

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

Thèse Présentée par :

Nisrine MILIANI

Pour l'Obtention du Diplôme de :

Doctorat LMD

Filière : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la décision

Contribution à l'analyse de la Stabilité des Modèles Multidimensionnels

Date de soutenance : :

Devant le jury composé de :

Président :	Lakehal BELARBI	Professeur	UMAB
Examineurs :	Laïd DJILALI	MCA	UMAB
	Touffik BOUREMANI	MCA	UFAS-Setif
	Mohammed Amine GHZZAR	MCA	NHSM-Alger
Encadreur :	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB
Co-Encadreur :	Olivier BACHELIER	Professeur	LIAS-ENSIM Poitiers

Année Universitaire : 2023 / 2024

D
O
C
T
O
R
A
T

Dédicaces

Je dédie ce travail :

À mes chers parents, frères, soeurs et à ma petite famille, en reconnaissance de leurs sacrifices, de leur soutien et de leurs prières tout au long de mes études.

Remerciements

Avant tous, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force et la foi et m'a permis d'arriver à ce stade.

Je voudrais porter ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères, à mon Directeur de thèse le Professeur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'Université Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem pour son effort constant, sa disponibilité, sa patience, sa rigueur ainsi que pour les efforts considérables qu'il a déployé pour le bon déroulement de ce travail de recherche et aussi pour ses qualités pédagogiques et scientifiques ainsi que pour son soutien permanent tout au long de la réalisation de cette thèse. Un grand merci pour tout mon Professeur Monsieur Djillali BOUAGADA.

Je tiens également à exprimer ma plus profonde gratitude à mon co-encadreur Professeur Olivier BACHELIER de LIAS-ENSIM Université de Poitiers pour son soutien continu et ses efforts qui ont contribué à la réussite de cette thèse.

Mes remerciements vont également au Professeur Lakehal BELARBI de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour l'honneur et la gentillesse qu'il me fait en acceptant de présider la soutenance de cette thèse.

Je tiens à remercier respectueusement le Professeur Mohammed Amine GHZZAR de l'École Nationale Supérieure de Mathématiques (Alger) d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier vivement le Professeur Touffik BOUREMANI de l'université Ferhat Abbas de Sétif d'avoir accepté d'examiner le contenu de cette thèse.

Mes remerciements vont également au Professeur Laïd DJILALI de l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour l'examen de cette thèse.

Je remercie également Docteur Kamel BENYETTOU Enseignant à l'école Nationale Supérieure de mathématiques (Alger) pour son aide et ses conseils fort judicieux.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du Laboratoire de Recherche de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'université de Mostaganem, en particulier l'équipe d'analyse et Contrôle des systèmes (ACSY-Team).

Un grand merci à tous ceux qui ont aidés directement ou indirectement à la réalisation de ce travail.

Liste des Publications et Communications

Revue Internationale

1. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. On the analysis of positivity and stabilization of fractional multidimensional discrete linear systems. Int. J. Dynam. Control (2023). <https://doi.org/10.1007/s40435-023-01243-0>.
2. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. On the Positivity Analysis of the Three-Dimensional Conformable Fractional Fornasini-Marchesini Models Submitted paper.

Conférences Nationales et Internationales

1. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA, 2nd Doctoral Program in Applied Mathematics, Mostaganem, Algeria, June 23, 2022.
2. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. "Solvabilité des modèles linéaires à dimensions multiples", journée des équations aux dérivées partielles et applications, qui a eu lieu à l'université de Sidi Bel Abbes, le 30 juin 2022.
3. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. "Multidimensional Fractional Linear Systems", The First National Conference on "Nonlinear Analysis : Theory and Applications" ,27-29 November 2022, Chelf Algeria.
4. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. "Solvency of multidimensional linear models and their positivity (as an example 3 dimensional model)", The First International Workshop on Applied Mathematics, 1st-IWAM'2022, 6-8, December 2022 , Constantine, Algeria.
5. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA. Sur l'analyse et la stabilité des modèles multidimensionnels , 3th Doctoral Program in Applied Mathematics, Mostaganem,Algeria, June 20, 2023.
6. Nisrine MILIANI, Djillali BOUAGADA and Kamel BENYETTOU. "On the Positivity Analysis of the Three-Dimensional Conformable Fractional Fornasini-Marchesini Models", International Conference Université of Bucharest, Romania, 27-30 June 2023.

Notations

1. \mathbb{N} : L'ensemble des nombres naturels.
2. \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
3. \mathbb{R}^+ : L'ensemble des nombres réels positifs.
4. \mathbb{C} : Corps des nombres complexes.
5. $\mathbb{R}^{m \times n}$: L'ensemble des matrices de dimension $m \times n$.
6. \mathbb{R}^n : L'ensemble des vecteurs de taille n .
7. \mathbb{M}_n : Ensemble des matrices de Metzler.
8. $X_\alpha(s)$: Transformation de Laplace Conformable pour la fonction $x(t)$.
9. $\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}(X(p, s, k))$: Transformation de Laplace Conformable de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$.
10. $\mathbf{T}_\alpha x(t)$: Dérivée Fractionnaire Conformable de la fonction $x(t)$.
11. $\mathbf{T}_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2, t_3)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre α par rapport à la variable t_1 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$.
12. $\mathbf{T}_{t_2}^\beta x(t_1, t_2, t_3)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre β par rapport à la variable t_2 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$.
13. $\mathbf{T}_{t_3}^\gamma x(t_1, t_2, t_3)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre γ par rapport à la variable t_3 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$.
- .
14. $\mathbf{T}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha\beta\gamma} x(t_1, t_2, t_3)$: Dérivée Fractionnaire Conformable Partielle d'ordre (α, β, γ) de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$.

-
15. $\Delta_{\alpha_j}^{h_j} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}$: la différence fractionnaire d'ordre α_j de la fonction multidimensionnel discrète

Table des matières

Dédicaces	2
Remerciements	3
Liste des Publications	4
Notations	5
Introduction	9
1 Notions fondamentales	12
1 Notions sur la théorie des matrices	12
2 Aperçu sur la théorie du calcul fractionnaire	13
2.1 Quelques propriétés de la transformée de Laplace fractionnaire [24] . . .	17
3 Conclusion	19
2 Solvabilité et analyse des systèmes unidimensionnels	20
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	20
2 La solvabilité des systèmes linéaires fractionnaires cas standards et cas singuliers	22
3 Exemples d'applications	25
4 Conclusion	28
3 Analyse des modèles fractionnaires conformables uni et tridimensionnels	29
1 Rappel sur la dérivée conformable	29
2 La solvabilité des systèmes unidimensionnels linéaires à dérivée conformable . .	32
3 Aperçu sur les systèmes positifs	35
3.1 Résolution de la Première Forme du Modèle de Fornasini-Marchesini par l'Application de la Double Transformée de Laplace Conformable	36

4	Solution du problème	36
5	Solvabilité du modèle 3D fractionnaire de Fornasini-Marchesini	37
6	Analyse de la positivité du modèle 3D fractionnaire de Fornasini-Marchesini	46
7	Exemples numériques	49
8	Conclusion	51
4	Conditions de Stabilisation des Modèles d'état Multidimensionnels par La Matrice de Gain	52
1	Quelques types de dérivées fractionnaires pour des fonctions discrètes	52
1.1	Différence fractionnaire d'une fonction d'une seule variable	52
1.2	Différence fractionnaire d'ordre α d'une fonction bidimensionnelle	53
2	Analyse des systèmes fractionnaires multidimensionnels à temps discret de type de Roesser	54
3	Solvabilité d'un système fractionnaire multidimensionnel à temps discret	59
3.1	Extension du théorème de Cayley-Hamilton pour les systèmes dD	60
4	Positivité d'un système multidimensionnel fractionnaire discret	62
5	Tests de stabilisation	65
6	Procédure	71
7	Exemples	72
	Conclusion	79
	Bibliographie	81

Introduction

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement dans le domaine des sciences technologiques sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigent, du point de vue qualité et performance. En grande partie, cette thèse est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes [20] [60] [63]. La théorie des systèmes peut être résumée comme un ensemble de méthodes analytiques et mathématiques appliquées à un système afin de mieux comprendre son fonctionnement et sa prise de décision. Tout ceci a permis de mettre en oeuvre des méthodes et approches très complexes pour l'identification et le contrôle des systèmes.

Un système dynamique est un terme utilisé pour décrire les événements qui se produisent tout au long du temps quelle que soit sa nature (physique, chimique, électromécanique, biologique, économique...etc) change au fil du temps.

En effet, la modélisation des systèmes dynamiques, laquelle nécessite un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié, peut être représentée par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou encore par des équations différentielles fractionnaires, ainsi, un système dynamique est donc un modèle formé par le regroupement de trois objets différents [17]

- Espace d'état : Un ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système.
- Loi d'évolution : Une fonction qui donne l'état actuel connaissant un état antérieur.
- Temps : Peut prendre des formes différentes. A partir de ce dernier objet lequel est le temps, on peut distinguer deux classes de systèmes dynamiques : à temps continu et/ou à temps discret [6], [114]

En particulier, les systèmes d'ordre fractionnaires sont des systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles utilisant des dérivations non entières. Ces systèmes ont reçu une grande attention grâce à leur plus large flexibilité par rapport aux systèmes entiers pour modeler plus correctement des systèmes de plus en plus complexes [82], [64]. Seulement au cours des dernières années qu'on peut trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans la théorie des systèmes [78], [23], [41], [22], [86].

Plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature sur le calcul fractionnaire, dont celles des dérivations au sens de Riemann Liouville, Caputo, ou encore Grunwald-Letnikov... [28], [77], [79], [23]. Durant ces dernières années une nouvelle dérivée fractionnaire connue sous

le nom de dérivée d'ordre fractionnaire conforme et qui est inventée par R.Khalil, Abdeljawad [2], [84]. Cette nouvelle définition est une extension naturelle de la dérivée usuelle, et elle satisfait plusieurs propriétés mentionnées ci-dessous.

Notre choix porte sur la dérivée fractionnaire conformable suite aux nombreux avantages tels que le maintien de la règle du produit, du quotient ainsi que les résultats similaires au théorème de Rolle et le théorème de la valeur moyenne dans le calcul classique.

Au cours des décennies récentes, une attention soutenue a été portée aux systèmes bidimensionnels et multidimensionnels, qui diffusent l'information dans plusieurs directions indépendantes. Ces modèles ont suscité un vif intérêt parmi de nombreux chercheurs [28], [44].

Nous mentionnons à titre historique que la classe de systèmes 2D a été étudiée pour la première fois dans les années 1970, afin de traiter certains problèmes importants dans les applications de filtrage de données (dans les articles fondateurs de Fornasini-Marchisini [28], [44]), Leur utilité fut rapidement appréciée, en trouvant rapidement des applications dans la modélisation d'équations différentielles [77], [94], [91] comme l'équation de Darboux utilisée dans la modélisation des gaz, absorption, chauffage par jet d'eau, etc [34], [33]. La littérature concernant les systèmes bidimensionnels 2D et les systèmes multidimensionnels en général est maintenant assez vaste. Cependant, certains types de systèmes ont été négligés dans les écrits en raison de leur complexité inhérente, notamment ceux qui présentent des contraintes sur les variables, des retards ou des non-linéarités, Dans les trois dernières décennies, de nombreux travaux ont été réalisés pour développer des systèmes fractionnaires, dans divers domaines de recherche, où le calcul fractionnaire est devenu un outil privilégié pour la modélisation des phénomènes. L'étude de la stabilité des systèmes linéaires multidimensionnels est un domaine de recherche établi depuis plus de deux décennies [121], [21] [64], [77], couvrant divers secteurs des sciences expérimentales tels que le traitement d'images, la biotechnologie, la géophysique et l'économie [41], [5], [63], [20], [13], [49], [57], [118], [121]. Ces systèmes sont largement utilisés dans les domaines de la théorie de la commande et de l'automatique. Une théorie classique qui continue de susciter un vif intérêt parmi les chercheurs en sciences fondamentales est le calcul fractionnaire, impliquant des opérations de dérivation et d'intégration avec des ordres fractionnaires. Dans cette étude, nous nous basons sur une nouvelle classe de systèmes fractionnaires multidimensionnels, utilisés notamment dans des domaines tels que l'électronique, le traitement d'images et du signal, l'automatique, ainsi que l'économie.

La positivité et la stabilité asymptotique sont des concepts cruciaux en théorie des systèmes et de contrôle. La question de la positivité et de la stabilité asymptotique d'une catégorie de systèmes fractionnaires multidimensionnels est à la fois importante et complexe. Nous nous

s'intéressons sur cette catégorie de systèmes fractionnaires et nous cherchons à améliorer les conditions de stabilité asymptotique de ces modèles en utilisant des approches basées sur les LMIs [70], [89], [22], [4], [120], [49]

Afin de mieux comprendre l'enchaînement des concepts fondamentaux de notre recherche, le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales dont on aura besoin le long de ce travail. Nous rappelons, dans un premier temps, les notions de la théorie des matrices tel que : les matrices positives, matrices de Metzler, le produit de Kronecker et ses propriétés, les inégalités matricielle linéaires et les différentes dérivées fractionnaires existantes à partir des références suivantes [8], [28], [82], [66], [77], [81], [22], [4], [53], [36], en passant par la suite à la transformée de Laplace et la transformée en Z avec toutes ses propriétés tout en se basant sur les références [37], [113], [80].

Dans le second chapitre, nous examinons une vue d'ensemble des divers types de systèmes dynamiques, comprenant à la fois les systèmes dynamiques continus et discrets. Nous présentons quelques notions et définitions fondamentales des systèmes dynamiques fractionnaires, ainsi que leurs applications dans divers domaines. De plus, nous discutons des concepts de positivité et de stabilité de ces systèmes.

Dans le troisième chapitre, nous abordons une nouvelle dérivée dite la dérivée d'ordre fractionnaire conforme avec toutes ses propriétés et applications. En passant par la suite à la citation de la solutions des systèmes unidimensionnels à dérivée d'ordre fractionnaire conforme à temps continu. Ensuite nous étudions en deuxième section, le problème de solvabilité des systèmes tridimensionnels à temps continu de type Fornasini-Marchesini en utilisant la transformée de Laplace en trois dimensions tout en se basant sur les références [39], [99], [2], [28], [82]. En dernier nous présenterons quelques notions et définitions essentielles pour établir des conditions sur la positivité de ces systèmes.

Le quatrième chapitre, sera donc consacré à l'étude d'une nouvelle classe de systèmes de Roesser fractionnaires multidimensionnels dD où $d \geq 2$ à temps discret, nous développons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité et la stabilisation pour cette classe de systèmes par l'approche basée sur l'inégalité matricielle linéaire. Le critère de stabilisation par la matrice de gain à été établi.

Notions fondamentales

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les concepts fondamentaux de la théorie générale des matrices non négatives et des matrices de Metzler. Nous nous basons pour cela sur les références suivantes [10], [14], [15], [56], [85], [83], [22]. Dans la seconde partie, nous exposerons des concepts et des notions générales du calcul fractionnaire, Des définitions et l'utilisation de ce dernier [28], [2], [94], [31], [84]. En dernier, nous présenterons également les définitions principales et quelques propriétés de la transformée de Laplace et de la transformée en Z.

1 Notions sur la théorie des matrices

Définition 1.1. [4] On dit que A est une matrice positive si A est non- négative et $\exists k = \overline{1, n}$, $\exists l = \overline{1, m} : a_{kl} > 0$, i.e.. toutes ses entrées sont non-négative avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice $A > 0$.

Définition 1.2. [4] On dit que A est une matrice non-négative si $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m} : a_{ij} \geq 0$, autrement dit, toutes ses entrées sont non-négatives i.e., $A \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$

Définition 1.3. [48] On dit que A est une matrice strictement positive si $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m} : a_{ij} > 0$, i.e., toutes ses entrées sont strictement positives. Nous noterons une telle matrice $A \gg 0$.

Définition 1.4. [66] Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n , A est une matrice monomiale ou matrice de permutation généralisée si les entrées de A sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.

