REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
Département de Mathématiques et Informatique

Thèse de Doctorat Troisième Cycle

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Présentée par

MAHMOUDI Sofiane

THEME

Propriétés des solutions de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires dans le domaine complexe

Soutenue le 24/06/2024 devant le Jury

Mr. BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr.**	**U. Mostaganem**
Mr. SENOUSSAOUI Abderrahmane	**Examinateur**	**Pr.**	**U. Oran 1**
Mme. HAMANI Samira	**Examinateur**	**Pr.**	**U. Mostaganem**
Mr. HAMOUDA Saâda	**Encadreur**	**Pr.**	**U. Mostaganem**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes vifs remerciements à mon directeur de thèse Professeur HAMOUDA Saâda pour avoir accepté d'encadrer cette thèse, ainsi que pour son soutien, ses remarques pertinentes et son encouragement.

Je tiens à remercier Professeur BELAIDI Benharrat pour avoir accepté de présider le jury et aussi pour sa contribution à ma formation doctorale.

Je remercie vivement les examinateurs Professeur HAMANI Samira et Professeur SENOUSSAOUI Abderrahmane pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document et leurs remarques seront sans doute très utiles pour enrichir le manuscrit.

Je remercie toute ma famille pour son soutien tout le long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions la croissance des solutions de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires linéaires dont les coefficients sont des polynômes ou des fonctions entières transcendantes. Pour cela, nous utilisons la théorie de Rolf Nevanlinna et la théorie de Wiman-Valiron des fonctions entières avec un opérateur de dérivée fractionnaire convenable tel que l'opérateur de Caputo. Après l'adaptation des notions nécessaires et l'établissement des résultats préliminaires, nous donnons toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires à coefficients polynômiaux et pour le cas où les coefficients sont des fonctions entières transcendantes nous prouvons que toute solution non triviale est d'ordre infini avec une précision de l'hyper-ordre. Au dernier chapitre, nous introduisons la notion de la dérivée fractionnaire conforme pour établir des résultats bien précisés sur l'hyper-ordre.

Mots clés : Equations différentielles fractionnaires linéaires, la théorie de Nevanlinna, la théorie de Wiman-Valiron, l'ordre de la croissance des solutions, fonction entière, dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire conforme.

Abstract : In this thesis, we study the growth of solutions of certain classes of linear fractional differential equations whose coefficients are polynomials or transcendental entire functions. For that, we use the Nevanlinna theory and Wiman-Valiron theory of entire functions with a suitable fractional derivative operator such as the Caputo operator. After adapting the necessary notions and establishment of preliminary results, we give all possible values of the order of growth of the solutions of fractional differential equations with polynomial coefficients and for the case when the coefficients are transcendental entire functions we prove that every non trivial solution is of infinite order of growth with a precision of the hyper-order. In the last chapter, we introduce the notion of the conformal fractional derivative to establish precise results on the hyper-order.

Key words : Linear fractional differential equations, Nevanlinna theory, Wiman-Valiron theory, order of growth of solutions, entire function, Caputo fractional derivative, conformal fractional derivative.

ملخص : في هذه الأطروحة، نقوم بدراسة تزايد حلول فئات معينة من المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية التي تكون معاملاتها كثيرات الحدود أو دوال صحيحة متسامية. ولهذا نستخدم نظرية رولف نيفانلينا ونظرية ويمان فاليرون للدوال الصحيحة مع عامل مشتق كسري مناسب مثل عامل كابوتو. بعد تكييف المفاهيم اللازمة و تحضير النتائج الأولية، نقدم جميع القيم الممكنة لترتيب تزايد حلول المعادلات التفاضلية الكسرية ذات معاملات كثيرة الحدود وبالنسبة للحالة التي تكون فيها المعاملات دوال صحيحة متسامية نثبت أن جميع الحلول الغير المعدومة ذات ترتيب تزايد لا نهائي مع اعطاء تدقيق للتزايد الفائق. في الفصل الأخير، ندخل مفهوم فكرة المشتق الكسري المطابق لتحديد نتائج دقيقة على التزايد الفائق.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية، نظرية نيفانلينا، نظرية ويمان فاليرون، تزايد الحلول، الدوال الصحيحة، المشتق الكسري لكابوتو، المشتق الكسري المطابق.

Table des Matières

Introduction

L'analyse fractionnaire qui étudie la possibilité de définir des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier a acquis une popularité et une importance considérable au cour de ces trois dernières decennies; celà dû sans doute à ses applications multiples dans plusieurs domaines de la science et de l'ingénierie. En effet, il fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre beaucoup de problèmes impliquant les équations différentielles et intégrales ainsi que des fonctions spéciales de la physique mathématique, voir par exemple [16, 14, 31]. Il permet aussi de modéliser certains phénomènes qui n'étaient pas possible dans le calcul ordinaire classique.

D'autre côté, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée dans les années 1920's par le célèbre mathématicien Rolf Nevanlinna occupe une place centrale dans l'analyse complexe. Cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles à coefficients fonctions de variable complexe. Des recherches actives, dans ce sens, ont été déclenchés dans les années 1950's et 1960's par H. Wittich et ses étudiants. En 1968, Whitich a montré dans [41] que toutes les solutions de l'équation différentielle.

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = 0 \tag{1}$$

sont d'ordre fini, si et seulement si, tous les coefficients $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont des polynômes; (pour la définition de l'ordre de la croissance d'une fonction entière et méromorphe voir la page 06). Dans ce cas de coefficients polynômiaux, Gundersen et al. ont publié un article en 1998 dans lequel ils ont donné toutes les possibilités des valeurs de l'ordre de la croissance des solutions de (1); voir [18]. Un autre résultat classique dû à Frei [15] affirme que si p est le plus grand indice tel que $A_p(z)$ est une fonction entière transcendante, alors il existe au plus p solutions linéairement independantes d'ordre fini. Et depuis, beaucoups de résultats ont été realisés dans ce sens. Il y a eu des extensions vers le cas où les coefficients sont méromorphes ou analytiques dans le disque unité dans les années 2000 (voir par exemple [29, 30, 13, 5, 23, 25]) et recemment vers le voisinage d'un point singulier isolé fini (voir par exemple [26, 8, 9, 10, 11]).

Dans cette thèse nous allons étendre quelques résultats concernant la croissance des solutions de l'équation ordinaire (1) au cas des équations différentielles fractionnaires linéaires. Le premier défi que nous avons rencontré est le choix de type de dérivation fractionnaire qui nous permet d'aboutir cette aventure; étant donné qu'il y a plusieurs types de dérivations fractionnaires, et les plus célèbres que nous citerons ici sont les dérivations fractionnaires de Riemann-Liouville, de Grünwald-Letnikov et de Caputo; voir [36, 33, 37]. Tous ces types de dérivations sont définies sur l'axe réel. Il y a quelques approches de dérivations fractionnaires pour une fonction de variable complexe mais malheureusement elles ne sont pas utilles pour notre travail; voir par exemple [43]. D'autre part, Il est très connu que si les coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions entières, alors toutes les solutions de (1) sont également des fonctions entières, ce qui n'est pas garanti pour le cas fractionnaire. L'outil le plus util dans l'étude des équations ordinaires (1) est l'éstimation des dérivées logarithmiques

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|. \tag{2}$$

Dans [17], Gundersen a donné plusieurs estimations de (2) pour les fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. Recemment, Chyzhykov et Semochko ont généralisé le théorème de Wiman-Valiron, concernant les dérivées logarithmiques pour les fonctions entières, au cas fractionnaire, voir [12]. On doit signaler ici que le théorème de Wiman-Valiron est valable seulement au voisinage du point z où $f(z)$ atteint son maximum, ce qui réduit le champ de ses applications. On va voir comment on va surmonter tous ces entraves.

Cette thèse contient une introduction et cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques élément de la théorie de Nevanlinna et la théorie de Wiman-Valiron qui seront utils pour notre travail alors que le deuxiéme chapitre est réservé aux définitions nécessaires d'analyse fractionnaire que nous allons utiliser dans cette thèse. Le troisième chapitre qui est la première partie de notre travail consiste à étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires fractionnaires sous la forme

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n}f(z)+A_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}}f(z)+...+A_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1}f(z)+zA_0(z)f(z)=0$$

où les coefficients $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières, en utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo et des équations différentielles fractionnaires non-homogènes sous la forme

$$\begin{gathered}e^{-2i\theta}\mathcal{D}^2 f(z)+A_1(z)e^{-i\theta}\mathcal{D}^1 f(z)+B(z)\tfrac{r^\alpha}{z^{[\alpha]}}\mathcal{D}^\alpha f(z)\\ +A_0(z)f(z)=F(z).\end{gathered}$$

Dans le quatrième chapitre, on étudiera la croissance des solutions de quelques types d'équations différentielles fractionnaires linéaires sous la forme

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n}f(z)+P_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}}f(z)+...+P_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1}f(z)+P_0(z)f(z)=0$$

où $P_0(z)\not\equiv 0, P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ sont des polynômes tels que $P_0(0)=0$, avec certaines conditions. Le cinquième chapitre est une généralisation du chapitre précédent dans lequel nous déterminerons toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires à coefficients polynomiaux sous la forme précédente. Dans le sixième chapitre, on va introduire la notion de la dérivée fractionnaire conforme pour étudier la croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires linéaires sous la forme

$$D^{\alpha_n} f(z) + A_{n-1}(z) D^{\alpha_{n-1}} f(z) + ... + A_1(z) D^{\alpha_1} f(z) + A_0(z) f(z) = 0$$

où les coefficients sont des fonctions entières. Dans ce cas nous allons donner des valeurs précises sur l'hyper-ordre des solutions.

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 Fonction de comptage

Définition 1.1.1 *[27, 34, 42] Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$, situées dans le disque $|z| \leq t$ et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine et chaque pôle étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Posons*

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r, \quad (1.1)$$

$$\text{tel que } a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r. \quad (1.2)$$

$N(r, a, f)$ est appelée la fonction de comptage $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$.

1.1.2 Fonction de proximité

Définition 1.1.2 *[27, 34, 42] Soit f une fonction méromorphe non constante. Posons*

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \qquad a \neq \infty, \quad (1.3)$$

et
$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta; \tag{1.4}$$
où
$$\log^+ x=\max(\ln x,0)=\begin{cases}\ln x & x>1\\ 0 & 0<x\leq 1\end{cases} \tag{1.5}$$
pour tout $x>0$ réel. $m(r,a,f)$ est la fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

1.1.3 Fonction caractéristique

Définition 1.1.3 *[34, 27] On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction méromorphe f par*
$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f). \tag{1.6}$$

Exemple 1:

1. Pour la fonction $f(z)=e^z$, on a
$$\begin{cases} m\,(r,f)=\frac{r}{\pi},\\ N\,(r,f)=0\end{cases} \Longrightarrow T\,(r,f)=m(r,f)+N(r,f)=\frac{r}{\pi}.$$

2. Pour la fonction $f(z)=e^{3z^4}$, on a
$$\begin{cases} m(r,f)=3\frac{r^4}{\pi},\\ N(r,f)=0\end{cases} \Longrightarrow T(r,f)=3\frac{r^4}{\pi}.$$

Voici quelques propriétés de la fonction caractéristique $T(r,f)$.

Proposition 1.1.1 *[34, 27] Soient f_i $(i=1,...,n)$ des fonctions méromorphes et a,b,c,d des constantes complexes tels que $ad-bc\neq 0$. Alors*
1)
$$T(r,\prod_{i=1}^{n}f_i)\leq\sum_{i=1}^{n}T(r,f_i),\quad n\geq 1. \tag{1.7}$$
2)
$$T(r,f^n)=nT(r,f),\quad n\in\mathbb{N}^*. \tag{1.8}$$
3)
$$T(r,\sum_{i=1}^{n}f_i)\leq\sum_{i=1}^{n}T(r,f_i)+\ln n. \tag{1.9}$$
4)
$$T(r,\frac{af+b}{cf+d})=T(r,f)+O(1),\quad f\not\equiv\frac{-d}{c}. \tag{1.10}$$

Théorème 1.1.1 *[27] Si f est une fonction analytique pour $|z| \leq R$ et $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, alors*

$$T(r,f) \leq \log M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,f), \quad 0 \leq r < R. \tag{1.11}$$

Preuve : Puisque f n'a pas de pôles, on a pour r suffisamment grand

$$T(r,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \log^+ M(r,f) = \log M(r,f).$$

Pour la deuxième inégalité, nous utilisons la formule de Poisson-Jensen. De l'inégalité $|R^2 - \overline{a}z| \geq R|z-a|$ pour $|a| < R, r < R$ et pour $M(r,f) = f(z_0)$ où $z_0 = re^{i\theta}$ on a

$$\begin{aligned} \log|f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f(Re^{i\theta}) \right| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta - \sum_{|a_k|<R} \log \left| \frac{R^2 - \overline{a}_k z}{R(z-a_k)} \right| \\ &\leq \frac{R+r}{R-r} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| f(Re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{R+r}{R-r} T(R,f); \end{aligned}$$

il en résulte alors la deuxième inégalité

1.2 Ordre et type de la croissance d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.2.1 *[34, 27, 7] Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors l'ordre de la croissance de f est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Si f est d'ordre infini on introduit la notion de l'hyper-ordre qui donne plus de précision sur la croissance et elle est définie par

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.12}$$

Remarque 1.2.1 *Si f est une fonction entière non constante, alors d'aprés Théorème 1.1.1, on a*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.13}$$

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 1.2.2 *L'ordre d'une fonction entière définée par* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est égale à*

$$\sigma(f) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{-\log|a_n|};$$

voir [4].

Définition 1.2.2 *[34, 27] Soit f une fonction méromorphe non constante d'ordre fini σ. Le type de la croissance de f est défini par*

$$\tau_T(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{T(r,f)}{r^\sigma}.$$

Si f est une fonction entière non constante d'ordre fini σ, alors il y a un autre type de la croissance de f qui est défini par

$$\tau_M(f) = \limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log M(r,f)}{r^\sigma}.$$

Remarque 1.2.3 *En générale pour une fonction entière non constante d'ordre fini σ, les deux valeurs $\tau_T(f)$ et $\tau_M(f)$ ne sont pas égales comme le montre l'exemple suivant : pour $f(z) = e^z$ on a $T(r,f) = \frac{r}{\pi}$ et $M(r,f) = e^r$, d'où $\tau_T(f) = \frac{1}{\pi}$ et $\tau_M(f) = 1$.*

Proposition 1.2.1 *[34, 27] Soient f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

$$\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}, \tag{1.14}$$

et

$$\sigma(f\cdot g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}. \tag{1.15}$$

Si $\sigma(g) < \sigma(f)$, alors

$$\sigma(f+g) = \sigma(f\cdot g) = \sigma(f). \tag{1.16}$$

Exemple 2:

1. La fonction $f(z) = e^z$ est d'ordre $\sigma(e^z) = 1$.
2. Pour la fonction $f(z) = e^{P(z)}$, où $p(z) = a_p z^p + a_{p-1}z^{p-1} + ... + a_0$, on a $T(r,f) \sim \frac{|a_p|\, r^p}{\pi}$; par conséquent $\sigma(f) = p$.
3. Pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$, on a $\sigma\left(e^{e^z}\right) = \infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.
4. Si $f(z) = z^4 + z + z^3 e^z$, alors $\sigma(f) = \sigma(e^z) = 1$.
5. Pour $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^{2n}}$ on a $\sigma(g) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{2n\log n} = \frac{1}{2}$.

1.3 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.3.1 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt, \tag{1.17}$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Définition 1.3.2 *La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est donnée par*

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt. \tag{1.18}$$

Exemple 1.3.1 $E = [a, b] \subset [1, +\infty[; \quad m(E) = b - a, \; lm(E) = \ln b - \ln a.$

1.4 Lemmes des dérivées logarithmiques

Parmi les résultats remarquables de la théorie de Nevanlinna le résultat concernant les dérivées logarithmiques suivant.

Lemme 1.4.1 *[27] Soient f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ un entier positif. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log\left(rT\left(r, f\right)\right)\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie.
Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

1.5 Terme maximal et Indice central

Définition 1.5.1 *[28, 34] Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Il est clair que pour tout $r > 0$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge; alors pour tout $r > 0$ donné*

$$\lim |a_n| r^n = 0;$$

et donc le terme maximal

$$\mu\left(r\right) = \mu\left(r, f\right) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n \tag{1.19}$$

est bien défini.

