_1)(z_m - z_1) + ..$$

$$.. + \frac{1}{(k-j-1)!} f^{(k-1)}(z_1)(z_m - z_1)^{k-j-1} + \int_{z_1}^{z_m} ... \int_{z_1}^{y} f^{(k)}(x)\,dxdy...dt;$$

et par une estimation élémentaire de l'inégalité triangulaire, nous obtenons

$$\left|f^{(j)}(z_m)\right| \leq \left|f^{(j)}(z_1)\right| + \left|f^{(j+1)}(z_1)\right| |(z_m - z_1)| + ..$$

$$.. + \frac{1}{(k-j-1)!}\left|f^{(k-1)}(z_1)\right| |(z_m - z_1)|^{k-j-1} + \frac{1}{(k-j)!}\left|f^{(k)}(z_m)\right| |(z_m - z_1)|^{k-j}. \tag{2.8}$$

D'après (2.8) et en tenant compte du fait que lorsque $m \to +\infty$, $f^{(k)}(z_m) \to +\infty$, $z_m \to 0$, on obtient

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq M,\ (M>0).$$

Lemme 2.2.4 *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe non constante dans* $D(0,R)$. *Alors* $\sigma\left(f^{(j)}, 0\right) = \sigma(f, 0)$, $(j = 1, 2, ...)$.

Preuve

Il suffit de montrer que $\sigma(f',0) = \sigma(f,0)$. Du lemme de décomposition de Valiron, on a $f(z) = z^m \phi(z)\mu(z)$, où

a) Les pôles et les zéros de f dans $D(0,R')$ sont précisément les pôles et les zéros de $\phi(z)$. Les pôles et les zéros de f dans $D(R',R)$ sont précisément les pôles et zéros de $\mu(z)$.

b) $\phi(z)$ est méromorphe dans $D(0,\infty]$ et analytique et non nulle dans $D[R',\infty]$.

c) $\mu(z)$ est méromorphe dans $D(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ et analytique et non nulle dans $D(R')$.

d) $m \in \mathbb{Z}$.

Posons $\tilde{\phi}(z) = z^m \phi(z)$. Comme $\mu(z)$est analytique en zéro, il s'ensuit que $T_0(r,f) = T_0\left(r,\tilde{\phi}\right) + O(1)$; et alors $\sigma(f,0) = \sigma\left(\tilde{\phi},0\right)$. Puisque $\tilde{\phi}(z)$ est méromorphe dans $D(0,\infty]$, la fonction $g(w) = \tilde{\phi}\left(\frac{1}{w}\right)$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et $\sigma(g) = \sigma\left(\tilde{\phi},0\right)$. Il est bien connu que pour une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ on a $\sigma(g') = \sigma(g)$, (voir [50, 45]). On a $\tilde{\phi}'(z) = \frac{1}{w^2} g'(w)$. Évidemment, nous avons $\sigma\left(\frac{1}{w^2} g'(w)\right) = \sigma(g')$, et alors $\sigma(g') = \sigma\left(\tilde{\phi}',0\right)$. Alors, on obtient $\sigma\left(\tilde{\phi}',0\right) = \sigma\left(\tilde{\phi},0\right)$. D'autre part, on a

$$f'(z) = \tilde{\phi}'(z)\mu(z) + \tilde{\phi}(z)\mu'(z). \tag{2.9}$$

Comme $\mu(z)$ est analytique en zéro, alors $\sigma(\mu,0) = 0$. D'après (2.9) et puisque $\sigma\left(\tilde{\phi}',0\right) = \sigma\left(\tilde{\phi},0\right)$, on obtient

$$\sigma(f',0) \leq \sigma\left(\tilde{\phi}',0\right).$$

Pour l'inégalité inverse, on a

$$\tilde{\phi}'(z) = \frac{f'(z)\mu(z) - f(z)\mu'(z)}{\mu^2(z)};$$

et alors

$$\sigma\left(\tilde{\phi}',0\right) \leq \max\{\sigma(f',0), \sigma(f,0)\};$$

en tenant compte que $\sigma(f,0) = \sigma\left(\tilde{\phi},0\right) = \sigma\left(\tilde{\phi}',0\right)$, on obtient

$$\sigma\left(\tilde{\phi}',0\right) \leq \sigma(f',0).$$

Ainsi, nous concluons que

$$\sigma(f',0) = \sigma(f,0).$$

Lemme 2.2.5 *Soit f une fonction analytique dans $D(0,R)$ d'ordre fini $\sigma(f,0) = \sigma$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que*

$$\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{M}{r^\alpha}$$

pour toute $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$ où M est une constante positive dépendant de θ, tandis que α est une constante positive indépendante de θ. Alors $\sigma(f, 0) \leq \alpha$.

Preuve

Du lemme de décomposition de Valiron, on a $f(z) = z^m \phi(z) \mu(z)$ avec les propriétés a)-d) citées dans la preuve du Lemme 2.2.4. Posons $\tilde{\phi}(z) = z^m \phi(z)$. Comme dans la preuve du Lemme 2.2.4, on a $\sigma(f, 0) = \sigma\left(\tilde{\phi}, 0\right)$. Si $\sigma(f, 0) = 0$, il n'y a rien à prouver; on peut donc supposer que $\sigma(f, 0) = \sigma > 0$; et alors $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| > 1$ pour r suffisamment petit. Nous avons

$$\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = \log\left|\tilde{\phi}\left(re^{i\theta}\right)\right| + \log\left|\mu\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{M}{r^\alpha}. \tag{2.10}$$

Puisque $\mu(z)$ est analytique non nulle dans $D(R')$, $\log\left|\mu\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée au voisinage de zéro; et alors d'après (2.10), pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$ il existe $M' > 0$, tel que

$$\log\left|\tilde{\phi}\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{M'}{r^\alpha}. \tag{2.11}$$

Puisque $\tilde{\phi}(z)$ est analytique dans $D(0, \infty]$, par le changement de variable $z = \frac{1}{w}$ la fonction $g(w) = \tilde{\phi}\left(\frac{1}{w}\right)$ est entière et $\sigma(g) = \sigma\left(\tilde{\phi}, 0\right) = \sigma$. De (2.11), on a

$$\log\left|g\left(Re^{i\varphi}\right)\right| \leq M' R^\alpha.$$

De [49, Lemma 2.6.], on en déduit que $\sigma \leq \alpha$.

Lemme 2.2.6 *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z), H(z)$ des fonctions analytiques dans $D(0, R)$ telles que*

$$\max\{\sigma(A_0, 0), ..., \sigma(A_{k-1}, 0), \sigma(H, 0)\} = \alpha < \infty. \tag{2.12}$$

Si f est une solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = H(z), \tag{2.13}$$

alors $\sigma_2(f, 0) \leq \alpha$.

Preuve

Du lemme de décomposition de Valiron, nous avons $f(z) = z^m \phi(z) \mu(z)$ avec les propriétés a)-d) citées dans la preuve du Lemme2.2.4. Posons $\tilde{\phi}(z) = z^m \phi(z)$. Comme dans la preuve du Lemme 2.2.4, on a $\sigma(f, 0) = \sigma\left(\tilde{\phi}, 0\right)$. Puisque $f(z)$ est une fonction analytique dans $D(0, R)$, $\tilde{\phi}(z)$ est analytique dans $D(0, \infty]$. D'après [24, Theorem 8], il existe un ensemble $E \subset (0, 1)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout $j = 0, 1, ..., k$, on a

$$\frac{\tilde{\phi}^{(j)}(z_r)}{\tilde{\phi}(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V_0(r)}{z_r}\right)^j, \tag{2.14}$$

quand $r \to 0,\ r \notin E$, où $V_0(r)$ est l'indice central de $\tilde{\phi}$ au voisinage du point singulier 0, z_r est un point du cercle $|z| = r$ qui satisfait $\left|\tilde{\phi}(z_r)\right| = \max_{|z|=r} \left|\tilde{\phi}(z)\right|$. Puisque $\mu(z)$ est analytique et non nulle dans $D(R')$, on a

$$\left|\frac{\mu^{(j)}(z)}{\mu(z)}\right| \leq M,\ (j = 1, ..., k). \tag{2.15}$$

On a $f(z) = \tilde{\phi}(z)\,\mu(z)$, et alors

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \sum_{i=0}^{i=j} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{\tilde{\phi}^{(j-i)}(z)}{\tilde{\phi}(z)} \frac{\mu^{(i)}(z)}{\mu(z)},\ j = 1, ..., k, \tag{2.16}$$

où $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$ est le coefficient binomial. D'après (2.13), nous avons

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = -A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} - \cdots - A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)} - A_0(z) + \frac{H(z)}{f(z)}. \tag{2.17}$$

Si $\sigma(f, 0) < \infty$, alors le résultat est trivial : $\sigma_2(f, 0) = 0 \leq \alpha$. On peut donc supposer que $\sigma(f, 0) = \infty$. Puisque $\sigma(H, 0) < \infty$, on a

$$\left|\frac{H(z_r)}{f(z_r)}\right| = o(1),\ r \to 0. \tag{2.18}$$

Posons $M_0(r) = \max_{|z|=r} \{|A_j(z)| : j = 0, 1, ..., k-1\}$. En combinant (2.14), (2.15), (2.16) et (2.18) avec (2.17), on obtient

$$(V_0(r))^k \leq \frac{C}{r^{k-1}} (V_0(r))^{k-1} M_0(r),\ r \to 0,$$

où $C > 0$, et alors

$$V_0(r) \leq \frac{C}{r^{k-1}} M_0(r). \tag{2.19}$$

D'après (2.19), on obtient $\sigma_2(f, 0) \leq \alpha$.

Du Lemme 1.6.1 de la dérivée logarithmique pour les fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ nous pouvons prouver sa nouvelle version dans $D(0, R)$ comme suit.

Lemme 2.2.7 *Soit f une fonction méromorphe non constante dans $D(0, R)$, et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$m_0\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log T_0(r, f) + \log \frac{1}{r}\right),$$

pour tout $r \in (0, R) \setminus E$, où $\int_E \frac{dr}{r} < \infty$.

Preuve

Du lemme de la décomposition de Valiron, on a $f(z) = z^m \phi(z) \mu(z)$ avec les propriétés a)-d) citées dans la preuve du Lemme 2.2.4. Posons $\tilde{\phi}(z) = z^m \phi(z)$. Par la propriété b) la fonction $\tilde{\phi}(z)$ est méromorphe dans $D(0,\infty]$. D'après [15, Lemma 13], on a

$$m_0\left(r, \frac{\tilde{\phi}^{(k)}}{\tilde{\phi}}\right) = O\left(\log T_0\left(r, \tilde{\phi}\right) + \log \frac{1}{r}\right), \tag{2.20}$$

pour tout $r \in (0,R) \setminus E$, où $\int_E \frac{dr}{r} < \infty$. Puisque $\mu(z)$ est analytique en zéro, il est clair que

$$T_0(r,f) = T_0\left(r, \tilde{\phi}\right) + O(1). \tag{2.21}$$

D'après (2.16), (2.20) et (2.21), il existe un ensemble E de mesure logarithmique finie tel que pour tout $r \in (0,R) \setminus E$, on a

$$m_0\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log T_0(r,f) + \log \frac{1}{r}\right).$$

Lemme 2.2.8 *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_{k-1}(z), F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes dans $D(0,R)$ d'ordre fini au voisingage de zéro. Si $f(z)$ est une solution méromorphe dans $D(0,R)$ de (2.13) avec $\sigma(f,0) = \infty$ et $\sigma_2(f,0) = \alpha$, alors f satisfait*

$$\bar{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \rho(f,0) = +\infty, \ \bar{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \rho_2(f,0) = \alpha.$$

Preuve

A partir de (2.13), on peut écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_0\right). \tag{2.22}$$

Si f a un zéro en $z_0 \in D(0,R)$ d'ordre $\alpha > k$, alors H doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha - k$. Ainsi,

$$n_0\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\overline{n}_0\left(r, \frac{1}{f}\right) + n_0\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} n_0(r, A_j);$$

ce qui impliue

$$N_0\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N_0(r, A_j). \tag{2.23}$$

D'après (2.22), nous avons

$$m_0\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} m_0\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m_0(r, A_j) + m_0\left(r, \frac{1}{F}\right) + O(1). \tag{2.24}$$

D'après le lemme 2.2.7, nous avons

$$m_0\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O\left(\log T_0(r,f) + \log\frac{1}{r}\right) \quad (j = 1, ..., k-1) \tag{2.25}$$

ce qui est valable pour tout $r \in (0,R) \setminus E$ où E est de mesure logarithmique finie. D'après (2.23), (2.24) et (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} T_0(r,f) &= T_0\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq k\overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} T_0(r, A_j) + T_0(r,F) + \\ &\quad + O\left(\log T_0(r,f) + \log\frac{1}{r}\right), \ r \notin E \end{aligned} \tag{2.26}$$

De (2.26) et en tenant en compte que $O\left(\log T_0(r,f) + \log\frac{1}{r}\right) \leq \frac{1}{2}T_0(r,f)$, on obtient

$$\frac{1}{2}T_0(r,f) \leq k\overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} T_0(r, A_j) + T_0(r,F). \tag{2.27}$$

D'après (2.27), nous avons

$$\sigma_n(f,0) \leq \max\left\{\overline{\lambda}_n(f,0), \sigma_n(A_j,0), \sigma_n(H,0)\right\} \ (n = 1,2).$$

De l'hypothèse on a

$$\max\{\sigma_n(F,0), \sigma_n(A_j,0); j = 0,1,...,k-1\} < \sigma_n(f,0);$$

d'où $\sigma_n(f,0) \leq \overline{\lambda}_n(f,0) \ (n = 1,2)$. Donc $\overline{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \sigma(f,0) = +\infty$ et $\overline{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \sigma_2(f,0) = \alpha$.

Il est facile de prouver le lemme suivant.