Définition 1.5. [48] Une matrice A de Metzler est une matrice dans laquelle toutes les composantes hors diagonale sont positives. Autrement dit : $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. L'ensemble des matrices de Metzler de dimension $n \times n$ est noté \mathbb{M}_n .

Proposition 1.1. [48] *A est une matrice de Metzler si et seulement si $t \geq 0 : e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ où e^{At} étant l'exponentiel de la matrice At .*

Exemple 1.1. *Dans ce qui suit nous présentons quelques types de matrices particulières*

1. *La matrice N suivante est une matrice monomiale*

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

2. *La matrice K suivante est une matrice de Metzler*

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 33 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

2 Aperçu sur la théorie du calcul fractionnaire

Dans le domaine des équations différentielles, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier ou non entier, réel ou complexe. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'intégration sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne. En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Liebnitz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Voir [27]

Le calcul fractionnaire est devenu un outil d'actualité vu son application dans plusieurs domaines de la physique et de la chimie et même en finance et en probabilité et statistiques, essentiellement conçu pour modéliser et bien interpréter les problèmes.

Dans cette partie, nous présentons les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire, en nous référant aux travaux de [104] et [83].

Définition 2.1. [104] *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'équation suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.3)$$

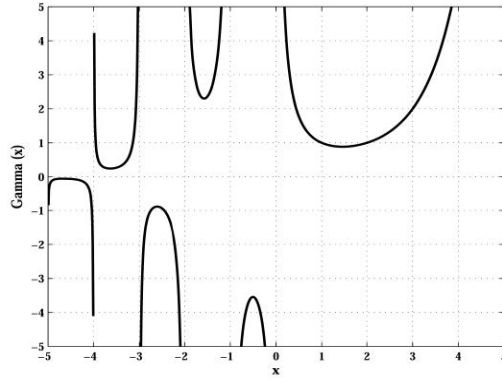


FIGURE 1.1 – Tracé de la fonction Gamma d’Eluer [104]

Proposition 2.1. [104] Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante

1.

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}_+^*$$

2.

$$\Gamma(a + 1) = a!, \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$$

Définition 2.2. [104] La fonction Bêta définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

où $p > 0$ et $q > 0$.

Définition 2.3. [80] La fonction de la variable complexe z définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

Remarque 2.1. Pour $\alpha = 1$, nous obtenons la fonction exponentielle classique décrite par

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Définition 2.4. [80] La fonction de la variable complexe z définie par

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

est appelée la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Il découle de la définition

1. Pour

$$\beta = 1, \alpha > 0, E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z)$$

2. Pour

$$\beta = \alpha = 1, E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

3. Pour

$$\beta = 2, \alpha = 1, E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

4. pour

$$\beta = 3, \alpha = 1, E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k + 2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k + 2)!} = \frac{e^z - z - 1}{z^2}$$

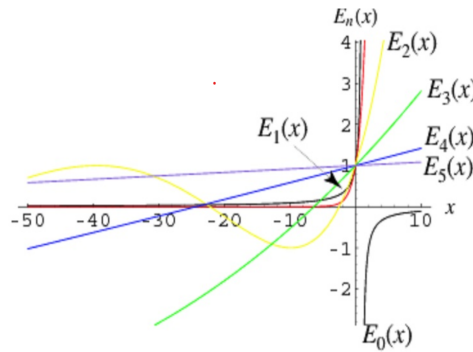


FIGURE 1.2 – Tracé de la fonction Mittag-Leffler [80]

Définition 2.5. [4] Soit $f \in C[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors l'intégrale $I^\alpha f(x)$ définie par :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

est appelée intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α .

Cette section expose la définition de divers types de dérivées d'ordre fractionnaire ainsi que les relations qui les lient. Nous rappellerons également certaines propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Définition 2.6. [87] La dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville d'ordre α avec

$n - 1 < \alpha \leq n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction continue x est donnée par

$$\mathbf{D}_{R-L}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Définition 2.7. [87], [103] La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , avec $\alpha \geq 0$ et $n - 1 < \alpha \leq n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, de la fonction x est donnée par

$$\mathbf{D}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (1.5)$$

Remarque 2.2. De la définition 2.7, il s'ensuit que la dérivée au sens de Caputo d'une constante est égal à zéro ce qui coïncide avec la dérivée classique.

Remarque 2.3. L'avantage principal de la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à celle de Riemann Liouville est celle au sens de Caputo permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à utiliser dans la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. De plus que, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville d'une constante n'est pas bornée en $t = 0$.

Définition 2.8. [37] Si $f(t)$ est une fonction causale, alors elle prend la valeur zéro pour tout $t < 0$.

Définition 2.9. [37] Une fonction f est d'ordre exponentiel a s'il existe une constante $M > 0$, telle que

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \forall t > T.$$

Définition 2.10. [37] La transformée de Laplace d'une fonction f d'une variable réelle $t \geq 0$, est la fonction F de la variable complexe s ($\text{Re}(s) > 0$) telle que,

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.6)$$

Proposition 2.2. [116]

1. **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{C}([0, \infty[)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(t)](s) + \beta \mathcal{L}[g(t)](s).$$

La linéarité de la transformation de Laplace découle des propriétés de l'intégrale.

2. **Dérivation :** Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^n([0, \infty[)$. Nous avons,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(t) \Big|_{t=0},$$

où, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ et $f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$ représente la dérivée d'ordre k de la fonction $f(t)$ au point $t = 0$.

3. **Produit de convolution** : Pour toutes fonctions f et g dans $\mathcal{C}([0, +\infty[)$, la transformation de Laplace du produit de convolution entre f et g

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

est donnée par

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = F(s) G(s),$$

où

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \quad \text{et} \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s).$$

Dans cette partie, nous exposons certains résultats relatifs à la transformation de Laplace fractionnaire. Ces résultats seront utilisés dans les sections ultérieures.

Définition 2.11. [80] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) \in \mathcal{C}^n$ est donnée par

$$\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}, \quad (1.7)$$

où $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $F(s)$ représente la transformée de Laplace de $f(t)$ et $f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction $f(t)$ au point $t = 0$.

2.1 Quelques propriétés de la transformée de Laplace fractionnaire [24]

Soient $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue d'ordre exponentiel tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = 0$. Alors, nous avons les propriétés suivantes :

- $\mathcal{L}\left[\frac{t^a}{\Gamma(a+1)}\right](s) = s^{-(a+1)}$, où Γ représente la fonction Gamma.
- $\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha u(t)](s) = s^\alpha U(s)$, où $U(s)$ représente la transformée de Laplace de $u(t)$.
- $\mathcal{L}[\mathbf{D}^\alpha \delta(t)](s) = s^\alpha$, où $\delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac.

Théorème 1. [80] La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre α fractionnaire a la forme

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s} \quad (1.8)$$

Proposition 2.3. [80] La transformée de Laplace inverse de l'expression $s^\alpha F(s)$ pour $\alpha > 0$ est définie par,

$$\mathcal{L}^{-1}[s^\alpha F(s)] = \mathbf{D}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (1.9)$$

La transformée en Z est l'outil privilégié pour analyser les systèmes discrets. Elle occupe une fonction analogue à celle de la transformée de Laplace pour les systèmes en temps continu. Cette application convertit une suite (définie sur les entiers positifs) en une fonction de la variable complexe.

Définition 2.12. [105] La transformée en Z unilatérale d'une fonction temporelle discrète $x(n)$ est définie par la formule suivante

$$X(z) = \mathcal{Z}x(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}. \quad (1.10)$$

tel que $x(n) = 0$ pour $n < 0$.

Remarque 2.4. [37] Toute transformée en Z doit être associée à sa région de convergence. Pour déterminer cette région, on utilise le critère de convergence de Cauchy sur la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad (1.11)$$

qui converge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1. \quad (1.12)$$

Proposition 2.4. [37],[113]

1. **Linéarité :** Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites admettant les transformées en z , et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathcal{Z}[\alpha U_n + \beta S_n](z) = \alpha \mathcal{Z}[U_n](z) + \beta \mathcal{Z}[S_n](z).$$

2. **Dérivation :** Nous avons

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}.$$

et

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)x(n)z^{-n-1}.$$

alors

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n}.$$

3. Si $y(n)$ est obtenue par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, on a seulement

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m),$$

ainsi

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m)z^{-n}, \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-m)z^{-(n-m)} \right], \\ &= X(z)G(z) \end{aligned}$$

3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques concepts de base de la théorie des matrices ainsi que quelques notions et définitions fondamentales des fonctions spéciales. Les différentes définitions de la dérivée fractionnaire avec leurs propriétés sont présentées. Ensuite, nous avons introduit quelques définitions et théorèmes fondamentaux sur la transformée de Laplace, ainsi que la transformée de Laplace fractionnaire et ses propriétés. Nous avons discuté également de la transformée en Z , nécessaire pour calculer la fonction de transfert d'une certaine classe de systèmes bidimensionnels et multidimensionnels à temps discret.

Solvabilité et analyse des systèmes unidimensionnels

Ce chapitre présente une généralité sur les différents types de systèmes dynamiques, comprenant les systèmes dynamiques continus et discrets. Nous abordons quelques définitions et théorèmes concernant la positivité et la stabilité. Enfin, nous examinons la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires à temps continu, en traitant à la fois les cas standards et singuliers.

1 Généralités sur les systèmes dynamiques

Définition 1.1. [94] *Un système dynamique à temps discret est un système dynamique où la loi appliquée est à temps discret, i. e. ; les variables du système ne peuvent avoir qu'un nombre fini de valeurs, autrement dit, l'ensemble de définition est dénombrable.*

Définition 1.2. *Un système dynamique linéaire standard à temps discret est décrit par l'équation suivante*

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.1)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs d'états et d'entrées du système et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Définition 1.3. [80] *Le système à temps discret 2.1 est dit positif si $x_i \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$ pour toutes les conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i \in \mathbb{Z}_+$.*

Théorème 2. [80] *Le système à temps discret 2.1 est dit positif si seulement si :*

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \quad (2.2)$$

Définition 1.4. [80] *Le système à temps discret 2.1 est dit asymptotiquement stable si : pour $u_i = 0, i \in \mathbb{Z}_+$,*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.3)$$

Définition 1.5. [9] *Les systèmes dynamiques à temps continu représentent la limite des systèmes discrets où l'évolution se fait à des intervalles de temps de plus en plus brefs. Dans ce cas, la loi devient une équation différentielle.*

Exemple 1.1. [9] *L'équation*

$$\frac{dp}{dt} = cp, \quad (2.4)$$

peut être vue comme une limite continue de l'équation (4.23). Pour $c > 0$, elle décrit aussi un modèle simple de croissance d'une population. Quand la population est petite la solution est bien connue

$$p(t) = p_0 e^{ct}.$$

Définition 1.6. [77] *Un système dynamique linéaire standard à temps continu est décrit par les équations suivantes*

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

La condition initiale associée au système (2.5) est

$$x(0) = x_0.$$

Définition 1.7. [77] *Le système à temps continu 2.5 est dit positif si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$ pour toutes les conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.*

Théorème 3. [77] *Le système à temps continu 2.5 est dit positif si seulement si :*

$$A \in \mathbb{M}_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \quad (2.6)$$

Définition 1.8. [77] *Le système à temps continu 2.5 est dit asymptotiquement stable si : pour $u(t) = 0, t \geq 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n \quad (2.7)$$

Théorème 4. [77] *Le système positif décrit par l'équation 2.5 est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice de Metzler A ont des parties réelles négatives.*

2 La solvabilité des systèmes linéaires fractionnaires cas standards et cas singuliers

L'objectif de cette partie est d'exposer la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires, qu'ils soient standards ou singuliers, à travers l'application de la transformation de Laplace [77].

1. Considérons le système dynamique linéaire standard d'ordre fractionnaire à temps continu

$$\mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.9)$$

Où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x(t)$ avec $n-1 < \alpha \leq n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x(t) \in \mathbb{R}^q$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ sont, respectivement, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie et A , B , C et D sont des matrices de dimensions appropriées.

La condition initiale associée au système (2.8) est

$$x(0) = x_0.$$

Théorème 5. [24] *Le système dynamique linéaire fractionnaire standard (2.8) admet comme solution*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A^i \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(0), \quad (2.10)$$

où Γ représente fonction Gamma.

Pour $\alpha = 1$, le même résultat présenté dans [24] est obtenu.

Proposition 2.1. *Pour $\alpha = 1$, le système dynamique linéaire standard (2.8) admet comme trajectoire*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i B}{\Gamma(i+1)} \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} x_0,$$

où Γ représente la fonction Gamma.

Exemple 2.1. *Considérons le système (2.8) avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

La condition initiale associée au système (2.8) est

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, la commande $u(t)$ est donnée par la fonction de Heaviside $H(t)$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\det(s^\alpha I - A) = s^{2\alpha} \neq 0$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$, alors, en utilisant la transformation de Laplace, la trajectoire est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 1 \end{pmatrix}.$$

2. Considérons le système dynamique linéaire d'ordre fractionnaire singulier à temps continu

$$E\mathbf{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.11)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.12)$$

où \mathbf{D}^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $x(t)$ avec $n-1 < \alpha \leq n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x(t) \in \mathbb{R}^q$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement. A , B , C , D et E sont des matrices de dimensions appropriées avec $\det E = 0$.

La condition initiale associée au système (2.11) est

$$x(0) = x_0.$$

Proposition 2.2. [48] *Soit $A, E \in \mathbb{R}^{q \times q}$ avec $\det E = 0$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{C}$ et $n-1 < \alpha \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la série de Laurent au voisinage de ∞ est donnée par*

$$(s^\alpha E - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)\alpha}, \quad (2.13)$$

où μ est appelé indice de nilpotence, il est décrit par

$$\mu = \text{rg } E - \deg(\det(s^\alpha E - A)) + 1,$$

et ϕ_i est appelée la matrice de transition de (2.11), elle satisfait

1. $\phi_i = 0$, pour $i < -\mu$.
2. $\phi_i = (\phi_0 A)^i \phi_0$, pour $i \geq 0$.

Théorème 6. [24] *Le système dynamique linéaire fractionnaire singulier (2.11) admet comme solution*

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \left(\frac{B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + E \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{i\alpha+k}}{\Gamma(i\alpha+k+1)} x^{(k)}(0) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \left(B \mathbf{D}^{(i-1)\alpha} u(t) + E \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{D}^{i\alpha-k-1} \delta(t) x^{(k)}(0) \right),
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

où Γ , μ et ϕ représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.

Pour $\alpha = 1$, on trouve un résultat identique à celui présenter dans [24].

Proposition 2.3. *Pour $\alpha = 1$, le système dynamique linéaire singulier (2.11) admet comme trajectoire*

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \left(\frac{B}{\Gamma(i+1)} \int_0^t (t-\tau)^i u(\tau) d\tau + E \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} x(0) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} (B u^{(i-1)}(t) + E \delta^{(i-1)}(t) x(0)),
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où Γ , μ et ϕ représentent la fonction Gamma, l'indice de nilpotence et les matrices fondamentales respectivement.

Exemple 2.2. *Soit le système (2.11) avec $0 < \alpha \leq 1$ et*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La condition initiale du système (2.11) est

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}.$$

On a pour $0 < \alpha \leq 1$

$$s^\alpha E - A = \begin{pmatrix} s^\alpha + 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(s^\alpha E - A) = 2(s^\alpha + 1) \neq 0$ pour certain $s \in \mathbb{C}$, alors, le système (2.11) est régulier. De plus,

$$(s^\alpha E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^\alpha + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

où encore,

$$(s^\alpha E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s^{-\alpha} + s^{-2\alpha} s^{-3\alpha} + \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned} \mu &= \text{rg}E - \deg(\det(s^\alpha E - A)) + 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \phi_i = \begin{pmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la transformée de Laplace, on trouve

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_{-1} B u(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i B \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} u(\tau) d\tau + \phi_{-1} E D^{\alpha-1} \delta(t) x^{(k)}(0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} x^{(k)}(0) \end{aligned}$$

D'où : la solution $x(t)$ est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma((i+1)\alpha)} u(\tau) d\tau + (-1)^i x_{0,1} \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

3 Exemples d'applications

Exemple 3.1. La figure 2.1 montre un circuit électrique fractionnaire à deux mailles, où R_1 et R_2 sont les résistances données, L_1 et L_2 représentent les inductances, $u(t)$ est la source de voltages. On note par x_1 et x_2 les intensités du courant dans les deux mailles.