Définition 1.5.2 *[28, 34] On définit l'indice central par*

$$V(r) = V(r, f) = \max_{n \geq 0} \{m : |a_m| r^m = \mu(r, f)\}. \tag{1.20}$$

Exemple 1.5.1 1. *Soit le polynôme*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0, a_n \neq 0.$$

Pour r assez grand, on a

$$\mu(r, p) = |a_n| r^n,$$

et donc

$$V(r, p) = n.$$

2. *Soit $f(z) = e^z$. On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Posons $a_n = \frac{1}{n!}$. On a*

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $U_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. Étudions la monotonie de la suite U_n. On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{r}{n+1}.$$

donc U_n est décroissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, c'est à dire $n > [r] - 1$, où le crochet $[.]$ désigne la partie entière. La suite (U_n) est croissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, c'est à dire $n < [r] - 1$, d'où

$$\mu(r, f) = \frac{1}{[r]!} r^{[r]};$$

et par suite

$$V(r, f) = [r].$$

Proposition 1.5.1 *[28, 34] Si f est une fonction entière d'ordre ρ, alors*

$$\rho = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log V(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log \mu(r, f)}{\log r}.$$

Preuve : On pose

$$\rho_1 = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log \log \mu(r, f)}{\log r} \quad , \quad \rho_2 = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log V(r, f)}{\log r}.$$

Si f est un polynome de degré n alors, il est évident que $\rho = \rho_1 = \rho_2$ car :

$f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $(a_n \neq 0)$ et $\mu(r,f) = a_n r^n$ $, V(r,f) = n$ d'où $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0$.

Supposons maintenant que f n'est pas polynome. On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |a_n| = 0$; donc pour r suffisament grand $\mu(r) = a_{v(r)} r^{v(r)} \leq r^{v(r)}$, ce qui implique immédiatement l'inégalité $\rho_1 \leq \rho_2$. Soit $0 < r < R$. Il est évident que

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{v(r)} = \frac{a_{v(r)} R^{v(r)}}{a_{v(r)} r^{v(r)}} \leq \frac{\mu(R)}{\mu(r)},$$

et pour r suffisament grand, on a

$$v(r) \log(\frac{R}{r}) \leq \log(\mu(R)) - \log(\mu(r)) \leq \log(\mu(R)).$$

Si on pose R=2r dans cette inégalité on trouve que

$$\frac{\frac{\log v(r) + \log\log(2)}{\log(r)}}{1 + \frac{\log(2)}{\log(r)}} = \frac{\frac{\log v(r) + \log\log(2)}{\log(r)}}{\frac{\log(r) + \log(2)}{\log(r)}} = \frac{\log v(r) + \log\log(2)}{\log(2r)} \leq \frac{\log\log(\mu(2r))}{\log(2r)}$$

alors $\rho_2 \leq \rho_1$; on en déduit que $\rho_1 = \rho_2$.
De l'inégalité $\mu(r) \leq M(r)$ on obtient $\rho \geq \rho_1$.

Il reste maintenant à montrer $\rho_1 \geq \rho$. Si $\rho_1 = \infty$ il n y a rien à prouver. Supposons dans la suite $\rho_1 < \infty$. Soit $0 < r < R$. On a

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{v(R)-1} |a_n| r^n + \sum_{n=v(R)}^{\infty} |a_n| r^n \\ &\leq \mu(r) v(R) + \sum_{n=v(R)}^{\infty} |a_n| r^n \frac{|a_{v(r)}| r^{v(r)} R^{n+v(R)}}{|a_{v(R)}| r^{v(R)} R^{n+v(R)}} \\ &\leq \mu(r) v(R) + \mu(r) \sum_{n=v(R)}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-v(R)} = \mu(r) \left(v(R) + \frac{R}{R-r}\right). \end{aligned}$$

Si on pose $R = 2r$ dans cette inégalité on trouve

$$M(r) \leq \mu(r) \left((2r)^{\rho_2+\epsilon} + 2\right) \leq \mu(r) (2r)^{\rho_2+2\epsilon}$$

ce qui implique $\rho_1 \geq \rho$; d'où les égalités

$$\rho = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log V(r,f)}{\log r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\log\log \mu(r,f)}{\log r}.$$

1.6 Théorème de Wiman-Valiron

Théorème 1.6.1 *[28, 34] Pour toute fonction entière $f \not\equiv 0$, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $q = 1, 2, ..., n$ on a*

$$\frac{f^{(q)}(z_r)}{f(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V(r)}{z_r} \right)^q, \tag{1.21}$$

quand $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_0$, où z_r est un point sur le cercle $|z| = r$ qui satisfait

$$|f(z_r)| = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < \infty.$$

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spéciales utiles pour notre travail, notamment la fonction Gamma, la fonction Béta et la fonction Mittag-Leffler. Ensuite, nous présenterons les définitions des dérivées fractionnaires nécessaires.

2.1 Fonctions spéciales

2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle des entiers naturels aux nombres réels, et même aux nombres complexes à parties réelles stictement positives.

Définition 2.1.1 *[36, 33, 37] La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

où z est un nombre complexe de partie réelle strictement positive $Re(z) > 0$. Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive. $\Gamma(z)$ est prolongée analytiquement sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$ sauf aux points $0, -1, -2, -3...$ qui sont des pôles simples.

La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qu'on peut démontrer par l'intégration par parties:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^{z} e^{-t} dt = \left[-t^{z} e^{-t}\right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

Ce qui montre que la fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle :

$$\Gamma(n+1) = n!, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple on a

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 2.1.1 *[36] (la formule asymptotique de Stirling)*

$$\Gamma(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left[1 + O(\frac{1}{z})\right], \, (|\arg(z)| < \pi, \;\; |z| \to \infty).$$

Le comportement asymtotique du quotient de deux fonctions Gamma à l'infini :

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \left[1 + O(\frac{1}{z})\right], \, (|\arg(z)| < \pi, \;\; |z| \to \infty). \tag{2.1}$$

2.1.2 La Fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 2.1.2 *[36, 33, 37] La fonction Bêta est définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \, (Re(p) > 0; \, Re(q) > 0) \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.1 *[36, 33, 37] La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \, Re(p) > 0, \, Re(q) > 0 \tag{2.3}$$

2.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z; joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par G. M. Mittag-Leffler en 1903.

Définition 2.1.3 *[36, 33, 37] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction Mittag-Leffler est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha z + 1)}, \, \alpha > 0. \tag{2.4}$$

Cas particuliers :

$$E_1(z) = e^z, \;\; E_2(z) = \cosh(\sqrt{z})$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi en 1953 - 1954 et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \;\; (\alpha > 0; \;\; \beta > 0).$$

Cas particuliers :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha, \;\; E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

2.2 Dérivées et intégrales fractionnaires

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$. On sait qu'une primitive de f qui s'annule en a est donnée comme suit :

$$I_a^1 f(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

La primitive seconde est

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(x)dx \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$I_a^2 f(t) = \int_a^t f(x)(t-x)dx.$$

De même, on a

$$I_a^3 f(t) = \frac{1}{2} \int_a^t f(x)(t-x)^2 dx.$$

Donc, par récurrence, on peut obtenir

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-n}} dx. \qquad (2.5)$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann a rendu compte que le second membre de (2.5) pourrait avoir un sens même quand n prend une valeur non entière; d'où il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 2.2.1 *[36, 33, 37] (L'intégrale fractionnaire)*
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$, l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \ t > a. \tag{2.6}$$

Cette intégrale est appelée intégrale fractionnaire à gauche sur $[a, b[$ de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque

1. Par convention :
$$I_a^0 f(t) = f(t)$$
ie $I_a^0 := I$ où I est l'opérateur d'identité

2. La linéarité:
$$I_a^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + I_a^\alpha g(t), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

3. Si f est continue sur l'intervalle $[a, b[$. Alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :
a) $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} I^\alpha f(t) = f(t)$
b) $I^\alpha(I^\beta f(t)) = I^\beta(I^\alpha f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t), \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$

Exemple 2.2.1 *Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, $t \in [a, b]$ et $\beta > -1$ alors on a :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(x-a)^\beta}{(t-x)^{1-\alpha}} dx.$$

En faisant le changement de variables $x = a + (t-a)s$, on obtient

$$I_a^\alpha f(t) = I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(t-a)^\beta s^\beta}{(t-a)^{1-\alpha}(1-s)^{1-\alpha}} (t-a) ds = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{s^\beta}{(1-s)^{1-\alpha}} ds$$

$$= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}.$$

En particulier si $a = 0$, on a

$$I_0^\alpha (t)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\beta+\alpha}$$

et si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $a = \beta = 0$, on a

$$I_0^{\frac{1}{2}} (t)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

et

$$I_0^{\frac{1}{2}} (t)^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{t^3}{\pi}}.$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1 *[36, 33, 37] La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f définie sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \ n-1 < \alpha < n, \ t > a.$$

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{0} f(t) = I_a^0 f(t) = f(t).$$

Remarque 2.3.1 *La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante : on a*

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.3.1 *La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $\beta > -1$ au sens de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Preuve : Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$, alors on a

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds$$

En faisant le changement de variable $x = a + (t-a)s$ on aura :

$$^{RL}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} (s)^{\beta} ds$$

$$= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

Exemple 2.3.2 *Pour la fonction $f(t) = t^{0.5}$, on a*

$$^{RL}\mathcal{D}_0^{0.5}(t^{0.5}) = \Gamma(0.5).$$

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.4.1 *[36, 33, 37] Soient $\alpha > 0$, $r > 0$. L'opérateur*

$$\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) = I_a^{n-\alpha} \mathcal{D}^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dr^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases} \tag{2.7}$$

définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Il est entendu que f doit être n fois continûment différentiable.

On note que

$$I_0^{\alpha} f(t) = I^{\alpha} f(t) \quad \text{et } \mathcal{D}_0^{\alpha} f(t) = \mathcal{D}^{\alpha} f(t)$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$\mathcal{D}_a^0 f(t) = f(t).$$

Proposition 2.4.1 *[36, 33, 37] Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et f une fonction continue tel que $\mathcal{D}^{\alpha} f$ existe, alors on a les propriétés suivantes :*
1)

$$\lim_{\alpha \longrightarrow n} \mathcal{D}^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t), \ \ et \lim_{\alpha \longrightarrow n-1} \mathcal{D}^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).$$

2) la dérivée de Caputo est linéaire, c'est à dire

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda \mathcal{D}^{\alpha} f(t) + \mathcal{D}^{\alpha} g(t), \ \ pour\ tout\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

3) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{D}^{\alpha} D^m f(t) = \mathcal{D}^{\alpha+m} f(t) \neq D^m \mathcal{D}^{\alpha} f(t).$$

Relation entre les dérivées fractionnaires aux sens de Caputo et Riemann-Liouville.

Théorème 2.4.1 *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+$, si $\mathcal{D}^{\alpha} f(t)$ et ${}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha} f(t)$ existent, alors on a*

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(t) =^{RL} \mathcal{D}^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0).$$

Preuve : On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction f en $t = 0$

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} + R_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}$$

avec

$$R_{n-1}=\int\limits_{0}^{t}\frac{f^{(n)}\left(s\right) }{(n-1)!}(t-s)^{n-1}ds$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n, on a :

$$R_{n-1}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_{0}^{t}f^{(n)}\left(s\right) \left(t-s\right) ^{n-1}ds=I^{n}f^{(n)}\left(t\right)$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville et la dérivée de la fonction $f(t)=t^{\beta}$ qui est donnée par :

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t)^{\beta-\alpha}$$

on obtient

$$^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right) =^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}t^{k}+R_{n-1}\right) =^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right) t^{k}+^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}R_{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}t^{k}+^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}R_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)}(t)^{k-\alpha}+^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}I^{n}f^{(n)}\left(t\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t)^{k-\alpha}+I^{n-\alpha}f^{(n)}\left(t\right) =\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t)^{k-\alpha}+\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right)$$

donc

$$\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right) =^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right) -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0)$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.4.1 *[36] Si $f^{(k)}(0)=0$ pour $k=0,1,2,...,n-1$ on oura*

$$\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right) =^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}f\left(t\right) .$$

Exemple 2.4.1 *1) La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle*

$$\mathcal{D}^{\alpha}C=0.$$

2) Pour la fonction $f(t)=t^{\beta}$ on a

$$\mathcal{D}^{\alpha}t^{\beta}=\left\{ \begin{array}{c} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t^{\beta-\alpha}),\ n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^{\ast},\ \beta>n-1,\ \beta\in\mathbb{R} \\ 0\quad ,\qquad n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^{\ast},\ \beta\leq n-1,\ \beta\in\mathbb{N} \end{array} \right\}$$

A titre d'exemple :

$$\mathcal{D}^{\alpha}t^{2}=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\alpha+1)}(t^{2-\alpha})=\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha},\ n-1<\alpha<n<3,$$

pour $\alpha=0.5$ on a :

$$\mathcal{D}^{0.5}t^{2}=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{t^{3}}\approx 1.5\sqrt{t^{3}}.$$

3) Pour $f(t)=e^{\lambda t},\lambda\in\mathbb{C}$, on a

$$\mathcal{D}^{\alpha}e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+n}t^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}=\lambda^{n}t^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$$

où $E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$ est la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres.

Remarque 2.4.1 *Considérons la fonction entière* $f(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_{j}z^{j}$, *tel que* $z=re^{i\theta}$. *En utilisant les propriétés de la dérivée fractionnaire de l'opérateur de Caputo, pour* $n-1<\alpha<n$, *on a*

$$\mathcal{D}^{\alpha}f\left(re^{i\theta}\right)=\sum_{j=n}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)}a_{j}r^{j-\alpha}e^{ij\theta} \tag{2.8}$$

$$r^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}f\left(re^{i\theta}\right)=\sum_{j=n}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)}a_{j}z^{j}.$$

Pour $\alpha=n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\mathcal{D}^{n}f(z)=\frac{d^{n}}{dr^{n}}f\left(re^{i\theta}\right)\neq\frac{d^{n}}{dz^{n}}f(z),$$

alors que

$$\frac{r^{n}}{z^{n}}\mathcal{D}^{n}f(z)=\frac{d^{n}}{dz^{n}}f(z).$$

Proposition 2.4.2 *[21] Les deux fonctions* $f(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_{j}z^{j}$ *et* $r^{\alpha}D^{\alpha}f(z)$ *ont le même rayon de convergence. Par conséquent, si* $f(z)$ *est une fonction entière, alors* $r^{\alpha}D^{\alpha}f(z)$ *est également une fonction entière.*

Chapitre 3

Croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires à coefficients fonctions entières

3.1 Introduction et résultats

Les équations différentielles fractionnaire sont devenues un outil très important pour la modélisation des phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie que la modélisation différentielle ordinaires traditionnelle ne peut pas accomplir (voir, par exemple, Kilbas [33]). Trois types de dérivées fractionnaires sont souvent utilisés, la dérivée de Grünwald Letnikov, la dérivée de Riemann Liouville et la dérivée de Caputo. Il y a de nombreuses discussions sur les propriétés de ces dérivées, voir [36, 33]. Toutes ces études sont limités sur la droite réelle. Dans ce travail, nous utiliserons la dérivée de Caputo.

Dans l'étude de la croissance des solutions de l'équation différentielle linéaire classique

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{3.1}$$

où les coefficients sont des fonctions entières, de nombreux auteurs se sont intéressés à la question suivante : quelles conditions sur les coefficients qui garantissent que chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ de (3.1) est d'ordre infini?

Dans la littérature, il existe de nombreux articles concernant cette question; voir par exemple [20, 3, 24, 22, 38]. Le principal outil utilisé dans cette étude est l'estimation de dérivées logarithmiques, voir [17]. Malheureusement, jusqu'à présent, il n'y a pas d'estimations similaires pour les dérivées fractionnaires sauf le théorème de Wiman-Valiron dans le calcul fractionnaire qui n'est valable que sur un voisinage des points z où la fonction atteint son maximum, voir [12]. Malgré cette obstruction, nous allons étudier la croissance des solutions de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires linéaires en utilisant l'opérateur de la dérivée fractionnaire de Caputo comme suivant.

Théorème 3.1.1 *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_{n-1}(z)$ *des fonctions entières et* $\rho > 0$, $\delta > 0$ *des constantes telles que* $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, ..., n-1\} < \rho$*; soient* $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$*. Supposons que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi)$ *il existe un ensemble* $\Gamma_\theta \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique infinie telle que pour tout* $r \in \Gamma_\theta$

$$\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\{\delta r^\rho\}. \tag{3.2}$$

Alors, chaque solution $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n} f(z) + A_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z) + ... + A_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1} f(z) + zA_0(z) f(z) = 0 \tag{3.3}$$

est une fonction entière d'ordre infini et de plus si $\sigma(A_0) < \infty$ *alors* $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

Corollaire 3.1.1 *Soient* $P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ *des polynômes et* $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$*. Alors, chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n} f(z) + P_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z) + ... + P_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1} f(z)$$
$$+ (\sin z + \sinh z) f(z) = 0$$

est une fonction entière d'ordre infini avec $\sigma_2(f) \leq 1$.

Théorème 3.1.2 *Soient* $A_1(z), B(z), A_0(z) \not\equiv 0$ *des fonctions entières et soient* $\rho > 0$, $\delta > 0$, $0 < \alpha < 1$ *tel que* $\max\{\sigma(A_0), \sigma(B)\} < \rho$ *et* $A_0(0) = 0$*. Supposons qu'il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle telle que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$

$$\left|A_1\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\{\delta r^\rho\} \tag{3.4}$$

quand $r \to +\infty$*. Alors chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$e^{-2i\theta}\mathcal{D}^2 f(z) + A_1(z) e^{-i\theta}\mathcal{D}^1 f(z) + B(z) r^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(z) + A_0(z) f(z) = 0 \tag{3.5}$$

est une fonction entière d'ordre infini et de plus si $\sigma(A_1) < \infty$ *alors* $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_1)$.