Lemme 2.2.9 *Soit $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ $(a_n \neq 0)$ un polynôme et $A(z) = P\left(\frac{1}{z}\right)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r = |z| \leq r_0$, on a les inégalités suivantes*

$$(1-\varepsilon)\frac{|a_n|}{r^n} \leq |A(z)| \leq (1+\varepsilon)\frac{|a_n|}{r^n}.$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

Il est clair que toutes les solutions de (2.1) sont analytiques en $D(0,R)$. Nous prouvons d'abord que toute solution f de (2.3) satisfait $\sigma(f,0) \geq n$. On suppose que $\sigma(f,0) < n$, et on prouve que cela mène à une contradiction. D'aprés le Lemme 2.2.4, nous avons $\sigma(f',0) = \sigma(f'',0) = \sigma(f,0) < n$. À partir de (2.1) on a

$$A_1(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}f' + A_0(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}f = F(z) - f''. \tag{2.28}$$

En utilisant les propriétés de l'ordre de croissance, on aura

$$\sigma\left(A_1(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}f' + A_0(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}f, 0\right) = n;$$

d'autre part,

$$\sigma(F(z) - f'', 0) < n;$$

ce qui fait une contradiction avec (2.28). Donc $\sigma(f,0) \geq n$. Maintenant, on prouve que $\sigma(f,0) = +\infty$. On suppose au contraire que $\sigma(f,0) < +\infty$. Posons $\sigma(F,0) = \alpha < n$, alors pour tout ε donné tel que $0 < 2\varepsilon < n - \alpha$ et r suffisamment petit, on a

$$|F(z)| \leq \exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}. \tag{2.29}$$

Puisque $a \neq b$, il est clair que l'ensemble E_1 de $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ tel que $\delta_a(\theta) = 0, \delta_b(\theta) = 0$ et $\delta_a(\theta) = \delta_b(\theta)$ est de mesure linéaire nulle, où $\delta_a(\theta)$ est défini dans le Lemme 2.2.2. D'après le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_2 \in [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$, alors il existe une constante $r_0(\theta) < R'$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta$ et $|z| < r_0(\theta)$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \frac{1}{r^{2\sigma+3}}, \ (0 \leq j \leq k \leq 2). \tag{2.30}$$

Posons $\delta_1 = \max\{\delta_a(\theta), \delta_b(\theta)\}$ et $\delta_2 = \min\{\delta_a(\theta), \delta_b(\theta)\}$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$ fixé, il existe trois cas:

Cas 1. $\delta_1 = \delta_a(\theta) > 0$. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on obtient

$$\left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \geq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.31}$$

Montrons maintenant que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f'(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. On suppose au contraire que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f'(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et on montre que cela conduit à une contradiction. Alors par le Lemme 2.2.3, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f'(z_m)| \to +\infty \tag{2.32}$$

et

$$\left|\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\right| \leq M_1,\ (M_1 > 0), \tag{2.33}$$

quand $m \to +\infty$. De (2.32), pour tout $c > 1$ on a

$$r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ |f'(z_m)| > c;$$

alors, en prenant $c = 2$, on obtient

$$|f'(z_m)| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m \to +\infty. \tag{2.34}$$

De (2.29), et (2.34), on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f'(z_m)}\right| < \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\} \to 0,\ m \to +\infty. \tag{2.35}$$

A partir de (2.1), on peut écrire

$$\left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \leq \left|\frac{f''}{f'}\right| + \left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f}{f'}\right| + \left|\frac{F(z)}{f'}\right|. \tag{2.36}$$

Puisque $\delta_b(\theta) = \delta_2 < \delta_1$ et $\sigma(B,0) < n$, pour $0 < 2\varepsilon < \min\left\{1, 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right\}$, on a

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\},\ r \to 0. \tag{2.37}$$

En utilisant (2.31), (2.33), (2.35), (2.30) et (2.37) dans (2.36), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq \frac{M_1}{r_m^{2\sigma+3}} \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\},$$

quand $r \to 0$, où $M_1 > 0$ est une constante; et alors

$$r_m^{2\sigma+3} \exp\left\{\frac{\varepsilon\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq M_1. \tag{2.38}$$

Une contradiction dans (2.38) lorsque $m \to +\infty$. Alors $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et on obtient

$$|f'(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_1 > 0. \tag{2.39}$$

Par intégration le long du segment de droite $[z_0, z]$, où $\arg z_0 = \arg z = \theta$ et $0 < |z| < |z_0|$, on obtient

$$f(z) = f(z_0) + \int_{z_0}^{z} f'(u)\,du; \tag{2.40}$$

et en utilisant (2.39), nous obtenons

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| + |z_0| \exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_1 > 0. \tag{2.41}$$

D'après (2.41), quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_1'}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_1' > C_1. \tag{2.42}$$

Cas 2. $\delta_1 = \delta_b(\theta) > 0$. D'après le lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \geq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.43}$$

Maintenant, nous prouvons que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Nous supposons que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$; alors, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f(z_m)| \to +\infty; \tag{2.44}$$

ce qui implique que pour tout $c > 1$ on a

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f(z_m)| > c;$$

et pour $c = 2$, on a

$$|f(z_m)| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m \to +\infty. \tag{2.45}$$

De (2.29) et (2.45), nous obtenons

$$\left|\frac{F(z_m)}{f(z_m)}\right| < \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\} \to 0,\ m \to +\infty. \tag{2.46}$$

A partir de (2.1), on peut écrire

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \leq \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| + \left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{2.47}$$

Puisque $\delta_a(\theta) = \delta_2 < \delta_1$, pour $0 < 2\varepsilon < \min\left\{1, 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right\}$, on a

$$\left|\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\},\ r \to 0. \tag{2.48}$$

En combinant (2.43), (2.30), (2.46) et (2.48) avec (2.47), nous avons

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq \frac{M_2}{r_m^{2\sigma+3}}\exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\},$$

quand $r \to 0$, où $M_2 > 0$ est une constante, et donc

$$\exp\left\{\frac{\varepsilon\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq \frac{M_2}{r_m^{2\sigma+3}}. \tag{2.49}$$

(2.49) conduit à une contradiction lorsque $m \to +\infty$. Donc $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et donc, quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on a

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_2}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ C_2 > 0. \tag{2.50}$$

Cas 3. $\delta_1 < 0$. A partir de (2.1), on peut écrire

$$1 \leq \left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \left|\frac{f'(z)}{f''(z)}\right| + \left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \left|\frac{f(z)}{f''(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f''(z)}\right|. \tag{2.51}$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ donné, on a

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\} \tag{2.52}$$

et

$$\left|\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.53}$$

Maintenant, on prouve $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f''(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. On suppose que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f''(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$; puis par le Lemme 2.2.3, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ |f''(z_m)| \to +\infty, \tag{2.54}$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f''(z_m)}\right| \leq M_2, \ (M_2 > 0) \ (j = 0, 1). \tag{2.55}$$

quand $m \to +\infty$. D'aprés (2.54), pour tout $c > 1$ on a

$$r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ |f''(z_m)| > c;$$

d'où

$$|f''(z_m)| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ m \to +\infty. \tag{2.56}$$

De (2.29) et (2.56), on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f''(z_m)}\right| < \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\} \to 0, \ m \to +\infty. \tag{2.57}$$

En combinant (2.30), (2.52), (2.53), (2.55) et (2.57) avec (2.51), on obtient

$$1 \leq 2M_2 \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\,\delta_1}{r_m^n}\right\} + \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\} \to 0,\ m \to +\infty; \tag{2.58}$$

une contradiction; alors $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f''(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Comme ci-dessus quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_3}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_3 > 0. \tag{2.59}$$

Maintenant, nous avons prouvé (2.59) sur tout rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$ quand $|z| = r \to 0$. D'après le lemme 2.2.5, on obtient $\sigma(f, 0) \leq \alpha$; ce qui est une contradiction avec $\alpha < n$ et $\sigma(f, 0) \geq n$; donc on conclut que toute solution f de (2.1) est d'ordre infini.

Maintenant nous avons

$$\max\left\{\sigma\left(A\exp\{\frac{a}{z^n}\}, 0\right), \sigma\left(B(z)\exp\{\frac{b}{z^n}\}, 0\right), \sigma\left(F(z)\exp\{\frac{a}{z^n}\}, 0\right)\right\} = n;$$

et en appliquant le lemme 2.2.6, on obtient $\sigma_2(f, 0) \leq n$. Puisque $F(z) \not\equiv 0$, d'après le lemme 2.2.8, on obtient

$$\bar{\lambda}(f, 0) = \lambda(f, 0) = \sigma(f, 0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f, 0) = \lambda_2(f, 0) = \sigma_2(f, 0) \leq n.$$

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

Premièrement, nous montrons que toute solution f de (2.2) satisfait $\sigma(f, 0) \geq n$. On suppose que $\sigma(f, 0) < n$, et nous prouvons que cela échoue. D'après le Lemme 2.2.4, on a $\sigma(f', 0) = \sigma(f'', 0) = \sigma(f, 0) < n$. A partir de (2.2) on peut écrire

$$A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} f' + B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} f = F(z) - f'' - A_0(z) f' - B_0(z) f \tag{2.60}$$

Par les propriétés de l'ordre de croissance et puisque $a \neq b$, on a

$$\sigma\left(A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} f' + B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} f, 0\right) = n$$

et

$$\sigma\left(F(z) - f'' - A_0(z) f' - B_0(z) f, 0\right) < n;$$

une contradiction dans (2.60). Donc $\sigma(f, 0) \geq n$. Maintenant, nous prouvons que $\sigma(f, 0) = +\infty$. On suppose au contraire que $\sigma(f, 0) < +\infty$. Posons

$$\max\{\sigma(B_0, 0), \sigma(A_0, 0), \sigma(F, 0)\} = \alpha < n$$

alors pour tout ε donné tel que $0 < 2\varepsilon < n - \alpha$ et r suffisamment petite, on a

$$\max\left\{\left|A_0(z)\right|, \left|B_0(z)\right|\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}. \tag{2.61}$$

Il est clair que l'ensemble E_3 de $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ tel que $\delta_a(\theta) = 0, \delta_b(\theta) = 0$ est de mesure linéaire nulle. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_2)$ fixé, il existe deux cas:

Cas 1. $\delta = \delta_a(\theta) > 0$. Nous allons prouver que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est bornée sur rayon $\arg(z) = \theta$. On suppose au contraire que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Alors d'après le lemme 2.2.3, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, telles que nous avons (2.32) et (2.33); alors, on a (2.35). A partir de (2.2), on peut écrire

$$\left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}\right| \leq \left|\frac{f''}{f'}\right| + |A_0(z)| + \left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} + B_0(z)\right|\left|\frac{f}{f'}\right| + \left|\frac{F(z)}{f'}\right|. \tag{2.62}$$

Puisque $\delta_b(\theta) = \frac{1}{c}\delta < 0$ et $\sigma(B, 0) < n$, d'après le Lemme 2.2.2, pour toute $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta}{r^n}\right\},\ r \to 0. \tag{2.63}$$

En utilisant (2.31), (2.33), (2.35), (2.30), (2.63) et (2.61) dans (2.62),on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta}{r_m^n}\right\} \leq \frac{M_1}{r_m^{2\sigma+3}}\exp\left\{\frac{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta}{r_m^n}\right\}, \tag{2.64}$$

quand $r \to 0$, où $M_1 > 0$ est une constante; une contradiction si on prend $0 < \varepsilon < 1$: le côté droit de (2.64) tend vers 0 lorsque $m \to +\infty$ tandis que le côté gauche tend vers $+\infty$. Donc $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et on obtient

$$|f'(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_1 > 0;$$

et alors, comme ci-dessus dans la preuve du théoréme 2.1.1, on obtient

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C > 0. \tag{2.65}$$

Cas 2. $\delta_b(\theta) = \frac{1}{c}\delta > 0$; (dans ce cas $\delta < 0$). On prouve que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. On suppose que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. À partir de (2.2), on peut écrire

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}\right| \leq \left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| + \left|A(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} + A_0(z)\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + B_0(z) + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{2.66}$$

Par Lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\left| B(z) \exp\left\{ \frac{b}{z^n} \right\} \right| \geq \exp\left\{ \frac{(1-\varepsilon)\frac{1}{c}\delta}{r^n} \right\} \tag{2.67}$$

et

$$\left| B(z) \exp\left\{ \frac{b}{z^n} \right\} \right| \leq \exp\left\{ \frac{(1+\varepsilon)\delta}{r^n} \right\}. \tag{2.68}$$

En combinant (2.30), (2.46), (2.61), (2.67) et (2.68) avec (2.47), on obtient

$$\exp\left\{ \frac{(1-\varepsilon)\frac{1}{c}\delta}{r_m^n} \right\} \leq \frac{M_2}{r^{2\sigma+3}} \exp\left\{ \frac{(1+\varepsilon)\delta}{r_m^n} \right\}, \tag{2.69}$$

quand $r \to 0$, où $M_2 > 0$ est une constante. L'inégalité (2.69) conduit à une contradiction quand $m \to +\infty$. Donc $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et alors, quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_2)$, on a

$$|f(z)| \leq \exp\left\{ \frac{C}{r^{\alpha+\varepsilon}} \right\}, \; C > 0. \tag{2.70}$$

Nous avons prouvé (2.70) sur tout rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_3 \cup E_2)$ quand $|z| = r \to 0$. D'après le lemme 2.2.5, on obtient $\sigma(f, 0) \leq \alpha$; ce qui est une contradiction avec $\alpha < n$ et $\sigma(f, 0) \geq n$; donc nous concluons que toute solution f of (2.2) est d'ordre infini. Maintenant, en appliquant le lemme 2.2.6 à l'équation (2.2), nous obtenons $\sigma_2(f, 0) \leq n$. De plus, puisque $F(z) \not\equiv 0$, d'après le lemme 2.2.8, on obtient

$$\bar{\lambda}(f,0) = \lambda(f,0) = \sigma(f,0) = +\infty, \; \bar{\lambda}_2(f,0) = \lambda_2(f,0) = \sigma_2(f,0) \leq n.$$