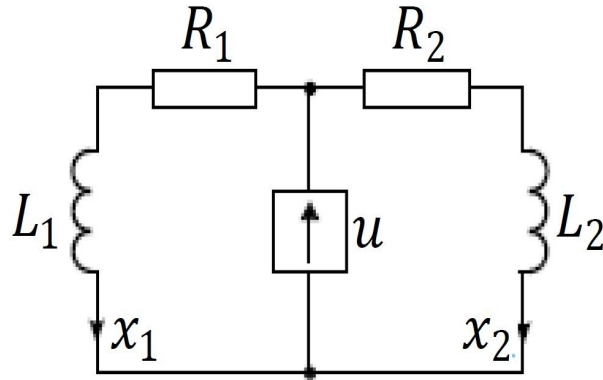


FIGURE 2.1 – circuit RL [75]

En appliquant la loi de kirchhoff, nous obtenons l'équation

$$ED^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.16)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ et

$$E = \begin{pmatrix} L_1 & -L_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -R_1 & R_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$$

la condition initiale associée au système (2.16).

Pour un certain $s \in \mathbb{C}$, nous avons

$$s^\alpha E - A = \begin{pmatrix} s^\alpha L_1 + R_1 & -s^\alpha L_2 - R_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\det(s^\alpha E - A) = s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2 \neq 0,$$

alors, le couple (E, A) associé au système (2.16) est régulier et

$$(s^\alpha E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & s^\alpha L_2 + R_2 \\ \frac{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2}{-1} & \frac{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2}{s^\alpha L_1 + R_1} \\ \frac{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2}{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2} & \frac{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2}{s^\alpha(L_1 + L_2) + R_1 + R_2} \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence est

$$\begin{aligned}\mu &= \text{rg}E - \deg(\det(s^\alpha E - A)) + 1, \\ &= 1.\end{aligned}$$

et les matrices fondamentales sont obtenues en utilisant la division Euclidienne comme suit

$$\phi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\ 0 & \frac{L_1}{L_1 + L_2} \end{pmatrix},$$

et $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i = \begin{pmatrix} (-1)^i \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} & (-1)^i \frac{R_2(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} + (-1)^{i+1} L_2 \frac{(R_1 + R_2)^{i+1}}{(L_1 + L_2)^{i+2}} \\ (-1)^{i+1} \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} & (-1)^i \frac{R_1(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} + (-1)^{i+1} L_1 \frac{(R_1 + R_2)^{i+1}}{(L_1 + L_2)^{i+2}} \end{pmatrix}.$$

Par l'utilisation de la transformée de Laplace formule (2.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \frac{B}{\Gamma((i+1)\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i E \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} x_0 \\ &\quad + \phi_{-1} E D^{\alpha-1} \delta(t) x_0 + \phi_{-1} B u(t).\end{aligned}$$

En dernire, la solution du système est donnée par le vecteur

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((i+1)\alpha)} \left[(-1)^i \frac{R_2(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} (-1)^{i+1} L_2 \frac{(R_1 + R_2)^{i+1}}{(L_1 + L_2)^{i+2}} \right] \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-1)^i L_1 \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} x_{0,1} + (-1)^{i+1} L_2 \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} x_{0,2} \right] \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} + \frac{L_2}{L_1 + L_2} u(t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma((i+1)\alpha)} \left[(-1)^i \frac{R_1(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} (-1)^{i+1} L_1 \frac{(R_1 + R_2)^{i+1}}{(L_1 + L_2)^{i+2}} \right] \int_0^t (t-\tau)^{(i+1)\alpha-1} u(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-1)^{i+1} L_1 \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} x_{0,1} + (-1)^i L_2 \frac{(R_1 + R_2)^i}{(L_1 + L_2)^{i+1}} x_{0,2} \right] + \frac{L_1}{L_1 + L_2} u(t).\end{aligned}$$

4 Conclusion

Le présent chapitre se concentre sur l'étude de la solvabilité des systèmes dynamiques linéaires fractionnaires à temps continu à l'aide de la transformée de Laplace. Nous avons commencé par une introduction générale sur les systèmes dynamiques, suivie d'un rappel des définitions et théorèmes fondamentaux relatifs à la positivité et à la stabilité. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons présenté des exemples à la fois académiques et réelles et cela pour les deux cas à savoir des systèmes dynamiques fractionnaires standards et singuliers.

Analyse des modèles fractionnaires conformables uni et tridimensionnels

Dans ce chapitre, notre intérêt porte sur la classe des systèmes tridimensionnels fractionnaires conformables, pour établir la solution de cette classe de systèmes en développant la transformée de Laplace conforme en 3D tout en se basant sur les propriétés présentées dans ce chapitre. Dans ce cadre, nous envisageons l'extension de l'approche au cas des modèles fractionnaires à dérivées conformables unidimensionnels pour ensuite traiter le cas des modèles tridimensionnels.

Ainsi qu'une analyse sur la positivité des systèmes présentées. Des conditions nécessaires et suffisantes seront établies pour que de tels systèmes soient positifs.

1 Rappel sur la dérivée conforme

Le formalisme de la dérivation non entière consiste à généraliser la notion de la dérivée à des ordres non entiers de dérivation (réels ou complexes). Différentes définitions de la dérivation non entière ont été établies, ces dernières ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour plusieurs fonctions, parmi les différentes définitions de la dérivée fractionnaires, la dérivée conforme proposée par Khalil [84], cette définition satisfait la plupart des propriétés de la dérivée intégrale classique, telles que la linéarité, la règle du produit, la règle du quotient et plus. En revanche la dérivée conforme nous permet de modéliser plus facilement les problèmes physiques, car les équations différentielles sont plus faciles à résoudre analytiquement et numériquement par rapport au cas de la dérivée non entière associée par exemple aux dérivées de Riemann-Liouville ou Caputo.

Dans cette contribution nous devons introduire brièvement quelques définitions et caractérisations de la dérivée et de l'intégrale conforme.

Définition 1.1. [84] Soit y une fonction $y : [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. La dérivée conforme de la fonction y d'ordre α où $n - 1 < \alpha \leq n$ est définie par :

$$\mathbf{T}_\alpha^{t_0} y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \varepsilon(t - t_0)^{n-\alpha}) - y(t)}{\varepsilon} \quad \forall t > 0. \quad (3.1)$$

Remarque 1.1. 1. Si $t_0 = 0$, alors

$$\mathbf{T}_\alpha y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \varepsilon t^{n-\alpha}) - y(t)}{\varepsilon} \quad \forall t > 0. \quad (3.2)$$

2. Si $t_0 = 0, n = 1$, donc $0 < \alpha \leq 1$ alors

$$\mathbf{T}_\alpha y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - y(t)}{\varepsilon} \quad \forall t > 0. \quad (3.3)$$

3. Si (3.1) existe, alors la fonction y est α -différentiable.

Théorème 7. [84] Soit $\alpha \in (0, 1]$, $y_1, y_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions α -différentiables, alors $\forall t > 0$

- $\mathbf{T}^\alpha[ay_1(t) + by_2(t)] = a\mathbf{T}^\alpha y_1(t) + b\mathbf{T}^\alpha y_2(t)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbf{T}^\alpha(\lambda) = 0$, pour toute fonction constante $y_1(t) = \lambda$
- $\mathbf{T}^\alpha[t^q] = qt^{q-\alpha}$, $\forall q \in \mathbb{R}$.
- $\mathbf{T}^\alpha[y_1(t)y_2(t)] = y_1(t)\mathbf{T}^\alpha y_2(t) + y_2(t)\mathbf{T}^\alpha y_1(t)$.
- $\mathbf{T}^\alpha \left[\frac{y_1(t)}{y_2(t)} \right] = \frac{\mathbf{T}^\alpha[y_1(t)y_2(t)] - \mathbf{T}^\alpha[y_2(t)y_1(t)]}{[y_2(t)]^2}$.
- Si y_1 est différentiable, alors $\mathbf{T}^\alpha(y_1)(t) = t^{1-\alpha} \frac{dy_1(t)}{dt}$.

Définition 1.2. [90] L'intégrale fractionnaire conforme (à gauche) de la fonction $f \in L^1[a, b]$ d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ est définie par,

$$\mathbf{I}_a^\alpha x(t) = \int_a^x f(u) d_a^\alpha u = \int_a^x (u - a)^{\alpha-1} f(u) du \quad (3.4)$$

et l'intégrale fractionnaire conforme (à droite) de la fonction $f \in L^1(a, b)$ d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ est définie par,

$${}_b \mathbf{I}^\alpha x(t) = \int_x^b f(u) {}_b d^\alpha u = \int_x^b (b - u)^{\alpha-1} f(u) du \quad (3.5)$$

Théorème 8. [2] Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que fg est différentiable. Alors,

$$\int_a^x f(x) \mathbf{T}_a^\alpha[g(x)] d_a^\alpha x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \mathbf{T}_a^\alpha[f(x)] d_a^\alpha x \quad (3.6)$$

et

$$\int_a^x f(x) \mathbf{T}_b^\alpha [g(x)]_b d^\alpha x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \mathbf{T}_b^\alpha [f(x)]_b d^\alpha x \quad (3.7)$$

Définition 1.3. [2] Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, $0 < \alpha \leq 1$, alors la transformée de Laplace conformable de f est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha [f(t)](s) &= F_\alpha(s), \\ &= \int_0^\infty e^{s \frac{-t^\alpha}{\alpha}} f(t) dt^\alpha, \end{aligned}$$

Théorème 9. [2] Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction causale, $0 < \alpha \leq 1$, alors la transformée de Laplace fractionnaire conformable de la dérivée conforme de f est donnée par

$$\mathcal{L}_\alpha [T^\alpha f(t)](s) = sF_\alpha(s) - f(0), s > 0. \quad (3.8)$$

Dans le théorème suivant, on donne la relation entre la transformée de Laplace conformable et la transformée de Laplace.

Théorème 10. [1] Soit $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction causale, $0 < \alpha \leq 1$, ainsi

$$F_\alpha(s) = \mathcal{L} \left[f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right] (s). \quad (3.9)$$

Le théorème suivant décrit la transformée de Laplace de certaines fonctions usuelles.

Théorème 11. [1] Considérons $a, p, q \in \mathbb{R}$ et pour tout $0 < \alpha \leq 1$. Alors

1.

$$\mathcal{L}_\alpha [a](s) = \frac{a}{s}, \quad s > 0, \quad (3.10)$$

2.

$$\mathcal{L}_\alpha [t^q](s) = \alpha^{\frac{q}{\alpha}} \frac{\Gamma(1 + \frac{q}{\alpha})}{s^{1 + \frac{q}{\alpha}}}, \quad s > 0, \quad (3.11)$$

3.

$$\mathcal{L}_\alpha [e^{p \frac{t^\alpha}{\alpha}}](s) = \frac{1}{s - p}, \quad s > p, \quad (3.12)$$

Définition 1.4. [12]

La dérivée fractionnaire conformable d'ordre (α, β) de la fonction $x(t_1, t_2)$ est donnée par

$$\mathbf{T}_{t_1 t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \varepsilon_1 t_1^{1-\alpha}, t_2 + \varepsilon_2 t_2^{1-\beta}) - x(t_1, t_2)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (3.13)$$

Définition 1.5. [12] La double transformée conforme de Laplace $g(t_1, t_2)$ notée $\mathcal{L}_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta}$ est définie par,

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} g(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta}} g(t_1, t_2) d^\alpha t_1 d^\beta t_2. \quad (3.14)$$

Théorème 12. [100] La transformée de Laplace conforme de la fonction $T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2)$ est définie par, ,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left[T_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) \right] = psX(p, s) - pX(p, 0) - sX(0, s) + x(0, 0). \quad (3.15)$$

respectivement, celle de fonction $\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m$ est ,

$$L_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m \right] = \frac{n!m!}{p^{n+1} s^{m+1}}. \quad (3.16)$$

Nous introduisons dans ce cadre les définitions de la dérivée et de l'intégrale conforme d'une fonction continue à trois dimensions $x(t_1, t_2, t_3)$ et à trois variables indépendantes $t_1, t_2, t_3 \geq 0$.

Les auteurs de [100] et [12] ont étendu certains résultats concernant le calcul fractionnaire conforme dans le cas bidimensionnels.

2 La solvabilité des systèmes unidimensionnels linéaires à dérivée conforme

Cette section a pour but de présenter la solvabilité des systèmes linéaires dynamiques fractionnaires conformes standards en utilisant la transformation de Laplace conforme. Les principaux résultats obtenus concernant la positivité de ces systèmes.

Définition 2.1 (Système dynamique linéaire à dérivée conforme standard).

$$\mathbf{T}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.17)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (3.18)$$

où \mathbf{T}^α est la dérivée fractionnaire conforme de la fonction $x(t)$ avec $0 < \alpha \leq 1$ où , $x(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

$A \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Définition 2.2 (Système dynamique linéaire fractionnaire standard régulier). [24] *Le système (3.17) est dit régulier si et seulement si*

$$\det(s^\alpha I - A) \neq 0, \quad (3.19)$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Théorème 13. *Le système dynamique linéaire fractionnaire standard (3.17) admet comme solution*

$$x(t) = e^{A \frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}} x_0(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A \frac{(t-t_0)^\alpha - (\tau-t_0)^\alpha}{\alpha}} BU(\tau)(\tau - t_0)^{\alpha-1} d\tau \quad (3.20)$$

Démonstration. Par application de la transformation de Laplace conforme à l'équation (3.17), nous trouvons

$$\mathbf{T}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \mathcal{L}_\alpha^{t_0} [\mathbf{T}^\alpha x(t)](s) = A\mathcal{L}_\alpha^{t_0} [x(t)](s) + B\mathcal{L}_\alpha^{t_0} [u(t)](s).$$

En utilisant la formule (3.8) et sachant que $X(s)$ et $U(s)$ sont les transformées de Laplace conforme de $x(t)$ et $u(t)$ respectivement, nous obtenons

$$sX(s) - x_0(t_0) = AX(s) + BU(s)$$

laquelle peut aussi s'écrire sous la forme

$$(sI - A)X(s) = x_0(t_0) + BU(s) \quad (3.21)$$

Comme le faisceau du couple (I, A) est régulier. Alors, l'équation (3.21) devient

$$X(s) = (sI - A)^{-1} [BU(s) + x_0(t_0)] \quad (3.22)$$

Sachant que,

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i s^{-1-i} \quad (3.23)$$

Donc,

$$X(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i s^{-1-i} BU(s) + \sum_{i=0}^{+\infty} A^i s^{-1-i} x_0(t_0)$$

2. LA SOLVABILITÉ DES SYSTÈMES UNIDIMENSIONNELS LINÉAIRES À DÉRIVÉE CONFORMABLE

En utilisant la transformée de Laplace conforme inverse, il en découle que

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} A^i s^{-1-i} BU(s) + \sum_{i=0}^{+\infty} A^i s^{-1-i} x_0(t_0) \right] \quad (3.24)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i}] x_0(t_0) + \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i} BU(s)] \quad (3.25)$$

pour le premier terme de cette somme on a,

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i}] = \frac{\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} \right)^i}{i!}$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i}] x_0(t_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \frac{\left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} \right)^i}{i!} x_0(t_0) \quad (3.26)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\left(A \left(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} \right) \right)^i}{i!} x_0(t_0) \quad (3.27)$$

$$= e^{\frac{A}{\alpha}(t-t_0)^\alpha} x_0(t_0) \quad (3.28)$$

Maintenant, nous calculons

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i} BU(s)] \quad (3.29)$$

On rappelle que le produit de convolution pour la transformée de Laplace conforme de f, g pour $t \in [t_0, \infty[$ est défini par,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha^{t_0}(f * g) &= \int_{t_0}^t f(t^\alpha - s^\alpha) g(s) d_\alpha^{t_0} s \\ &= \int_{t_0}^t f(t^\alpha - s^\alpha) g(s) (s - t_0)^{1-\alpha} ds \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha^{-1} [s^{-1-i} BU(s)] &= \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \mathcal{L}_\alpha [s^{-1-i}] * \mathcal{L}_\alpha [BU(s)] \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \left(\frac{(t-t_0)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} * BU(s) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} A^i \int_{t_0}^t \frac{(t-t_0)^{i\alpha} - (\tau-t_0)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} BU(\tau) d_\alpha^{t_0} \tau \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{t_0}^t \frac{A^i (t-t_0)^{i\alpha} - (\tau-t_0)^{i\alpha}}{i! \alpha^i} BU(\tau) (\tau-t_0)^{1-\alpha} d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t e^{\frac{A}{\alpha} [(t-t_0)^\alpha - (\tau-t_0)^\alpha]} BU(\tau) (\tau-t_0)^{1-\alpha} d\tau
 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.1. *Pour $\alpha = 1$, le système dynamique linéaire standard (3.17) admet comme trajectoire*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0) - (\tau-t_0)} BU(\tau) d\tau.$$

3 Aperçu sur les systèmes positifs

Durant ces dernières années, il a eu un intérêt croissant pour les systèmes multidimensionnels fractionnaires qui sont sujets à des contraintes de positivité de leurs variables dynamiques. Ces systèmes positifs doivent avoir pour des conditions initiales non-négatives, des variables d'état non-négatives. Ces systèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs dans [83], [62]. Comme dans la réalité beaucoup d'exemples d'applications sont cités dans la littérature comme par exemple, les systèmes de diffusion, circuit RLC, aéronautique, le contrôle automatique et les systèmes d'énergie minimale etc... Quelques applications des systèmes fractionnaires positifs ont été proposées dans [83] où un aperçu de l'état de l'art sur la théorie des systèmes linéaires positifs fractionnaires a été énoncé. Le problème de la positivité des systèmes linéaires fractionnaires bidimensionnels a été envisagé par Kaczorek [83], et la notion de contraintes bidimensionnelles positives en temps continu et discret a été introduite dans [65].