Théorème 3.1.3 *Soient* $A_1(z), B(z), A_0(z) \not\equiv 0, F(z)$ *des fonctions entières et soient* $\rho > 0$, $\delta > 0$, $0 < \alpha < 1$ *tel que* $\max\{\sigma(A_0), \sigma(B), \sigma(F)\} < \rho$ *et* $A_0(0) = 0$*. Supposons qu'il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle telle que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$

$$\left|A_1\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\{\delta r^\rho\} \tag{3.6}$$

quand $r \to +\infty$*. Alors chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle*

$$\begin{aligned} e^{-2i\theta}\mathcal{D}^2 f(z) + A_1(z) e^{-i\theta}\mathcal{D}^1 f(z) + B(z)\tfrac{r^\alpha}{z^{[\alpha]}}\mathcal{D}^\alpha f(z) \\ + A_0(z) f(z) = F(z) \end{aligned} \tag{3.7}$$

est une fonction entière d'ordre infini.

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *Soit f une fonction entière non constante et supposons que $|\mathcal{D}^1 f(z)|$ est non borné sur un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$. Alors il existe une suite infinie de points r_m $(m \geq 1)$, $r_m \to +\infty$, tel que $\left|\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \to +\infty$ et*

$$\left|\frac{\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{r_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \ (0 < \alpha < 1), \tag{3.8}$$

$$\left|\frac{f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq r_m + o(1), \tag{3.9}$$

quand $m \to +\infty$.

Preuve : Par définition on a

$$\mathcal{D}^\alpha f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^r \frac{\mathcal{D}^1 f\left(te^{i\theta}\right)}{(r-t)^\alpha} dt. \tag{3.10}$$

Puisque $\left|\mathcal{D}^1\left(r_m e^{i\theta}\right)\right|$ n'est pas borné, on peut construire une suite r_m $(m \geq 1)$, $r_m \to +\infty$, telle que $\left|\mathcal{D}^1\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \to +\infty$ et $\left|\mathcal{D}^1\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| = \max\left\{\left|\mathcal{D}^1\left(te^{i\theta}\right)\right| : t \in [0, r_m]\right\}$. par (3.10), on a

$$\left|\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r_m} \frac{\left|\mathcal{D}^1 f\left(te^{i\theta}\right)\right|}{(r_m - t)^\alpha} dt;$$

et alors

$$\left|\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{\left|\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{r_m} \frac{1}{(r_m - t)^\alpha} dt,$$

donc on obtient

$$\left|\frac{\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{r_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

En revanche, nous avons

$$f\left(re^{i\theta}\right) = f(0) + e^{i\theta} \int_0^r \mathcal{D}^1 f\left(te^{i\theta}\right) dt; \tag{3.11}$$

et alors

$$\left|f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \leq |f(0)| + \left|\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| r_m, \tag{3.12}$$

ce qui implique

$$\left|\frac{f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq o(1) + r_m, \ m \to +\infty.$$

Lemme 3.2.2 *Soit $f(z)$ une fonction entière et supposons que*

$$G\left(re^{i\theta}\right) := \frac{\log^+ \left|\mathcal{D}^1 f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^\rho} \tag{3.13}$$

est non bornée sur un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$; *où* $\alpha > 0$ *et* $\rho > 0$. *Alors, il existe une suite infinie de points* r_m $(m \geq 1)$, $r_m \to +\infty$, *tel que* $G\left(r_m e^{i\theta}\right) \to +\infty$ *et*

$$\left|\frac{\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{r_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \ (0 < \alpha < 1),$$

$$\left|\frac{f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq r_m + o(1).$$

Preuve : Si $G\left(re^{i\theta}\right)$ est non bornée sur un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$, alors nous pouvons voir immédiatement que $\left|\mathcal{D}^1 f\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est non bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. Donc, par le lemme 3.2.1, (3.8) et (3.9) sont vraies.

Du [17] et en tenant compte que $e^{-ni\theta}\mathcal{D}^n f(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)$, on obtient le lemme suivant.

Lemme 3.2.3 *[35] Soit f une fonction entière non constante d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$; soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors les deux assertion suivantes sont vraies.*
i) Il existe un ensemble $F \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $r \in (1, +\infty) \setminus F$ et pour les entiers k, j $(0 \leq k \leq j)$, on a

$$\left|\frac{\mathcal{D}^j f(z)}{\mathcal{D}^k f(z)}\right| \leq r^{(j-k)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{3.14}$$

ii) Il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E$ il existe une constante $r_0 = r_0(\theta) > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg(z) \in [0, 2\pi) \setminus E$ *et $r = |z| \geq r_0$ l'inégalité (3.14) est vraie.*

Lemme 3.2.4 *[12] Soit $f(z)$ une fonction entière, $\gamma > 0$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$ et z tel que $|z| = r$ et que*

$$|f(z)| > M(r, f)\, \nu(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de f. Alors il existe un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, c'est-à-dire $\int\limits_E \frac{dt}{t} < +\infty$, tel que

$$\frac{r^\gamma \mathcal{D}^\gamma f(z)}{f(z)} = (\nu(r))^\gamma (1 + o(1)) \tag{3.15}$$

pour $r \to +\infty$ et $r \notin E$.

Remarque 3.2.1 *Nous signalons ici que la dérivée fractionnaire utilisée dans la preuve du lemme 3.2.4 est l'opérateur de Riemann-Liouville et pour une fonction entière* $f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$ *on a*

$$\mathcal{D}_{RL}^{\alpha} f(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} a_j r^{j-\alpha} e^{ji\theta}. \tag{3.16}$$

D'après (2.8) et (3.16), on déduit immédiatement que la preuve du lemme 3.2.4 est aussi valable pour l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo.

Lemme 3.2.5 *[7] Soit* $f(z)$ *une fonction entière. Alors*

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log^{+} \nu(r)}{\log r} = \sigma(f)$$

et

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log^{+} \log^{+} \nu(r)}{\log r} = \sigma_2(f);$$

où $\nu(r)$ *est l'indice central de* f.

Lemme 3.2.6 *Soient* $A_0(z), A_1(z), ..., A_{n-1}(z)$ *des fonctions entières telles que*

$$\max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., n-1\} = \rho < +\infty;$$

soit $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$. *Alors, chaque solution* $f(z) \not\equiv 0$ *de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}} \mathcal{D}^{q_n} f(z) + A_{n-1}(z) \frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}} \mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z) + ... + A_1(z) \frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}} \mathcal{D}^{q_1} f(z) \tag{3.17}$$

$$+ z A_0(z) f(z) = 0.$$

est une fonction entière satisfaisant $\sigma_2(f) \leq \rho$.

Preuve : Par définition et l'hypothèse $\max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., n-1\} = \rho$, pour tout $\varepsilon > 0$, donné, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, \ j = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.18}$$

De (3.17) on peut écrire

$$\left| \frac{r^{q_n} \mathcal{D}^{q_n} f(z)}{f(z)} \right| \leq |A_{n-1}(z)| \, r^{[q_n]-[q_{n-1}]} \left| \frac{r^{q_{n-1}} \mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z)}{f(z)} \right| + .. \tag{3.19}$$

$$.. + |A_1(z)| \, r^{[q_n]-[q_1]} \left| \frac{r^{q_1} \mathcal{D}^{q_1} f(z)}{f(z)} \right| + r^{1+[q_n]} |A_0(z)|.$$

Du Lemme 3.2.4, (3.18) et (3.19), on obtient

$$(\nu(r))^{q_n}(1+o(1)) \leq cr^{[q_n]-[q_{n-1}]}(\nu(r))^{q_{n-1}} \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\},$$

où $c>0$ est une constante ; et puis

$$(\nu(r))^{q_n-q_{n-1}}(1+o(1)) \leq cr^{[q_n]-[q_{n-1}]} \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}. \tag{3.20}$$

Par Lemme 3.2.5 et (3.20) on obtient $\sigma_2(f) \leq \rho$.

Lemme 3.2.7 *[40] Soit f une fonction entière d'ordre fini $\sigma(f)$. Supposons qu'il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que*

$$\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq Mr^{\rho}$$

pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$ où M est une constante positive dépendant de θ, tandis que ρ est une constante positive indépendante de θ. Alors $\sigma(f) \leq \rho$.

Lemme 3.2.8 *Soient $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{n-1}(z)$ des fonctions entières telles que $A_0(0)=0$; soient $0<q_1<q_2<...<q_n$ des constantes réelles. Alors, toutes les solutions de*

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n}f(z)+A_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}}f(z)+...+A_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1}f(z)+A_0(z)f(z)=0$$

sont des fonctions entières.

Preuve : Nous utiliserons la méthode des séries entières. Posons $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $k-1<q_k<k$; $(k=1,2,..,n)$.
On a

$$\begin{aligned}
A_k(z)\frac{r^{q_k}}{z^{[q_k]}}\mathcal{D}^{q_k}f(z) &= A_k(z)\frac{r^{q_k}}{z^{k-1}}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}a_j r^{j-q_k}e^{ji\theta} \\
&= A_k(z)\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}a_j z^{j-k+1} \\
&= A_k(z)\sum_{j=k}^{+\infty}b_{k,j}a_j z^{j-k+1};
\end{aligned}$$

où $b_{k,j} = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}$. Puisque $A_0(0)=0$, on peut écrire $A_0(z) = z\widetilde{A}_0(z)$ et en divisant l'équation (3.3) par z on obtient

$$\sum_{j=n}^{+\infty}b_{n,j}a_j z^{j-n} + A_{n-1}(z)\sum_{j=n-1}^{+\infty}b_{n-1,j}a_j z^{j-n+1}+...$$

$$+A_1(z)\sum_{j=1}^{+\infty} b_{1,j}a_j z^{j-1} + \widetilde{A}_0(z)\sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j = 0.$$

Ce qui reste de cette méthode est bien connu : comme dans le cas classique des équations différentielles linéaires, par identification, on peut déterminer a_j $(j = n, n+1, ...)$ par les n premiers termes a_j $(j = 0, 1, ...n-1)$ puis nous concluons que les solutions globales de (3.3) sont des fonctions entières qui contiennent n paramètres.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Premièrement, d'après Lemme 3.2.8, toutes les solutions de (3.3) sont des fonctions entières. Si nous supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (3.3) avec $\sigma(f) < \rho$, alors par les hypothèses du Théorème 3.1.1 et en tenant compte que $\sigma(r^{q_i}\mathcal{D}^{q_i}f) = \sigma(f) < \rho$, on voit tout de suite que le terme $zA_0(z)f(z)$ est le seul terme dominant dans (3.3) qui conduit à une contradiction. Donc, $\sigma(f) \geq \rho$. Supposons maintenant que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. D'après le lemme 3.2.5, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_0$, on a

$$\nu(r) \leq r^{\sigma+\varepsilon};$$

et du Lemme 3.2.4, pour $r \notin E$ et $\arg z = \theta_0$, on a

$$\left|\frac{r^{\gamma}\mathcal{D}^{\gamma}f(z)}{f(z)}\right| \leq r^{\gamma(\sigma+\varepsilon)}. \tag{3.21}$$

Posons $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, ..., n-1\} = \rho_1$. Pour tout ε donné tel que $0 < \varepsilon < \rho - \rho_1$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\rho_1+\varepsilon}\right\},\ j = 1, ..., n-1. \tag{3.22}$$

De (3.3) on a

$$\begin{aligned}|A_0(z)| \leq r^{q_n-[q_n]-1}\left|\tfrac{\mathcal{D}^{q_n}f(z)}{f(z)}\right| + |A_{n-1}(z)|\, r^{q_{n-1}-[q_{n-1}]-1}\left|\tfrac{\mathcal{D}^{q_{n-1}}f(z)}{f(z)}\right| + ..\\ .. + |A_1(z)|\, r^{q_1-[q_1]-1}\left|\tfrac{\mathcal{D}^{q_1}f(z)}{f(z)}\right|.\end{aligned} \tag{3.23}$$

En combinant (3.21)-(3.23) avec (3.2), pour $r \in \Gamma_{\theta_0} \setminus E$ et $\arg z = \theta_0$, on obtient

$$\exp\{\delta r^{\rho}\} \leq r^{\gamma(\sigma+\varepsilon)}\exp\left\{r^{\rho_1+\varepsilon}\right\}. \tag{3.24}$$

Puisque $\varepsilon < \rho - \rho_1$, (3.24) conduit à une contradiction lorsque $r \to +\infty$. Donc $\sigma(f) = +\infty$.

Maintenant, si $\sigma(A_0) < \infty$ alors par les hypothèses on a

$$\max\{\sigma(A_j) : j = 0, ..., n-1\} = \sigma(A_0)$$

et du Lemme 3.2.6 on obtient $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Par la même méthode de la preuve du Lemme 3.2.8, on peut prouver que toutes les solutions de (3.5) sont des fonctions entières. Si on suppose que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (3.5) avec $\sigma(f) = \sigma < \rho$, alors par les hypothèses, on voit immédiatement que le terme $A_1(z)e^{-i\theta}D^1(z)$ est le seul terme dominant dans (3.5) qui conduit à une contradiction; d'où, $\sigma(f) \geq \rho$. Supposons maintenant que $\sigma(f) < \infty$. A partir de (3.5) on peut écrire

$$|A_1(z)| \leq \left|\frac{\mathcal{D}^2 f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| + |B(z)| \left|\frac{r^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| + |A_0(z)| \left|\frac{f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right|. \tag{3.25}$$

Posons $\max\{\sigma(A_0), \sigma(B)\} = \rho_1$. Pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \rho - \rho_1)$, on a

$$\max\{|A_0(z)|, |B(z)|\} \leq \exp\left\{r^{\rho_1+\varepsilon}\right\}. \tag{3.26}$$

D'après Lemme 3.2.3, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E$ il existe une constante $r_0 = r_0(\theta) > 0$ telle que pour tout z satisfaisant $\arg(z) \in [0, 2\pi)\backslash E$ et $r = |z| \geq r_0$ on a

$$\left|\frac{\mathcal{D}^2 f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| \leq r^{\sigma-1+\varepsilon}. \tag{3.27}$$

Nous allons prouver que $|\mathcal{D}^1 f(z)|$ est borné dans $[0, 2\pi)\backslash E$; pour celà on suppose au contraire que $\mathcal{D}^1 f(z)$ est non borné sur un rayon $argz = \theta \in [0, 2\pi)\backslash E$. Alors, d'après Lemme 3.2.1, il existe une suite infinie de points $r_m (m \geq 1), r_m \to +\infty$, telle que $|D^1 f(r_m e^{i\theta})| \to +\infty$ et

$$\left|\frac{\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{r_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \ (0 < \alpha < 1), \tag{3.28}$$

$$\left|\frac{f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq r_m + o(1). \tag{3.29}$$

En utilisant (3.26)-(3.29) et (3.4) dans (3.25), on obtient

$$\exp\{\delta r_m^\rho\} \leq c r_m^d \exp\left\{r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\}, \tag{3.30}$$

où $c > 0$, $d > 0$. Puisque $\varepsilon < \rho - \rho_1$, (3.30) conduit à une contradiction lorsque $m \to +\infty$. Alors, $\left|e^{i\theta}\mathcal{D}^1 f(z)\right|$ est borné dans $[0, 2\pi)\backslash E$. D'après le théorème de Phragmen-Lindelof $e^{i\theta}D^1 f(z)$ doit être constant dans tout le plan complexe ce qui implique que $f(z)$ est un polynôme de degré un, mais cela est impossible. Alors $\sigma(f) = +\infty$. Maintenant, si $\sigma(A_1) < \infty$, alors par les hypothèses on a $\max\{\sigma(A_0), \sigma(A_1), \sigma(B)\} = \sigma(A_1)$ et par Lemme 3.2.6 on a $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_1)$.