2.5 Preuve du Théorème 2.1.3

On prouve les résultats pour les solutions de (2.3) et on peut utiliser la même méthode pour (2.4). Premièrement, on prouve que toute solution f de (2.3) satisfait $\sigma(f, 0) \geq n$. On suppose que $\sigma(f, 0) < n$, et on prouve que celà mène à une contradiction. D'après le lemme 2.2.4, on a $\sigma(f', 0) = \sigma(f'', 0) = \sigma(f, 0) < n$. De (2.3) nous pouvons écrire

$$\exp\left\{ \frac{-a}{z^n} \right\} f'' + B(z) \exp\left\{ \frac{b-a}{z^n} \right\} f = F(z) - P\left(\frac{1}{z} \right) f'. \tag{2.71}$$

Par les propriétés de l'ordre de croissance et puisque $-a \neq b - a$, on a

$$\sigma\left(\exp\left\{ \frac{-a}{z^n} \right\} f'' + B(z) \exp\left\{ \frac{b-a}{z^n} \right\} f, 0 \right) = n$$

et

$$\sigma\left(F(z)-P\left(\frac{1}{z}\right)f',0\right)<n;$$

une contradiction avec (2.71). Donc $\sigma(f,0)\geq n$. Maintenant, nous prouvons que $\sigma(f,0)=+\infty$. Nous supposons au contraire que $\sigma(f,0)<+\infty$. Posons $\sigma(F,0)=\alpha<n$. Alors pour tout ε donné tel que $0<2\varepsilon<n-\alpha$ et r suffisamment petit, nous avons

$$|F(z)|\leq\exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}. \tag{2.72}$$

Puisque $-a\neq b-a$, il est clair que l'ensemble E_1 de $\theta=\arg(z)\in[0,2\pi)$ tel que $\delta_{-a}(\theta)=0,\delta_{b-a}(\theta)=0$ et $\delta_{-a}(\theta)=\delta_{b-a}(\theta)$ est de mesure linéaire nulle. D'aprés le Lemme 2.2.1, il existe un ensemble $E_2\in[0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que si $\theta\in[0,2\pi)\setminus E_2$, alors il existe une constante $r_0(\theta)<R'$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z)=\theta$ et $|z|<r_0(\theta)$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq\frac{1}{r^{2\sigma+3}},\ (0\leq j\leq k\leq 2). \tag{2.73}$$

Posons $\delta_1=\max\{\delta_{-a}(\theta),\delta_{b-a}(\theta)\}$ et $\delta_2=\min\{\delta_{-a}(\theta),\delta_{b-a}(\theta)\}$. Pour tout $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_2)$ fixé, il existe trois cas:

Cas 1. $\delta_1=\delta_{-a}(\theta)>0$. D'aprés le Lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon>0$ donné, on obtient

$$\left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right|\geq\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.74}$$

Maintenant, on prouve que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f''(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z)=\theta$. Nous supposons au contraire que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f''(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z)=\theta$ et nous prouvons que cela conduit à une contradiction. Alors d'après le Lemme 2.2.3, il existe une suite de points $z_m=r_me^{i\theta}\ (m\geq 1),\ r_m\to 0$, telle que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f''(z_m)|\to+\infty \tag{2.75}$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f''(z_m)}\right|\leq M_1,\ (M_1>0)\ (j=0,1), \tag{2.76}$$

quand $m\to+\infty$. De (2.75) pour tout $c>1$ nous avons

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f''(z_m)|>c;$$

alors pour $c=2$, on a

$$|f''(z_m)|>\exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m\to+\infty. \tag{2.77}$$

De (2.72) et (2.77), on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f''(z_m)}\right|<\exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m\to+\infty. \tag{2.78}$$

A partir de (2.3), on peut écrire

$$\left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right| \leq \left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right|\left|\frac{f'(z)}{f''(z)}\right| + \left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z)}{f''(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f''(z)}\right|. \quad (2.79)$$

Puisque $\delta_{b-a}(\theta) = \delta_2 < \delta_1$ et $\sigma(B,0) < n$, pour $0 < 2\varepsilon < \min\left\{1, 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right\}$, on a

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}, \ r \to 0. \quad (2.80)$$

D'aprés le lemme 2.2.9, il existe $\lambda > 0$ tel que pour r suffisamment petit, on a

$$\left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{\lambda}{r_m^d}, \ d = \deg P. \quad (2.81)$$

En utilisant (2.74), (2.76), (2.78), (2.80) et (2.81) dans (2.79), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq M_1\frac{\lambda}{r_m^d}\exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\},$$

quand $r \to 0$; et puis

$$r_m^d \exp\left\{\frac{\varepsilon\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq M_1\lambda. \quad (2.82)$$

Une contradiction dans (2.82) quand $m \to +\infty$. Donc $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f''(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et on obtient

$$|f''(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ C_1 > 0. \quad (2.83)$$

Par intégration deux fois, le long du segment de droite $[z_0, z]$, où $\arg z_0 = \arg z = \theta$ et $0 < |z| < |z_0|$, on odtient

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{w} f''(u)\,du\,dw; \quad (2.84)$$

et alors

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| + |f'(z_0)||(z - z_0)| + \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{w} |f''(u)|\,du\,dw. \quad (2.85)$$

De (2.83) et (2.85), on obtient

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| + |f'(z_0)||z_0| + \frac{|z_0|^2}{2}\exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ C_1 > 0. \quad (2.86)$$

D'après (2.86), quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on obtient

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_1'}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ C_1' > 0. \tag{2.87}$$

Cas 2. $\delta_1 = \delta_{b-a}(\theta) > 0$. D'après le lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right| \geq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.88}$$

Maintenant, nous prouvons $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Nous supposons que $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$; il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m \geq 1)$, $r_m \to 0$, tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f(z_m)| \to +\infty; \tag{2.89}$$

ce qui implique que pour tout $c > 1$ on a

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+|f(z_m)| > c;$$

d'où

$$|f(z_m)| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ m \to +\infty. \tag{2.90}$$

De (2.72) et (2.90), on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f(z_m)}\right| < \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ m \to +\infty. \tag{2.91}$$

A partir de (2.3), on peut écrire

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right| \leq \left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right| + \left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|. \tag{2.92}$$

Puisque $\delta_{-a}(\theta) = \delta_2 < \delta_1$, pour $0 < 2\varepsilon < \min\left\{1, 1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right\}$, nous avons

$$\left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}, \ r \to 0. \tag{2.93}$$

En combinant (2.88), (2.73), (2.91) et (2.93) avec (2.92), on obtient

$$\exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq \frac{M_2}{r^{d+2\sigma+3}}\exp\left\{\frac{(1-2\varepsilon)\delta_1}{r_m^n}\right\},$$

quand $r \to 0$, où $M_2 > 0$ est une constante, et alors

$$r^{d+2\sigma+3}\exp\left\{\frac{\varepsilon\delta_1}{r_m^n}\right\} \leq M_2. \tag{2.94}$$

(2.94) conduit à une contradiction lorsque $m \to +\infty$. Donc $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$ et on obtient

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_2}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_2 > 0,$$

et alors, quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on a

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_2'}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_2' > 0. \tag{2.95}$$

Cas 3. $\delta_1 < 0$. D'après (2.3), on peut écrire

$$\left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| + \left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{f'(z)}\right|. \tag{2.96}$$

D'après le lemme 2.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, nous avons

$$\left|B(z)\exp\left\{\frac{b-a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\} \tag{2.97}$$

et

$$\left|\exp\left\{\frac{-a}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\delta_1}{r^n}\right\}. \tag{2.98}$$

D'après le lemme 2.2.9, il existe $\lambda' > 0$ tel que pour r suffisamment petit, on a

$$\frac{\lambda'}{r_m^d} \leq \left|P\left(\frac{1}{z}\right)\right|. \tag{2.99}$$

Maintenant, nous prouvons que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est bornée sur rayon $\arg(z) = \theta$. Nous supposons que $|z^{\alpha+\varepsilon}| \log^+ |f'(z)|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$; puis par le lemme 2.2.3, il existe une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}\ (m \geq 1)$, $r_m \to 0$, tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ |f'(z_m)| \to +\infty, \tag{2.100}$$

et

$$\left|\frac{f(z_m)}{f'(z_m)}\right| \leq M_2,\ (M_2 > 0), \tag{2.101}$$

quand $m \to +\infty$. D'après (2.100), pour tout $c > 1$ on a

$$r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ |f'(z_m)| > c;$$

d'où

$$|f'(z_m)| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m \to +\infty. \tag{2.102}$$

De (2.72) et (2.102), on obtient

$$\left|\frac{F(z_m)}{f'(z_m)}\right| < \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m \to +\infty. \tag{2.103}$$

En combinant (2.73), (2.97), (2.98), (2.99), (2.101) et (2.103) avec (2.96), on obtient

$$\frac{\lambda'}{r_m^d} \leq \exp\left\{\frac{(1-\varepsilon)\,\delta_1}{r_m^n}\right\}\left(\frac{1}{r_m^{2\sigma+3}} + M_2\right) + \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}. \tag{2.104}$$

Puisque le membre droit de (2.104) tend vers zéro lorsque $m \to +\infty$, il s'ensuit une contradiction et alors $|z^{\alpha+\varepsilon}|\log^+|f'(z)|$ est bornée sur le rayon $\arg(z) = \theta$. Comme ci-dessus, quand $r \to 0$ avec $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$, on a

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C_3}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C_3 > 0. \tag{2.105}$$

Dans tous les cas, nous avons prouvé

$$|f(z)| \leq \exp\left\{\frac{C}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ C > 0,$$

sur n'importe quel rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2)$ quand $|z| = r \to 0$. D'après le lemme 2.2.5, on obtient $\sigma(f, 0) \leq \alpha$; ce qui est une contradiction avec $\alpha < n$ et $\sigma(f, 0) \geq n$; donc nous concluons que toute solution f de (2.3) est d'ordre infini. Maintenant nous avons

$$\max\left\{\sigma\left(P\left(\frac{1}{z}\right)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}, 0\right), \sigma\left(B(z)\exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\}, 0\right), \sigma\left(F(z)\exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\}, 0\right)\right\} = n;$$

et en appliquant le lemme 2.2.6, on obtient $\sigma_2(f, 0) \leq n$. Puisque $F(z) \not\equiv 0$, d'après le lemme 2.2.8, on obtient

$$\bar{\lambda}(f, 0) = \lambda(f, 0) = \sigma(f, 0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f, 0) = \lambda_2(f, 0) = \sigma_2(f, 0) \leq n$$

Chapitre 3

Croissance et oscillation de solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur dans un disque épointé

3.1 Introduction et présentation des résultats

Plusieurs résultats obtenus sur l'étude des propriétés des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + A(z) e^{az} f' + B(z) e^{bz} f = 0, \tag{3.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières, ont été généralisés aux équations différentielles d'ordre supérieur sous la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) e^{a_{k-1} z^n} f^{(k-1)} + ... + A_0(z) e^{a_0 z^n} f = 0, \tag{3.2}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions entières; voir par exemple [10, 11, 46]. Aussi les résultats obtenus dans [22] dans le disque unité concernant l'équation différentielle

$$f'' + A(z) e^{\frac{a}{(z_0 - z)^\mu}} f' + B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^\mu}} f = 0, \tag{3.3}$$

où $\mu > 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$ ont été l'inspiration de l'étude des équations différentielles au voisinage d'un point singulier fini comme le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 *[24] Soient a, b des constants complexes tels que $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$ et n un entier positif. Soient $A(z), B(z) \not\equiv 0$ deux fonctions analytiques dans $D(0, R)$ avec $\max\{\sigma(A, 0), \sigma(B, 0)\} < n$. Alors, chaque solution de $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle:*

$$f'' + A(z) \exp\left\{\frac{a}{z^n}\right\} f' + B(z) \exp\left\{\frac{b}{z^n}\right\} f = 0, \tag{3.4}$$

satisfait $\sigma(f,0)=\infty$ *avec* $\sigma_2(f,0)=n$.

Il y a deux questions qui se posent dans ce contexte : 1) Pouvons-nous généraliser (3.4) aux équations différentielles d'ordre supérieur ? 2) Qu'en est-il de l'équation non-homogène correspondante? Les résultats suivants apportent des réponses à ces deux questions.

Théorème 3.1.2 *[42] Soient* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $A_0,A_1,...,A_{k-1},F$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que* $\max\{\sigma(A_j,0),\sigma(F,0)\}<n$. *Si* a_j $(j=0,...,k-1)$ *sont des nombres complexes distincts; alors chaque solution* $f(z)\not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\}f^{(k-1)}+...+A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}f=F(z), \tag{3.5}$$

satisfait $\sigma(f,0)=\infty$. *De plus, si* $F(z)\not\equiv 0$, *nous avons*

$$\bar{\lambda}(f,0)=\lambda(f,0)=\sigma(f,0)=+\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0)=\lambda_2(f,0)=\sigma_2(f,0)\leq n.$$

Théorème 3.1.3 *[42] Soient* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $A_0,A_1,...,A_{k-1},F$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que* $\max\{\sigma(A_j,0),\sigma(F,0)\}<n$. *Soient* a_j $(j=0,...,k-1)$ *des constantes complexes. Supposons qu'il existe deux nombres complexes non nuls* a_s *et* a_l *tels que* $0<s<l\leq k-1$, $a_s=|a_s|e^{i\theta_s}$, $a_l=|a_l|e^{i\theta_l}$, $\theta_s,\ \theta_l\in[0,2\pi)$, $\theta_s\neq\theta_l$, $A_sA_l\not\equiv 0$; *pour* $j\neq s,l$; a_j *satisfait soit* $a_j=d_ja_s$ $(0<d_j<1)$ *soit* $a_j=d_ja_l$ $(0<d_j<1)$. *Alors, toute solution* $f(z)\not\equiv 0$ *de (3.5), satisfait* $\sigma(f,0)=\infty$. *De plus, si* $F(z)\not\equiv 0$, *on a*

$$\bar{\lambda}(f,0)=\lambda(f,0)=\sigma(f,0)=+\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0)=\lambda_2(f,0)=\sigma_2(f,0)\leq n.$$

Maintenant, nous étudions le cas $s=0$ et $F(z)\equiv 0$ du Théoréme 3.1.3 dans lequel nous pouvons aussi déterminer la valeur exacte de l'hyper-ordre des solutions.