Pour ces raisons, nous allons présenter quelques notions et certaines définitions pour étudier la positivité du système dynamique linéaire fractionnaire continu traité dans ce chapitre suivie par quelques résultats essentiels pour déterminer les conditions de la positivité de notre système.

Lemme 3.1. [22] $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de Metzler si et seulement si $e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $\forall t \geq 0$.

Définition 3.1. [82] Le système à temps continu (3.17) est dit positif si et seulement si $x(t) \in \mathbb{R}_+^q$, $t \geq 0$, pour toutes les conditions initiales $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^q$ et toutes les entrées $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$

Théorème 14. [82] Le système à temps continu (3.17) est dit positif si seulement si :

$$A \in \mathbb{M}_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{q \times m} \quad (3.30)$$

3.1 Résolution de la Première Forme du Modèle de Fornasini-Marchesini par l'Application de la Double Transformée de Laplace Conformable

Considérons le modèle continu de Fornasini-Marchesini fractionnaire à dérivées conformables d'ordre (α, β) décrit par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{t_1, t_2}^{\alpha, \beta} x(t_1, t_2) = & A_0 x(t_1, t_2) + A_1 \mathbf{T}_{t_1}^{\alpha} x(t_1, t_2) + A_2 \mathbf{T}_{t_2}^{\beta} x(t_1, t_2) \\ & + Bu(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$i = 0, 1, 2$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, les conditions initiales $x(0, t_2)$ et $x(t_1, 0)$ sont données.

Théorème 15. [12] La solution de l'équation d'état (3.31) en tenant compte des conditions limites est donnée par

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[-\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{i! j!} \phi_{ij} x(0, 0) + \phi_{i-1, j-1} B \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} U(t_1, t_2) \right. \\ & \left. + \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} [\phi_{i, j} - \phi_{i-1, j} A_2] \mathbf{J}_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0) + \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} [\phi_{i, j} - \phi_{i, j-1} A_1] \mathbf{J}_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

4 Solution du problème

Dans cette partie, pour résoudre les systèmes linéaires à temps continu fractionnaire à dérivée conforme en trois dimensions (3D) de type Fornasini-Marchesini vu les propriétés intéressantes qu'elle possède, nous présentons quelques définitions.

Définition 4.1. Pour $i, j, l \geq 0$ des nombres naturels, nous énonçons la triple intégrale fractionnaire conformable de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$ par,

$$\mathbf{J}_{t_1, t_2, t_3}^{i\alpha, j\beta, l\gamma} x(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \frac{\left(\frac{t_1 - \tau_1}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2 - \tau_2}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3 - \tau_3}{\gamma}\right)^l}{i!j!l!} x(t_1, t_2, t_3) d^\alpha t_1 d^\beta t_2 d^\gamma t_3 \quad (3.33)$$

Définition 4.2. La dérivée fractionnaire conformable partielle d'ordre α par rapport à la variable t_1 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$ est définie par

$$\mathbf{T}_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2, t_3) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \varepsilon_1 t_1^{1-\alpha}, t_2, t_3) - x(t_1, t_2, t_3)}{\varepsilon_1} \quad (3.34)$$

Définition 4.3. La dérivée fractionnaire conformable partielle d'ordre β par rapport à la variable t_2 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$ est définie par

$$\mathbf{T}_{t_2}^\beta x(t_1, t_2, t_3) = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{x(t_1, t_2 + \varepsilon_2 t_2^{1-\beta}, t_3) - x(t_1, t_2, t_3)}{\varepsilon_2} \quad (3.35)$$

Définition 4.4. La dérivée fractionnaire conformable partielle d'ordre β par rapport à la variable t_3 de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$ est définie par

$$\mathbf{T}_{t_3}^\gamma x(t_1, t_2, t_3) = \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \frac{x(t_1, t_2, t_3 + \varepsilon_3 t_3^{1-\gamma}) - x(t_1, t_2, t_3)}{\varepsilon_3} \quad (3.36)$$

Définition 4.5. La dérivée conformable d'ordre (α, β, γ) de la fonction $x(t_1, t_2, t_3)$ est définie par

$$\mathbf{T}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} x(t_1, t_2, t_3) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \varepsilon_1 t_1^{1-\alpha}, t_2 + \varepsilon_2 t_2^{1-\beta}, t_3 + \varepsilon_3 t_3^{1-\gamma}) - x(t_1, t_2, t_3)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \quad (3.37)$$

5 Solvabilité du modèle 3D fractionnaire de Fornasini-Marchesini

Cette section comporte la solvabilité de système linéaire dynamique fractionnaire continu par l'utilisation de la transformation de Laplace conforme en trois dimensions (3D).

Considérons le modèle continu de Fornasini-Marchesini fractionnaire à dérivées conformables d'ordre (α, β, γ) décrit par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} x(t_1, t_2, t_3) = & A_0 x(t_1, t_2, t_3) + A_1 \mathbf{T}_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2, t_3) + A_2 \mathbf{T}_{t_2}^\beta x(t_1, t_2, t_3) \\ & + A_3 \mathbf{T}_{t_3}^\gamma x(t_1, t_2, t_3) + Bu(t_1, t_2, t_3), \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $x(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$i = 0, 1, 2, 3$, $B \in \mathbb{R}^{n^*m}$, les conditions initiales $x(0, t_2, t_3)$ et $x(t_1, 0, t_3)$ et $x(t_1, t_2, 0)$ sont données.

Définition 5.1. La triple transformée conformable de Laplace $g(t_1, t_2, t_3)$ notée $\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}$ est définie par

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} g(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta} - k \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} g(t_1, t_2, t_3) d^\alpha t_1 d^\beta t_2 d^\gamma t_3. \quad (3.39)$$

qui peut être simplifiée comme suit,

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} g(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta} - k \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} g(t_1, t_2, t_3) t_1^{\alpha-1} t_2^{\beta-1} t_3^{\gamma-1} dt_1 dt_2 dt_3. \quad (3.40)$$

Remarque 5.1. La triple transformation conformable de Laplace existe si et seulement si $Re(p) > 0$, $Re(s) > 0$, $Re(k) > 0$, avec la fonction $g(t_1, t_2, t_3)$ qui doit être continue

Théorème 16. La triple transformation conformable de Laplace de la fonction $\mathbf{T}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} x(t_1, t_2, t_3)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} \left[\mathbf{T}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} x(t_1, t_2, t_3) \right] &= pskX(p, s, k) - psX(p, s, 0) - pkX(p, 0, k) + pX(p, 0, 0) \\ &\quad - skX(0, s, k) + sX(0, s, 0) + kX(0, 0, k) - x(0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Lemme 5.1. La triple transformation conformable de Laplace de la fonction $\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l$ est

$$\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^m \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l \right] = \frac{n!m!l!}{p^{n+1} s^{m+1} k^{l+1}} \quad (3.42)$$

Démonstration. Nous utilisons la définition de la transformée de Laplace conforme en se basant sur [2]

$$\mathcal{L}_{t_1}^\alpha \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^n \right] = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^m \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l \right] &= \\
\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta} - k \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^m \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l \right] d^\alpha t_1 d^\beta t_2 d^\gamma t_3 & \\
= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha} - s \frac{t_2^\beta}{\beta} - k \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} \left[\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^n \left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^m \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l \right] t_1^{\alpha-1} t_2^{\beta-1} t_3^{\gamma-1} dt_1 dt_2 dt_3 & \\
= \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{t_1^\alpha}{\alpha}} \left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^n t_1^{\alpha-1} dt_1 \int_0^{+\infty} e^{-s \frac{t_2^\beta}{\beta}} \left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^m t_2^{\beta-1} dt_2 \int_0^{+\infty} e^{-k \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l t_3^{\gamma-1} dt_3 & \\
= \frac{n!m!l!}{p^{n+1} s^{m+1} k^{l+1}} &
\end{aligned}$$

□

Théorème 17. (Théorème de convolution pour la triple transformation de Laplace conforme)

Si $F(p, s, k) = \mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [f(t_1, t_2, t_3)]$ et $H(p, s, k) = \mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [h(t_1, t_2, t_3)]$ existent pour $s > 0$ et $p > 0, k > 0$, alors

$$\mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [f(t_1, t_2, t_3) * h(t_1, t_2, t_3)] = F(p, s, k)H(p, s, k),$$

tel que $f(t_1, t_2, t_3) * h(t_1, t_2, t_3)$ désigne la convolution des fonctions $f(t_1, t_2, t_3)$ et $h(t_1, t_2, t_3)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [f * h](t_1, t_2, t_3)$ la convolution des fonctions $f(t_1, t_2, t_3)$ et $h(t_1, t_2, t_3)$, qui est alors définie comme sui,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [f * h](t_1, t_2, t_3) &= \mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [f * h] \left((\gamma t_3)^{\frac{1}{\gamma}} (\beta t_2)^{\frac{1}{\beta}} (\alpha t_1)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st_1 - pt_2 - kt_3} (f * h) \\
&\quad \left((\gamma t_3)^{\frac{1}{\gamma}} (\beta t_2)^{\frac{1}{\beta}} (\alpha t_1)^{\frac{1}{\alpha}} \right) dt_1 dt_2 dt_3, \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st_1 - pt_2 - kt_3} \left[\int_0^{t_3} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \right. \\
&\quad \left. f \left((\gamma(t_3 - \theta))^{\frac{1}{\gamma}}, (\beta(t_2 - \mu))^{\frac{1}{\beta}}, (\alpha(t_1 - \eta))^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right. \\
&\quad \left. h \left((\gamma\theta)^{\frac{1}{\gamma}}, (\beta\mu)^{\frac{1}{\beta}}, (\alpha\eta)^{\frac{1}{\alpha}} \right) d\eta d\mu d\theta \right] dt_1 dt_2 dt_3,
\end{aligned}$$

En faisant les changements de variables suivants $q = t_3 - \theta, z = t_2 - \mu, m = t_1 - \eta$, nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(m+\eta)-p(z+\mu)-k(q+\theta)} \left[\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \right. \\
 & f \left((\gamma q)^{\frac{1}{\gamma}}, (\beta z)^{\frac{1}{\beta}}, (\alpha m)^{\frac{1}{\alpha}} \right) h \left((\gamma \theta)^{\frac{1}{\gamma}}, (\beta \mu)^{\frac{1}{\beta}}, (\alpha \eta)^{\frac{1}{\alpha}} \right) d\eta d\mu d\theta \left. \right] dm dz dq \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-sm-pz-kq} f \left((\alpha m)^{\frac{1}{\alpha}}, (\beta z)^{\frac{1}{\beta}}, (\gamma q)^{\frac{1}{\gamma}} \right) dm dz dq \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s\eta-p\mu-k\theta} h \left((\gamma \theta)^{\frac{1}{\gamma}}, (\beta \mu)^{\frac{1}{\beta}}, (\alpha \eta)^{\frac{1}{\alpha}} \right) d\eta d\mu d\theta \\
 &= F(p, s, k)H(p, s, k).
 \end{aligned}$$

□

En s'inspirant des résultats établis dans [2, 84] et [100], le produit de convolution de f et h est donnée par la formule

$$f(t_1, t_2, t_3) * h(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} f \left(t_1^\alpha - \tau_1^\alpha, t_2^\beta - \tau_2^\beta, t_3^\gamma - \tau_3^\gamma \right) h(t_1, t_2, t_3) dt_1^\alpha dt_2^\beta dt_3^\gamma. \quad (3.43)$$

Nous proposons également les résultats suivants :

1.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha\beta\gamma} \left[\mathbf{T}_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2, t_3) \right] &= \mathcal{L}_{t_2, t_3}^{\beta\gamma} \left[\mathcal{L}_{t_1}^\alpha \mathbf{T}_{t_1}^\alpha x(t_1, t_2, t_3) \right] \\
 &= \mathcal{L}_{t_2, t_3}^{\beta\gamma} [pX(p, t_2, t_3) - X(0, t_2, t_3)] \\
 &= \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [pX(p, s, t_3) - X(0, s, k)] \\
 &= pX(p, s, k) - X(0, s, k)
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha\beta\gamma} \left[\mathbf{T}_{t_2}^\beta x(t_1, t_2, t_3) \right] &= \mathcal{L}_{t_1, t_3}^{\alpha\gamma} \left[\mathcal{L}_{t_2}^\beta \mathbf{T}_{t_2}^\beta x(t_1, t_2, t_3) \right] \\
 &= \mathcal{L}_{t_1, t_3}^{\alpha\gamma} [sX(t_1, s, t_3) - X(t_1, 0, t_3)] \\
 &= \mathcal{L}_{t_3}^\gamma [sX(t_1, s, k) - X(t_1, 0, k)] \\
 &= sX(p, s, k) - X(p, 0, k)
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha\beta\gamma} [\mathbf{T}_{t_3}^\gamma x(t_1, t_2, t_3)] &= \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{\alpha\beta} [\mathcal{L}_{t_3}^\gamma \mathbf{T}_{t_3}^\gamma x(t_1, t_2, t_3)] \\
 &= \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{\alpha\beta} [kX(t_1, t_2, k) - X(t_1, t_2, 0)] \\
 &= \mathcal{L}_{t_1}^{\alpha\beta} [kX(t_1, s, k) - X(t_1, s, 0)] \\
 &= kX(p, s, k) - X(p, s, 0)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