3.5 Preuve du Théorème 3.1.3

Toutes les solutions de (3.7) sont des fonctions entières. Supposons d'abord que $f(z) \not\equiv 0$ est solution de (3.7) avec $\sigma(f) = \sigma < \rho$. A partir de (3.7), on peut écrire

$$A_1(z) e^{-i\theta} \mathcal{D}^1 f(z) = F(z) - e^{-2i\theta} \mathcal{D}^2 f(z) - B(z) \frac{r^\alpha}{z^{[\alpha]}} \mathcal{D}^\alpha f(z) - A_0(z) f; \quad (3.31)$$

puis par les hypothèses, le côté gauche de (3.31) est d'ordre supérieur ou égal à ρ tandis que le côté droit de (3.31) est d'ordre strictement inférieur à ρ; ce qui est une contradiction. D'où $\sigma(f) \geq \rho$. Maintenant pour prouver que $\sigma(f) = \infty$ on suppose au contraire que $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Soit $\max\{\sigma(A_0), \sigma(B), \sigma(F)\} = \rho_1$. Pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \rho - \rho_1)$, on a

$$\max\{|A_0(z)|, |B(z)|, |F(z)|\} \leq \exp\left\{r^{\rho_1+\varepsilon}\right\}. \quad (3.32)$$

si on suppose que $\dfrac{\log^+ \left|\mathcal{D}^1 f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\rho_1+\varepsilon}}$ est non borné sur un rayon $\arg z = \theta \in [0, 2\pi) \setminus E$, alors par Lemme 3.2.2, il existe une suite infinie de points $r_m \ (m \geq 1), r_m \to +\infty$, tel que

$$\frac{\log^+ \left|\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right|}{r_m^{\rho_1+\varepsilon}} \to +\infty, \quad (3.33)$$

$$\left|\frac{\mathcal{D}^\alpha f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \frac{r_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (3.34)$$

et

$$\left|\frac{f\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq r_m + o(1). \quad (3.35)$$

D'après (3.33), pour tout nombre suffisamment grand $c > 1$ et pour $m \geq m_0$, on a

$$\left|\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\left\{c r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\}. \quad (3.36)$$

De (3.32) et (3.36), on obtient

$$\left|\frac{F\left(r_m e^{i\theta}\right)}{\mathcal{D}^1 f\left(r_m e^{i\theta}\right)}\right| \leq \exp\left\{(1-c) r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\} \to 0, \ m \to +\infty. \quad (3.37)$$

De l'équation (3.7), nous pouvons écrire

$$|A_1(z)| \leq \left|\frac{\mathcal{D}^2 f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| + |B(z)| \left|\frac{r^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| + |A_0(z)| \left|\frac{f(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right| + \left|\frac{F(z)}{\mathcal{D}^1 f(z)}\right|. \quad (3.38)$$

En utilisant (3.27)-(3.6) dans (3.38), on obtient

$$\exp\left\{\delta r_m^\rho\right\} \leq c' r_m^{d'} \exp\left\{r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\},$$

où $c' > 0$, $d' > 0$. Comme $\varepsilon < \rho - \rho_1$, (3.38) conduit à une contradiction quand $m \to +\infty$. D'où, $\frac{\log^+ \left|\mathcal{D}^1 f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{r^{\rho_1+\varepsilon}}$ est borné dans $[0, 2\pi) \setminus E$; et par conséquent

$$\left|\mathcal{D}^1 f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{M r_m^{\rho_1+\varepsilon}\right\}$$

où $M > 0$ est une constante. Par l'inégalité

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq |f(0)| + \int_0^r \left|\mathcal{D}^1 f\left(te^{i\theta}\right)\right| dt,$$

on obtient

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{\rho_1+2\varepsilon}\right\};$$

et du Lemme 3.2.7, on obtient $\sigma(f) \leq \rho_1 + 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$; d'où $\sigma(f) \leq \rho_1$ qui est une contradiction avec $\sigma(f) \geq \rho > \rho_1$. Donc nous concluons que $\sigma(f) = +\infty$.

Chapitre 4

Croissance des solutions d'une classe d'équations différentielles fractionnaires à coefficients polynomiaux

4.1 Introduction et résultats

Il est bien connu que toute solution f de l'équation différentielle linéaire

$$f^{(n)} + P_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + P_1(z) f' + P_0(z) f = 0 \tag{4.1}$$

où $P_0(z) \not\equiv 0, P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ sont des polynômes, est une fonction entière d'ordre rationnel fini $\sigma(f)$ satisfaisant

$$\sigma(f) \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\deg P_k}{n-k};$$

voir [32, 34, 41, 39]. Dans [19], Gundersen et al. ont donné toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions de (4.1). Comme cas particuliers, Belaidi et Hamani ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 4.1.1 *[2] Soient $P_0(z), P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ des polynômes non constants avec des degrés $d_k = \deg P_k(z)$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$.*
i) Si $\frac{d_0}{n} \geq \frac{d_k}{n-k}$ pour tous $k = 1, ..., n-1$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (4.1) satisfait $\sigma(f) = 1 + \frac{d_0}{n}$.
ii) Si $d_k < d_{n-1} - (n-k-1)$ pour tous $k = 0, ..., n-2$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (4.1) satisfait $\sigma(f) = 1 + d_{n-1}$.

Dans ce chapitre, nous étudierons la croissance des solutions de certaines classes d'équations différentielles fractionnaires linéaires en utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo.

Théorème 4.1.2 *Soient $P_0(z) \not\equiv 0, P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ des polynômes tels que $P_0(0) = 0$; soient $0 = q_0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n} f(z) + P_{n-1}(z)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{[q_{n-1}]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z) + ... + P_1(z)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1} f(z) + P_0(z) f(z) = 0 \tag{4.2}$$

sont des fonctions entières d'ordre de croissance $\sigma(f)$ satisfaisant

$$\sigma(f) \leq \max_{0 \leq k \leq n-1}\left\{\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}\right\}, \tag{4.3}$$

où $d_k = \deg P_k(z)$ et $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal au nombre réel x.

Corollaire 4.1.1 *Soient $P_0(z) \not\equiv 0, P_1(z), ..., P_n(z)$ des polynômes tels que $P_0(0) = 0$ et $0 < \alpha < 1$. Alors, chaque solution de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{n+\alpha}}{z^n}\mathcal{D}^{n+\alpha} f(z) + P_n(z)\frac{r^{n-1+\alpha}}{z^{n-1}}\mathcal{D}^{n-1+\alpha} f(z) + ... + P_2(z)\frac{r^{1+\alpha}}{z}\mathcal{D}^{1+\alpha} f(z) \tag{4.4}$$
$$+ P_1(z) r^\alpha \mathcal{D}^\alpha f(z) + P_0(z) f(z) = 0.$$

est une fonction entière d'ordre de croissance $\sigma(f)$ vérifiant

$$\sigma(f) \leq \max\left\{\frac{d_0 + n}{n+\alpha}, \frac{d_1 + n}{n}, \frac{d_2 + n - 1}{n-1}, ..., \frac{d_{n-1} + 2}{2}, d_n + 1\right\}.$$

Dans le théorème suivant, on donne la valeur précise de l'ordre de croissance des solutions de (4.2).

Théorème 4.1.3 *Supposons que nous avons les mêmes hypothèses du théorème 4.1.2.*
i) Si

$$\frac{d_0 + [q_n]}{q_n} = \max_{0 \leq k \leq n-1}\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}, \tag{4.5}$$

pour tout $k = 1, ..., n-1$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (4.2) est une fonction entière d'ordre de croissance

$$\sigma(f) = \frac{d_0 + [q_n]}{q_n}.$$

ii) Si

$$d_k - [q_k] < d_{n-1} - [q_{n-1}] \tag{4.6}$$

pour tous $k = 0, 1, ..., n-2$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (4.2) est une fonction entière d'ordre de croissance

$$\sigma(f) = \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}}. \tag{4.7}$$

Corollaire 4.1.2 *Soit $P_0(z) \not\equiv 0$ un polynôme de degré d_0 tel que $P_0(0) = 0$ et $\alpha > 0$. Alors chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle fractionnaire linéaire*

$$\frac{r^{\alpha}}{z^{[\alpha]}}\mathcal{D}^{\alpha} f(z) + P_0(z) f(z) = 0$$

est une fonction entière d'ordre de croissance

$$\sigma(f) = \frac{d_0 + [\alpha]}{\alpha}.$$

Corollaire 4.1.3 *Soit $0 < \alpha < \beta$; soient $P_0(z) \not\equiv 0$ et $P_1(z) \not\equiv 0$ des polynômes de degrés d_0 et d_1 respectivement tels que $P_0(0) = 0$ et $d_0 < d_1 - [\alpha]$. Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{\beta}}{z^{[\beta]}}\mathcal{D}^{\beta} f(z) + P_1(z)\frac{r^{\alpha}}{z^{[\alpha]}}\mathcal{D}^{\alpha} f(z) + P_0(z) f(z) = 0$$

est une fonction entière d'ordre de croissance

$$\sigma(f) = \frac{d_1 + [\beta] - [\alpha]}{\beta - \alpha}.$$

Exemple 4.1.1 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$r^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha} f(z) + z f(z) = 0, \tag{4.8}$$

où $0 < \alpha < 1$. Du Corollaire 4.1.2, chaque solution $f \not\equiv 0$ de (4.8) est une fonction entière d'ordre de croissance $\sigma(f) = \frac{d_0 + [\alpha]}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. Nous le confirmons en utilisant la méthode des séries entière. Soit $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_j z^j$. Du (4.8), on a

$$a_j = (-1)^j a_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\Gamma(k - \alpha + 1)}{\Gamma(k+1)}.$$

De la propriété asymptotique de la fonction Gamma au voisinage de l'infini, on a

$$\frac{\Gamma(j - \alpha + 1)}{\Gamma(j+1)} = j^{-\alpha}(1 + o(1)), \ j \to +\infty;$$

donc il existe $c > 0$, $j_0 > 0$ tel que

$$|a_j| = c j^{-(j - j_0)\alpha}(1 + o(1)), \ j \to +\infty;$$

et alors $\sigma(f) = \frac{1}{\alpha}$.

Exemple 4.1.2 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{\alpha}}{z}\mathcal{D}^{\alpha}f(z)+zf(z)=0, \tag{4.9}$$

où $1<\alpha<2$. *Du Corollaire 4.1.2, chaque solution* $f\not\equiv 0$ *de (4.9) est une fonction entière d'ordre de croissance* $\sigma(f)=\frac{d_0+[\alpha]}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}$. *En effet, les solutions de (4.9) sont sous la forme* $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}a_jz^j$ *tel que*

$$a_{2j}=(-1)^j a_0\prod_{k=1}^{j}\frac{\Gamma(2k-\alpha+1)}{\Gamma(2k+2)},\ j\geq 1,$$

$$a_{2j+1}=(-1)^j a_1\prod_{k=1}^{j}\frac{\Gamma(2k-\alpha+3)}{\Gamma(2k+3)},\ j\geq 1.$$

Soient $f_1(z)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}b_{2j}z^{2j}$, $f_2(z)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}b_{2j+1}z^{2j+1}$ *où* $b_{2j}=\frac{a_{2j}}{a_0}$ *et* $b_{2j+1}=\frac{a_{2j+1}}{a_1}$. *Ainsi* $\{f_1,f_2\}$ *forment l'ensemble fondamental des solutions de (4.9). Par la même méthode de l'exemple 4.1.1, on trouve que* $\sigma(f_1)=\sigma(f_2)=\frac{2}{\alpha}$. *Comme* $f_1(z)$ *et* $f_2(z)$ *sont linéairement indépendants, alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de (4.9) est une fonction entière d'ordre de croissance* $\sigma(f)=\frac{2}{\alpha}$.

4.2 Lemmes préliminaires

Pour la démonstration de nos résultat on a besoin des Lemme 3.2.5 et Lemme 3.2.4 du troixième chapitre et aussi les lemmes suivants.

Lemme 4.2.1 *[34] Soit* $P(z)=a_nz^n+...+a_0$ *un polynôme de degré* n. *Alors, pour tout* $\varepsilon>0$ *donné il existe* $r_0>0$ *tel que pour tout* $r=|z|>r_0$ *on a*

$$(1-\varepsilon)|a_n|r^n\leq|P(z)|\leq(1+\varepsilon)|a_n|r^n.$$

Lemme 4.2.2 *Soient* $P_0(z)\not\equiv 0, P_1(z),...,P_{n-1}(z)$ *des polynômes tel que* $P_0(0)=0$; *soient* $0<q_1<q_2<...<q_n$ *des constantes réelles. Alors, toutes les solutions de (4.2) sont des fonctions entières.*

Preuve : Nous allons utiliser la méthode des séries de puissance. Soit $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}a_jz^j$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $k-1<q_k<k$; $(k=1,2,..,n)$;

alors nous avons

$$
\begin{aligned}
P_k(z)\frac{r^{q_k}}{z^{[q_k]}}\mathcal{D}^{q_k}f(z) &= P_k(z)\frac{r^{q_k}}{z^{k-1}}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}a_j r^{j-q_k}e^{ji\theta} \\
&= P_k(z)\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}a_j z^{j-k+1} \\
&= P_k(z)\sum_{j=k}^{+\infty}b_{k,j}a_j z^{j-k+1};
\end{aligned}
$$

où $b_{k,j}=\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-q_k+1)}$. Puisque $P_0(0)=0$, On peut écrire $P_0(z)=z\widetilde{P}_0(z)$ puis en divisant l'équation (3.3) par z on obtient

$$
\sum_{j=n}^{+\infty}b_{n,j}a_j z^{j-n}+P_{n-1}(z)\sum_{j=n-1}^{+\infty}b_{n-1,j}a_j z^{j-n+1}+...
$$

$$
+P_1(z)\sum_{j=1}^{+\infty}b_{1,j}a_j z^{j-1}+\widetilde{P}_0(z)\sum_{j=0}^{+\infty}a_j z^j=0.
$$

Ce qu'il reste à cette méthode est bien connu : comme dans le cas classique des équations différentielles linéaires, par identification, on peut déterminer a_j $(j=n,n+1,....)$ par les premiers n termes a_j $(j=0,1,...n-1)$ puis nous concluons que les solutions globales de (4.2) sont des fonctions complètes qui contiennent n parametres.

4.3 Preuve du Théorème 4.1.2

D'après le lemme 4.2.2, toutes les solutions de (4.2) sont des fonctions entières. Pour montrer l'inégalité 4.3, on suppose au contraire qu'il existe une solution f de (4.2) d'ordre

$$
\sigma(f)>\max_{0\le k\le n-1}\left\{\frac{d_k+[q_n]-[q_k]}{q_n-q_k}\right\}, \tag{4.10}
$$

et nous prouvons que cela conduit à une contradiction. De (4.2), nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{r^{q_n}\mathcal{D}^{q_n}f(z)}{z^{[q_n]}f(z)}\right| &\le |P_{n-1}(z)|\left|\frac{r^{q_{n-1}}\mathcal{D}^{q_{n-1}}f(z)}{z^{[q_{n-1}]}f(z)}\right|+... \\
&+|P_1(z)|\left|\frac{r^{q_1}\mathcal{D}^{q_1}f(z)}{z^{[q_1]}f(z)}\right|+|P_0(z)|.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Du Lemme 4.2.1, il existe $c_j>0$ et $r_a\ge 0$ telle que pour tout $r\ge r_a$ on a

$$
|P_j(z)|\le c_j r^{d_j}. \tag{4.12}
$$

D'après Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour $r \to +\infty$ et $r \notin E$, on a

$$\left|\frac{r^{q_k}\mathcal{D}^{q_k} f(z)}{f(z)}\right| = (\nu(r))^{q_k}(1 + o(1)), \ (j = 1, ..., n) \tag{4.13}$$

En utilisant (4.12)-(4.13) dans (4.11), on obtient

$$\frac{1}{r^{[q_n]}}(\nu(r))^{q_n}(1 + o(1)) \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k r^{d_k} \frac{1}{r^{[q_k]}}(\nu(r))^{q_k}(1 + o(1)). \tag{4.14}$$

Du Lemme 3.2.5, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $r_b \geq 0$ telle que pour tout $r \geq r_b$ on a

$$\nu(r) \leq r^{\sigma+\varepsilon}, \tag{4.15}$$

où $\sigma(f) = \sigma$. Par contre pour $\varepsilon > 0$, il existe une suite $r_m \to +\infty$ quand $m \to +\infty$ telle que

$$\nu(r_m) \geq r_m^{\sigma-\varepsilon}, \tag{4.16}$$

Combinant (4.15)-(4.16) avec (4.14), on a

$$\frac{1}{2} r_m^{q_n(\sigma-\varepsilon)} \leq 2\sum_{k=0}^{n-1} c_k r_m^{[q_n]-[q_k]} r_m^{d_k} r_m^{q_k(\sigma+\varepsilon)};$$

ce qui implique

$$1 \leq 4\sum_{k=0}^{n-1} c_k r_m^{[q_n]-[q_k]-q_n(\sigma-\varepsilon)+d_k+q_k(\sigma+\varepsilon)}. \tag{4.17}$$

Maintenant, nous prouvons que toutes les puissances de r_m dans (4.17) sont négatifs lorsque $m \to +\infty$. De (4.10), il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\sigma - \max_{0 \leq k \leq n-1}\left\{\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}\right\} > \beta\varepsilon \tag{4.18}$$

où β est une constante telle que $\beta > \max_{0 \leq k \leq n-1}\left\{\frac{q_n+q_k}{q_n-q_k}\right\}$. On a

$$[q_n]-[q_k]-q_n(\sigma-\varepsilon)+d_k+q_k(\sigma+\varepsilon) = (q_n - q_k)\left(\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k} - \sigma\right) + (q_n + q_k)\varepsilon. \tag{4.19}$$

De (4.18), on a

$$(q_n - q_k)\left(\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k} - \sigma\right) + (q_n + q_k)\varepsilon < 0;$$

par conséquent, une contradiction s'ensuit dans (4.17) quand $m \to +\infty$.