Théorème 3.1.4 *[42] Soient* $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $A_0,A_1,...,A_{k-1}$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles que* $\max\{\sigma(A_0,0),...,\sigma(A_{k-1},0)\}<n$; *et soient* a_j $(j=0,...,k-1)$ *des nombres complexes tels que* $a_0=|a_0|e^{i\theta_0}$, $a_s=|a_s|e^{i\theta_s}$, $a_0a_s\neq 0$ $(0<s\leq k-1)$, $\theta_0,\theta_s\in[0,2\pi)$, $\theta_0\neq\theta_s$, $A_0A_s\not\equiv 0$; *pour* $j\neq 0,s$; a_j *satisfait soit* $a_j=d_ja_0$ $(d_j<1)$ *soit* $\arg a_j=\arg a_s$. *Alors, toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$f^{(k)}+A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\}f^{(k-1)}+...+A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}f=0$$

satisfait $\sigma(f,0)=\infty$ *et* $\sigma_2(f,0)=n$.

Il est clair que le Théoréme 3.1.1 est un cas particulier du Théoréme 3.1.4.

Remarque 3.1.1 *Si on a un point singulier* z_0 *différent de zéro, nous pouvons le transformer en zéro par le changement de variable* $w=z-z_0$ *comme il est indiqué dans l'exemple suivant.*

Exemple 3.1.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$f''' + \exp\left\{\frac{iz}{z-1}\right\} f'' + \exp\left\{\frac{2i}{z-1}\right\} f' + \exp\left\{\frac{1}{z^2-1}\right\} f = e^{z^2}. \tag{3.6}$$

Si l'on veut étudier la croissance des solutions au voisinage du point singulier $z_0 = 1$ nous faisons le changement de variable $w = z - 1$. L'équation (3.6) devient

$$g''' + e^i \exp\left\{\frac{i}{w}\right\} g'' + \exp\left\{\frac{2i}{w}\right\} g' + \exp\left\{\frac{-1}{2w+4}\right\} \exp\left\{\frac{1}{2w}\right\} g = e^{(w+1)^2}, \tag{3.7}$$

où $g(w) = f(w+1)$. Par le Théorème 3.1.3, toute solution de (3.7), satisfait

$$\bar{\lambda}(g,0) = \lambda(g,0) = \sigma(g,0) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(g,0) = \lambda_2(g,0) = \sigma_2(g,0) \leq 1.$$

Puisque $f(z) = g(z-1)$, on conclut que toute solution de (3.6) satisfait

$$\bar{\lambda}(f,1) = \lambda(f,1) = \sigma(f,1) = +\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,1) = \lambda_2(f,1) = \sigma_2(f,1) \leq 1.$$

De plus, par le Théorème 3.1.4, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle homogène

$$f''' + \exp\left\{\frac{iz}{z-1}\right\} f'' + \exp\left\{\frac{2i}{z-1}\right\} f' + \exp\left\{\frac{1}{z^2-1}\right\} f = 0$$

satisfait $\sigma(f,1) = \infty$ et $\sigma_2(f,1) = 1$.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *[24] Soit f une fonction méromorphe non constante dans $D(0,R)$ avec un point singulier à l'origine; soient $\alpha > 0$ constante réelle et $j \in \mathbb{N}$. Alors, les deux propositions suivantes sont vraies.*
i) Il existe un ensemble $E_1 \subset (0,R')$ $(0 < R' < R)$ de mesure logarithmique finie $\int_{E_1} \frac{dt}{t} < \infty$, et une constante $C > 0$ qui dépend de α et j tel que pour $r = |z|$ satisfaisant $r \in (0,R') \setminus E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq C\left[\frac{1}{r} T_0(\alpha r, f) \log^{\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) \log T_0(\alpha r, f)\right]^j. \tag{3.8}$$

ii) Il existe un ensemble $E_2 \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $C > 0$ qui dépend de α et j tel que pour tout $\arg z = \theta \in [0,2\pi) \setminus E_2$ il existe une constante $r_0 = r_0(\theta) > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $r = |z| < r_0$, (3.8) est valable.

Lemme 3.2.2 *[24] Soit f une fonction méromorphe non constante dans $D\left(0,R\right)$ d'ordre fini $\sigma\left(f,0\right)=\sigma<\infty$; soit $\varepsilon>0$ une constante donnée. Alors, on a les deux propositions suivantes,*
i) il existe un ensemble $E_1^*\subset\left(0,R'\right)$ $\left(0<R'<R\right)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $r\in\left(0,R'\right)\setminus E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z\right)}{f^{(i)}\left(z\right)}\right|\leq\frac{1}{r^{(j-i)(\sigma+1)+\varepsilon}},\ \left(0\leq i<j\right); \tag{3.9}$$

ii) il existe un ensemble $E_2^*\subset\left[0,2\pi\right)$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $\arg z=\theta\in\left[0,2\pi\right)\setminus E_2^*$ il existe une constante $r_0=r_0\left(\theta\right)>0$ pour tout z satisfaisant $r=\left|z\right|<r_0$, (3.9) est valable.

Lemme 3.2.3 *Soit $f\left(z\right)$ une fonction analytique dans $D(0,R)$ telle que $\left|f^{(s)}\left(z\right)\right|\leq\exp\left\{\frac{c}{r^\alpha}\right\}$ sur un rayon $\arg z=\theta$ avec $0<\left|z\right|=r\leq r_0$; ou $\alpha>0,c>0$. Alors, $\left|f\left(z\right)\right|\leq\exp\left\{\frac{c'}{r^\alpha}\right\}$ sur le rayon $\arg z=\theta$ avec $0<r\leq r_0'$; où $c'>c>0$.*

Preuve

Par intégration itératif s fois le long du segment de droite $[z_0,z]\subset D(0,R)$, on a

$$f\left(z\right)=f\left(z_0\right)+f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)+..$$

$$..+\frac{1}{(s-1)!}f^{(s-1)}\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)^{s-1}+\int_{z_0}^{z}...\int_{z_0}^{y}f^{(s)}\left(x\right)dxdy...dt;$$

et par l'hypothèse $\left|f^{(s)}\left(z\right)\right|\leq\exp\left\{\frac{c}{r^\alpha}\right\}$ sur le rayon $\arg z=\theta$ avec $0<\left|z\right|=r\leq r_0$, on obtient

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|f\left(z_0\right)\right|+\left|f'\left(z_0\right)\right|\left(r_0-r\right)+..$$

$$..+\frac{1}{(s-1)!}\left|f^{(s-1)}\left(z_0\right)\right|\left(r_0-r\right)^{s-1}+\frac{1}{s!}\left(r_0-r\right)^{s}\exp\left\{\frac{c}{r^\alpha}\right\}. \tag{3.10}$$

D'après (3.10), il existe $c'>c>0$ et $r_0'>0$ tel que pour $\arg z=\theta$ et $0<\left|z\right|=r\leq r_0'$, on a

$$\left|f\left(z\right)\right|\leq\exp\left\{\frac{c'}{r^\alpha}\right\}. \tag{3.11}$$

Remarque 3.2.1 *En plus de ces lemmes, nous aurons aussi besoin du Lemme 2.2.2, Lemme 2.2.3, Lemme 2.2.4, Lemme 2.2.5 et Lemme 2.2.6 cités dans le deuxième chapitre.*

3.3 Preuve du Théorème 3.1.2

Il est clair que toutes les solutions de (3.5) sont analytiques dans $D(0,R)$. Nous prouvons d'abord que toute solution f de (3.5) satisfait $\sigma(f,0) \geq n$. Nous supposons que $\sigma(f,0) < n$, et nous montrons que cela échoue. D'aprés le Lemme 2.2.4, on a $\sigma\left(f^{(j)},0\right) = \sigma(f,0) < n$. À partir de (3.5), on a

$$A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\} f^{(k-1)} + ... + A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\} f = F(z) - f^{(k)}. \tag{3.12}$$

Des propriétés de l'ordre de croissance, le côté gauche de (3.12) est d'ordre de croissance égal à n tandis que le côté droit est d'ordre de croissance inférieur à n, ce qui est une contradiction ; donc $\sigma(f,0) \geq n$. Maintenant, nous prouvons que $\sigma(f,0) = +\infty$. Nous supposons au contraire que $\sigma(f,0) < +\infty$. Puisque $\sigma(F,0) = \alpha < n$ alors pour tout ε donné tel que $0 < 2\varepsilon < n - \alpha$ et r suffisamment petit, nous avons

$$|F(z)| \leq \exp\left\{\frac{1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}. \tag{3.13}$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E_1 \subset [0,2\pi)$ qui a une mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in [0,2\pi) \setminus E_1$ il existe une constante $r_0 = r_0(\theta) > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg(z) = \theta \in [0,2\pi) \setminus E_1$ et $r = |z| < r_0$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq \frac{1}{r^{(j-i)(\sigma+1)+\varepsilon}} \quad (k \geq j > i \geq 0). \tag{3.14}$$

Posons $a_j = \alpha_j + i\beta_j,\ \delta_{a_j}(\theta) = \alpha_j \cos(n\theta) + \beta_j \sin(n\theta),\ z = re^{i\theta}$,

$$E_2 = \left\{\theta \in [0,2\pi) : \delta_{a_j}(\theta) = 0, j = 0,1,...,k-1\right\},$$

$$E_3 = \left\{\theta \in [0,2\pi) : \delta_{a_j - a_i}(\theta) = 0,\ 0 \leq i < j \leq k-1\right\}.$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour chaque fonction $A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}$ $(j = 0,...,k-1)$, il existe un ensemble $H_j \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in [0,2\pi) \setminus H_j$, (2.6) et (2.7) sont valables. Posons $E_4 = \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} H_j$, alors E_4 est également un ensemble de mesure linéaire nulle. Pour tout $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$ donné, nous avons $\delta_{a_j}(\theta) \neq 0$, $\delta_{a_i}(\theta) \neq \delta_{a_j}(\theta)$ $(0 \leq i < j \leq k)$. Puisque a_j sont des nombres complexes distincts, pour tout $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$ donné, il n'existe qu'un seul $s \in \{0,...,k-1\}$ tel que $\delta_{a_s}(\theta) = \max\left\{\delta_{a_j}(\theta) : j = 0,...,k-1\right\}$. Posons $\delta = \delta_{a_s}(\theta)$, $\delta' = \max\left\{\delta_{a_j}(\theta) : j \neq s\right\}$; alors $\delta' < \delta$.

Nous divisons la preuve en deux cas (i) $\delta > 0$, (ii) $\delta < 0$.

Cas (i) $\delta > 0$. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout ε $(\varepsilon > 0)$ donné, nous obtenons,

$$\left|A_s(z)\exp\left\{\frac{a_s}{z^n}\right\}\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{\delta}{r^n}\right\}, \tag{3.15}$$

si $\delta' > 0$, alors

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\delta'}{r^n}\right\} \quad (j \neq s);$$

et si $\delta' < 0$, on a

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{\delta'}{r^n}\right\} \quad (j \neq s).$$

Posons $\delta' < \delta_1 < \delta$ tel que $\delta_1 > 0$. Dans les deux cas $\delta' > 0$, $\delta' < 0$, nous avons

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\delta_1}{r^n}\right\} \quad (j \neq s). \tag{3.16}$$

Maintenant, nous prouvons que $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$.

Si $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|$ est non-bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_m = r_m e^{i\theta}\right\}$ $(m \geq 1)$ où $r_m \to 0$ tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z_m)\right| \to \infty \tag{3.17}$$

et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq M, \ (M > 0) \ \ (j = 0, ..., s-1). \tag{3.18}$$

De (3.17) pour tout $c > 1$ nous avons

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z_m)\right| > c;$$

alors

$$\left|f^{(s)}(z_m)\right| > \exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}, \ m \to +\infty. \tag{3.19}$$

De (3.13) et (3.19), on a

$$\left|\frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\} \to 0, \ m \to +\infty. \tag{3.20}$$

D'après (3.5), nous avons

$$\left|A_s(z_m)\exp\left\{\frac{a_s}{z_m^n}\right\}\right| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + \left|A_{s+1}(z_m)\exp\left\{\frac{a_{s+1}}{z_m^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| +$$

$$+\left|A_{s-1}(z_m)\exp\left\{\frac{a_{s-1}}{z_m^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ...$$

$$+\left|A_0(z_m)\exp\left\{\frac{a_0}{z_m^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + \left|\frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|. \tag{3.21}$$

En remplaçant (3.14)-(3.20) dans (3.21), on obtient

$$\begin{aligned}\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{\delta}{r_m^n}\right\} &\leq \frac{k-s}{r^{(k-s)(\sigma+1)+\varepsilon}}\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\delta_1}{r_m^n}\right\}+sM\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\delta_1}{r_m^n}\right\}\\ &\leq \frac{k-s+sM}{r^{(k-s)(\sigma+1)+\varepsilon}}\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{\delta_1}{r_m^n}\right\},\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$1\leq \frac{k-s+sM}{r^{(k-s)(\sigma+1)+\varepsilon}}\exp\left\{\left[(1+\varepsilon)\delta_1-(1-\varepsilon)\delta\right]\frac{1}{r_m^n}\right\}. \tag{3.22}$$

En prenant $0<\varepsilon<\frac{\delta-\delta_1}{\delta+\delta_1}$, une contradiction s'ensuit dans (3.22) lorsque $m\to\infty$; donc $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|\leq C_1$. Alors, $\left|f^{(s)}(z)\right|\leq\exp\left\{\frac{C_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$. Et par le Lemme 3.2.3, on obtient $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{C_2}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$, sur $\arg(z)=\theta$, quand $z\to 0$.