En appliquant la transformée de Laplace 3D à l'équation d'espace d'états (3.38) et prenant en compte les équations (2.1), (4.23), (2), (3.46) on déduit l'expression suivante,

$$\begin{aligned}
 pskX(p, s, k) - psX(p, s, 0) - psX(p, 0, k) + pX(p, 0, 0) - skX(0, s, k) + sX(0, s, 0) + \\
 kX(0, 0, k) - x(0, 0, 0) = A_0X(p, s, k) + BU(p, s, k) + A_1 [pX(p, s, k) - X(0, s, k)] \\
 + A_2 [sX(p, s, k) - X(p, 0, k)] + A_3 [kX(p, s, k) - X(p, s, 0)]
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Où

$$X(p, 0, k) = \mathcal{L}_{t_1, t_3}^{\alpha\gamma} [x(t_1, 0, t_3)]$$

$$X(0, s, k) = \mathcal{L}_{t_2, t_3}^{\beta\gamma} [x(0, t_2, t_3)]$$

$$X(p, s, 0) = \mathcal{L}_{t_1, t_2}^{\alpha\beta} [x(t_1, t_2, 0)]$$

Si on multiplie les deux membres de l'égalité (3.47) par $p^{-1}s^{-1}k^{-1}$ nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 X(p, s, k) &= p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_0X(p, s, k) + p^{-1}s^{-1}k^{-1}BU(p, s, k) \\
 &+ p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_1 [pX(p, s, k) - X(0, s, k)] \\
 &+ p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_2 [sX(p, s, k) - X(p, 0, k)] \\
 &+ p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_3 [kX(p, s, k) - X(p, s, 0)] \\
 &+ k^{-1}X(p, s, 0) + k^{-1}X(p, , 0, k) - s^{-1}k^{-1}X(p, 0, 0) \\
 &+ p^{-1}X(0, , s, k) - p^{-1}k^{-1}X(0, s, 0) + p^{-1}s^{-1}X(0, 0, K) \\
 &+ p^{-1}s^{-1}k^{-1}x(0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 [I_n - p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_0 - s^{-1}k^{-1}A_1 - p^{-1}k^{-1}A_2 - p^{-1}s^{-1}A_3] X(p, s, k) = \\
 p^{-1}s^{-1}k^{-1}BU(p, s, k) - p^{-1}s^{-1}k^{-1}x(0, 0, 0) + [p^{-1} (I_n - s^{-1}k^{-1}A_1)] X(0, s, k) \\
 + [k^{-1} (I_n - p^{-1}s^{-1}A_2)] X(p, 0, k) + [k^{-1} (I_n - p^{-1}s^{-1}A_3)] X(p, s, 0) \\
 - s^{-1}k^{-1}X(p, 0, 0) - p^{-1}k^{-1}X(0, s, 0) - p^{-1}s^{-1}X(0, 0, k).
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Nous posons

$$G(p, s, k) = [I_n - p^{-1}s^{-1}k^{-1}A_0 - s^{-1}k^{-1}A_1 - p^{-1}k^{-1}A_2 - p^{-1}s^{-1}A_3] \quad (3.49)$$

L'inverse de la fonction $G(p, s, k)$ est donnée par

$$G^{-1}(p, s, k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i} s^{-j} k^{-l} \quad (3.50)$$

Il est bien connu que

$$G(p, s, k)G^{-1}(p, s, k) = G^{-1}(p, s, k)G(p, s, k) = I_n. \quad (3.51)$$

De (3.49),(3.50), (20) il en découle,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} [\phi_{i,j,l} - A_0\phi_{i-1,j-1,l-1} - A_1\phi_{i,j-1,l-1} - A_2\phi_{i-1,j,l-1} - A_3\phi_{i-1,j-1,l}] p^{-i} s^{-j} k^{-l} = I_n \quad (3.52)$$

Par identification et en comparant les coefficients de la même puissance de p , s et k , nous obtenons

$$\phi_{ijl} = \begin{cases} I_n & \text{si } i = 0, j = 0, l = 0, \\ A_0\phi_{i-1,j-1,l-1} + A_1\phi_{i,j-1,l-1} \\ + A_2\phi_{i-1,j,l-1} + A_3\phi_{i-1,j-1,l} & \text{si } i + j + l > 0, i, j, l \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & \text{si } i < 0 \text{ et/ou } j < 0 \text{ et/ou } l < 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

pour plus de propriétés de $G(p, s, k)$ et ϕ_{ijl} , En se référant à [28] et [83]. Par utilisation des équations (3.48), (3.49),(3.50), nous aurons,

$$\begin{aligned} X(p, s, k) &= G^{-1}(p, s, k)p^{-1}s^{-1}k^{-1}BU(p, s, k) + G^{-1}(p, s, k)p^{-1}s^{-1}k^{-1}x(0, 0, 0) \\ &+ G^{-1}(p, s, k) [p^{-1}(I_n - s^{-1}k^{-1}A_1)] X(0, s, k) \\ &+ G^{-1}(p, s, k) [k^{-1}(I_n - p^{-1}s^{-1}A_2)] X(p, 0, k) \\ &+ G^{-1}(p, s, k) [k^{-1}(I_n - p^{-1}s^{-1}A_3)] X(p, s, 0) \\ &- G^{-1}(p, s, k)p^{-1}k^{-1}X(0, s, 0) - G^{-1}(p, s, k)s^{-1}k^{-1}X(p, 0, 0) \\ &- G^{-1}(p, s, k)p^{-1}s^{-1}X(0, 0, k). \end{aligned}$$

Avant d'appliquer $\left(\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}\right)^{-1}$, nous développons,

$$\begin{aligned} & G^{-1}(p, s, k) \left[p^{-1}(I_n - s^{-1}k^{-1}A_1) \right] X(0, s, k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i} s^{-j} k^{-l} \left[p^{-1}(I_n - s^{-1}k^{-1}A_1) \right] X(0, s, k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i-1} s^{-j} k^{-l} X(0, s, k) - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i} s^{-j-1} k^{-l-1} A_1 X(0, s, k) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Si nous appliquons $\left(\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}\right)^{-1}$ au premier terme de l'équation (3.54), on obtient ce pendant,

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i-1} s^{-j} k^{-l} X(0, s, k) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\phi_{i,j,l} \left(\mathcal{L}_{t_1}^{\alpha}\right)^{-1} p^{-i-1} \left(\mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta \gamma}\right)^{-1} s^{-j} k^{-l} X(0, s, k) \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

tenant compte du fait que dans [3] nous avons,

$$\left(\mathcal{L}_{t_1}^{\alpha}\right)^{-1} (p^{-i-1}) = \frac{\left(\frac{t_1}{\alpha}\right)^i}{i!},$$

Avant de calculer $\left(\mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta \gamma}\right)^{-1} s^{-j} k^{-l} X(0, s, k)$, on propose le lemme suivant.

Lemme 5.2. *La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire $\mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j \beta l \gamma} x(0, t_2, t_3)$ est de la forme suivante,*

$$\mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta \gamma} \left[\mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j \beta l \gamma} x(0, t_2, t_3) \right] = \frac{X(0, s, k)}{s^{j+1} k^{l+1}}$$

Démonstration. Si on utilise la définition de la transformée de Laplace pour la fonction $\mathbf{J}_{t_2, t_3}^{j \beta, l \gamma} x(0, t_2, t_3)$, le théorème de convolution 17 et l'équation (3.43), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t_2, t_3}^{\beta, \gamma} \left(\mathbf{J}_{t_2, t_3}^{j \beta, l \gamma} x(0, t_2, t_3) \right) &= \mathcal{L}_{t_2, t_3}^{\beta, \gamma} \left(\int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \frac{\left(\frac{t_2 - \tau_2}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3 - \tau_3}{\gamma}\right)^l}{j! l!} x(0, t_2, t_3) d^\beta d^\gamma t_2 t_3 \right) \\ &= \frac{1}{j! l!} \mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta \gamma} \left[\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3}{\gamma}\right)^l \right] \mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta \gamma} [x(0, t_2, t_3)] \\ &= \frac{1}{j! l!} \frac{j! l!}{s^{(j+1)} k^{(l+1)}} X(0, t_2, t_3) \\ &= \frac{X(0, t_2, t_3)}{s^{(j+1)} k^{(l+1)}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ceci implique que,

$$\left(\mathcal{L}_{t_2 t_3}^{\beta\gamma}\right)^{-1} \left[s^{-(j+1)} k^{-(l+1)} X(0, t_2, t_3) \right] = \mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) \quad (3.57)$$

En utilisant le lemme précédent on trouve,

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1, t_2, t_3}^{\alpha, \beta, \gamma}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i-1} s^{-j} k^{-l} X(0, s, k) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} \phi_{i,j,l} \left[\mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha\beta\gamma}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j,l} p^{-i} s^{-j-1} k^{-l-1} A_1 X(0, s, k) \right) \\ &= \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha\beta\gamma}\right)^{-1} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i,j-1,l-1} p^{-i} s^{-j} k^{-l} A_1 X(0, s, k) \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

nous déduisons de notre analyse que,

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha\beta\gamma}\right)^{-1} \left(G^{-1}(p, s, k) \left[p^{-1} (I_n - s^{-1} k^{-1} A_1) \right] X(0, s, k) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i,j-1,l-1} A_1] \mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

□

De la même manière, on en déduit que,

1.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha\beta\gamma}\right)^{-1} G^{-1}(p, s, k) \left[k^{-1} (I_n - p^{-1} s^{-1} A_2) \right] X(p, 0, k) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i-1,j,l-1} A_2] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha l\gamma} x(t_1, 0, t_3) \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

2.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha\beta\gamma}\right)^{-1} G^{-1}(p, s, k) \left[k^{-1} (I_n - p^{-1} s^{-1} A_3) \right] X(p, s, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{l!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i-1,j-1,l} A_3] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} x(t_1, t_2, 0) \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

3.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha \beta \gamma} \right)^{-1} G^{-1}(p, s, k) [p^{-1} s^{-1} k^{-1} x(0, 0, 0)] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^j}{j!} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l}{l!} \phi_{i,j,l} x(0, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.63)$$

4.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha \beta \gamma} \right)^{-1} [G^{-1}(p, s, k) p^{-1} s^{-1} k^{-1} B U(p, s, k)] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i-1, j-1, l-1} B \mathbf{J}_{t_1 t_2 t_3}^{i \alpha j \beta l \gamma} U(t_1, t_2, t_3) \end{aligned} \quad (3.64)$$

5.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha \beta \gamma} \right)^{-1} [G^{-1}(p, s, k) p^{-1} k^{-1} X(0, s, 0)] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l}{l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_2}^{j \beta} x(0, t_2, 0) \end{aligned} \quad (3.65)$$

6.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha \beta \gamma} \right)^{-1} [G^{-1}(p, s, k) s^{-1} k^{-1} X(p, 0, 0)] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^j}{j!} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma} \right)^l}{l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_1}^{i \alpha} x(t_1, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.66)$$

7.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^{\alpha \beta \gamma} \right)^{-1} [G^{-1}(p, s, k) p^{-1} s^{-1} X(0, 0, k)] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha} \right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta} \right)^j}{j!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_3}^{l \gamma} x(0, 0, t_3) \end{aligned} \quad (3.67)$$

En se basant sur les recherches de [12] ainsi que sur les équations (3.60), (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67), le résultat suivant est déduit,

Théorème 18. *La solution de l'équation d'état (3.38) avec les conditions aux limites est donnée par*

$$\begin{aligned}
x(t_1, t_2, t_3) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[-\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! j! l!} \phi_{ijl} x(0, 0, 0) \right. \\
& + \phi_{i-1, j-1, l-1} B \mathbf{J}_{t_1 t_2 t_3}^{i\alpha j\beta l\gamma} U(t_1, t_2, t_3) + \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{l!} [\phi_{i, j, l} - \phi_{i-1, j-1, l} A_3] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} x(t_1, t_2, 0) \\
& + \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} [\phi_{i, j, l} - \phi_{i-1, j, l-1} A_2] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha l\gamma} x(t_1, 0, t_3) \\
& + \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} [\phi_{i, j, l} - \phi_{i, j-1, l-1} A_1] \mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) - \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! l!} \phi_{i, j, l} \mathbf{J}_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2, 0) \\
& \left. - \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{j! l!} \phi_{i, j, l} \mathbf{J}_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0, 0) - \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{i! j!} \phi_{i, j, l} \mathbf{J}_{t_3}^{l\gamma} x(0, 0, t_3) \right]
\end{aligned} \tag{3.68}$$

6 Analyse de la positivité du modèle 3D fractionnaire de Fornasini-Marchesini

Dans cette partie, nous étudions les principaux résultats obtenus concernant la positivité de notre système, pour cela nous nous sommes basés sur [82],[83].

Définition 6.1. *Le système fractionnaire 3D (3.38) est dit internement positif si et seulement si $x(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_+^n, (t_1, t_2, t_3 > 0)$ pour toutes les conditions aux limites non négatives $x(t_1, 0, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, et $x(0, t_2, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, et $x(0, 0, t_3) \in \mathbb{R}_+^n$ et toutes les entrées non négatives $u(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_+^m$*

Théorème 19. *Le système (3.38) est internement positif avec $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, 0 < \gamma \leq 1$ si et seulement si*

$$A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}; \quad A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{M}_n, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m} \tag{3.69}$$

Démonstration. Considérons le système 3D d'ordre fractionnaire (3.38) avec un vecteur d'entrée nul, $u(t_1, t_2, t_3) = 0$ pour $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, avec les conditions $x(0, t_2, t_3) = 0$ et $x(t_1, 0, t_3) = 0$ pour $t_1, t_2, t_3 \geq 0$. En supposant que $x(t_1, t_2, 0)$ est non négatif et non nul pour $t_1, t_2 > 0$.

D'après la solution de système 3.68 nous obtenons

$$x(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{l!} [\phi_{ijl} - \phi_{i-1, j-1, l} A_3] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} x(t_1, t_2, 0). \tag{3.70}$$

De (3.53) et pour une petite valeur de $t_1, t_2 > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{l!} (A_3)^l x(t_1, t_2, 0) \\ &= e^{A_3 \frac{t_3^\gamma}{\gamma}} x(t_1, t_2, 0) \end{aligned} \quad (3.71)$$

D'après [82] et [83], la fonction exponentielle $e^{A_3 \frac{t_3^\gamma}{\gamma}}$ est positive si et seulement si la matrice A_3 est la matrice de Metzler, c'est-à-dire $A_3 \in \mathbb{M}_n$. De la même manière, en supposant $x(t_1, 0, t_3) \neq 0$ pour $t_1, t_3 > 0$, et on prouve que la matrice $A_2 \in \mathbb{M}_n$. Pour les mêmes raisons, $x(0, t_2, t_3) \neq 0$ pour $t_2, t_3 > 0$, on peut montrer que A_1 doit être la matrice de Metzler.