4.4 Preuve du Théorème 4.1.3

i) D'après le lemme 4.2.2, toutes les solutions de (4.2) sont des fonctions entières. Du théorème 4.1.2 et l'hypothèse (4.5), on a $\sigma(f) \leq \frac{d_0+[q_n]}{q_n}$. Il reste à prouver l'inégalité inverse $\sigma(f) \geq \frac{d_0+[q_n]}{q_n}$. On suppose au contraire que $\sigma(f) < \frac{d_0+[q_n]}{q_n}$ et nous prouvons que cela conduit à une contradiction. Soit $\sigma = \sigma(f) = \frac{d_0+[q_n]}{q_n} - 2\varepsilon, \ (\varepsilon > 0)$. De (4.2), nous pouvons écrire

$$|P_0(z)| \leq \left|\frac{r^{q_n}\mathcal{D}^{q_n} f(z)}{z^{[q_n]} f(z)}\right| + |P_{n-1}(z)| \left|\frac{r^{q_{n-1}}\mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z)}{z^{[q_{n-1}]} f(z)}\right| + ... + |P_1(z)| \left|\frac{r^{q_1}\mathcal{D}^{q_1} f(z)}{z^{[q_1]} f(z)}\right|. \tag{4.20}$$

Par Lemme 4.2.1, il existe $c > 0$ et $r_a > 0$ telle que pour tout $r \geq r_a$ on a

$$|P_0(z)| \geq cr^{d_0}. \tag{4.21}$$

En utilisant (4.12), (4.13), (4.15) et (4.21) dans l'inégalité (4.20), pour r assez grand, on obtient

$$cr^{d_0} \leq r^{q_n(\sigma+\varepsilon)-[q_n]} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k r^{d_k+q_k(\sigma+\varepsilon)-[q_k]};$$

ce qui implique

$$c \leq r^{q_n(\sigma+\varepsilon)-[q_n]-d_0} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k r^{d_k+q_k(\sigma+\varepsilon)-[q_k]-d_0}. \tag{4.22}$$

Maintenant, nous allons prouver que toutes les puissances de r dans (4.22) sont négatifs. Depuis $\sigma = \frac{d_0+[q_n]}{q_n} - 2\varepsilon$, nous avons d'abord

$$q_n(\sigma+\varepsilon) - [q_n] - d_0 = q_n\left(\frac{d_0+[q_n]}{q_n} - \varepsilon\right) - [q_n] - d_0 = -q_n\varepsilon. \tag{4.23}$$

Deuxièmement, en tenant compte de l'hypothèse (4.5), on a

$$\begin{aligned} d_k + q_k(\sigma+\varepsilon) - [q_k] - d_0 &= d_k + q_k\left(\frac{d_0+[q_n]}{q_n} - \varepsilon\right) - [q_k] - d_0 \\ &= \frac{d_k+[q_n]-[q_k]}{q_n-q_k}(q_n-q_k) + q_k\left(\frac{d_0+[q_n]}{q_n} - \varepsilon\right) - [q_n] - d_0 \\ &\leq \frac{d_0+[q_n]}{q_n}(q_n-q_k) + q_k\left(\frac{d_0+[q_n]}{q_n} - \varepsilon\right) - [q_n] - d_0 \leq -q_k\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Ainsi, une contradiction s'ensuit lorsque $r \to +\infty$ dans (4.22); et alors la preuve de i) est terminée.

ii) De l'hypothèse (4.6), on a

$$\frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k} < \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}} \tag{4.25}$$

pour chaque $k = 0, 1, ..., n-2$; et d'après le Théorème 4.1.2, on obtient

$$\sigma(f) \leq \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}}.$$

Pour l'inégalité inverse on suppose au contraire que

$$\sigma(f) < \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}}$$

et nous prouvons que cela conduit à une contradiction. Posons

$$\sigma = \sigma(f) = \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}} - \lambda\varepsilon, \tag{4.26}$$

où λ est une constante quelconque telle que $\lambda > \frac{q_n + q_{n-1}}{q_n - q_{n-1}}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit. De (4.2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |P_{n-1}(z)| \left| \frac{r^{q_{n-1}} \mathcal{D}^{q_{n-1}} f(z)}{z^{[q_{n-1}]} f(z)} \right| \leq \left| \frac{r^{q_n} \mathcal{D}^{q_n} f(z)}{z^{[q_n]} f(z)} \right| + |P_{n-2}(z)| \left| \frac{r^{q_{n-2}} \mathcal{D}^{q_{n-2}} f(z)}{z^{[q_{n-2}]} f(z)} \right| + ... \\ + |P_1(z)| \left| \frac{r^{q_1} \mathcal{D}^{q_1} f(z)}{z^{[q_1]} f(z)} \right| + |P_0(z)|. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En utilisant (4.13), Lemme 3.2.5, Lemme 4.2.1, (4.15) et (4.16) dans (4.27), on obtient

$$c_{n-1} r_m^{d_{n-1} + q_{n-1}(\sigma - \varepsilon) - [q_{n-1}]} \leq r_m^{q_n(\sigma + \varepsilon) - [q_n]} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k r_m^{d_k + q_k(\sigma + \varepsilon) - [q_k]};$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{1}{c_{n-1}} r_m^{q_n(\sigma+\varepsilon) - [q_n] - d_{n-1} - q_{n-1}(\sigma - \varepsilon) + [q_{n-1}]} + \\ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_k}{c_{n-1}} r_m^{d_k + q_k(\sigma + \varepsilon) - [q_k] - d_{n-1} - q_{n-1}(\sigma - \varepsilon) + [q_{n-1}]}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Comme ci-dessus, on prouve que toutes les puissances de r_m de (4.28) sont négatifs. Par (4.26), on a

$$\begin{aligned} q_n(\sigma + \varepsilon) - [q_n] - d_{n-1} - q_{n-1}(\sigma - \varepsilon) + [q_{n-1}] &= (q_n + q_{n-1})\varepsilon + \\ (q_n - q_{n-1}) \left(\sigma - \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}} \right) &= -\lambda\varepsilon (q_n - q_{n-1}) + (q_n + q_{n-1})\varepsilon \\ &= [(q_n + q_{n-1}) - \lambda(q_n - q_{n-1})]\varepsilon < 0. \end{aligned}$$

Aussi, à partir de l'hypothèse (4.6), on a

$$\begin{array}{rcl} d_k + q_k\,(\sigma+\varepsilon) - [q_k] - d_{n-1} - q_{n-1}\,(\sigma-\varepsilon) + [q_{n-1}] & < & q_k\,(\sigma+\varepsilon) - q_{n-1}\,(\sigma-\varepsilon) \\ & < & (q_k - q_{n-1})\,\sigma + (q_n + q_{n-1})\,\varepsilon \\ & < & 0, \end{array}$$

pour $0 < \varepsilon < \frac{(q_{n-1}-q_k)\sigma}{q_n+q_{n-1}}$. Alors, (4.28) conduit à une contradiction lorsque $r_m \to +\infty$; ce qui achève la preuve de ii).

Chapitre 5

Ordres possibles de croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires à coefficients polynomiaux

5.1 Introduction et résultats

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires linéaires suivantes

$$\begin{array}{c} \frac{r^{q_n}}{z^{[q_n]}}\mathcal{D}^{q_n}f\left(z\right)+P_{n-1}\left(z\right)\frac{r^{q_{n-1}}}{z^{\left[q_{n-1}\right]}}\mathcal{D}^{q_{n-1}}f\left(z\right)+...+P_1\left(z\right)\frac{r^{q_1}}{z^{[q_1]}}\mathcal{D}^{q_1}f\left(z\right) \\ +P_0\left(z\right)f\left(z\right)=0 \end{array} \tag{5.1}$$

où $P_0(z)\not\equiv 0, P_1\left(z\right), ..., P_{n-1}\left(z\right)$ des polynômes tels que $P_0\left(0\right)=0$ et $0=q_0<q_1<q_2<...<q_n$ et nous avons prouvé que toutes les solutions sont des fonctions entières d'ordre de croissance $\sigma\left(f\right)$ satisfaisant

$$\sigma\left(f\right)\leq\max_{0\leq k\leq n-1}\left\{\frac{d_k+[q_n]-[q_k]}{q_n-q_k}\right\}, \tag{5.2}$$

où $d_k=\deg P_k\left(z\right)$ et $[x]$ est la partie entière du nombre réel x. Nous avons également établi dans le même chapitre les assertions suivantes :

(i) Si

$$\frac{d_0+[q_n]}{q_n}=\max_{0\leq k\leq n-1}\frac{d_k+[q_n]-[q_k]}{q_n-q_k},$$

pour tous $k=1,...,n-1$, alors toute solution $f\not\equiv 0$ de (5.1) est une fonction entière d'ordre de croissance

$$\sigma\left(f\right)=\frac{d_0+[q_n]}{q_n}.$$

(ii) Si
$$d_k - [q_k] < d_{n-1} - [q_{n-1}]$$
pour tous $k = 1, ..., n-2$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (5.1) est une fonction entière d'ordre de croissance
$$\sigma(f) = \frac{d_{n-1} + [q_n] - [q_{n-1}]}{q_n - q_{n-1}}.$$
La question qui se pose ici : quels sont toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions de (5.1) ? On va répondre à cette question dans ce chapitre.

Pour rappel, Dans [19], Gundersen et al. ont donné toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions de l'équation différentielle ordinaire linéaire
$$f^{(n)} + P_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + P_1(z) f' + P_0(z) f = 0, \tag{5.3}$$
où $P_0(z) \not\equiv 0, P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ des polynômes.

On va suivre la même méthode utilisée dans [20] avec les modifications nécessaires. Posons $d_j = \deg P_j$. On définit une suite finie strictement décroissante d'entiers non négatifs
$$s_1 > s_2 > ... > s_p \geq 0,$$
de la manière suivante; nous choisissons s_1 l'entier unique satisfaisant
$$\begin{aligned} \frac{d_{s_1} + [q_n] - [q_{s_1}]}{q_n - q_{s_1}} &= \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}; \text{ et} \\ \frac{d_{s_1} + [q_n] - [q_{s_1}]}{q_n - q_{s_1}} &> \frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k} \text{ pour tout } 0 \leq k < s_1 \end{aligned} \tag{5.4}$$
Après la détermination de $s_j,\ j \geq 1$, nous définissons s_{j+1} l'entier unique satisfaisant
$$\frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j} + [q_{s_j}] - [q_{s_{j+1}}]}{q_{s_j} - q_{s_{j+1}}} = \max_{0 \leq k < s_j} \frac{d_k - d_{s_j} + [q_{s_j}] - [q_k]}{q_{s_j} - q_k} > 0; \text{ et} \tag{5.5}$$
$$\frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j} + [q_{s_j}] - [q_{s_{j+1}}]}{q_{s_j} - q_{s_{j+1}}} > \frac{d_k - d_{s_j} + [q_{s_j}] - [q_k]}{q_{s_j} - q_k} \text{ pour tout } 0 \leq k < s_{j+1}.$$
Pour un certain p, l'entier s_p existera, mais l'entier s_{p+1} n'existera pas, et alors la suite $s_1, s_2, ..., s_p$ se termine par s_p. Évidemment, $p \leq n$.

De même, pour $j = 1, 2, ..., p$, on définit les valeurs suivantes
$$\alpha_j = \frac{d_{s_j} - d_{s_{j-1}} + [q_{s_{j-1}}] - [q_{s_j}]}{q_{s_{j-1}} - q_{s_j}}, \tag{5.6}$$
où nous posons
$$s_0 = n \text{ et } d_{s_0} = d_n = 0.$$

Nous mentionnons que nous pouvons définir les nombres entiers $s_1, s_2, ..., s_p$ dans (5.4) et (5.5) de la manière suivante:

$$s_1 = \min\left\{i : \frac{d_i + [q_n] - [q_i]}{q_n - q_i} = \max_{0\le k\le n-1} \frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}\right\}; \qquad (5.7)$$

donné $s_j,\ j \ge 1$, on a

$$s_{j+1} = \min\left\{i : \frac{d_i - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_i]}{q_{s_j} - q_i} = \max_{0\le k< s_j} \frac{d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k]}{q_{s_j} - q_k} > 0\right\}. \quad (5.8)$$

Proposition 5.1.1 *Si $s_1 \ge 1$ et $p \ge 2$, alors les inégalités suivantes sont vraies*

$$\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p \ge \frac{1}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}} \ge \frac{1}{q_{s_1} - q_{s_p}} \ge \frac{1}{q_{s_1}}.$$

Preuve : D'abord, nous prouvons $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p$. D'après les définitions de s_j et α_j on obtient pour $j = 1, 2, ..., p-1$,

$$s_j > s_{j+1} \text{ et } \frac{d_{s_j} - d_{s_{j-1}} + \left[q_{s_{j-1}}\right] - \left[q_{s_j}\right]}{q_{s_{j-1}} - q_{s_j}} > \frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_{j-1}} + \left[q_{s_{j-1}}\right] - \left[q_{s_{j+1}}\right]}{q_{s_{j-1}} - q_{s_{j+1}}},$$

qui donne

$$-\left(d_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]\right) q_{s_{j+1}} - \left(d_{s_{j-1}} - \left[q_{s_{j-1}}\right]\right)\left(q_{s_j} - q_{s_{j+1}}\right) >$$
$$\left(d_{s_{j+1}} - \left[q_{s_{j+1}}\right]\right)\left(q_{s_{j-1}} - q_{s_j}\right) - \left(d_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]\right) q_{s_{j-1}} \quad (5.9)$$

Ajouter $\left(d_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]\right) q_{s_j}$ aux deux côtés de (5.9) donne

$$\left(d_{s_j} - d_{s_{j-1}} + \left[q_{s_{j-1}}\right] - \left[q_{s_j}\right]\right)\left(q_{s_j} - q_{s_{j+1}}\right) >$$
$$\left(d_{s_{j+1}} - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - \left[q_{s_{j+1}}\right]\right)\left(q_{s_{j-1}} - q_{s_j}\right)$$

nous obtenons immédiatement $\alpha_j > \alpha_{j+1}$. Cela prouve que

$$\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p.$$

de la définition de s_j on a $s_j > s_{j+1}$ et alors $q_{s_j} > q_{s_{j+1}}$ ce qui implique

$$\frac{1}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}} \ge \frac{1}{q_{s_1} - q_{s_p}} \ge \frac{1}{q_{s_1}}$$

et donc pour achever la preuve, il suffit de prouver que

$$\alpha_p \ge \frac{1}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}}.$$

On a

$$\frac{d_{s_p} - d_{s_{p-1}} + \left[q_{s_{p-1}}\right] - \left[q_{s_p}\right]}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}} > 0;$$

alors

$$d_{s_p} - d_{s_{p-1}} + \left[q_{s_{p-1}}\right] - \left[q_{s_p}\right] \geq 1$$

car

$$q_{s_{p-1}} - q_{s_p} > 0 \text{ et } d_{s_p} - d_{s_{p-1}} + \left[q_{s_{p-1}}\right] - \left[q_{s_p}\right] \in \mathbb{N}^*;$$

donc

$$\alpha_p = \frac{d_{s_p} - d_{s_{p-1}} + \left[q_{s_{p-1}}\right] - \left[q_{s_p}\right]}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}} \geq \frac{1}{q_{s_{p-1}} - q_{s_p}}.$$

Théorème 5.1.1 *Considérons l'équation (5.1) avec $P_0(0) = 0$. Alors toute solution transcendante f de (5.1) est d'ordre de croissance $\rho(f) = \alpha_j$ pour certains j, $1 \leq j \leq p$; où α_j est défini en (5.6).*

Exemple 5.1.1 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{\alpha}}{z^{[\alpha]}} \mathcal{D}^{\alpha} f(z) + z f(z) = 0, \tag{5.10}$$

où $n-1 < \alpha < n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Dans ce cas $s_1 = s_p = 0$, et alors il n'existe que la valeur $\alpha_1 = \frac{d_0 - d_1 + [\alpha] - [0]}{\alpha - 0} = \frac{n}{\alpha}$. Alors, d'après le théorème 5.1.1 toute solution transcendante f de (5.10) est une fonction entière d'ordre de croissance $\sigma(f) = \alpha_1 = \frac{n}{\alpha}$. Les deux cas $n = 1$ et $n = 2$ sont confirmés dans [21] par la méthode des séries de puissance.

Exemple 5.1.2 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{2.3}}{z^2} \mathcal{D}^{2.3} f(z) + z^2 \frac{r^{1.8}}{z} \mathcal{D}^{1.8} f(z) + z^2 r^{0.5} \mathcal{D}^{0.5} f(z) + z \mathcal{D} f(z) = 0. \tag{5.11}$$

On a $s_1 = 2$ et $s_2 = 1 = s_p$. Alors $\alpha_1 = 6$ et $\alpha_2 = \frac{1}{1.3} = \frac{10}{13}$. D'après Théorème 5.1.1, toute solution transcendante f de (5.11) est une fonction entière d'ordre de croissance $\sigma(f) = 6$ ou $\sigma(f) = \frac{10}{13}$.

Corollaire 5.1.1 *Considérons l'équation (5.1) avec $P_0(0) = 0$. Alors toute solution transcendante f de (5.1) est d'ordre de croissance $\sigma(f)$ satisfaisant*

$$\sigma(f) \geq \frac{1}{q_n}. \tag{5.12}$$

En fait, si $s_1 \geq 1$ alors par Proposition 5.1.1, on a $\rho(f) \geq \frac{1}{q_{s_1}} \geq \frac{1}{q_n}$; et si $s_1 = 0$, alors par Théorème 5.1.1 il n'existe qu'une seule valeur $\alpha_1 = \frac{d_0 + [q_n]}{q_n}$ tel que $\rho(f) = \frac{d_0 + [q_n]}{q_n}$ et depuis $P_0(0) = 0$, on a $d_0 \geq 1$ et alors (5.12) est vraie.