Cas (ii) $\delta<0$. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout ε ($\varepsilon>0$) donné, nous avons,

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right|\leq\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{\delta}{r^n}\right\}\quad(j\leq k-1). \tag{3.23}$$

D'après (3.5), nous avons

$$1\leq\left|A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+...+\left|A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+\left|\frac{F(z)}{f^{(k)}(z)}\right|. \tag{3.24}$$

Si $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non-bornée sur le rayon $\arg(z)=\theta$, alors d'après le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_m=r_me^{i\theta}\right\}$ $(m\geq 1)$ où $r_m\to 0$ tel que $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(k)}(z_m)\right|\to\infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right|\leq M',\ \ (M'>0)\ \ (j=0,...,k-1) \tag{3.25}$$

Comme dans (3.19), nous avons

$$\left|f^{(k)}(z_m)\right|>\exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m\to+\infty. \tag{3.26}$$

De (3.13) et (3.26), on a

$$\left|\frac{F(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right|\leq\exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}\to 0,\ m\to+\infty. \tag{3.27}$$

En combinant (3.23), (3.25) et (3.27) avec (3.24), on obtient

$$1\leq kM'\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{\delta}{r_m^n}\right\}\to 0,$$

une contradiction. D'où $r^{\alpha+\varepsilon}\log^{+}\left|f^{(k)}(z)\right|\leq C_3$, et donc $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq\exp\left\{\frac{C_3}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$; et par le Lemme 3.2.3, on obtient $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{C_4}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ $(C_4>0)$ sur $\arg z=\theta$, quand $z\to 0$.

Dans tous les cas, nous avons prouvé que $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{C}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ sur tout rayon $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4)$. D'après le Lemme 2.2.5, nous obtenons $\sigma(f,0)\leq\alpha+\varepsilon$, pour tout $\varepsilon>0$; alors $\sigma(f,0)\leq\alpha$, une contradiction : avec $\alpha<n$ et $\sigma(f,0)\geq n$. Par conséquent, toute solution $f(z)\not\equiv 0$ de (3.5) est d'ordre infini. De plus, nous avons

$$\max\left\{\sigma\left(A_j\exp\{\frac{a_j}{z^j}\},0\right)\ (j=0,...,k-1),\sigma(F,0)\right\}=n;$$

et en appliquant le Lemme 2.2.6, on obtient $\sigma_2(f,0)\leq n$. Puisque $F(z)\not\equiv 0$, d'après le Lemme 2.2.6 et le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\bar{\lambda}(f,0)=\lambda(f,0)=\sigma(f,0)=+\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0)=\lambda_2(f,0)=\sigma_2(f,0)\leq n.$$

3.4 Preuve du Théorème 3.1.3

Comme dans la preuve du Théorème 3.1.2, on peut montrer que toute solution f de (3.5) satisfait $\sigma(f,0)\geq n$. Maintenant, nous prouvons que $\sigma(f,0)=+\infty$. Nous supposons au contraire que $\sigma(f,0)<+\infty$ et on prouve que c'est un échec. Soit E_5 l'ensemble des valeurs $\theta\in[0,2\pi)$ tel que $\delta_{a_s}(\theta)=\delta_{a_l}(\theta)$ ou $\delta_{a_s}(\theta)=0$ ou $\delta_{a_l}(\theta)=0$, puisque $\theta_s\neq\theta_l$, E_5 est de mesure linéaire nulle. En prenant $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_5)$, (évidemment, $E_1\cup E_5$ est de mesure linéaire nulle), on a $\delta_{a_s}(\theta)>\delta_{a_l}(\theta)$ ou $\delta_{a_s}(\theta)<\delta_{a_l}(\theta)$. Posons $c_1=\delta_{a_s}(\theta)$, $c_2=\delta_{a_l}(\theta)$, pour $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup E_5)$ on a deux cas (i) $c_1>c_2$; (ii) $c_1<c_2$.

Cas (i) $c_1>c_2$. Ici, nous divisons aussi (i) en trois cas : (a) $c_1>c_2>0$; (b) $c_1>0>c_2$; (c) $0>c_1>c_2$.

Sous-cas (a) $c_1>c_2>0$. Posons $c_3=\max\left\{\delta_{a_j}(\theta),\ j\neq s\right\}$, alors $c_3<c_1$.

D'après le lemme 2.2.2, pour tout ε $(\varepsilon>0)$ *donné, il existe* $r_0>0$ *tel que pour* $0<r<r_0$, on obtient,

$$\left|A_s(z)\exp\left\{\frac{a_s}{z^n}\right\}\right|\geq\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{c_1}{r^n}\right\},\tag{3.28}$$

et

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right|\leq\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{c_3}{r^n}\right\}\quad(j\neq s).\tag{3.29}$$

Maintenant, on prouve que $r^{\alpha+\varepsilon}\left|f^{(s)}(z)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z=\theta$.

Si $r^{\alpha+\varepsilon}\log^{+}\left|f^{(s)}(z)\right|$ est non-bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, donc par le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_m=r_me^{i\theta}\right\}$ $(m\geq 1)$ où $r_m\to 0$ tel que

$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^{+}\left|f^{(s)}(z_m)\right|\to\infty\tag{3.30}$$

et
$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq M_1,\ (M_1>0)\ \ (j=0,...,s-1). \tag{3.31}$$
De (3.30) pour tout $c>1$ nous avons
$$r_m^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z_m)\right|>c;$$
alors
$$\left|f^{(s)}(z_m)\right|>\exp\left\{\frac{2}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\},\ m\to+\infty. \tag{3.32}$$
De (3.13) et (3.32), on a
$$\left|\frac{F(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq \exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}\to 0,\ m\to+\infty. \tag{3.33}$$
En remplaçant (3.28)-(3.31) et (3.33) par (3.21), on obtient
$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{c_1}{r_m^n}\right\} &\leq \left|A_s(z_m)\exp\left\{\frac{a_s}{z^n}\right\}\right| \\
&\leq \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|+...+\left|A_{s+1}(z_m)\exp\left\{\frac{a_{s+1}}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\
&\quad+\left|A_{s-1}(z_m)\exp\left\{\frac{a_{s-1}}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\
&\quad+...+\left|A_0(z_m)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right|+\left|\frac{F(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \\
&\leq \frac{k-s+sM_1}{r^{(k-s)(\sigma+1+\varepsilon)}}\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{c_3}{r_m^n}\right\}+o(1),
\end{aligned}$$
ce qui implique que
$$1\leq \frac{k-s+sM_1}{r^{(k-s)(\sigma+1+\varepsilon)}}\exp\left\{[(1+\varepsilon)c_3-(1-\varepsilon)c_1]\frac{1}{r_m^n}\right\}+o(1). \tag{3.34}$$
En prenant $0<\varepsilon<\frac{c_1-c_3}{c_1+c_3}$, une contradiction s'ensuit dans (3.34) lorsque $m\to\infty$. Donc $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(s)}(z)\right|\leq K_1$ sur $\arg z=\theta$; alors $\left|f^{(s)}(z)\right|\leq\exp\left\{\frac{K_1}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$; et par le Lemme 3.2.3, on obtient $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{K_2}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ $(K_2>K_1>0)$ sur $\arg z=\theta$, quand $z\to 0$.

Sous-cas (b) $c_1>0>c_2$. En utilisant un raisonnement comme dans le cas (a), on peut aussi obtenir $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{K_3}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ sur $\arg z=\theta$, quand $z\to 0$.

Sous-cas (c) $0>c_1>c_2$. D'après (3.5), on obtient
$$1\leq\left|A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+...+\left|A_l(z)\exp\left\{\frac{a_l}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(l)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+... \tag{3.35}$$

$$+\left|A_s(z)\exp\left\{\frac{a_s}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+...+\left|A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}\right|+\left|\frac{F(z)}{f^{(k)}(z)}\right|.$$

D'après le lemme 2.2.2, on a

$$\left|A_j(z)\exp\left\{\frac{a_j}{z^n}\right\}\right|\leq\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{c_1}{r^n}\right\}(j=0,...,k-1). \tag{3.36}$$

Si $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non-bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, alors d'après le Lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_m=r_me^{i\theta}\right\}$ $(m\geq 1)$ où $r_m\to 0$ tel que $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|\to\infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right|\leq M_2,\ (M_2>0)\ \ (j=0,...,k-1). \tag{3.37}$$

En combinant (3.36), (3.37) et (3.33) avec (3.35), on obtient

$$1\leq kM_2\exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{c_1}{r_m^n}\right\}+\exp\left\{\frac{-1}{r_m^{\alpha+\varepsilon}}\right\}\to 0,\ m\to\infty,$$

une contradiction. D'où $r^{\alpha+\varepsilon}\log^+\left|f^{(k)}(z)\right|\leq K_4$; alors $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq\exp\left\{\frac{K_4}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$; et par le Lemme 3.2.3, on obtient $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{K_5}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ $(K_5>K_4>0)$ sur $\arg z=\theta$, quand $z\to 0$.

Cas (ii) $c_1<c_2$. En utilisant le même raisonnement comme dans le cas (i), on peut aussi obtenir $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{K_6}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ $(K_6>0)$ sur $\arg z=\theta$, quand $z\to 0$.
Dans tous les cas, on a prouvé que $|f(z)|\leq\exp\left\{\frac{C}{r^{\alpha+\varepsilon}}\right\}$ $(C>0)$ sur n'importe quel rayon $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus E$ (E est de mesure linéaire nulle). Par le Lemme 2.2.5, on obtient $\sigma(f,0)\leq\alpha+\varepsilon$, pour tout $\varepsilon>0$; alors $\sigma(f,0)\leq\alpha$, une contradiction : avec $\alpha<n$ et $\sigma(f,0)\geq n$. Par conséquent, toute solution $f(z)\not\equiv 0$ de (3.5) est d'ordre infini. De plus, nous avons

$$\max\left\{\sigma\left(A_j\exp\{\frac{a_j}{z^j}\},0\right)\ (j=0,...,k-1),\sigma(F,0)\right\}=n;$$

et en appliquant le Lemme 2.2.6, on obtient $\sigma_2(f,0)\leq n$. Puisque $F(z)\not\equiv 0$, d'après le Lemme 2.2.6 et le Lemme 3.2.3, on obtient

$$\bar{\lambda}(f,0)=\lambda(f,0)=\sigma(f,0)=+\infty,\ \bar{\lambda}_2(f,0)=\lambda_2(f,0)=\sigma_2(f,0)\leq n.$$

3.5 Preuve du Théorème 3.1.4

Supposons que $f\not\equiv 0$ est une solution analytique de (3.5) dans $D(0,R)$. Par (3.5), on peut écrire

$$\left|A_0(z)\exp\left\{\frac{a_0}{z^n}\right\}\right|\leq\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+\left|A_{k-1}(z)\exp\left\{\frac{a_{k-1}}{z^n}\right\}\right|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right|+ \tag{3.38}$$

$$... + \left| A_1(z) \exp\left\{ \frac{a_1}{z^n} \right\} \right| \left| \frac{f'}{f} \right|.$$

Puisque $\theta_0 \neq \theta_s$, il existe $(\theta_1, \theta_2) \subset [0, 2\pi)$ tel que pour $\arg z = \theta \in (\theta_1, \theta_2)$, on a $\delta_{a_0}(\theta) > 0$, $\delta_{a_s}(\theta) < 0$. Posons $\delta_0 = \delta_{a_0}(\theta)$, $\delta' = \max\left\{ \delta_{a_j}(\theta) : \arg a_j = \arg a_0 \right\}$, $\delta' < \delta_1 < \delta_0$ tel que $\delta_1 > 0$. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ donné, nous avons

$$\left| A_0(z) \exp\left\{ \frac{a_0}{z^n} \right\} \right| \geq \exp\left\{ (1 - \varepsilon) \frac{\delta_0}{r^n} \right\} \tag{3.39}$$

et

$$\left| A_j(z) \exp\left\{ \frac{a_j}{z^n} \right\} \right| \leq \exp\left\{ (1 + \varepsilon) \frac{\delta_1}{r^n} \right\} \ (j = 1, ..., k - 1). \tag{3.40}$$

D'après le Lemme 3.2.1, il existe un ensemble $E^* \subset [0, 2\pi)$ qui a une mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \subset [0, 2\pi) \setminus E^*$ il existe une constante $r_0 = r_0(\theta) > 0$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E^*$ et $r = |z| < r_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{\lambda}{r^{2j}} \left[T_0(\alpha r, f) \right]^{2j} \ (j = 1, ..., k). \tag{3.41}$$

En remplaçant (3.39)-(3.41) dans (3.38), on obtient

$$\exp\left\{ (1 - \varepsilon) \frac{\delta_0}{r^n} \right\} \leq \frac{\lambda k}{r^{2k}} \left[T_0(\alpha r, f) \right]^{2k} \exp\left\{ (1 + \varepsilon) \frac{\delta_1}{r^n} \right\};$$

ce qui implique que

$$\exp\left\{ ((1 - \varepsilon)\delta_0 - (1 + \varepsilon)\delta_1) \frac{1}{r^n} \right\} \leq \frac{\lambda k}{r^{2k}} \left[T_0(\alpha r, f) \right]^{2k}, \tag{3.42}$$

où $0 < \varepsilon < \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \delta_1}$. Par (3.42), on obtient $\sigma_2(f, 0) \geq n$. D'autre coté, d'aprés le Lemme 2.2.6, on a $\sigma_2(f, 0) \leq n$. Donc $\sigma_2(f, z_0) = n$.