Considérons maintenant la solution du système 3D d'ordre fractionnaire (3.38) avec les conditions aux limites égale zéro $x(0, t_2, t_3) = 0$, pour $t_2, t_3 \geq 0$, $x(t_1, 0, t_3) = 0$, $t_1, t_3 \geq 0$, $x(t_1, t_2, 0) = 0$, $t_1, t_2 \geq 0$, $x(t_1, 0, 0) = 0$, $t_1 \geq 0$, $x(0, t_2, 0)$, $t_2 \geq 0$, $x(0, 0, t_3)$, $t_3 \geq 0$ et entrées non nulles $U(t_1, t_2, t_3) > 0$, $t_1, t_2, t_3 \geq 0$. Alors nous avons,

$$x(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{i-1, j-1, l-1} B \mathbf{J}_{t_1 t_2 t_3}^{i\alpha j\beta l\gamma} U(t_1, t_2, t_3) \quad (3.72)$$

Pour une très petite valeur des variables t_1, t_2 et t_3 on obtient,

$$x(t_1, t_2, t_3) \approx B \mathbf{J}_{t_1 t_2 t_3}^{i\alpha j\beta l\gamma} U(t_1, t_2, t_3). \quad (3.73)$$

Du fait que l'intégrale d'ordre fractionnaire des entrées non négatives $U(t_1, t_2, t_3)$ est toujours non négatif pour $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ suit la nécessité de non négativité de la matrice B , i.e. $B \in \mathbb{R}_+^{n*m}$. Maintenant, nous considérerons la solution du système 3D d'ordre fractionnaire (3.38) avec des conditions aux limites non nulles pour $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ et des entrées nulles $U(t_1, t_2, t_3) = 0$, pour

$t_1, t_2, t_3 \geq 0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 x(t_1, t_2, t_3) = & \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[-\frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! j! l!} \phi_{ijl} x(0, 0, 0) \right. \\
 & + \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{l!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i-1,j-1,l} A_3] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} x(t_1, t_2, 0) \\
 & + \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{j!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i-1,j,l-1} A_2] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha l\gamma} x(t_1, 0, t_3) \\
 & + \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i!} [\phi_{i,j,l} - \phi_{i,j-1,l-1} A_1] \mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) \\
 & - \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2, 0) \\
 & \left. - \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{j! l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0, 0) - \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{i! j!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_3}^{l\gamma} x(0, 0, t_3) \right] \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

En remplaçant (3.53) dans la relation (3.74) nous aurons

$$\begin{aligned}
 x(t_1, t_2, t_3) = & x(t_1, t_2, 0) + x(t_1, 0, t_3) + x(0, t_2, t_3) \\
 & + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! j! l!} [A_0 \phi_{i-1,j-1,l-1} + A_1 \phi_{i,j-1,l-1} + A_2 \phi_{i-1,j,l-1}] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha j\beta} x(t_1, t_2, 0) \\
 & + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{i! j! l!} [A_0 \phi_{i-1,j-1,l-1} + A_1 \phi_{i,j-1,l-1} + A_3 \phi_{i-1,j-1,l}] \mathbf{J}_{t_1 t_2}^{i\alpha l\gamma} x(t_1, 0, t_3) \\
 & + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i}{i! j! l!} [A_0 \phi_{i-1,j-1,l-1} + A_2 \phi_{i-1,j,l-1} + A_3 \phi_{i-1,j-1,l}] \mathbf{J}_{t_2 t_3}^{j\beta l\gamma} x(0, t_2, t_3) \\
 & - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! j! l!} \phi_{ijl} x(0, 0, 0) - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{i! l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_2}^{j\beta} x(0, t_2, 0) \\
 & - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j \left(\frac{t_3^\gamma}{\gamma}\right)^l}{j! l!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_1}^{i\alpha} x(t_1, 0, 0) - \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^i \left(\frac{t_2^\beta}{\beta}\right)^j}{i! j!} \phi_{i,j,l} \mathbf{J}_{t_3}^{l\gamma} x(0, 0, t_3) \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

D'après (3.71), et pour $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{M}_n$, on obtient alors $A_0 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. \square

7 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques qui illustrent les résultats théoriques dérivés de la section précédente.

Exemple 7.1. *Considérons le système linéaire 3D fractionnaire (3.38) avec $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ et $\gamma = 1$,*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.1 \\ 0.1 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ 0.1 & -0.01 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0.1 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Notez que dans cet exemple nous fixons $t_3 = 1$.

En appliquant le théorème 19, nous concluons que le système 3D considéré est positif. Les variables d'état sont représentées par les graphiques suivants.

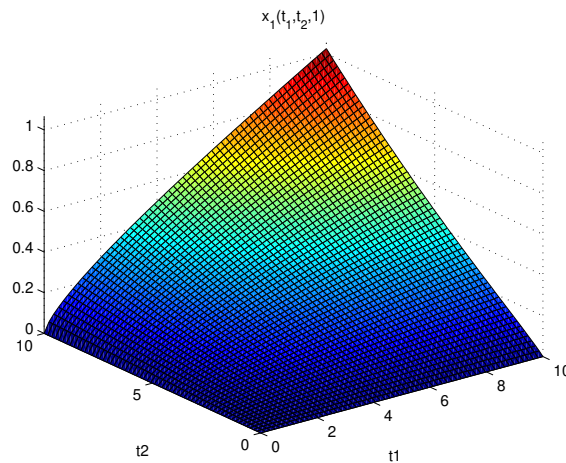


FIGURE 3.1 – La variable d'état $x_1(t_1, t_2, 1)$

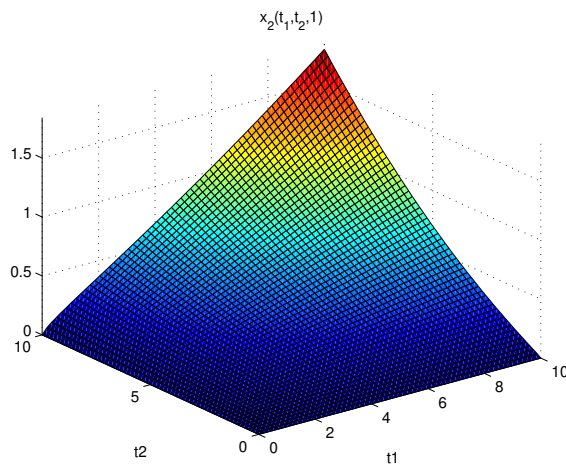


FIGURE 3.2 – La variable d'état $x_2(t_1, t_2, 1)$

Exemple 7.2. *Considérons le système linéaire 3D fractionnaire (3.38) avec $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ et $\gamma = 1$,*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.08 \\ 0.05 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.19 \\ -0.18 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ -0.11 & -0.01 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.12 \\ -0.02 & -0.03 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Dans ce cas les matrices A_1, A_2 et A_3 ne sont pas positives. Notez que dans cet exemple, nous fixons $t_3 = 1$.

En appliquant le théorème 19, on trouve que le système 3D considéré n'est pas positif et le tracé des variables d'état est comme suit,

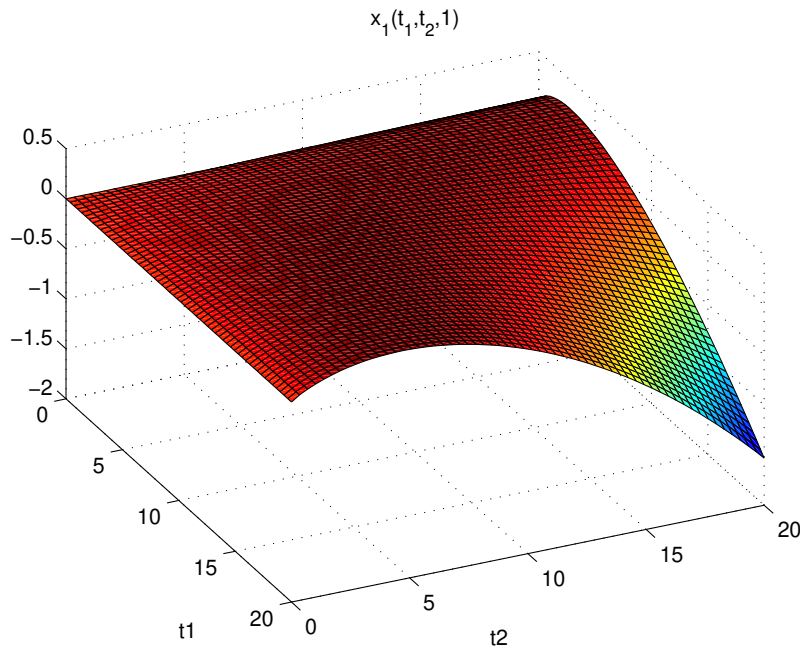


FIGURE 3.3 – La variable d'état $x_1(t_1, t_2, 1)$

Remarque 7.1. *Dans cette section, nous avons examiné la positivité d'un système linéaire en temps continu tridimensionnel fractionnaire conforme. Nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes illustrés par deux exemples numériques, démontrant ainsi l'applicabilité des résultats obtenus.*

8 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à l'étude de la solvabilité de systèmes dynamiques linéaires fractionnaires conformables uni et tridimensionnels à temps continu par la transformée de Laplace conforme.

Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques définitions et théorèmes fondamentaux sur la dérivée fractionnaire conforme. Ensuite nous avons présenté une étude détaillée sur les différents types de systèmes fractionnaires à deux dimensions, suivi par la présentation des principaux notions et résultats sur la positivité de notre système. En dernier, quelques exemples numériques sont fournis pour montrer l'applicabilité et la précision de la méthode proposée

Conditions de Stabilisation des Modèles d'état Multidimensionnels par La Matrice de Gain

Dans cette partie du chapitre nous présenterons un sujet qui a connu un grand développement lequel est la solvabilité d'un système dynamique fractionnaire multidimensionnel à temps discret de type Roesser. Pour commencer nous citons des définitions de base qui concerne la différence fractionnaire d'une fonction uni et multidimensionnelle. Par la suite nous nous basons sur la résolution de ce type de problème par l'utilisation de la transformée de Z en multidimensionnel afin de passer à établir les conditions nécessaires et suffisantes de la positivité, puis il est à noter que la stabilisation est traité via une matrice de gain. Elle sera donc développée dans la section suivante. Enfin, tous les résultats obtenus seront simulés et illustrés numériquement à l'aide d'exemples académiques.

1 Quelques types de dérivées fractionnaires pour des fonctions discrètes

Cette section est dédiée à quelques définitions sur les dérivées fractionnaires pour des fonctions discrètes uni et bidimensionnels.

1.1 Différence fractionnaire d'une fonction d'une seule variable

Définition 1.1. [76] *La fonction discrète unidimensionnelle est définie par*

$$\Delta^\alpha x_{i+1} = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x_{i+1-k}, \quad (4.1)$$

est appelée la différence fractionnaire discrète d'ordre $0 < \alpha < 1$, de la fonction unidimensionnelle x_i pour $i \in \mathbb{N}$ telle que

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{pour } k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.2)$$

1.2 Différence fractionnaire d'ordre α d'une fonction bidimensionnelle

Définition 1.2. [73] La fonction discrète bidimensionnelle horizontale x_{ij}^h d'ordre α , est définie par

$$\Delta_{\alpha}^h x_{ij} = \sum_{k=0}^i c_{\alpha}(k) x_{i-k,j}, \quad (4.3)$$

telle que $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1 < \alpha \leq n$ et

$$c_{\alpha}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0, \\ (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{pour } k > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

Définition 1.3. [74] La fonction discrète bidimensionnelle vertical x_{ij}^v d'ordre β , définie par

$$\Delta_{\beta}^v x_{ij} = \sum_{l=0}^j c_{\beta}(l) x_{i,j-l}, \quad (4.5)$$

telle que $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1 < \beta \leq n$ et

$$c_{\beta}(l) = \begin{cases} 1 & \text{pour } l = 0, \\ (-1)^l \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-l+1)}{l!} & \text{pour } l > 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

Les définitions 1.2 et 1.3 sont des généralisations pour les fonctions de différences partielles fractionnaires discrètes 2D présentées dans [101] et [74].

Lemme 1.1. [74] Si $n - 1 < \alpha \leq n$, $n - 1 < \beta \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{\alpha}(k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} c_{\beta}(l) = 0. \quad (4.7)$$

Définition 1.4. [68] La fonction discrète bidimensionnelle définie par

$$\Delta^{\alpha} x_{ij} = \sum_{k_1=0}^i \sum_{k_2=0}^{j-k_1} c_{\alpha}(k_1, k_2) x_{i-k_1, j-k_2}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.8)$$

est appelée la différence fractionnaire discrète d'ordre α de la fonction bidimensionnelle $x_{i,j}$

pour $i, j \in \mathbb{N}$ telle que $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$c_\alpha(k_1, k_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k_1 = 0, k_2 = 0 \\ (-1)^{k_1, k_2} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k_1-k_2+1)}{k_1!k_2!} & \text{pour } k_1 + k_2 > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

2 Analyse des systèmes fractionnaires multidimensionnels à temps discret de type de Roesser

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions et théorèmes de base nécessaires à la formulation de systèmes multidimensionnels fractionnaires à temps discret.

Nous proposons dans ce qui suit une nouvelle définition de la différence d'ordre fractionnaire d'une fonction discrète multidimensionnel. Nous appuyons ici sur les idées de base car elles seront utiles par la suite.

Définition 2.1. La différence fractionnaire d'ordre α_j de la fonction multidimensionnel discrète x_{i_1, i_2, \dots, i_d} , $i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+$, est définie par

$$\Delta_{\alpha_j}^{h_j} x_{i_1, i_2, \dots, i_d} = \sum_{k_j=0}^{i_j} c_{\alpha_j}(k_j) x_{i_1, i_2, \dots, i_j-k_j, \dots, i_d}, \quad j = \overline{1, d} \quad (4.10)$$

où $\alpha_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, n-1 < \alpha_j \leq n$, $j = \overline{1, d}$ et

$$c_{\alpha_j}(k_j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k_j = 0, \\ (-1)^{k_j} \frac{\alpha_j(\alpha_j-1)\dots(\alpha_j-k_j+1)}{k_j!} & \text{pour } k_j > 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

où

$$c_{\alpha_j}(k_j) = (-1)^{k_j} \binom{\alpha_j}{k_j} \quad (4.12)$$

$$\binom{\alpha_j}{k_j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k_j = 0, \\ \frac{\alpha_j(\alpha_j-1)\dots(\alpha_j-k_j+1)}{k_j!} & \text{pour } k_j > 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

En s'inspirant des résultats établis dans [96, 98, 95, 112], nous pouvons généraliser les différences fractionnaires en utilisant une sommation jusqu'à ∞ .

Définition 2.2. La différence fractionnaire d'ordre α_j de la fonction multidimensionnel discrète x_{i_1, i_2, \dots, i_d} , $i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+$, est définie par

$$\Delta_{\alpha_j}^{h_j} x_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{k_j=0}^{\infty} c_{\alpha_j}(k_j) x_{i_1, i_2, \dots, i_j-k_j, \dots, i_n}, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.14)$$

Le lemme suivant est proposé pour démontrer la positivité du système fractionnaire (2).

Lemme 2.1. *Si $0 < \alpha_j \leq 1$, $j = \overline{1, d}$ alors*

$$c_{\alpha_j}(k_j) < 0 \quad \text{pour } k_j = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Qui est équivalente à,

$$(-1)^{k_j+1} \binom{\alpha_j}{k_j} > 0 \quad \text{pour } k_j = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

Démonstration. Pour vérifier l'égalité (4.15), nous utiliserons une démonstration par récurrence. En effet, la relation (4.15) satisfaite pour $k_1 = 1$, car, de (4.13) et de (4.16), nous obtenons

$$(-1)^2 \binom{\alpha_1}{1} = \alpha_1 > 0 \quad (4.17)$$

Supposons que l'hypothèse (4.15) est vraie jusqu'à l'ordre $k_j > 1$, et démontrons qu'elle reste vraie pour l'ordre $k_j + 1$. De (4.13) et (4.16), il découle,

$$\begin{aligned} (-1)^{k_j+2} \binom{\alpha_j}{k_j+1} &= \frac{\alpha_j(\alpha_j-1)\cdots(\alpha_j-k_j+1)(\alpha_j-k_j)}{k_j(k_j+1)} \\ &= (-1)^{k_j+1} \binom{\alpha_j}{k_j} (-1) \frac{\alpha_j-k_j}{k_j+1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donc

$$(-1)^{k_j+1} \binom{\alpha_j}{k_j} > 0 \quad (4.19)$$

et

$$(-1) \frac{\alpha_j-k_j}{k_j+1} = \frac{k_j-\alpha_j}{k_j+1} > 0 \quad \text{pour } k_j > \alpha_j \quad (4.20)$$

□

Remarque 2.1. *De même, on peut montrer pour $1 < \alpha_j \leq 2$*

$$(-1)^{k_j+1} \binom{\alpha_j}{k_j} > 0 \quad (4.21)$$

Dans ce qui suit, nous introduisons une formulation générale de système multidimensionnel à temps discret fractionnaire décrit, par le modèle de Roesser.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta_{\alpha_1}^{h_1} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ \Delta_{\alpha_2}^{h_2} x_{i_1, i_2+1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \Delta_{\alpha_d}^{h_d} x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \\
 y_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix} + D u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \quad i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+ \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

tel que

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ est la matrice dynamique,}$$

$x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^j \in \mathbb{R}^{n_j}, j = 1, d$ sont les vecteurs d'états,

$u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'entrées ,

$y_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs de sorties,

$B_j \in \mathbb{R}^{n_j \times m}, C_j \in \mathbb{R}^{p \times n_j}, j = \overline{1, d}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

selon la définition 2.1 , le système (4.22) peut être réécrit comme suit,

$$\begin{bmatrix} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2+1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d \end{bmatrix} = \bar{A}_d \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d}$$

$$- \begin{bmatrix} \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ \sum_{k_2=2}^{i_2+1} c_{\alpha_2}(k_2) x_{i_1, i_2-k_2+1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_d-k_d+1}^d \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

tel que

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & \bar{A}_{dd} \end{bmatrix}$$

où $\bar{A}_{jj} = A_{jj} + \alpha_j \mathbb{1}_{n_j}$ $j = \overline{1, d}$.