Remarque 5.1.1 *D'après Corollaire 5.1.1, on déduit qu'il n'y a pas de solution transcendante de (5.1) d'ordre zéro.*

Théorème 5.1.2 *Considérons l'équation (5.1) avec $P_0(0) = 0$. Posons $C = \max_{0 \le k \le n} \{d_j - [q_j]\}$, et $A = \{i : d_i - [q_i] = C\}$, où $d_n = q_0 = 0$. Alors, on a les résultats suivants :*
(i) Si $Card(A) = 1$ alors il n'y a pas de solution polynomiale pour (5.1).
(ii) Si $Card(A) \geq 2$ alors l'équation (5.1) peut admettre une solution polynomiale; où $Card(A)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Corollaire 5.1.2 *Considérons l'équation (5.1) avec $P_0(0) = 0$. Si $d_0 \geq d_k$ pour tous $k = 1, ..., n-1$, alors il n'y a pas de solution polynomiale pour (5.1).*

Exemple 5.1.3 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{\frac{7}{2}}}{z^3}\mathcal{D}^{\frac{7}{2}} f(z) + (\frac{-16}{15\sqrt{\pi}}z^5 + \frac{24}{15\pi}z^3 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}z^2)\frac{r^{\frac{3}{2}}}{z}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}} f(z)$$
$$-(\frac{4}{\sqrt{\pi}}z^4 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}z^2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}})r^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} f(z) + \frac{224}{15\pi}z^4 f = 0. \tag{5.13}$$

On a $C = \max_{0 \le k \le 2} (d_j - [q_j]) = 4$ et $A = \{0, 1, 2\}$, $Card(A) = 3$. Donc d'après Théorème 5.1.2, l'équation (5.13) a éventuellement des solutions polynomiales. En effet, les deux polynômes

$$f_1(z) = z^2 + 1 \ \text{et} \ f_2(z) = z^3 - 1$$

sont des solutions à (5.13).

Exemple 5.1.4 *Soit l'équation différentielle fractionnaire*

$$\frac{r^{3.2}}{z^3}D^{3.2} f(z) + (\frac{8}{5\Gamma(\frac{5}{3})}z^3 - \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{3})}z^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{3})}z)\frac{r^{1.6}}{z}D^{1.6} f(z)$$
$$+(\frac{2}{\Gamma(1.4)}z^2)r^{1.3}D^{1.3} f(z) - \frac{4}{\Gamma(1.4)\Gamma(\frac{5}{3})}z^2 f = 0. \tag{5.14}$$

On a $C = \sup_{0 \le k \le 2} (d_j - [q_j]) = 2$ et $A = \{0, 1, 2\}$, $Card(A) = 3$. Donc d'après Théorème 5.1.2, l'équation a éventuellement des solutions polynomiales. En effet, les deux polynômes

$$f_1(z) = z \ \text{et} \ f_2(z) = z^2 - 2z + 1$$

sont des solutions à (5.14).

En combinant le Théorème 5.1.1 et le Théorème 5.1.2 nous pouvons obtenir le résultat suivant :

Corollaire 5.1.3 *Considérons l'équation (5.1) avec* $P_0(0) = 0$*. Si* $s_1 = 0$ *alors chaque solution* $f \not\equiv 0$ *de (5.1) est une fonction entière d'ordre de croissance*

$$\sigma(f) = \frac{d_0 + [q_n]}{q_n}.$$

En effet, si $s_1 = 0$ alors par Théorème 5.1.1, il n'existe qu'une seule valeur $\alpha_1 = \frac{d_0+[q_n]}{q_n}$ comme ordre de croissance des solutions transcendantes. Il reste à prouver qu'il n'existe pas de solution polynomiale pour (5.1). Par définition, $s_1 = 0$ signifie que nous avons

$$\frac{d_0 + [q_n]}{q_n} \geq \frac{d_k + [q_n] - [q_k]}{q_n - q_k}, \tag{5.15}$$

pour tout $k = 1, ..., n-1$; qui donne $d_0 > d_k - [q_k]$ pour tout $k = 1, ..., n-1$: car si l'on suppose au contraire qu'il existe $k \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $d_0 \leq d_k - [q_k]$; puis en combinant cela avec (5.15), on obtient

$$\frac{1}{q_n} \geq \frac{1}{q_n - q_k};$$

une contradiction. Maintenant la condition $d_0 > d_k - [q_k]$ pour tout $k = 1, ..., n-1$ donne $A = \{0\}$, $Card(A) = 1$; et par Théorème 5.1.2 il n'y a pas de solution polynomiale pour (5.1).

Nous signalons ici que le résultat du Corollaire 5.1.3 est prouvé dans [21] par une autre méthode.

5.2 Lemmes préliminaires

Pour la preuve de nos résultats, nous avons besoin des Lemme 3.2.5 et Lemme 3.2.4 du troixième chapitre et aussi les lemmes suivants.

Lemme 5.2.1 *Pour tout entier* $j = 0, 1, ..., p-1$*, soit* α *un nombre réel satisfaisant* $\alpha > \alpha_{j+1}$*, et soit* k *un entier quelconque satisfaisant* $0 \leq k < s_j$*. Alors*

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]. \tag{5.16}$$

Preuve : Puisque

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] = (q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]) + \alpha(q_k - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} - [q_k] + \left[q_{s_j}\right]$$

on a

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < (q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]) + \alpha_{j+1}(q_k - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} - [q_k] + \left[q_{s_j}\right]. \tag{5.17}$$

Maintenant à partir de la définition de α_{j+1}, on obtient

$$\alpha_{j+1}(q_k - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} - [q_k] + \left[q_{s_j}\right] = \left(q_k - q_{s_j}\right)\left(\alpha_{j+1} - \frac{d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k]}{q_{s_j} - q_k}\right). \tag{5.18}$$

Depuis $0 \leq k < s_j$, il découle de la définition de s_{j+1} l'inégalité suivante

$$\left(q_k - q_{s_j}\right)\left(\alpha_{j+1} - \frac{d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k]}{q_{s_j} - q_k}\right) \leq 0. \tag{5.19}$$

Alors, (5.16) découle de (5.17) - (5.19).

Lemme 5.2.2 *Pour tout entier $j = 1, 2, ..., p$, soit α un nombre réel quelconque satisfaisant $\alpha < \alpha_j$ et soit k un entier quelconque satisfaisant $s_j < k \leq n$. Alors*

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]. \tag{5.20}$$

Preuve : On considère deux cas distincts.
Cas (i). Supposer que $s_j < k \leq s_{j-1}$. Comme dans la preuve de Lemme 5.2.1, Nous avons

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < (q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]) + \alpha_j(q_k - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k].$$

si $k = s_{j-1}$, alors

$$\alpha_j(q_k - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k] = 0;$$

d'où (5.20).

D'autre part, si $s_j < k < s_{j-1}$, puis de la définition de s_j et α_j on obtient

$$\begin{aligned} & \alpha_j(q_k - q_{s_{j-1}} + q_{s_{j-1}} - q_{s_j}) + d_k - d_{s_j} + \left[q_{s_j}\right] - [q_k] \\ = \; & (q_k - q_{s_{j-1}})\left(\alpha_j - \frac{d_k - d_{s_{j-1}} + \left[q_{s_{j-1}}\right] - [q_k]}{q_{s_{j-1}} - q_k}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Cela prouve le lemme 5.2.2 pour le cas (i).

Cas (ii). Supposer que $s_{j-1} < k \leq n$. Puisque $s_j < s_{j-1} < ... < s_1 < s_0 = n$ et $s_{j-1} < k \leq n$, il s'ensuit que $j \geq 2$ et il existe un entier $m, 1 \leq m \leq j-1$, tel que $s_{j-m} < k \leq s_{j-m-1}$. Aussi, de la proposition 5.1.1, on a

$$\alpha_j < \alpha_{j-1} < ... < \alpha_{j-m}.$$

Puisque $\alpha < \alpha_j$, on a $\alpha < \alpha_{j-m}$; on peut donc appliquer le cas (i) pour obtenir que

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_{j-m}} + \alpha q_{s_{j-m}} - \left[q_{s_{j-m}}\right]$$

Et à partir d'applications successives de Cas (i), on obtient

$$\begin{array}{rcl} q_n + d_{s_{j-1}} + \alpha q_{s_{j-1}} - \left[q_{s_{j-1}}\right] & < & q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right], \ \alpha < \alpha_j \\ q_n + d_{s_{j-2}} + \alpha q_{s_{j-2}} - \left[q_{s_{j-2}}\right] & < & q_n + d_{s_{j-1}} + \alpha q_{s_{j-1}} - \left[q_{s_{j-1}}\right], \ \alpha < \alpha_{j-1} \\ & & \cdots\cdots\cdots \\ q_n + d_{s_{j-m}} + \alpha q_{s_{j-m}} - \left[q_{s_{j-m}}\right] & < & q_n + d_{s_{j-m+1}} + \alpha q_{s_{j-m+1}} - \left[q_{s_{j-m+1}}\right], \ \alpha < \alpha_{j-m+1} \end{array}$$

alors on obtient

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right], \ \alpha < \alpha_j, \ s_j < k \leq n$$

Lemme 5.2.3 *Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout entier k satisfaisant $0 \leq k < s_p$, on a*

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_p} + \alpha q_{s_p} - \left[q_{s_p}\right] \tag{5.21}$$

Preuve : Puisque s_p est le dernier élément de la suite $s_1, s_2, ..., s_p$ il découle de la construction de s_p que pour tout $k < s_p$, on obtient

$$\frac{d_k - d_{s_p} + \left[q_{s_p}\right] - [q_k]}{q_{s_p} - q_k} \leq 0.$$

Cela donne $d_k - [q_k] \leq d_{s_p} - \left[q_{s_p}\right]$. Puisque $q_k < q_{s_p}$, pour tout $k < s_p$, on obtient (5.21).

Remarque 5.2.1 *Pour un polynôme non constant $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ de degré n, c'est facile à obtenir*

$$\left|\frac{r^\alpha \mathcal{D}^\alpha P(z)}{P(z)}\right| = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} (1 + o(1)) \ \text{ Quand } r \to \infty.$$

Lemme 5.2.4 *[34] Soit $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ un polynôme de degré n. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe $r_0 > 0$ telle que pour tout $r = |z| > r_0$ on a les inégalités*

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n.$$

Lemme 5.2.5 *[21] Soient $P_0(z) \not\equiv 0, P_1(z), ..., P_{n-1}(z)$ des polynômes tels que $P_0(0) = 0$; soient $0 < q_1 < q_2 < ... < q_n$ des constantes. Alors, toutes les solutions de(5.1) sont des fonctions entières.*

5.3 Preuve du Théorème 5.1.1

D'après Lemme 5.2.5, toutes les solutions de (5.1) sont des fonctions entières. Soit f une solution transcendante de (5.1) d'ordre $\rho(f) = \alpha$. D'après (5.2) et Remarque 5.1.1, on a $0 < \alpha < \infty$. D'après Lemme 5.2.4, comme $r \to \infty$ on a

$$|P_j(z)| = b_j r^{d_j}(1 + o(1)). \tag{5.22}$$

soit b_j désigne le coefficient dominant du polynôme P_j. D'après Lemme 3.2.4, il existe un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour $r \to +\infty$ et $r \notin E$, on a

$$\left|\frac{r^{q_k}\mathcal{D}^{q_k} f(z)}{f(z)}\right| = (\nu(r))^{q_k}(1 + o(1)), \ (j = 1, ..., n). \tag{5.23}$$

Comme $0 < \alpha < \infty$ il est bien connu que

$$\nu(r) = (1 + o(1))Cr^{\alpha} \tag{5.24}$$

quand $r \to \infty$, où $\nu(r)$ est l'indice central de f et C est une constante positive; voir [32]. Posons $a_j = C^j |b_j|$. Nous divisons maintenant l'équation (5.1) par f puis substituons (5.22)-(5.24) en (5.1). Cela donne une équation dont le côté droit est nul et le côté gauche est constitué d'une somme de $n + 1$ termes dont les valeurs absolues sont asymptotiques (quand $r \to \infty$; $r \notin E$) aux $n + 1$ termes suivants :

$$a_n r^{\alpha q_n - [q_n]}, \ a_{n-1} r^{q_n + d_{n-1} + \alpha q_{n-1} - [q_{n-1}]}, ..., \ a_k r^{q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k]}, ..., \ a_0 r^{q_n + d_0}. \tag{5.25}$$

A partir de(5.2), (5.6) et (5.1.1), l'ordre de toute solution de (5.1) est au plus α_1 i.e. $\alpha \leq \alpha_1$. Supposons maintenant que $\alpha_{j+1} < \alpha < \alpha_j$ pour certains $j = 1, 2, ..., p - 1$. Alors à partir du Lemme 5.2.1 et du Lemme 5.2.2, on obtient

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right] \quad \text{pour tout } k \neq s_j;$$

ce qui implique qu'il existera exactement un terme dominant (quand $r \to \infty$; $r \notin E$) dans (5.25) : il existe exactement un terme dans (5.25) d'exposant $q_n + d_{s_j} + \alpha q_{s_j} - \left[q_{s_j}\right]$, où $a_{s_j} \neq 0$, qui est supérieur à tous les autres exposants des termes. C'est impossible.

Maintenant, supposons que $\alpha < \alpha_p$. Alors à partir du Lemme 5.2.2 et du Lemme 5.2.3, on obtient

$$q_n + d_k + \alpha q_k - [q_k] < q_n + d_{s_p} + \alpha q_{s_p} - \left[q_{s_p}\right] \quad \text{pour tout } k \neq s_p. \tag{5.26}$$

Encore une fois, il existe exactement un terme dans (5.25) avec l'exposant $q_n + d_{s_p} + \alpha q_{s_p} - \left[q_{s_p}\right]$, où $a_{s_p} \neq 0$, qui est supérieur à tous les autres exposants des termes. C'est impossible.

Par conséquent, les seules valeurs admissibles pour α, l'ordre de la croissance de f, sont $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$.

5.4 Preuve du Théorème 5.1.2

(i) Supposons que $f(z) = a_n z^n + ... + a_0$ ($a_n \neq 0$) est une solution polynomiale de (5.1). D'après Remarque 5.2.1, nous avons

$$\left|\frac{r^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}f\left(z\right)}{f\left(z\right)}\right| = \frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha+1\right)}\left(1+o\left(1\right)\right) \text{ quand } r \to \infty. \tag{5.27}$$

En divisant l'équation (5.1) par f et en utilisant (5.27), on obtient une équation dont le côté gauche est une somme de $n+1$ termes dont les valeurs absolues sont asymptotiques (quand $r \to \infty$) aux $n+1$ termes suivants :

$$b_n r^{-[q_n]},\ b_{n-1}r^{d_{n-1}-[q_{n-1}]}, ...,\ b_k r^{d_k-[q_k]}, ...,\ b_0 r^{d_0} \tag{5.28}$$

où $b_0, ..., b_n$ sont des constantes positives. Si $Card(A) = 1$, alors il existe exactement un terme dominant dans (5.28) (quand $r \to \infty$); ce qui est impossible. Donc, si $Card(A) = 1$ il n'y a pas de solution polynomiale pour (5.1).
(ii) Si $Card(A) \geq 2$ il n'existe pas de terme dominant dans (5.28), alors il est possible qu'il existe une solution polynomiale comme le montre l'Exemple 5.1.3 et l'Exemple 5.1.4.

Chapitre 6

Dérivées fractionnaires conformes et croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires

6.1 Introduction et résultats

Définition 6.1.1 *[1] (Opérateur différentiel conforme).*
On dit qu'un opérateur différentiel D^{α} $(\alpha \geq 0)$ est conforme si et seulement si D^0 est l'opérateur d'identité et D^n $(n \in \mathbb{N})$ est l'opérateur différentiel classique. C'est-à-dire, pour une fonction différentiable $f = f(t)$, on a

$$D^0 f(t) = f(t) \quad et \quad D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

Définition 6.1.2 *[1] (Une classe de dérivées conformes). Soient $\alpha \in [n-1; n]$ et les fonctions continues $\kappa_0, \kappa_1 : [n-1; n] \times \mathbb{R} \longrightarrow [0; +\infty[$ telles que*

$$\lim_{\alpha \to (n-1)^+} \kappa_1(\alpha, t) = 1, \quad \lim_{\alpha \to n^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\alpha \to (n-1)^+} \kappa_0(\alpha, t) = 0, \quad \lim_{\alpha \to n^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \ \alpha \in [n-1, n[\,, \ \kappa_0(\alpha, t) \neq 0, \ \alpha \in]n-1, n]\,, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors l'opérateur différentiel D^{α} défini par

$$D^{\alpha} f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f^{(n-1)}(t) + \kappa_0(\alpha, t) f^{(n)}(t)$$

est conforme.