Chapitre 4

Ordre fini et infini de croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques dans un disque épointé

4.1 Introduction et présentation des résultats

Pour étudier la croissance et l'oscillation des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \ldots + A_1(z)f + A_0(z)f = 0, \tag{4.1}$$

où $A_j(z)$ sont des fonctions entières, on se base généralement sur la domination de $A_0(z)$ sur les autres coefficients par plusieurs méthodes comme les deux cas suivant (voir [5, 11]) :

i) $\max\{\sigma(A_j) : j \neq 0\} < \sigma(A_0)$;

ii)

$$|A_0(z)| \geq \exp\{\alpha |z|^{\mu}\},$$
$$|A_j(z)| \leq \exp\{\beta |z|^{\mu}\},$$

quand $z \to \infty$ avec $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ et $0 < \beta < \alpha$, $\mu > 0$.

Dans ces deux cas, il a été démontré que toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation (4.1) est d'ordre infini.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'un coefficient $A_s(z)$ $s \neq 0$ domine les autres coefficients par une certaine manière, l'équation (4.1) pourrait avoir des solutions d'ordre fini; voir [19, 4, 39]. En plus, la domination des cas précédents a été affaiblée à titre polynômiale dans l'article [26]. Ces résultats ont été étendus dans plusieurs articles au cas des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont analytiques dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, (voir [17, 12, 13, 14, 15]).

Dans ce chapitre, on va étudier la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires où les coefficients sont analytiques dans $D(0,R)$. Sous certaines conditions, nous prouvons que toute solution non triviale est d'ordre infini de croissance au voisinage du point singulier $z=0$ et on va étudier aussi les propriétés des solutions d'ordre fini dans d'autre cas. Nous allons nous baser sur la domination d'un coefficient sur seulement une partie d'une courbe tendant vers le point singulier zéro comme suivant.

Théorème 4.1.1 *Soient $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans $D(0,R)$. S'il existe un ensemble $\gamma \subset D(0,R)$ telle que $\gamma_0 = \{|z| : z \in \gamma\}$ a une mesure logarithmique infinie au voisinage du point singulier 0, tel que pour $z \in \gamma$ et pour tout $\mu > 0$ fixé, on a*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{|A_0(z)|\, r^{\mu}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1 \right) = 0. \tag{4.2}$$

Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différentielle de (4.1) est d'ordre infini.

Corollaire 4.1.1 *Soient $P_j(z), j = 1, 2, \ldots, k-1$ des polynômes et $P_0(z)$ une fonction entière transcendante; soient $A_j(z) = P_j(1/(z))$; alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (4.1), est d'ordre infini.*

Exemple 4.1.1 *L'équation différentielle*

$$f''' + \frac{1}{z^2+z} f'' + \frac{1}{(1-z)\, z^3} f' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n^2} z^n} f = 0, \tag{4.3}$$

remplit les hypothèses du Théorème 4.1.1 dans $D(0,1)$ lorsque z tend vers $z_0 = 0$ sur le rayon $\arg\theta = 0$. Donc, toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (4.3) est d'ordre infini. Nous signalons ici que $\sigma(A_0, 0) = \sigma(A_1, 0) = \sigma(A_2, 0) = 0$.

Théorème 4.1.2 *Soient $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions analytiques dans $D(0,R)$. S'il existe un ensemble $\gamma \subset D(0,R)$ telle que $\gamma_0 = \{|z| : z \in \gamma\}$ est de mesure logarithmique infinie au voisinage du point singulier 0, telle que pour $z \in \gamma$, nous avons*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|A_0(z)|} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1 \right) \exp_n \frac{\lambda}{r^{\mu}} = 0, \tag{4.4}$$

où $n \geqslant 1$ est un entier, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ sont des constantes réelles, alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (4.1), satisfait $\sigma_n(f,0) = \infty$ et de plus $\sigma_{n+1}(f,0)) \geqslant \mu$.

Exemple 4.1.2 *Soient $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), A_2(z)$ des fonctions analytiques dans $D(0,1)$ avec $\sigma_2(A_j, 0) < 2$, $j = 0, 1, 2$. L'équation différentielle*

$$f''' + A_2(z) f'' \exp_2 \frac{i}{z^2} + A_1(z) f' \exp_2 \frac{1}{z} + A_0(z) f \exp_2 \frac{1}{z^2} = 0, \tag{4.5}$$

satisfait les hypothèses du théorème 4.1.2 lorsque z *tend vers* 0 *sur le rayon* $\arg\theta = 0$. *Ainsi, toute solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de (4.5) est d'ordre infini avec* $\sigma_3(f,0) \geqslant 2$.

Maintenant, nous allons étudier le cas où $A_s, s \neq 0$ domine les autres coefficients dans un secteur.

Posons $I(\varepsilon) = (\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon) \subset [0, 2\pi)$ et $S(\varepsilon) = \{z : \arg(z) \in I(\varepsilon)\}, \varepsilon \geqslant 0$.

Théorème 4.1.3 *Soient* $A_0(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles qu'il existe des constantes réelles* $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$ *telles que pour tout* $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$*, il existe un ensemble* $\Gamma_\theta = \{|z| : \arg z = \theta\}$ *de mesure logarithmique infinie au voisinage du point singulier* 0*, et pour chaque* $\mu > 0$ *fixé, on a*

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{|A_s(z)|\, r^\mu} \left(\sum_{j=0, j\neq s}^{k-1} |A_j(z)| + 1 \right) = 0, \quad s \neq 0. \tag{4.6}$$

où $\arg(z) = \theta \in I(0)$ *et* $|z| = r \in \Gamma_\theta$*. Étant donné* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, si* f *est une solution transcendante de (4.1) d'ordre fini* $\sigma(f,0) < \infty$*, alors les énoncés suivants sont vrais.*

(i) Il existe $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j \neq 0$ *tels que* $f^{(j)}(z) \to b_j$ *lors que* $z \to 0$ *dans le secteur* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour tout* $\mu > 0$ *fixé, on a*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left| f^{(j)}(z) - b_j \right|}{r^\mu} = 0, \tag{4.7}$$

avec $z \in S(\varepsilon)$ *et* $|z| = r \in \Gamma_\theta$.

(ii) Pour chaque entier $m \geqslant j+1, f^{(m)}(z) \to 0$ *lorsque* $z \to 0$ *dans* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour tout* $\mu > 0$ *fixé, on a*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\left| f^{(m)}(z) \right|}{r^\mu} = 0, \tag{4.8}$$

avec $z \in S(\varepsilon)$ *et* $|z| = r \in \Gamma_\theta$.

Exemple 4.1.3 *La fonction* $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + 2$ *satisfait l'équation différentielle*

$$f''' + 2e^{-1/z} f'' - \left(\frac{2}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^4} \right) f' - \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3} \right) f = 0 \tag{4.9}$$

qui vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.3 dans tout secteur $(\theta_1, \theta_2) \subset \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ *au voisinage du point singulier zéro. Dans cet exemple,* $A_2(z) = 2e^{-1/z}$ *est le coefficient dominant et nous avons* $j = 0$ *et* $b_j = 2$.

Théorème 4.1.4 *Soient* $A_0(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *vérifiant qu'il existe des constantes réelles* $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant 2\pi$ *telle que pour tout* $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ *il existe un ensemble* $\Gamma_\theta = \{|z| : \arg z = \theta\}$ *de mesure logarithmique infinie au voisinage du point singulier* 0*, telle que nous avons*

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{|A_s(z)|}\left(\sum_{j=0,j\neq s}^{k-1}|A_j(z)|+1\right)\exp\frac{\lambda}{r^{\alpha}}=0,\quad s\neq 0,\tag{4.10}$$

où $\arg(z)=\theta\in I(0)$ *et* $|z|=r\in\Gamma_\theta,\lambda>0,\alpha>0$ *sont des constantes réelles. Étant donné* $\varepsilon>0$ *suffisamment petit, si* f *est une solution transcendante de (4.1), d'ordre fini* $\sigma(f,0)<\infty$*, alors les énoncés suivants sont vrais.*
(i) Il existe $j\in\{0,\ldots,s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j\neq 0$ *tels que* $f^{(j)}(z)\to b_j$ *lorsque* $z\to 0$ *dans le secteur* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour* $\lambda>\lambda'>0$*, nous avons*

$$\left|f^{(j)}(z)-b_j\right|<\exp\left(-\frac{\lambda'}{r^{\alpha}}\right)$$

pour tout $z\in S(\varepsilon)$ *avec* $|z|=r\in\Gamma_\theta$*.*
(ii) Pour chaque entier $m\geqslant j+1$*,* $f^{(m)}(z)\to 0$ *lorsque* $z\to 0$ *dans* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour* $\lambda'>0$*, nous avons*

$$\left|f^{(m)}(z)\right|<\exp\left(-\frac{\lambda'}{r^{\alpha}}\right)$$

pour tout $z\in S(\varepsilon)$ *avec* $|z|=r\in\Gamma_\theta$*.*

Corollaire 4.1.2 *Soient* $A_0(z),\ldots,A_{k-1}(z)$ *des fonctions analytiques dans* $D(0,R)$ *telles qu'il existe des constantes réelles* $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$ *telles que pour tout* $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ *il existe un ensemble* $\Gamma_\theta=\{|z|:\arg z=\theta\}$ *de mesure logarithmique infinie au voisinage du point singulier* 0*, nous avons*

$$|A_s(z)|\geqslant\exp\frac{\alpha}{r^{\mu}},\quad s\neq 0,$$
$$|A_j(z)|\leqslant\exp\frac{\beta}{r^{\mu}}$$

où $\arg(z)=\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ *et* $|z|=r\in\Gamma_\theta$*,* $\alpha>\beta\geqslant 0$*,* $\mu>0$ *sont des constantes réelles. Étant donné* $\varepsilon>0$ *suffisamment petit, si* f *est une solution transcendante de (4.1) d'ordre fini* $\sigma(f,0)<\infty$*, alors les propositions suivantes sont vraies.*
(i) Il existe $j\in\{0,\ldots,s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j\neq 0$ *telle que* $f^{(j)}(z)\to b_j$ *comme* $z\to 0$ *dans le secteur* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour* $\alpha-\beta>\lambda'>0$ *nous avons*

$$\left|f^{(j)}(z)-b_j\right|<\exp\left(-\frac{\lambda'}{r^{\mu}}\right)\tag{4.11}$$

pour tout $z\in S(\varepsilon)$ *avec* $|z|=r\in\Gamma_\theta$*.*
(ii) Pour chaque entier $m\geqslant j+1$*,* $f^{(m)}(z)\to 0$ *quand* $z\to 0$ *dans* $S(\varepsilon)$*. Plus précisément, pour* $\alpha-\beta>\lambda'>0$ *nous avons*

$$\left|f^{(m)}(z)\right|<\exp\left(-\frac{\lambda'}{r^{\mu}}\right)\tag{4.12}$$

pour tout $z\in S(\varepsilon)$ *avec* $|z|=r\in\Gamma_\theta$*.*

En effet, en prenant $\alpha - \beta > \lambda > 0$, la condition (4.10) est vérifiée; par conséquent les deux assertions (4.11) et (4.12) sont vraies en prenant $\lambda > \lambda' > 0$.

4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 4.2.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante dans $D(0,R)$ d'ordre n-itératif fini : $\sigma_n(f,0) = \sigma_n < \infty$ $(n \geqslant 1)$ et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset (0,R)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $r = |z| \in (0,R) \backslash E_1$, on a*
(i) si $n = 1$, on a (3.9);
(ii) et si $n \geqslant 2$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \left(\exp_{n-1} \frac{1}{r^{\sigma_n + \varepsilon}}\right)^k, \ k \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve
Par la définition de l'ordre n-itératif:

$$\sigma_n(f,0) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log_n T_0(r,f)}{-\log r} = \sigma_n,$$

on a pour $\varepsilon' > 0$ donné, il existe r_0 tel que pour $0 < r < r_0$, nous avons

$$\frac{\log_n T_0(r,f)}{-\log r} < \sigma_n + \varepsilon',$$

ce qui implique

$$T_0(r,f) < \exp_{n-1} \frac{1}{r^{\sigma_n + \varepsilon'}}. \tag{4.13}$$

En combinant (4.13) avec le Lemme 3.2.1, for $\alpha > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset (0,R)$ de mesure logarithmique finie et une constante $A > 0$ qui ne dépend que de α tel que pour tout $r = |z| \in (0,R) \backslash E_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant A \left(\frac{1}{r^2} \exp_{n-1}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\sigma_n + \varepsilon'} \exp_{n-2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\sigma_n + \varepsilon'}\right)^k.$$

Alors, pour $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ et r assez proche de 0, nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \left(\exp_{n-1} \frac{1}{r^{\sigma_n + \varepsilon}}\right)^k.$$

Lemme 4.2.2 *Soit f une fonction méromorphe non constante dans $D(0,R)$ et supposons que $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non-bornée sur un rayon $\arg(z) = \theta$. Alors il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$, $m = 1, 2, \ldots$, où $r_m \to 0$, telle que $f^{(k)}(z_m) \to \infty$ et*

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leqslant M,$$

où $M > 0$ *and* $j \in (0, 1, \ldots, k-1)$.