Démonstration. Nous commençons notre preuve en présentant la première équation du système (4.22) qui est

$$\Delta_{\alpha_1}^{h_1} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 = A_{11} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{12} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \cdots + A_{1d} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_1 u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \quad (4.24)$$

D'après la définition 2.1, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1}^{h_1} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 &= \sum_{k_1=0}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ &= c_{\alpha_1}(0) x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 + c_{\alpha_1}(1) x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\Delta_{\alpha_1}^{h_1} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 = x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 - \alpha_1 x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \quad (4.25)$$

Une substitution de (4.25) en (4.24) donne

$$\begin{aligned} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 - \alpha_1 x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 &= A_{11} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{12} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ &+ \cdots + A_{1d} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_1 u_{i_1, i_2, \dots, i_d} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où

$$\begin{aligned}
 x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 &= (A_{11} + \alpha_1 \mathbb{1}_{n_1}) x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{12} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \dots + A_{1d} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_1 u_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\
 &- \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\
 &= \bar{A}_{11} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{12} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \dots + A_{1d} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_1 u_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\
 &- \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1
 \end{aligned}$$

pour la dernière équation du système (4.22), nous présentons la preuve comme suit

$$\Delta_{\alpha_d}^{h_d} x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d = A_{d1} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{d2} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \dots + A_{dd} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_d u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \quad (4.27)$$

et en utilisant la définition 2.1, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\alpha_d}^{h_d} x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d &= \sum_{k_d=0}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_{d-k_d+1}}^d, \\
 &= c_{\alpha_d}(0) x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d + c_{\alpha_d}(1) x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_{d-k_d+1}}^d
 \end{aligned}$$

sachant que

$$\Delta_{\alpha_d}^{h_d} x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d = x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d - \alpha_d x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_{d-k_d+1}}^d \quad (4.28)$$

Une substitution de (4.28) en (4.27), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d - \alpha_d x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d &+ \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_{d-k_d+1}}^d = A_{d1} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{d2} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\
 &+ \dots + A_{dd} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_d u_{i_1, i_2, \dots, i_d}
 \end{aligned}$$

En dernier, on en déduit

$$\begin{aligned}
 x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d &= A_{d1} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{d2} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \dots + (A_{dd} + \alpha_d \mathbb{I}_{n_d}) x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_d u_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\
 &- \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_d - k_d + 1}^d \\
 &= A_{d1} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 + A_{d2} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 + \dots + \bar{A}_{dd} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d + B_d u_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\
 &- \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_d - k_d + 1}^d
 \end{aligned}$$

Les mêmes résultats sont trouver pour tout j tel que $j = \overline{1, d}$.

De (4.23) il s'ensuit que les coefficients $c_{\alpha_j}(k_j)$, $j = \overline{1, d}$ dans la définition 4.10 diminuent fortement avec l'augmentation de k_j , $j = \overline{1, d}$. En pratique, on suppose généralement que i_1, i_2, \dots, i_d sont délimités par des nombres naturels $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_d$. Dans ce cas le système (4.23) prend la forme

$$\begin{bmatrix} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2+1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}}^d \end{bmatrix} = \bar{A}_d \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d}$$

$$- \begin{bmatrix} \sum_{k_1=2}^{\mathbf{L}_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1 - k_1 + 1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ \sum_{k_2=2}^{\mathbf{L}_2+1} c_{\alpha_2}(k_2) x_{i_1, i_2 - k_2 + 1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k_d=2}^{\mathbf{L}_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_d - k_d + 1}^d \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

□

3 Solvabilité d'un système fractionnaire multidimensionnel à temps discret

La résolution d'un système fractionnaire multidimensionnel discret par la transformation en Z est traitée dans cette section.

Définition 3.1. La transformée en Z d'une séquence dD $x(i_1, i_2, \dots, i_n)$ pour tout $i_1, i_2, \dots, i_n \notin \mathbb{Z}_+^n$ est donnée par

$$X(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} x(i_1, i_2, \dots, i_n) z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \cdots z_n^{-i_n}, \quad (4.30)$$

où $X(\cdot)$ représente la représentation dans le domaine de z du signal $x(\cdot)$.

3.1 Extension du théorème de Cayley-Hamilton pour les systèmes dD

Le théorème de Cayley-Hamilton est un résultat fondamental de l'algèbre linéaire qui stipule que chaque matrice carrée satisfait sa propre équation caractéristique.

Dans cette partie, nous visons à présenter une extension du théorème de Cayley-Hamilton dans le cas d'un système multidimensionnel. En utilisant la définition 3.1 nous obtenons les résultats suivants.

Selon de la définition 3.1 de transformée en Z , pour le système nD (4.29) nous avons

$$\begin{aligned} \bar{H}(z_1, z_2, \dots, z_d) &= \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & -z_1^{-1}A_{12} & \cdots & -z_1^{-1}A_{1d} \\ -z_2^{-1}A_{21} & \bar{H}_{22} & \cdots & -z_2^{-1}A_{2d} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -z_d^{-1}A_{d1} & \cdot & \cdot & \bar{H}_{dd} \end{bmatrix} \\ \bar{H}_{11} &= \mathbb{I}_{d_1} - z_1^{-1}\bar{A}_{11} + \sum_{k_1=2}^{L_1} c_{\alpha_1}(k_1) z_1^{-k_1} \mathbb{I}_{d_1}, \\ \bar{H}_{22} &= \mathbb{I}_{d_2} - z_2^{-1}\bar{A}_{22} + \sum_{k_2=2}^{L_2} c_{\alpha_2}(k_2) z_2^{-k_2} \mathbb{I}_{d_2}. \\ &\vdots \\ \bar{H}_{dd} &= \mathbb{I}_{d_d} - z_d^{-1}\bar{A}_{dd} + \sum_{k_d=2}^{L_d} c_{\alpha_d}(k_d) z_d^{-k_d} \mathbb{I}_{d_d}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le polynôme caractéristique du système multidimensionnel de Roesser est défini par l'équation

$$\det \bar{H}(z_1, z_2, \dots, z_d) = \prod_{i=1}^{i=d} \sum_{p_i=0}^{N_i} a_{N_1-p_1, \dots, N_d-p_d} z_i^{-p_i} \quad (4.32)$$

où $N_i \in \mathbb{Z}_+$ sont déterminés par les nombres L_i dans (4.29) $\forall i = \overline{1, d}$.

Selon le théorème de Cayley-Hamilton, chaque matrice carrée possède sa propre équation caractéristique. Ainsi, dans notre modèle multidimensionnel fractionnaire nous avons obtenu un résultat significatif

$$\prod_{i=1}^{i=d} \sum_{p_i=0}^{N_i} a_{p_1, \dots, p_d} z_i^{-i} = 0 \quad (4.33)$$

En s'inspirant des résultats établis dans [83, 74], le résultat suivant est déduit.

Théorème 20. *La solution de système multidimensionnel fractionnaire (4.22) est donnée par la formule suivante*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d} \end{bmatrix} &= \sum_{p_1=0}^{i_1} \cdots \sum_{p_j=0}^{i_j} \cdots \sum_{p_d=0}^{i_d} \mathbf{T}_{i_1-p_1, \dots, i_j-p_j, \dots, i_d-p_d} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{p_1, \dots, 0_j, \dots, p_d}^j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{p_1=0}^{i_1} \cdots \sum_{p_j=0}^{i_j} \cdots \sum_{p_d=0}^{i_d} (\mathbf{T}_{i_1-p_1, \dots, i_j-p_j-1, \dots, i_d-p_d} B^{0, \dots, 1_j, \dots, 0}) u(p_1, \dots, p_d) \end{aligned} \quad (4.34)$$

où

$$B^{0, \dots, 1_j, \dots, 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot j = 1, d$$

Les matrices de transition $\mathbf{T}_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_d} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont déterminées par

$$\mathbf{T}_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_d} = \begin{cases} I_n & \text{si } p_1 = 0, \dots, p_d = 0, \\ \mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_d} & \text{si } p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_d > 0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_d \in \mathbb{Z}_+, \\ 0 & \text{si } p_1 < 0 \text{ et/ou } \dots \text{ et/ou } p_d < 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_d} &= T_{1, 0, \dots, 0_d} T_{p_1-1, p_2, \dots, p_d} - \sum_{k_1=2}^{p_1} \begin{bmatrix} c_{\alpha_1}(k_1) \mathbb{1}_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} T_{p_1-k_1, p_2, \dots, p_d} \\
 &+ T_{0, 1, \dots, 0_d} T_{p_1, p_2-1, \dots, p_d} - \sum_{k_2=2}^{p_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{\alpha_2}(k_2) \mathbb{1}_{n_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} T_{p_1, p_2-k_2, \dots, p_d} \\
 &\dots \dots \dots T_{0, 0, \dots, 1_d} T_{p_1, p_2, \dots, p_d-1} - \sum_{k_d=2}^{p_d} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{\alpha_d}(k_d) \mathbb{1}_{n_d} \end{bmatrix} T_{p_1, p_2, \dots, p_d-k_d}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

où

$$T_{1, 0, \dots, 0_d} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & \dots & A_{1d} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, T_{0, 1, \dots, 0_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & \dots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$T_{0, 0, \dots, 1_d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \dots & \bar{A}_{dd} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

4 Positivité d'un système multidimensionnel fractionnaire discret

Dans cette section, les conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité du système linéaire fractionnaire à temps discret seront établies.

Définition 4.1. *Le système multidimensionnel fractionnaire décrit par la formule (4.23) est dit internement positif si et seulement si $x_{i_1, \dots, i_d}^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $x_{i_1, \dots, i_d}^2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, \dots , $x_{i_1, \dots, i_d}^d \in \mathbb{R}_+^{n_d}$ et*

$y_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}_+^p, i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+$ pour toutes les conditions aux limites

$$\begin{aligned} x_{i_1, 0, \dots, 0}^1 &\in \mathbb{R}_+^{n_1} \quad i_1 \in \mathbb{Z}_+ \\ x_{0, i_2, 0, \dots, 0}^2 &\in \mathbb{R}_+^{n_2} \quad i_2 \in \mathbb{Z}_+ \\ &\vdots \\ x_{0, \dots, 0, i_d}^d &\in \mathbb{R}_+^{n_d} \quad i_d \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{4.39}$$

et toutes les séquences d'entrées $u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}_+^m, i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+$

Théorème 21. *Le système multidimensionnel fractionnaire (4.23) pour $\alpha_j \in \mathbb{R}, 0 < \alpha_j \leq 1$ et $j = \overline{1, d}$ est positive si et seulement si*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & \bar{A}_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \\ [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_d] \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Démonstration. — Condition nécessaire : Supposons que le système (4.23) soit positif et

$$u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} = 0, \text{ for } i_1, i_2, i_3, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+,$$

$$x_{i_1, 0, \dots, 0}^1 = 0, \quad i_1 \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } x_{0, 1, \dots, 1}^d = e_{n_1}^{(k)}, \text{ où } e_{n_1}^{(k)} \text{ est la } k\text{-ième colonne de } \mathbb{1}_{n_1}.$$

nous obtenons

$$x_{1, 1, \dots, 1}^d = \bar{A}_{11} x_{0, 1, \dots, 1}^d = \bar{A}_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n_1},$$

où $\bar{A}_{11}^{(k)}$ désigne la k -ième colonne de la matrice $\bar{A}_{11}^{(k)}$. Pour $k = 1, 2, \dots, n_1$ cela signifie $\bar{A}_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n_1}$.

Pour la même raison, en supposant

$$x_{0, i_2, 0, \dots, 0}^1 = 0, \quad i_2 \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} = 0, \text{ pour } i_1, i_2, i_3, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{1, 0, \dots, 1}^d = e_{n_2}^{(k)}$$

où $e_{n_2}^{(k)}$ (est la k -ième colonne de $\mathbb{1}_{n_2}$). Nous obtenons $x_{1, 1, \dots, 1}^d = A_{12} x_{0, 1, \dots, 1}^d = A_{12}^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$.

4. POSITIVITÉ D'UN SYSTÈME MULTIDIMENSIONNEL FRACTIONNAIRE DISCRET

Supposons maintenant que les conditions aux limites soient nulles

$$x_{i_1,0,\dots,0}^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, i_1 \in \mathbb{Z}_+, x_{0,i_2,\dots,0}^2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}, i_2 \in \mathbb{Z}_+, \dots, x_{0,0,\dots,i_d}^d \in \mathbb{R}_+^{n_d}, i_d \in \mathbb{Z}_+.$$

et

$$u_{0,1,1,\dots,1} = e_m^{(k)}, (e_m^{(k)} \text{ is the } k\text{-th column of } \mathbb{1}_m).$$

donc, nous avons

$$x_{1,1,\dots,1}^1 = B_1 u_{0,1,1,\dots,1} = B_1^{(k)} \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \text{ tel que}$$

$(B_1^{(k)})$ est la k -ème colonne de la matrice B_1 .

cela indique que $B_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times m}$.

Par conséquent, on peut montrer que $B_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2 \times m}, \dots, B_d \in \mathbb{R}_+^{n_d \times m}, C_1 \in \mathbb{R}_+^{p \times n_1}, \dots, C_d \in \mathbb{R}_+^{p \times n_d}$ and $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$.

— Conditions suffisantes : du lemme 2.1, on obtient

$$c_{\alpha_j}(k_j) < 0 \quad \text{if } 0 < \alpha_j \leq 1 \text{ pour } j = \overline{1, d} \text{ and } k_j = 1, 2, \dots, d. \quad (4.41)$$

lorsque les conditions du théorème 21 sont satisfaites, alors $\mathbf{T}_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_d} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour $p_1, p_2, p_3, \dots, p_d \in \mathbb{Z}_+$.

En tenant compte de

$$x_{i_1,0,\dots,0}^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, i_1 \in \mathbb{Z}_+, x_{0,i_2,\dots,0}^2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}, i_2 \in \mathbb{Z}_+ \dots, x_{0,0,\dots,i_d}^d \in \mathbb{R}_+^{n_d}, i_d \in \mathbb{Z}_+$$

et

$$u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}_+^m, \text{ pour } i_1, i_2, i_3, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+,$$

De (4.34) nous avons

$$x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}, \dots, x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \in \mathbb{R}_+^{n_d} \text{ pour } i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+.$$

D'après (4.22) nous avons

$$y_{i_1, i_2, \dots, i_d} \in \mathbb{R}_+^p, \text{ pour } i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+,$$

vu que

$$x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}, \dots, x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \in \mathbb{R}_+^{n_d} \text{ pour } i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+,$$

$$u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} \in \mathbb{R}_+^m, \text{ pour } i_1, i_2, \dots, i_d \in \mathbb{Z}_+ \text{ et } C_j \in \mathbb{R}_+^{p \times n_j}, j = \overline{1, d} \text{ et } D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}.$$

□

5 Tests de stabilisation

La stabilité et la stabilisation sont des aspects essentiels des systèmes dynamiques. La question de la stabilité des systèmes fractionnaires a été beaucoup étudiée dans différents travaux [73], [74]. En ingénierie et en contrôle, comprendre comment stabiliser ces systèmes est crucial pour concevoir des régulateurs et garantir de bonnes performances.

Dans cette étude, notre contribution principale consiste à définir les conditions nécessaires pour assurer la stabilité des systèmes fractionnaires multidimensionnels, en particulier ceux décrits par le modèle de Roesser en temps discret. De plus, nous proposons une nouvelle méthode pour calculer la matrice de gain nécessaire pour stabiliser efficacement ces modèles. Cette approche offre une solution plus robuste et mieux adaptée à la stabilisation de ces types de systèmes.