Dans ce travail on va utiliser le cas particulier

$$\kappa_1(\alpha, t) = n - \alpha, \quad \kappa_0(\alpha, t) = \alpha - n + 1$$

c'est-à-dire pour une fonction entière $f(z)$, on a

$$D^{\alpha} f(z) = (n - \alpha) f^{(n-1)}(z) + (\alpha - n + 1) f^{(n)}(z), \; n - 1 \leq \alpha \leq n. \qquad (6.1)$$

Nous allons étudier la croissance des solutions des équations différentielles fractionnaires linéaires suivantes

$$D^{\alpha_n} f(z) + A_{n-1}(z) D^{\alpha_{n-1}} f(z) + \cdots + A_1(z) D^{\alpha_1} f(z) + A_0(z) f(z) = 0$$

où $A_0(z) \not\equiv 0, A_1(z), ..., A_{n-1}(z)$ sont des fonctions entières et $j - 1 \leq \alpha_j \leq j$.

Proposition 6.1.1 *Soient $0 < \alpha < 1$ et $A_0(z)$ une fonction entière. Les solutions exactes de l'équation différentielles*

$$D^{\alpha} f(z) + A_0(z) f = 0$$

sont sous la forme

$$f(z) = c \exp\left(-\int \frac{A_0(z) + 1 - \alpha}{\alpha} dz\right)$$

où c est une constante complexe.

Preuve : on a pour $0 < \alpha < 1$

$$D^{\alpha} f(z) = (1 - \alpha) f(z) + \alpha f'(z)$$

par conséquent

$$D^{\alpha} f(z) + A_0(z) f = (1 - \alpha) f(z) + \alpha f'(z) + A_0(z) f(z) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\left(\frac{A_0(z) + 1 - \alpha}{\alpha}\right)$$

donc

$$f(z) = c \exp\left(-\int \frac{A_0(z) + 1 - \alpha}{\alpha}\right)$$

pour une certaine constante complexe c.

Théorème 6.1.1 *Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ des fonctions entières satisfaisant $\sigma(A_0) = \sigma$, $\tau_M(A_0) = \tau$, $0 < \sigma < +\infty$, $0 < \tau < +\infty$ tels que $\sigma(A_i) \leq \sigma$, et $\tau_M(A_i) < \tau$ si $\sigma(A_i) = \sigma$ pour $(i = 1, \cdots, n-1)$. Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation*

$$D^{\alpha_n} f(z) + A_{n-1}(z) D^{\alpha_{n-1}} f(z) + \cdots + A_1(z) D^{\alpha_1} f(z) + A_0(z) f(z) = 0 \qquad (6.2)$$

satisfait $\sigma_2(f) = \sigma(f)$, où $j - 1 \leq \alpha_j \leq j$.

Corollaire 6.1.1 *Soient $j-1 \leq \alpha_j \leq j$ et $A_i(z)$ des fonctions entières satisfaisant $\sigma(A_i) < \sigma(A_0) = \sigma < +\infty$, $(i = 1, \cdots, n-1)$. Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de (6.2) satisfait $\sigma_2(f) = \sigma(f)$.*

Théorème 6.1.2 *Soient $j-1 \leq \alpha_j \leq j$ et $A_i(z) = h_i(z)e^{P_i(z)}$ $(i = 0, ..., n-1)$ où $h_j(z)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ et $P_i(z) = a_{in}z^n + \cdots + a_{i0}$ sont des polynômes de degré $n \geq 1$, a_{in} sont des nombres complexes tels que $a_{0n} = |a_{0n}| e^{i\theta_0}$, $a_{sn} = |a_{sn}| e^{i\theta_s}$, $a_{0n}a_{sn} \neq 0$ $(0 < s \leq k-1)$, $\theta_0, \theta_s \in [0, 2\pi[$, $\theta_0 \neq \theta_s$, $h_0 h_s \not\equiv 0$; pour $i \neq 0, s$, a_{in} satisfait soit $a_{in} = d_i a_{0n}$ $(d_i < 1)$ soit $\arg(a_{in}) = a_{sn}$. Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de (6.2) satisfait $\sigma_2(f) = n$.*

6.2 Lemmes préliminaires

Pour la preuve de nos résultats, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 6.2.1 *[17] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et $\beta > 1$ une constante donnée. On a les deux assertions suivantes :*
(i) il existe un ensemble $F \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $c > 0$ tels que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin F$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq c \left[T(\beta r, f) \frac{\log^{\beta}(r)}{r} \log T(\beta r, f) \right]^k, \quad (k \in \mathbb{N}); \tag{6.3}$$

(ii) il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et une constante $c > 0$ tels que pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$ il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a (6.3).

Pour l'opérateur différentiel conforme D^{α} défini en (6.1), on a le résultat suivant.

Lemme 6.2.2 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et soit $\beta > 1$ une constante donnée. On a les deux assertions suivantes :*
(i) il existe un ensemble $F \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $c > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin F$, on a

$$\left| \frac{D^{\alpha} f(z)}{f(z)} \right| \leq c \left[T(\beta r, f) \frac{\log^{\beta}(r)}{r} \log T(\beta r, f) \right]^n, \quad (n-1 \leq \alpha \leq n, \ n \in \mathbb{N}^*) \tag{6.4}$$

(ii) il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et de constante $c > 0$ qui ne dépend que de α, pour tout $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E$ il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a (6.4).

Preuve : (i) On a

$$\left|\frac{D^{\alpha}f(z)}{f\,(z)}\right| = \left|\frac{(n-\alpha)\,f^{(n-1)}\,(z)+(\alpha-n+1)\,f^{(n)}\,(z)}{f(z)}\right|$$
$$\leq \left|\frac{(n-\alpha)\,f^{(n-1)}\,(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{(\alpha-n+1)\,f^{(n)}\,(z)}{f(z)}\right|.$$

Comme $n-1 \leq \alpha \leq n$, alors on a $|n-\alpha| \leq 1$, $|\alpha-n+1| \leq 1$; d'où

$$\left|\frac{D^{\alpha}f(z)}{f\,(z)}\right| \leq \left|\frac{f^{(n-1)}\,(z)}{f(z)}\right| + \left|\frac{f^{(n)}\,(z)}{f(z)}\right|;$$

et du Lemme 6.2.1, on obtient

$$\left|\frac{D^{\alpha}f(z)}{f\,(z)}\right| \leq c\left[T\,(\beta r,f)\,\frac{\log^{\beta}(r)}{r}\log T\,(\beta r,f)\right]^{n};$$

où $n-1 \leq \alpha \leq n,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
La même chose pour (ii).

Le lemme suivant est une conséquence du Lemme 6.2.2 et qui a une importance particulière.

Lemme 6.2.3 *Soit f une fonction méromorphe non constante d'ordre fini $\sigma\,(f) = \sigma < \infty$; soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. On a les deux assertions suivantes :*
(i) Il existe un ensemble $F \subset (1,+\infty)$ qui a une mesure logarithmique finie telle que pour tout $r \in (1,+\infty)\setminus F$, on a

$$\left|\frac{D^{\alpha}f\,(z)}{f\,(z)}\right| \leq r^{n(\sigma-1)+\varepsilon},\ (n-1 \leq \alpha \leq n,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}). \tag{6.5}$$

(ii) Il existe un ensemble $E \subset [0,2\pi)$ qui a une mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in [0,2\pi)\setminus E$ il existe une constante $r_0 = r_0\,(\theta) > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg(z) \in [0,2\pi)\setminus E$ et $r = |z| \geq r_0$, on a (6.5).

Preuve : Soit f une fonction méromorphe non constante d'ordre fini $\sigma\,(f) = \sigma < \infty$; alors on a

$$\sigma = \limsup_{r\longrightarrow\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r};$$

et d'apres la définition de la limite supérieure, pour tout $\frac{\varepsilon}{2n} > 0$ où $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r > r_0$, on ait

$$\log T(r,f) < \log r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}}$$

d'où

$$T(r,f) < r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}},\ \forall r > r_0$$

Comme $T(r,f)$ est croissante, alors en posant $C = \max(T(r_0,f),1)$, on obtient pour tout $r > 0$

$$T(r,f) < Cr^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}}$$

d'où pour $\beta > 1$, on obtient

$$T(\beta r,f) < C\left(\beta r\right)^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}}, \text{ pour tout } r > 0 \tag{6.6}$$

et aussi pour r assez grand, on obtient

$$C\beta^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}}c^{\frac{1}{n}}\log^{\beta}(r)\log T(\beta r,f) < r^{\frac{\varepsilon}{2n}} \tag{6.7}$$

et du Lemme 6.2.2, il existe un ensemble $F \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $c > 0$ tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin F$, on a (6.4). En utilisant (6.6)-(6.7) dans (6.4), on obtient

$$\left|\frac{D^{\alpha}f(z)}{f(z)}\right| \leq \left[\frac{r^{\sigma+\frac{\varepsilon}{2n}}}{r}r^{\frac{\varepsilon}{2n}}\right]^{n} = r^{n\left(\sigma-1+\frac{\varepsilon}{n}\right)} = r^{n(\sigma-1)+\varepsilon}$$

La même chose pour (ii).

Lemme 6.2.4 *[7] Soient $P(z) = (\alpha+i\beta)z^n+\cdots$, un polynôme de degré $n \geq 1$, (α,β sont des nombres réels, $|\alpha|+|\beta| \neq 0$) et $A(z) \not\equiv 0$ une fonction entière avec $\sigma(A) < n$. Posons $g(z) = A(z)e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta) = \alpha\cos n\theta - \beta\sin n\theta$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0,2\pi[$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in [0,2\pi[\setminus\{H_1 \cup H_2\}$ il existe $R > 0$ tel que pour $|z| = r > R$, on a*
(i) si $\delta(P,\theta) > 0$, alors

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)r^n\right\} < \left|g(re^{i\theta})\right| < \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)r^n\right\}$$

(ii) si $\delta(P,\theta) < 0$, alors

$$\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)r^n\right\} < \left|g(re^{i\theta})\right| < \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(P,\theta)r^n\right\}$$

où $H_2 = \{\theta \in [0,2\pi[\,;\delta(P,\theta) = 0\}$ est un ensemble fini.

Lemme 6.2.5 *[6] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \alpha < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1,\infty)$, qui a une mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, on a*

$$\exp\left\{-r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 6.2.6 *[38] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \sigma$, $\tau(f) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$, alors pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un ensemble $E \subset [1,+\infty)$ qui a une mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in E$, on a*

$$\log M(r,f) > \beta r^{\sigma}.$$

Lemme 6.2.7 *[7] Soit $f(z)$ une fonction entiere. Alors :*

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log^{+}\nu(r)}{\log r}=\sigma(f)$$

et

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log^{+}\log^{+}\nu(r)}{\log r}=\sigma_2(f)$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de f.

Lemme 6.2.8 *[39] Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, $n\in\mathbb{N},\ 0<\delta<\frac{1}{4}$ et z tel que $|z|=r$ et que*

$$|f(z)|>M(r,f)\,\nu(r)^{-\frac{1}{4}+\delta}$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de f. Alors il existe un ensemble $E\subset(0,+\infty)$ de mesure logarithmique finie, c'est-à-dire $\int\limits_{E}\frac{dt}{t}<+\infty$, tel que

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^{n}(1+o(1)) \tag{6.8}$$

pour $r\to+\infty$ et $r\notin E$.

Le lemme suivant est la version du théorème de Wiman-Valiron pour la dérivée conforme.

Lemme 6.2.9 *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante;, $0<\delta<\frac{1}{4}$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=r$ et*

$$|f(z)|>M(r,f)\,\nu(r)^{-\frac{1}{4}+\delta} \tag{6.9}$$

où $\nu(r)$ est l'indice central de f. Alors il existe un ensemble $E\subset(0,+\infty)$ de mesure logarithmique finie, c'est-à-dire $\int\limits_{E}\frac{dt}{t}<+\infty$, tel que

$$\frac{D^{\alpha}f(z)}{f(z)}=(1+o(1))\left[(n-\alpha)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n-1}+(\alpha-n+1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n}\right]$$

où $n-1\leq\alpha\leq n,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, pour $r\to+\infty$ et $r\notin E$

Preuve : D'aprés (6.1), on a

$$\frac{D^{\alpha}f(z)}{f(z)}=\frac{(n-\alpha)\,f^{(n-1)}(z)}{f(z)}+\frac{(\alpha-n+1)\,f^{(n)}(z)}{f(z)}.$$

En prenant z tel que

$$|f(z)|>M(r,f)\,\nu(r)^{-\frac{1}{4}+\delta},$$

et du Lemme 6.2.8, il existe un ensemble $E_1 \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_1$, on a

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \frac{(\nu(r))^n}{z^n}(1+o(1))$$

et il existe un ensemble $E_2 \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_2$, on a

$$\frac{f^{(n-1)}(z)}{f(z)} = \frac{(\nu(r))^{n-1}}{z^{n-1}}(1+o(1))\,;$$

d'où il existe un ensemble $E = E_1 \cup E_2 \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E$, on a

$$\frac{D^{\alpha} f(z)}{f(z)} = (1+o(1))(n-\alpha)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n-1} + (1+o(1))(\alpha - n + 1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n}.$$

Lemme 6.2.10 *Soient $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ des fonctions entières tel que*

$$\max\{\sigma(A_i) : i = 0,1,...,n-1\} < \sigma < +\infty.$$

Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$D^{\alpha_n} f(z) + A_{n-1}(z) D^{\alpha_{n-1}} f(z) + \cdots + A_1(z) D^{\alpha_1} f(z) + A_0(z) f(z) = 0 \qquad (6.10)$$

satisfait $\sigma_2(f) \leq \sigma$, où $j - 1 \leq \alpha_j \leq j$

Preuve : De la condition $max\{\sigma(A_i), i = 0,...,n-1\} \leq \sigma$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|A_i(z)| \leq e^{r^{\sigma+\varepsilon}}, \ |z| = r \to \infty. \qquad (6.11)$$

Par la définition (6.1), on a

$$\frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f(z)} = \frac{(i-\alpha_i) f^{(i-1)}(z)}{f(z)} + \frac{(\alpha_i - i + 1) f^{(i)}(z)}{f(z)}.$$

D'après Lemme 6.2.9, il existe un ensemble $E \subset [1,\infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_0$, on a

$$\frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f(z)} = (1+o(1))(i-\alpha_i)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{i-1} + (1+o(1))(\alpha_i - i + 1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{i}$$

où z vérifie (6.9). D'où

$$\left|\frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f(z)}\right| \leq C(V(r))^i \leq C(V(r))^{n-1}, \ i = 0,...,n-1, \qquad (6.12)$$

où C est une constante positive; et pour $i = n$, on a

$$\left|\frac{D^{\alpha_n} f(z)}{f(z)}\right| = \left|(1+o(1))(n-\alpha_n)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n-1} + (1+o(1))(n-q_n+1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n}\right|$$

$$\geq \left|(1+o(1))(\alpha_n-n+1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n}\right| - \left|(1+o(1))(n-\alpha_n)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n-1}\right|. \quad (6.13)$$

De (6.10), on a

$$\left|\frac{D^{\alpha_n} f(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{n-1}(z)| \left|\frac{D^{\alpha_{n-1}} f(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{D^{\alpha_1} f(z)}{f(z)}\right| + |A_0(z)|. \quad (6.14)$$

En utilisant (6.11)-(6.13) dans (6.14), on obtient

$$\left|(1+o(1))(\alpha_n-n+1)\left(\frac{V(r)}{z}\right)^{n}\right| \leq nC' e^{r^{\sigma+\varepsilon}} V(r)^{n-1} \quad (6.15)$$

où C' est une constante positive. De (6.15), on peut façillement obtenir

$$\limsup_{r\longrightarrow+\infty} \frac{\log\log V(r)}{\log r} \leq \sigma + \varepsilon. \quad (6.16)$$

Puisque ε est arbitraire, alors de (6.16) et du Lemme 6.2.7, on conclut que

$$\sigma_2(f) \leq \sigma = \sigma(A_0).$$

Lemme 6.2.11 *Posons* $\delta(P_0,\theta) = |a_{0n}|\cos(\theta_0 + n\theta)$, $\delta(P_s,\theta) = |a_{sn}|\cos(\theta_s + n\theta)$ *où* a_{0n}, a_{sn} *sont des constantes complexes et* $\theta_0, \theta_s \in [0, 2\pi[$, *tel que* $\theta_0 \neq \theta_s$. *Alors, il existe des constantes* ϑ_1, ϑ_2, l, *satisfaisant* $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi[$, $\vartheta_1 < \vartheta_2$, $l > 0$, *tel que pour tout* z *satisfaisant* $\arg z = \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$, *on a*

$$\delta(P_0,\theta) = |a_{0n}|\cos(\theta_0 + n\theta) > l, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$$

$$\delta(P_s,\theta) = |a_{sn}|\cos(\theta_s + n\theta) < 0, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$$