Preuve

Posons $M\left(r, \theta, f^{(k)}\right) = \max\left|f^{(k)}(z)\right|$ où $z \in \left[r_1 e^{i\theta}, re^{i\theta}\right]$. Clairement, nous pouvons construire une suite de points $z_m = r_m e^{i\theta}, m \geqslant 1, r_m \to 0$, telle que $M\left(r, \theta, f^{(k)}\right) = \left|f^{(k)}(z_m)\right| \to \infty$. Pour chaque m, par $(k-j)$ fois intégration le long du segment de droite $[z_1, z_m]$, nous avons

$$\begin{aligned} f^{(j)}(z_m) = & f^{(j)}(z_1) + f^{(j+1)}(z_1)(z_m - z_1) \\ & + \ldots + \frac{1}{(k-j-1)} f^{(k-1)}(z_1)(z_m - z_1)^{k-j-1} \\ & + \int_{z_1}^{z_m} \cdots \int_{z_1}^{y} f^{(k)}(x) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ldots \mathrm{d}t \end{aligned}$$

et par l'inégalité triangulaire élémentaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|f^{(j)}(z_m)\right| \leqslant & \left|f^{(j)}(z_1)\right| + \left|f^{(j+1)}(z_1)\right| \left|(z_m - z_1)\right| \\ & + \ldots + \frac{1}{(k-j-1)} \left|f^{(k-1)}(z_1)\right| \left|(z_m - z_1)\right|^{k-j-1} \\ & + \frac{1}{(k-j)} \left|f^{(k)}(z_m)\right| \left|(z_m - z_1)\right|^{k-j}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De (4.14) et en tenant compte du fait que lorsque $m \to \infty$, $f^{(k)}(z_m) \to \infty$, $z_m \to z_0$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)} \right| \leqslant M, \quad M > 0.$$

Lemme 4.2.3 *Soit* f *une fonction analytique dans* $D(0, R']$*; soit* $a \geqslant \frac{1}{2}$ *et*

$$G = \left\{ z : \left|\arg(z)\right| < \frac{\pi}{2a} \right\} \cap D(0, R'].$$

Supposons que $\limsup\limits_{z \to \varsigma} |f(z)| \leqslant M$ *pour tous* $\varsigma \in \partial G \setminus \{0\}$*, où* M *est une constante. En plus, on suppose qu'il existent des constantes réelles* K *et* b $(b < a)$ *tels que*

$$|f(z)| \leqslant K \exp \frac{1}{r^b} \qquad \textit{quand } r \to 0,$$

où $r = |z|$ *et* $z \in G$*. Alors,*

$$|f(z)| \leqslant M$$

pour tout $z \in G$.

Preuve

Le changement de variable $w = 1/z$ transforme G en $H = \{w : |w| \geq 1/R'$ et $|\arg(w)| < \frac{\pi}{2a}\}$ et la fonction $g(w) = f(z)$ est une fonction analytique dans H; et on a $|\arg(z)| = \pi/2a \Leftrightarrow |\arg(w)| = \pi/2a$ et $\limsup\limits_{w\to\xi}|g(w)| = \limsup\limits_{z\to\varsigma}|f(z)| \leqslant M$ pour tout $\xi \in \partial H$. De plus, nous avons

$$|g(w)| = |f(z)| \leqslant K \exp \frac{1}{r^b} = K \exp R^b \quad \text{quand } R \to \infty,$$

où $R = |w| = 1/r$. Alors, d'après le théorème de Phragmen-Lindelof on obtient $|g(w)| \leqslant M$ pour tout $w \in H$. Par conséquent, $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in G$.

Lemme 4.2.4 *Si f est une fonction analytique dans $D(0,R)$ telle que pour tout $\mu > 0$, on a*

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant r^{\mu} \quad \textit{quand } r \to 0$$

alors $\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt$ converge et pour tout $\alpha > 0$, nous avons

$$\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt \leqslant r^{\alpha} \quad \textit{quand } r \to 0$$

Preuve

Il est facile de montrer que $\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt$ converge, et on a

$$\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt \leqslant \int_0^r t^{\mu} dt = \frac{r^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Soit $\alpha > 0$. En prenant $\mu + 1 > \alpha$, nous avons

$$\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt \leqslant \frac{r^{\mu+1}}{\mu+1} \leqslant r^{\alpha} \quad \text{as } r \to 0.$$

Lemme 4.2.5 *Soit f une fonction analytique dans $D(0,R)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) pour tout $\mu > 0$, $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant r^{\mu}$ quand $r \to 0$,

(ii) pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\alpha}} = 0$.

Preuve

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\alpha}}$.

Pour tout $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < r < \delta$ on ait $\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant \varepsilon r^{\alpha}$. En prenant $\varepsilon = 1$ on obtient l'assertion (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que pour tout $\mu > 0, \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant r^{\mu}$ comme $r \to 0$. Soit $\alpha > 0$. nous avons

$$\frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\alpha}} \leqslant \frac{r^{\mu}}{r^{\alpha}}.$$

En prenant $\mu > \alpha$, on obtient

$$\lim_{r\to 0} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\alpha}} = 0.$$

Lemme 4.2.6 *Si f est une fonction analytique dans $D(0,R)$ telle que*

$$\left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda}{t^{\alpha}}\right)$$

où $\alpha>0, \lambda>0$, alors $\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt$ converge et on a

$$\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda}{r^{\alpha}}\right) \qquad \text{quand } r\to 0.$$

Preuve
Il est facile de montrer que $\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt$ converge, et on a

$$\begin{aligned}\int_0^r \left|f\left(te^{i\theta}\right)\right| \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^r \exp\left(-\frac{\lambda}{t^{\alpha}}\right) \mathrm{d}t \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda}{r^{\alpha}}\right)\int_0^r \mathrm{d}t \\ &\leqslant r\exp\left(-\frac{\lambda}{r^{\alpha}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda}{r^{\alpha}}\right) \qquad \text{quand } r\to 0.\end{aligned}$$

4.3 Preuve du Théorème 4.1.1

Supposons que $f\not\equiv 0$ est une solution de (4.1) d'ordre fini $\sigma(f,0)=\sigma<+\infty$. Du Lemme 2.2.1, pour tout $\varepsilon>0$ donné il existe un ensemble $E\subset(0,R)$ de mesure logarithmique fini telle que pour tout $r=|z|\in(0,R)\backslash E$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{r^{j(\sigma+2+\varepsilon)}}, \quad j=1,\ldots,k. \tag{4.15}$$

De (4.1) nous pouvons écrire

$$1\leqslant \frac{1}{|A_0(z)|}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \frac{|A_{k-1}(z)|}{|A_0(z)|}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \ldots + \frac{|A_1(z)|}{|A_0(z)|}\left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{4.16}$$

Par l'hypothèse (4.2), pour $r\in F$ et pour tout $\mu>0$ fixé, on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|\, r^{\mu}}=0, \quad j=1,\ldots,k \tag{4.17}$$

et

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|A_0(z)|\, r^{\mu}}=0. \tag{4.18}$$

En utilisant (4.15), (4.17) et (4.18) dans (4.16), une contradiction s'ensuit quand $r\to 0$ avec $r=|z|\in(0,R)\backslash E$.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.2

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (4.1) avec $\sigma_n(f,0) = \sigma_n < \infty,\ n \geqslant 1$. Si $n = 1$ on a (4.15) et si $n \geqslant 2$, d'aprés le Lemme (4.2.1), pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe un ensemble $E \subset (0,R)$ qui a une mesure logarithmique finie telle que pour tout $r = |z| \in (0,R) \backslash E$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant \left(\exp_{n-1}\frac{1}{r^{\sigma_n+\varepsilon}}\right)^j, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.19}$$

Par l'hypothèse (4.4), pour $r \in F$, on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|}\exp_n\frac{\lambda}{r^\mu} = 0, \quad j = 1, \ldots, k \tag{4.20}$$

et

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|A_0(z)|}\exp_n\frac{\lambda}{r^\mu} = 0. \tag{4.21}$$

En utilisant (4.15) ou (4.19), (4.20) et (4.21) dans ((4.16)), une contradiction s'ensuit quand $r \to 0$ sur γ avec $r = |z| \in (0,R)\backslash E$. Donc, $\sigma_n(f,0) = \infty$ pour $n \geqslant 1$. Maintenant, d'aprés le Lemme 3.2.1, et puisque $\sigma_n(f,0) = \infty$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leqslant A\left(\frac{1}{r}T_0(\alpha r, f)\right)^{2k}, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.22}$$

Par l'hypothèse (4.4), pour $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\exp_n(\lambda/r^\mu)}, \quad j = 1, \ldots, k \tag{4.23}$$

et

$$\frac{1}{|A_0(z)|} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\exp_n(\lambda/r^\mu)} \tag{4.24}$$

comme $r \to 0$ sur γ avec $r = |z| \in F$. En utilisant (4.22)-(4.24) dans (4.16), on obtient, pour $r = |z| \in (0,R)\backslash E$,

$$1 \leqslant \frac{M}{\exp_n(\lambda/r^\mu)}\left(\frac{1}{r}T_0(\alpha r, f)\right)^{2k} \tag{4.25}$$

où $M > 0$ est une constante réelle. Posons $t = \alpha r$. Signalons ici que E est de mesure logarithmique finie si et seulement si αE est de mesure logarithmique finie. Donc, á partir de (4.25), on obtient

$$\exp_n\frac{\lambda\alpha^\mu}{t^\mu} \leqslant M\left(\frac{\alpha}{t}T_0(r,f)\right)^{2k}, \quad t \in (0,R)\backslash E. \tag{4.26}$$

De (4.26) on obtient

$$\sigma_{n+1}(f,0) = \limsup_{r\to 0}\frac{\log_{n+1}^+ T_0(r,f)}{-\log t} \geqslant \mu.$$

4.5 Preuve du Théorème 4.1.3

D'abord, on va prouver que $f(z)$ et $f^{(s)}(z)$ sont bornée dans $S(\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. D'aprés le Lemme 2.2.4 et le Lemme 2.2.1, il s'ensuit qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour tout $j \in \{s+1, \ldots, k\}$

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq \frac{1}{r^{(j-i)(\sigma+1)+\varepsilon}} \quad (k \geq j > i \geq 0) \tag{4.27}$$

où $\arg z \in I(0)\backslash E$ et $|z| = r \in \gamma$. Si on suppose que $r^{\alpha+\varepsilon} \log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|$ est non-bornée sur le rayon $\arg z = \varphi \in I(0)\backslash E$, alors d'aprés le lemme 4.2.2 , il existe une suite infinie de points $\left\{z_m = r_m e^{i\theta}\right\} \quad (m \geq 1)$ où $r_m \to 0$, tel que $r_m^{\alpha+\varepsilon} \log^+ \left|f^{(s)}\left(z_m\right)\right| \to \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(q)}\left(z_m\right)}{f^{(s)}\left(z_m\right)}\right| \leq M_1, \tag{4.28}$$

où $(M_1 > 0) \quad (q = 0, \ldots, s-1)$ et m suffisamment grand. De (4.1) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 1 \leqslant & \frac{1}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}\right| + \frac{|A_{k-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}\right| + \ldots + \frac{|A_{s+1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right| \\ & + \frac{|A_{s-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}\right| + \ldots + \frac{|A_0(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f}{f^{(s)}}\right|. \end{aligned} \tag{4.29}$$

En combinant maintenant (4.6), (4.27)-(4.29) et en laissant $m \to \infty$ on obtient une contradiction. Donc $r^{\alpha+\varepsilon} \log^+ \left|f^{(s)}(z)\right|$ est bornée sur les rayons $\arg(z) = \varphi \in I(0)\backslash E$. c'est-à-dire $\left|f^{(s)}(z)\right| \leq M_3$, et par le lemme 4.2.6, on obtient

$$|f(z)| \leq M_3, \tag{4.30}$$

pour une certaine constante $M_3 > 0$. Maintenant, nous commençons à prouver (4.8) pour $m = s$. En utilisant (4.1), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant |f| \Bigg(& \frac{1}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \frac{|A_{k-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \ldots + \frac{|A_{s+1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| \\ & + \frac{|A_{s-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \ldots + \frac{|A_1(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{|A_0(z)|}{|A_s(z)|}\right|\Bigg). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Par l'hypothèse (4.6), pour tout $\mu > 0$, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, k-1\}$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour $|z| < \delta$ on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_s(z)|} \leqslant \varepsilon\, |z|^{\mu}, \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{|A_s(z)|} \leqslant \varepsilon\, |z|^{\mu}, \tag{4.33}$$

où $\arg(z) = \theta \in I(0)$ et $|z| = r \in \Gamma_\theta$. En remplaçant (4.27), (4.30), (4.32)et (4.33) par (4.31), on obtient que pour tout $\mu > 0$, nous avons

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant M_4 \frac{|z|^\mu}{r^{k(\sigma+2+\varepsilon)}} \qquad \text{as } r \to 0.$$

Nous concluons que pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\left|f^{(s)}(z)\right|}{r^\alpha} = 0 \tag{4.34}$$

avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$ et $\arg(z) = \varphi \in I\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \backslash E$.

Démonstration de l'égalité (4.8) pour $m > s$. Considérons $z = re^{i\theta} \in S(\varepsilon)$ et $C(z)$ le cercle centré en z de rayon ϱ suffisamment petit tel que $C(z)$ soit contenu dans $S\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$; pour celà on peut prendre $\rho = r\sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$. De la formule de Cauchy appliquée à la fonction $f^{(s)}(z)$ on a

$$f^{(m)}(z) = \frac{(m-s)!}{2\pi} \int_{C(z)} \frac{f^{(s)}(\zeta)}{(z-\zeta)^{m-s+1}} d\zeta, \tag{4.35}$$

et en utilisant (4.34), on obtient

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leqslant \frac{(m-s)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z|^\mu}{\varrho^{m-s+1}} \varrho d\theta \leqslant \frac{(m-s)!}{\sin^{m-s}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)} \frac{|z|^\mu}{r^{m-s}}.$$

Nous concluons que, pour tout $\alpha > 0$ et $z \in S(\varepsilon)$ fixé avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$, nous avons

$$\lim_{z\to 0} \frac{\left|f^{(m)}(z)\right|}{|z|^\alpha} = 0.$$

Jusqu'à maintenant, nous avons prouvé la deuxième assertion pour $m \geqslant s$. Nous commençons à prouver la première assertion pour $j = s - 1$. On définit

$$a_s = \int_0^{r_0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathrm{d}t$$

Par (4.34), il est facile de voir que $\int_0^{r_0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t$ converge. De plus, a_s est indépendant de θ, car d'aprés (4.34), l'intégrale de $f^{(s)}(\zeta)$ sur l'arc $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in (\varphi_1, \varphi_2) \subset I\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$, on obtient

$$\left|\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^{(s)}\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant Mr^{\alpha+1}|\varphi_2 - \varphi_1| \to 0, \quad r \to 0, M > 0.$$

Posons maintenant $b_{s-1} = f^{(s-1)}(r_0 e^{i\theta}) + a_s$, et supposons que $b_{s-1} \neq 0$. Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ un point arbitraire dans $S(\varepsilon)$. De l'égalité suivante

$$f^{(s-1)}(z) - b_{s-1} = \int_{r_0}^{z} f^{(s)}(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_0^{r_0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t$$

on peut appliquer (4.34) et le Lemme 4.2.4, et on obtient

$$\begin{aligned}\left|f^{(s-1)}(z)-b_{s-1}\right| &= \left|\int_{z_0}^{z} f^{(s)}(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_0^\infty f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_r^{r_0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t + \int_{r_0}^{0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_r^{0} f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^r \left|f^{(s)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant r^\mu \quad \text{as } r\to 0,\end{aligned} \tag{4.36}$$

pour tout $\mu > 0$ et $z \in S(\varepsilon)$ avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$. Par le Lemme 4.2.5, nous avons terminé la preuve dans le cas $b_{s-1} \neq 0$. Si $b_{s-1} = 0$, on définit $a_{s-1} = \int_0^{r_0} f^{(s-1)}\left(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}t$ et $b_{s-2} = f^{(s-2)}(r_0) + a_{s-1}$ et en appliquant le Lemme 4.2.4 avec (4.36) on obtient que, pour tout $\mu > 0$ fixé,

$$\left|f^{(s-2)}(z)-b_{s-2}\right| \leqslant r^\mu \quad \text{as } r\to 0$$

pour $z \in S(\varepsilon)$ avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$. Par la même méthode, si $b_{s-1} = b_{s-2} = \ldots = b_{j+1} = 0$ et $b_j \neq 0, j \in \{0,\ldots,s-1\}$, on aura, pour tout fixe $\mu > 0$

$$\left|f^{(j)}(z)-b_j\right| \leqslant r^\mu \quad \text{as } r\to 0,$$

et

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leqslant r^\mu \quad \text{as } r\to 0 \text{ for all } m \geqslant j+1 \tag{4.37}$$

pour $z \in S(\varepsilon)$ avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$. Il reste maintenant à montrer que le cas $b_{s-1} = b_{s-2} = \ldots = b_0 = 0$ n'est pas possible. Dans ce cas, on a, pour tout $\mu > 0$ fixé

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leqslant r^\mu \quad \text{as } r\to 0 \tag{4.38}$$

pour $z \in S(\varepsilon)$ avec $r = |z| \in \Gamma_\theta$, pour tout $m \geqslant 0$ et tout $\mu > 0$, il existe $r_1(\mu, m) > 0$ tel que si $|z| = r < r_1$ alors $\left|f^{(m)}(z)\right| \leqslant |z|^\mu$. Maintenant on prend $z \in S(\varepsilon)$ tel que $r = |z| < r_2 = \min_{m=0,\ldots,s} r_1(\ u, m)$; on remarque ici que si z est fixé alors (4.38) n'est valide que pour certains $\mu > 0$ et pas pour tous les $\mu > 0$. De (4.1) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\frac{\left|f^{(s)}(z)\right|}{|f(z)|} \leqslant & \frac{1}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \frac{|A_{k-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \ldots + \frac{|A_{s+1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s+1)}}{f}\right| \\ & + \frac{|A_{s-1}(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f^{(s-1)}}{f}\right| + \ldots + \frac{|A_1(z)|}{|A_s(z)|}\left|\frac{f'}{f}\right| + \frac{|A_0(z)|}{|A_s(z)|}\end{aligned} \tag{4.39}$$

et en utilisant (4.6) et le Lemme 2.2.1 dans (4.39), on obtient

$$\frac{\left|f^{(s)}(z)\right|}{|f(z)|} \leqslant |z|^\mu, \tag{4.40}$$

et par (4.38) pour $m = 0$ dans (4.39), on obtient

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant |z|^{2\mu} \tag{4.41}$$

pour $|z| < r_2$ et $\arg(z) \in I(\varepsilon)\backslash E$, donc dans $S\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\right)$ d'après Lemme 4.2.4. En répétant le raisonnement de (4.36)-(4.38) avec (4.41), on obtient

$$|f(z)| \leqslant |z|^{2\mu},$$

et en combinant avec (4.40), on obtient

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant |z|^{3\mu},$$

dans $S\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2^2}\varepsilon\right)$. Inductivement, par le même raisonnement, aprés $(T-1)$ étapes, on obtient

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant |z|^{T\mu} \tag{4.42}$$

dans

$$S\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^{T-1}}\right) = S\left(2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{T-1}}\right)\right)$$

avec $|z| < r_2$. Ainsi, nous avons prouvé, dans ce cas particulier $b_{s-1} = b_{s-2} = \ldots = b_0 = 0$, que (4.42) est valide dans $S(2\varepsilon)$ pour tout $T \in \mathbb{N}$, pourvu que $|z| < r_2$. Fixons maintenant un segment de droite fini $L \subset S(2\varepsilon)$ avec $|z| < \min(1, r_2)$. En prenant $T \to \infty$ dans (4.42), $f^{(s)}(z)$ s'annule sur un tel segment de droite. Par conséquent, f doit être un polynôme; une contradiction.

4.6 Preuve du Théorème 4.1.4

Nous utiliserons la même méthode de la preuve du théorème 4.1.3. L'hypothèse (4.10) implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $r = |z| < \delta$, on a

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_s(z)|} \leqslant \varepsilon \exp\left(-\frac{\lambda}{r^\alpha}\right), \tag{4.43}$$

$$\frac{1}{|A_s(z)|} \leqslant \varepsilon \exp\left(-\frac{\lambda}{r^\alpha}\right).$$

Par les mêmes étapes (4.27)-(4.29) avec (4.43) et (4.6) , on peut prouver que $f^{(s)}(z)$ est bornée dans $S(\varepsilon)$; posons

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant M_1,$$

dans tout le secteur $S\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ assez petit. Comme ci-dessus, on peut prouver aussi que

$$|f(z)| \leqslant M_2.$$

En utilisant (4.43)-(4.6) dans (4.31), pour $r = |z| \in \gamma_0$ et $\arg(z) = \varphi \in I\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \backslash E$, on obtient

$$\left|f^{(s)}(z)\right| \leqslant \exp\frac{-\lambda+\tau}{r^{\alpha}},$$

où $0 < \tau < \lambda$. Pour $m > s$, comme ci-dessus, par (4.35) on obtient

$$\left|f^{(m)}(z)\right| \leqslant \exp\frac{-\lambda+\tau}{r^{\alpha}}$$

pour tout $z \in S(\varepsilon)$ avec $r = |z| \in \Gamma_\theta, 0 < \tau < \lambda$. En posant a_s et b_{s-1} comme ci-dessus et par le Lemme 4.2.5, on obtient

$$\left|f^{(s-1)}(z) - b_{s-1}\right| \leqslant \exp\frac{-\lambda+\tau}{r^{\alpha}}$$

quand $r = |z| \to 0$, où $0 < \tau < \lambda$. Par la même méthode utilisée dans la preuve du théorème 4.1.3, nous pouvons prouver l'impossibilité du cas $b_{s-1} = b_{s-2} = \ldots = b_0 = 0$.

Conclusion

Nous avons étudié la croissance et l'oscillation au voisinage du point singulier zéro de certaines classes d'équations différentielles linéaires à coefficients fonctions analytiques dans un disque épointé $D(0,R)$ en étendant ainsi d'une part des résultats de Belaidi dans le plan complexe $\mathbb{C}$ [3] et d'autre part des résultats de Cherief et Hamouda dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ [12, 13, 14, 15].

Il y a une question qui se pose dans ce sens :

Peut-on faire une étude pareil dans une couronne

$$D(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}?$$

Bibliographie

[1] I. Amemiya and M. Ozawa, *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J., 10 (1981), 1-17.

[2] S. Bank and I. Laine, *On the oscilation theory of* $f'' + A(z) f = 0$ *where* $A(z)$ *is entire,* Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 95-98.

[3] B. Belaidi, *Differential polynomials generated by solutions of second order non-homogeneous linear differential equations,* Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. Vol. 26 = 551 (2022), 139-153.

[4] B. Belaidi and K. Hamani, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients,* Electronic J. Differential. Equations 2003, (2003), No. 17, 1–12.

[5] B. Belaidi and S. Hamouda, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Differential Equations 2001 (2001), No. 61, pp. 1–5.

[6] L. Bieberbach, *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen,* Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1965.

[7] R. P. Boas, *Entire functions,* Academic Press Inc, New York, 1954.

[8] T-B. Cao and H-X. Yi, *The growth of solutions of linear complex differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 319 (2006) 278-294.

[9] Z. X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci, China Ser. A, 45 (2002), 290-300.

[10] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations*, Acta. Mathematica Scientia, 24 B (1) (2004), 52-60.

[11] Z.-X. Chen and C.-C. Yang, *Quantitative estimations on the zeros and growth of entire solutions of linear differential equations,* Complex Var. 42 (2000) 119–133.

[12] S. Cherief and S. Hamouda, *Growth of solutions of a class of linear differential equations near a singular point,* Kragujevac J. Math. Vol. 47(2) (2023), 187-201.

[13] S. Cherief and S. Hamouda, *Linear differential equations with analytic coefficients having the same order near a singular point,* Bull. Iranian Math. Soc. Vol 47 (2021), 1737–1749.

[14] S. Cherief and S. Hamouda, *Finite and infinite order of growth of solutions to linear differential equations near a singular point,* Math. Bohem., Vol. 145 (3) (2021), 1-18.

[15] S. Cherief and S. Hamouda, *Exponent of convergence of solutions to linear differential equations near a singular point,* Graduate J. Math. 6 (2021), 22-30.

[16] I. Chyzhykov, G. G. Gundersen and J. Heittokangas, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc. 86 (2003), No. 3, 735–754.

[17] H. Fettouch and S. Hamouda, *Growth of local solutions to linear differential equations around an isolated essential singularity,* Electron. J. Differential Equations, Vol 2016 (2016), No. 226, 1-10.

[18] M. Frei, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[19] G. G. Gundersen, *On the question of whether* $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ *can admit a solution* $f\not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 102A (1986), 9-17.

[20] G. G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates,* J. London Math. Soc. (2), 37 (1988), 88–104.

[21] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[22] S. Hamouda, *Properties of solutions to linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 177, pp. 1–8.

[23] S. Hamouda, *The possible orders of growth of solutions to certain linear differential equations near a singular point,* J. Math. Anal. Appl. 458 (2018), 992–1008.

[24] S. Hamouda, *Estimates of the logarithmic derivative near a singular point and applications*, Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet. Mat. Znan. Vol. 24, 542 (2020), 99-116.

[25] S. Hamouda, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc*, Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[26] S. Hamouda, *Finite and infinite order solutions of a class of higher order linear differential equations,* Aust. J. Math. Anal. Appl. 9 (2012), Article No. 10, 9 pages.

[27] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[28] W.K. Hayman, *The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method*, Canad. Math. Bull., 17, 317–358 (1974).

[29] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[30] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000), 1-54.

[31] W. P. Huang, J. L. Zhou, J. Tu and J. H. Ning, *On the hyper-order of solutions of two class of complex linear differential equations,* Adv. Difference Equ., (2015) 2015, No.234, 1-12.

[32] G. Jank and L. Volkmann, *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differential gleichungen,* Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

[33] L. Kinnunen; *Linear differential equations with solution of finite iterated order,* Southeast Asian Bull. Math. 22 (4) (1998) 1-8.

[34] A.Ya. Khrystiyanyn and A. A. Kondratyuk, *On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli*, Matematychni Studii 23 (1) (2005) 19–30.

[35] A. A. Kondratyuk and I. Laine, *Meromorphic functions in multiply connected domains,* in: Fourier Series Methods in Complex Analysis, in: Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., vol. 10, Univ. Joensuu, Joensuu, 2006, 9-111.

[36] K.H. Kwon, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations,* Kodai Math. J. 19 (1996) 378–387.

[37] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[38] I. Laine, *Complex differential equations*, Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, 4 (2008), 269-363.

[39] I. Laine and R. Yang, *Finite order solutions of complex linear differential equations*, Electron. J. Differential Equations 2004 (2004), Paper No. 65, pp. 1-8.

[40] E. L. Mark and Y. Zhuan, *Logarithmic derivatives in annulus,* J. Math. Anal. Appl. 356 (2009) 441-452.

[41] S. Mazouz and S. Hamouda, *Local growth and oscillation of solution of a class of linear differential equations in a punctured disc,* Int. J. Open Problems Complex Anal. Vol. 14 (1), (2022), 27-53.

[42] S. Mazouz and S. Hamouda, *Growth of solution to linear differential equations with analytic coefficients in a punctured disc,* Lobachevskii j. Math. Vol. 43 (8), (2022), 2230-2243.

[43] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen, Zweite Auflage. Reprint.Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[44] L. C. Shen, *Solution to a problem of S. Bank regarding the exponent of convergence of the solutions of the differential equation* $f'' + Af = 0$, Kexue Tongbao., 30 (1985) 1579-1585.

[45] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory,* Chelsea, New York, 1975, reprint of the 1959 edition.

[46] J. Tu, C-F. Yi; *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 487–497.

[47] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions,* Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

[48] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of second order linear differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 39–51.

[49] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations,* Abstract and Applied Analysis, Vol. 2009, ID 363927, 11 pages.

[50] J. M. Wittaker, *The order of the derivative of a meromorphic function,* J. London Math. Soc. 11 1936, 82-87, Jbuch 62, 357.

[51] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[52] L. Yang, *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.