Preuve : Soit $z = re^{i\theta}$. On sait que pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\cos\theta > 0$ et pour $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ on a $\cos\theta < 0$ et comme $\theta_0 \neq \theta_s$, alors $\theta_0 < \theta_s$ ou $\theta_0 > \theta_s$. Supposons que $\theta_0 < \theta_s$. Le cas $\theta_0 > \theta_s$ se démontre par la même méthode. On a pour $0 < \varepsilon < \theta_s - \theta_0$

$$\vartheta_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \varepsilon}{n} < \theta < \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_s + \varepsilon}{n} = \vartheta_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta_0 - \varepsilon < n\theta < \frac{\pi}{2} - \theta_s + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \theta_s - \theta_0 - \varepsilon < \theta_s + n\theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_s + n\theta < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

parce que $\theta_s - \theta_0 - \varepsilon > 0$. Alors

$$\cos(\theta_s + n\theta) < 0, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$$

et

$$\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \varepsilon < n\theta < \frac{\pi}{2} - \theta_s + \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta_0 + n\theta < \frac{\pi}{2} - \theta_s + \theta_0 + \varepsilon = \frac{\pi}{2} - (\theta_s - \theta_0) + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \theta_0 + n\theta < \frac{\pi}{2}$$

parce que $-(\theta_s - \theta_0) + \varepsilon < 0$. Alors

$$\cos(\theta_0 + n\theta) > \cos(\theta_0 + n\vartheta_2) > 0, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[\,,$$

car $\cos\theta$ est décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour k tel que $\cos(\theta_0 + n\vartheta_2) > k > 0$, on a

$$\cos(\theta_0 + n\theta) > k, \text{ pour tout } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[\,.$$

Ainsi, pour $l = |a_{0n}|\, k$, on obtient

$$\delta(P_0, \theta) = |a_{0n}| \cos(\theta_0 + n\theta) > l, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[$$
$$\delta(P_s, \theta) = |a_{sn}| \cos(\theta_s + n\theta) < 0, \text{ pour } \theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[\,.$$

6.3 Preuve du Théorème 6.1.1

Supposons que $f(z)$ est une solution non triviale de (6.2). A partir de (6.2) on a

$$|A_0(z)| \le \left|\frac{D^{\alpha_n} f(z)}{f(z)}\right| + |A_{n-1}(z)| \left|\frac{D^{\alpha_{n-1}} f(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1(z)| \left|\frac{D^{\alpha_1} f(z)}{f(z)}\right|. \quad (6.17)$$

D'aprés Lemme 6.2.2, on sait qu'il existe un ensemble $E_1 \subset [0, \infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $B > 0$ tel que

$$\left|\frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f\,(z)}\right| \le B\,[T\,(2r, f)]^{2i} \le B\,[T\,(2r, f)]^{2n}\,,\ (i - 1 \le \alpha_j \le i,) \quad (6.18)$$

pour tout $|z| = r \notin E_1$ et pour r suffisamment grand. Si $\sigma(A_i) < \sigma(i \neq 0)$, par Lemme 6.2.5, il existe un ensemble $E_2 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_2$, on a

$$|A_i(z)| \le e^{r^{\alpha_1}},\ \ (i \neq 0)$$

où $\sigma(A_i) < \alpha_1 < \sigma$. Si $\sigma(A_i) = \sigma, \tau_M(A_i) < \tau (i \neq 0)$, on choisit α_2, α_3 satisfaisant $max\{\tau_M(A_j), j \neq 0\} < \alpha_2 < \alpha_3 < \tau$ tel que pour r assez grand, on a

$$|A_i(z)| \leq e^{\alpha_2 r^\sigma}, \ \ (i \neq 0) . \tag{6.19}$$

D'après Lemme 6.2.6, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_0$, on a

$$M(r, A_0) > e^{\alpha_3 r^\sigma}. \tag{6.20}$$

Ainsi, pour tout z satisfaisant $|A_0(z)| = M(r, A_0)$ et pour $|z| = r \in E_0 \backslash (E_1 \cup E_2)$, suffisamment grand et en utilisant (6.18)-(6.20) dans (6.17), on obtient

$$e^{\alpha_3 r^\sigma} < M(r, A_0) \leq nBe^{\alpha_2 r^\sigma} \left[T\left(2r, f\right)\right]^{2n};$$

et par conséquent, on obtient $\sigma_2(f) \geq \sigma$. D'autre part, du Lemme 6.2.10, on a $\sigma_2\left(f\right) \leq \sigma$; ainsi, $\sigma_2\left(f\right) = \sigma$.

6.4 Preuve du Théorème 6.1.2

Supposons que $f(z)$ est une solution non triviale de (6.2). De (6.2), on peut écrire

$$-A_0(z) = \frac{D^{\alpha_k} f(z)}{f(z)} + A_{k-1}(z) \frac{D^{\alpha_{k-1}} f(z)}{f(z)} + \cdots + A_1(z) \frac{D^{\alpha_1} f(z)}{f(z)}. \tag{6.21}$$

Nous supposons que $a_{i_1 n}, a_{i_2 n}, ..., a_{i_m n}$ $(i_j \in \{1, ..., s-1, s+1, ..., k-1\})$ satisfont $a_{i_j n} = d_{i_j} a_{0n}$ $(j = 1, ..., m)$ et pour $i \in \{1, ..., s-1, s+1, ..., k-1\} \setminus \{i_1, ..., i_m\}$ on a $\arg a_{in} = \theta_s$. Choisissons une constante c satisfaisant $\max\{d_{i_1}, ..., d_{i_m}\} < c < 1$. Nous divisons la preuve en deux cas : $c < 0$ et $0 \leq c < 1$.

cas (a) : $c < 0$.

Du Lemme 6.2.11, il existe des constantes $\vartheta_1, \vartheta_2, l$ satisfaisant $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi[\,, l > 0$, tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in \,]\vartheta_1, \vartheta_2[\,$, on a

$$\delta(P_0, \theta) = |a_{0n}| \cos(\theta_0 + n\theta) > l, \qquad \delta(P_s, \theta) = |a_{sn}| \cos(\theta_s + n\theta) < 0$$

et

$$\delta(P_i, \theta) < 0, \ \ (i \neq 0) .$$

Du Lemme 6.2.4, pour toute constante ε_1 $\left(0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\right)$ donnée, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi[$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in \,]\vartheta_1, \vartheta_2[\setminus \{H_1 \cup H_2\}$ il existe $R > 0$ tel que pour $|z| = r > R$, on a

$$\left|A_0(re^{i\theta})\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\, lr^n\right\}, \tag{6.22}$$

$$\left|A_i(re^{i\theta})\right| < \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\, \delta(P_i, \theta) r^n\right\} < M, \tag{6.23}$$

où $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi[\,; \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini. On a $H_3 = H_1 \cup H_2$ est de mesure linéaire nulle. D'aprés Lemme 6.2.2, on sait qu'il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et des constantes $B > 0, R_2 > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in (\vartheta_1, \vartheta_2) \backslash \{E_1 \cup H_3\}$ et $|z| = r > R_2$, on a

$$\left|\frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f(z)}\right| \leq B \left[T(\alpha r, f) \log T(\alpha r, f)\right]^i \leq B \left[T(2r, f)\right]^{2k}, \tag{6.24}$$

où $(i - 1 \leq \alpha_i \leq i)$. En substituant (6.22)–(6.24) dans (6.21), on obtient pour r suffisamment grand

$$\exp\{(1 - \varepsilon_1)\, l r^n\} \leq \left|A_0(re^{i\theta})\right| \leq kMB \left[T(2r, f)\right]^{2k};$$

ce qui implique $\sigma_2(f) \geq n$. D'autre part, par Lemme 6.2.10, on a $\sigma_2(f) \leq n$. Ainsi on obtient $\sigma_2(f) = n$.

cas (b) : $0 \leq c < 1$.

Du Lemme 6.2.11 il existe $\vartheta_1, \vartheta_2, l$, satisfaisant $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi), \vartheta_1 < \vartheta_2, l > 0$, tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$, on a

$$\delta(P_0, \theta) = |a_{0n}| \cos(\theta_0 + n\theta) > l,$$

$$\delta(P_s, \theta) = |a_{sn}| \cos(\theta_s + n\theta) < 0.$$

Comme $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$, alors

$$\delta(P_0 + Q, \theta) = \delta(P_0, \theta) + \delta(Q, \theta)$$

où $Q(z) = -ca_{0n}z^n$. Posons $Q_1(z) = a_{0n}z^n$. Comme $0 \leq c < 1$ et $\delta(P_0, \theta) = \delta(Q_1, \theta)$, on a

$$\delta(Q, \theta) = -c\delta(Q_1, \theta) \leq 0,$$

$$\delta(P_0 + Q, \theta) = \delta(P_0, \theta) - c\delta(P_0, \theta) = (1 - c)\delta(P_0, \theta) > (1 - c)l$$

et

$$\delta(P_i + Q, \theta) < 0, \quad (i \neq 0);$$

parce que

$$\max\{d_{i_1}, ..., d_{i_m}\} < c \text{ et } \delta(Q, \theta) < 0 \text{ pour } \theta \in (\vartheta_1, \vartheta_2).$$

D'après Lemme 6.2.4 et Lemme 6.2.5, pour toute constante ε_1 $\left(0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\right)$ donné, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi[$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $\theta \in]\vartheta_1, \vartheta_2[\diagdown \{H_1 \cup H_2\}$ il existe $R > 0$ tel que pour $|z| = r > R$, on a

$$\left|A_0(re^{i\theta})\right| e^{-ca_{0n}z^n} \geq \exp\{(1 - \varepsilon_1)(1 - c)\, l r^n\} \tag{6.25}$$

$$\left|A_i(re^{i\theta})\right| < \exp\{\circ(1) r^n\}, \quad (i \neq 0) \tag{6.26}$$

où $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi[\,; \delta(P, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini. On a $H_3 = H_1 \cup H_2$, est de mesure linéaire nulle. Par Lemme 6.2.2, on sait qu'il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et de constantes $B > 0, R_2 > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta \in (\vartheta_1, \vartheta_2) \backslash \{E_1 \cup H_3\}$ et $|z| = r > R_2$, on a

$$\left| \frac{D^{\alpha_i} f(z)}{f(z)} \right| \leq B \left[T(\alpha r, f) \log T(\alpha r, f) \right]^i \leq B \left[T(2r, f) \right]^{2k}, \tag{6.27}$$

où $(i - 1 \leq \alpha_i \leq i)$. En substituant (6.25)–(6.27) dans (6.21), on obtient pour r suffisamment grand.

$$\exp \{(1 - \varepsilon_1)(1 - c)\, l r^n\} \leq \left| A_0(re^{i\theta}) e^{-c a_{0n} z^n} \right| \leq k e^{\circ(1) r^n} B \left[T(2r, f) \right]^{2q_k};$$

et par conséquent $\sigma_2(f) \geq n$. D'autre part, du Lemme 6.2.10, on a $\sigma_2(f) \leq n$; d'où $\sigma_2(f) = n$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la croissance au sens de Nevanlinna des solutions de certains types d'équations différentielles fractionnaires linéaires dont les coefficients sont des polynômes ou des fonctions entières transcendantes en utilisant principalement le théorème de Wiman-Valiron des fonctions entières récemment établi par Chyzhykov et Semochko pour le calcul fractionnaire. Dans les premières parties de notre travail nous avons utilisé l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo et dans la dernière partie nous avons introduit la notion de la dérivée fractionnaire conforme pour obtenir plus de précision sur l'hyper-ordre. Nous avons constaté que nous ne pouvons pas obtenir les mêmes résultats dans les mêmes conditions en remplaçant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo par celui de Riemann-Liouville parce que les solutions ne seront pas entières.

Il y a plusieurs questions qui se posent dans ce contexte :

1) Peut-on obtenir des résultats dans ce sens en utilisant l'opérateur de dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville?

2) Peut-on établir des éstimations sur $\left|\frac{\mathcal{D}^j f(z)}{f(z)}\right|$ similaires au (6.4) pour les opérateurs de dérivées fractionnaires de Caputo ou Riemann-Liouville? Nous signalons ici que nous avons donné des éstimations pareils dans Lemme 6.2.2 mais seulement pour le cas particulier (6.1) des dérivées fractionnaires conformes.

3) Peut-on étudier l'oscillation des solutions des équations différentielles fractionnaires?

Bibliographie

[1] D. R. Anderson and D. J. Ulness, *Newly defined conformable derivatives*, Advances in Dynamical Systems and Applications, vol. 10, No. 2, (2015), pp. 109–137..

[2] B. Belaidi and K. Hamani, *Some results on the complex oscillation theory of differential equations with polynomial coefficients*, J. Inequal. Pure Applied Analysis, Vol. 5 (4) N. 87(2004).

[3] B. Belaidi and S. Hamouda, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coeffi cients*, Electron. J. Differential Equations, N 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[4] R. P. Boas, *Entire functions,* Academic Press Inc, New York, 1954.

[5] T-B. Cao and H-X. Yi, *The growth of solutions of linear complex differential equations with coefficients of iterated order in the unit disc,* J. Math. Anal. Appl. 319 (2006) 278-294.

[6] Z-X. Chen, *On the hyper order of solutions of some second order liner differential equations*, Acta Math. Sinica B 18 (2002) 79–88 (in Chinese).

[7] Z.X. Chen, *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0$, *where the order* $(Q) = 1$, Sci, China Ser. A, **45** (2002), 290-300.

[8] S. Cherief and S. Hamouda, *Growth of solutions of a class of linear differential equations near a singular point,* Kragujevac J. Math. Vol. 47(2) (2023), 187-201.

[9] S. Cherief and S. Hamouda, *Linear differential equations with analytic coefficients having the same order near a singular point,* Bull. Iranian Math. Soc. Vol 47 (2021), 1737–1749.

[10] S. Cherief and S. Hamouda, *Finite and infinite order of growth of solutions to linear differential equations near a singular point,* Math. Bohem., Vol. 145 (3) (2021), 1-18.

[11] S. Cherief and S. Hamouda, *Exponent of convergence of solutions to linear differential equations near a singular point,* Graduate J. Math. 6 (2021), 22-30.

[12] I. Chyzhykov and N. Semochko, *Generalization of the Wiman-Valiron method for fractional dérivatives*, Int. J. Appl. Math., Vol. 29 No. 1 (2016), 19-30.

[13] I. Chyzhykov, G. Gundersen and J. Heittokangas, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc, 86 (2003), 735-754.

[14] K. Diethelm and A.D. Freed, *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds)*, pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[15] M. Frei, *Über die subnormalen lösungen der differentialgleichung* $w'' + e^{-z}w' + (Konst.)\, w = 0$, Comment. Math. Helv. **36** (1962), 1-8.

[16] V. Gafiychuk, B. Datsun and V. Meleshko, *Mathematical modeling of time fractional reactiondiffusion systems*. J. Comp. Appl. Math. 220 (2008), 215-225.

[17] G. Gundersen, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc, (2) 37 (1988), 88-104.

[18] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *Growth and oscillation theory of non-homogegeous linear differential equations*, Proceedings of the Edinburgh Math. Society, 43 (2000), 343-359

[19] G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[20] G. Gundersen, *On the question of whether* $f'' + e^{-z}f' + B(z)\, f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 102A (1986), 9-17.

[21] S. Hamouda and S. Mahmoudi, *Growth of solutions of a class of linear fractional differential equations with polynomial coefficients*, Opuscula Math. Vol. 42, No. 3 (2022), 415-426.

[22] S. Hamouda, *Growth of solutions of class of linear diff erential equations with entire coefficients*, New York J. Math, 16 (2010) 737-747.

[23] S. Hamouda, *Properties of solutions to linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 177, pp. 1–8.

[24] S. Hamouda, *Iterated order of certain linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. of Differential Equations, N 83, Vol. 2007 (2007), 1-7.

[25] S. Hamouda, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc,* Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[26] S. Hamouda, *The possible orders of growth of solutions to certain linear differential equations near a singular point,* J. Math. Anal. Appl. 458 (2018), 992–1008.

[27] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[28] W. K. Hayman, *The local growth of power series: A survey of the Wiman-Valiron method,* Canad. Math. Bull. 17 (1974), 317-358.

[29] J. Heittokangas, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000) 1-14.

[30] J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc,* Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[31] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Singapore, World Scientific, 2000.

[32] G. Jank and L. Volkmann, *Einfuhrung in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*, Birkhauser, Basel-Boston-Stuttgart,1985.

[33] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, elsevier, Amsterdam, 2006.

[34] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[35] S. Mahmoudi and S. Hamouda, *infinite order of growth of solutions to linear fractional differential equations with entire coefficients*, Mem. Differ. Equ. Math. Phys. Vol. 89, (2023), 115-124.

[36] I. Podlubny, *Fractional differential equations,* Academic Press, New York, 1999.

[37] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications,* Gordon and Breach, New York (1993).

[38] J. Tu and C-F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with entire coefficients having the same order,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 487-497.

[39] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, New York: Chelsea, 1949.

[40] J. Wang and I. Laine, *Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential equations,* Abstr. Appl. Anal. Vol. 2009 (2009), ID 363927, 11 pages.

[41] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen uber eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[42] L. Yang, *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.

[43] P. Závada, *Operator of fractional derivative in the complex plane,* Comm. Math. Phys. 192, (1998), 261-285.