Nous avons axé notre étude sur la stabilité et la stabilisation des systèmes fractionnaires multidimensionnels de type Roesser en temps discret, en raison de leur importance.

Définition 5.1. [41] *Le modèle dD discret fractionnaire (4.23) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée initiale est nulle (i.e.)*

$$u(i_1, i_2, \dots, i_d) = 0 \text{ pour } i_1 \cdots i_d \in \mathbb{Z}_+$$

avec toutes les conditions aux limites satisfaisant

$$\sup_{i_1 \in \mathbb{Z}_+} \|x(i_1, 0, \dots, 0)\| < \infty$$

$$\sup_{i_2 \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, i_2, \dots, 0)\| < \infty$$

⋮

$$\sup_{i_d \in \mathbb{Z}_+} \|x(0, 0, \dots, i_d)\| < \infty$$

converge vers zéro, i.e.

$$\lim_{i_1, i_2, \dots, i_d \rightarrow \infty} \|x(i_1, i_2, \dots, i_d)\| = 0 \quad (4.42)$$

Dans cette section, la stabilisation des systèmes à temps discret d-D décrits par les modèles de Roesser est étudiée à l'aide de la matrice de gain.

D'après [63] et [74] et [25], nous étendons certains résultats au modèle multidimensionnel considéré (4.23).

Théorème 22. *Le modèle de Roesser multidimensionnel positif*

$$\begin{bmatrix} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d} \\ x_{i_1, i_2+1, \dots, i_d} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d+1} \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si l'une des conditions correspondantes énumérées ci-dessous est remplie

1. Le système 1D positif

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} x_i$$

est asymptotiquement stable.

2. Il existe un vecteur qui n'est positif qu'au sens le plus strict, $\Psi \in \mathbb{R}_+^n$, ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_d$) tel que

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \mathbb{1}_{n_1} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} - \mathbb{1}_{n_2} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} - \mathbb{1}_{n_d} \end{bmatrix} \Psi < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous introduisons tout d'abord ce lemme, ainsi que sa preuve, qui nous seront utiles dans notre étude.

Lemme 5.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et si $n - 1 < \alpha_j \leq n$, alors

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} c_{\alpha_j}(k_j) = 0, \quad j = \overline{1, d}. \quad (4.43)$$

Démonstration. Pour prouver que le développement en série de Taylor de la fonction $(1 - z)^{\alpha_j}$

$$(1 - z)^{\alpha_j} = \sum_{k_j=0}^{\infty} (-1)^{k_j} \binom{\alpha_j}{k_j} z^{k_j}, \quad j = 1, d \quad (4.44)$$

en remplaçant $z = 1$ dans (4.44)

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} (-1)^{k_j} \binom{\alpha_j}{k_j} = \sum_{k_j=0}^{\infty} c_{\alpha_j}(k_j) = 0. \quad (4.45)$$

□

Cette partie consiste à concevoir un retour d'état pour stabiliser le système et obtenir la région matricielle de gain stable. Considérons le système (4.23) avec le retour d'état suivant

$$u_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_d} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

où $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K_j \in \mathbb{R}^{m \times n_j}$, $j = \overline{1, d}$ est la matrice de gain.

Une matrice de gain K doit être résolue pour garantir que le système en boucle fermée est stabilisable via le retour d'information de l'état. Plus précisément, il faut trouver K pour s'assurer que le système suivant

$$\begin{bmatrix} x_{i_1+1, i_2, \dots, i_d} \\ x_{i_1, i_2+1, \dots, i_d} \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_{d+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 & \dots & A_{1d} + B_1 K_d \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 & \dots & A_{2d} + B_2 K_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_d K_1 & A_{d2} + B_d K_2 & \dots & \bar{A}_{dd} + B_d K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ x_{i_1, i_2, \dots, i_d}^d \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \sum_{k_1=2}^{i_1+1} c_{\alpha_1}(k_1) x_{i_1-k_1+1, i_2, \dots, i_d}^1 \\ \sum_{k_2=2}^{i_2+1} c_{\alpha_2}(k_2) x_{i_1, i_2-k_2+1, \dots, i_d}^2 \\ \vdots \\ \sum_{k_d=2}^{i_d+1} c_{\alpha_d}(k_d) x_{i_1, i_2, \dots, i_d-k_d+1}^d \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

est positive et asymptotiquement stable.

Théorème 23. *Le système fractionnaire positif en boucle fermée (4.47) est positif et asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice diagonale blocs*

$$\begin{aligned} \Psi &= \text{blockdiag}[\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_d], \\ \Psi_j &= \text{diag}[\Psi_{j1}, \Psi_{j2}, \dots, \Psi_{jn_j}], \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\Psi_{js} > 0, \quad j = \overline{1, d}, \quad s = 1, \dots, n_j$$

et la matrice

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_d \end{bmatrix}, \quad D_j \in \mathbb{R}^{m \times n_j}, \quad j = \overline{1, d} \quad (4.49)$$

satisfaisant les conditions

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Psi_1 + B_1D_1 & A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 & \dots & A_{1d}\Psi_d + B_1D_d \\ A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 & \bar{A}_{22}\Psi_2 + B_2D_2 & \dots & A_{2d}\Psi_d + B_2D_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1}\Psi_1 + B_dD_1 & A_{d2}\Psi_2 + B_dD_2 & \dots & \bar{A}_{dd}\Psi_d + B_dD_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \quad (4.50)$$

et

$$\begin{bmatrix} A_{11}\Psi_1 + B_1D_1 & A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 & \dots & A_{1d}\Psi_d + B_1D_d \\ A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 & A_{22}\Psi_2 + B_2D_2 & \dots & A_{2d}\Psi_d + B_2D_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1}\Psi_1 + B_dD_1 & A_{d2}\Psi_2 + B_dD_2 & \dots & A_{dd}\Psi_d + B_dD_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \\ \vdots \\ 1_{n_d} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

tel que $1_{n_j} = [1 \dots \dots 1]^T \in \mathbb{R}_+^{n_j}, \quad j = \overline{1, d}$.

La matrice de gain est donnée par

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \Psi_1^{-1} & D_2 \Psi_2^{-1} & \cdots & D_d \Psi_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons montrer que le système en boucle fermée est positif si et seulement si la condition (4.50) est satisfaite. Nous obtenons les résultats suivants en utilisant (4.52) et (4.47).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 D_1 \Psi_1^{-1} & A_{12} + B_1 D_2 \Psi_2^{-1} & \cdots & A_{1d} + B_1 D_d \Psi_d^{-1} \\ A_{21} + B_2 D_1 \Psi_1^{-1} & \bar{A}_{22} + B_2 D_2 \Psi_2^{-1} & \cdots & A_{2d} + B_2 D_d \Psi_d^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_d D_1 \Psi_1^{-1} & A_{d2} + B_d D_2 \Psi_2^{-1} & \cdots & \bar{A}_{dd} + B_d D_d \Psi_d^{-1} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} \Psi_1 + B_1 D_1 & A_{12} \Psi_2 + B_1 D_2 & \cdots & A_{1d} \Psi_d + B_1 D_d \\ A_{21} \Psi_1 + B_2 D_1 & \bar{A}_{22} \Psi_2 + B_2 D_2 & \cdots & A_{2d} \Psi_d + B_2 D_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} \Psi_1 + B_d D_1 & A_{d2} \Psi_2 + B_d D_2 & \cdots & \bar{A}_{dd} \Psi_d + B_d D_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Psi_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Psi_d^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.53) \end{aligned}$$

De (4.53) et (4.40), il s'ensuit que le système en boucle fermée (4.47) est positif si et seulement si la condition (4.50) est satisfaite. En tenant compte du fait que $c_{\alpha_j}(0) = 1$, $c_{\alpha_j}(1) = -\alpha_j$, $j = \overline{1, d}$, de (4.43) on'a

$$\sum_{k_j=2}^{\infty} c_{\alpha_j}(k_j) = \alpha_j - 1, \quad j = \overline{1, d}. \quad (4.54)$$

Par conséquent, le système positif en boucle fermée (4.47) est asymptotiquement stable si et seulement si le système 1D positif avec la matrice

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 & \cdots & A_{1d} + B_1 K_d \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 & \cdots & A_{2d} + B_2 K_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_d K_1 & A_{d2} + B_d K_2 & \cdots & \bar{A}_{dd} + B_d K_d \end{bmatrix} - \sum_{k_j=2}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n_1} c_{\alpha_1}(k_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n_2} c_{\alpha_2}(k_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{1}_{n_d} c_{\alpha_d}(k_d) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

est asymptotiquement stable.

de l'utilisation de (4.54) avec $\bar{A}_{jj} = A_{jj} + \alpha_j \mathbb{1}_{n_j}$, $j = 1, d$, on peut écrire la matrice (4.55) sous la forme

$$\begin{bmatrix} A_{11} + \mathbb{1}_{n_1} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 & \cdots & A_{1d} + B_1K_d \\ A_{21} + B_2K_1 & A_{22} + \mathbb{1}_{n_2} + B_2K_2 & \cdots & A_{2d} + B_2K_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_dK_1 & A_{d2} + B_dK_2 & \cdots & A_{dd} + \mathbb{1}_{n_d} + B_dK_d \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

D'après le théorème 22, le système positif en boucle fermée (4.47) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un vecteur strictement positif $\Psi = [\Psi_1^T, \dots, \Psi_d^T] \in \mathbb{R}_+^n$ tel que

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 & \cdots & A_{1d} + B_1K_d \\ A_{21} + B_2K_1 & A_{22} + B_2K_2 & \cdots & A_{2d} + B_2K_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_dK_1 & A_{d2} + B_dK_2 & \cdots & A_{dd} + B_dK_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_d \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Par considération que $\Psi_j = \Psi_j 1_j$, $j = \overline{1, d}$ et en utilisant (4.52) et (4.57), alors on obtient

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 & \cdots & A_{1d} + B_1K_d \\ A_{21} + B_2K_1 & A_{22} + B_2K_2 & \cdots & A_{2d} + B_2K_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_dK_1 & A_{d2} + B_dK_2 & \cdots & A_{dd} + B_dK_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_d \end{bmatrix} = \quad (4.58)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_1D_1\Psi_1^{-1} & A_{12} + B_1D_2\Psi_2^{-1} & \cdots & A_{1d} + B_1D_d\Psi_d^{-1} \\ A_{21} + B_2D_1\Psi_1^{-1} & A_{22} + B_2D_2\Psi_2^{-1} & \cdots & A_{2d} + B_2D_d\Psi_d^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} + B_dD_1\Psi_1^{-1} & A_{d2} + B_dD_2\Psi_2^{-1} & \cdots & A_{dd} + B_dD_d\Psi_d^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Psi_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Psi_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \\ \vdots \\ 1_{n_d} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

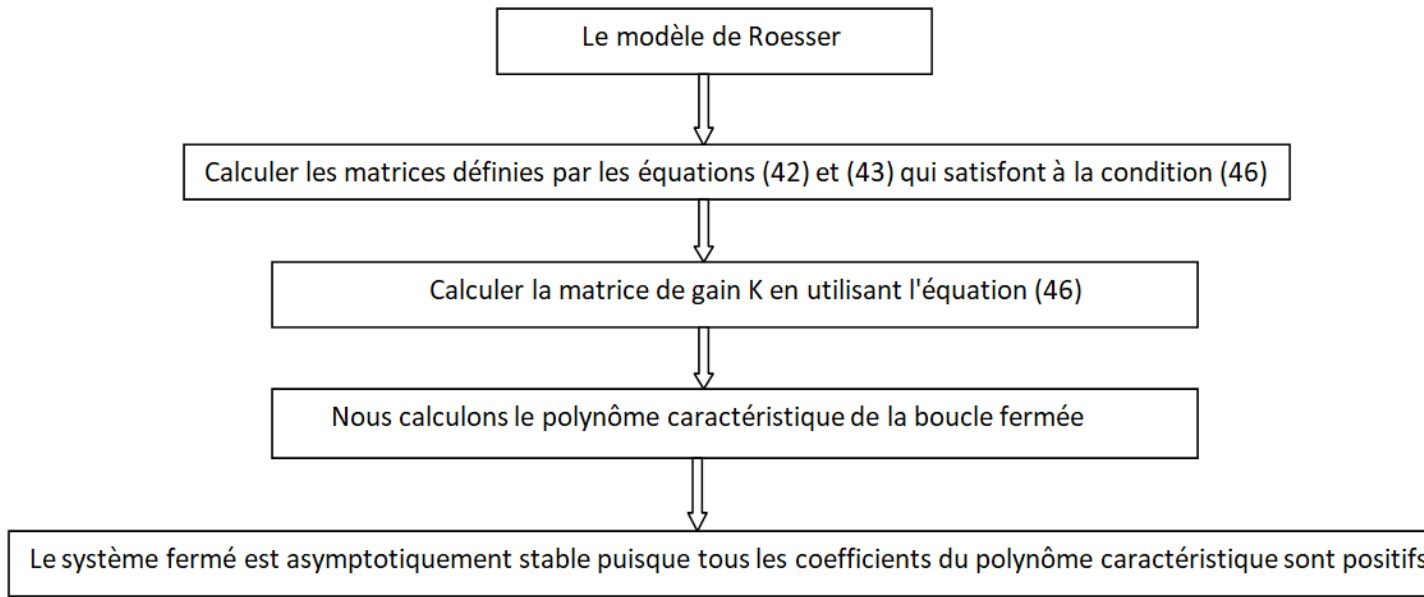
$$= \begin{bmatrix} A_{11}\Psi_1 + B_1D_1 & A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 & \cdots & A_{1d}\Psi_d + B_1D_d \\ A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 & A_{22}\Psi_2 + B_2D_2 & \cdots & A_{2d}\Psi_d + B_2D_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1}\Psi_1 + B_dD_1 & A_{d2}\Psi_2 + B_dD_2 & \cdots & A_{dd}\Psi_d + B_dD_d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \\ \vdots \\ 1_{n_d} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Basé sur $\mathcal{LMJ}(4.60)$, le système positif en boucle fermée est asymptotiquement stable si et seulement si la condition (4.51) est satisfaite. \square

Pour obtenir la matrice de gain stable d'un système fractionnaire dD en boucle fermée, nous exposons la procédure suivante.

6 Procédure

- Étape 1 : Choisissez une matrice diagonale de bloc (4.48) et une matrice réelle (4.49) qui satisfait les conditions (4.50) et (4.51).
- Étape 2 : À partir de la condition (4.52), calculez la matrice de gain K.
L'organigramme proposé de notre approche est



Théorème 24. *Le modèle de Roesser fractionnaire positif est instable si au moins une entrée diagonale de la matrice*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

est positif

Démonstration. De (4.56) et pour $K_1 = 0$ et $K_2 = 0, \dots, K_d = 0$, le modèle de Roesser fractionnaire positif, nous avons,

$$\begin{bmatrix} A_{11} + \mathbb{1}_{n_1} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} + \mathbb{1}_{n_2} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} + \mathbb{1}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

□

Si au moins une entrée diagonale de la matrice (4.61) est positive, alors au moins une entrée diagonale de la matrice (4.62) est supérieure à 1 et cela implique que le modèle de Roesser fractionnaire positif est instable.

7 Exemples

Dans cette section, nous présentons quelques simulations numériques qui illustrent les résultats théoriques dérivés de la section précédente.

Exemple 7.1. *Considérons le système fractionnaire multidimensionnel (4.22) pour $d = 2$, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.7$ avec les matrices*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & A_{22} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0055 & 0.0010 & & \\ 0.1490 & -0.084 & & \end{array} \right] \quad (4.63)$$

$$B = \left[\begin{array}{c} -0.001 \\ -0.1 \end{array} \right]$$

Trouver une matrice de gain $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ tel que le système en boucle fermée soit positif et asymptotiquement stable.

Le système fractionnaire dD avec la matrice (4.63) n'est pas positif car les matrices

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A}_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & \bar{A}_{22} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5945 & -0.0840 & & \\ 0.1490 & 0.6160 & & \end{array} \right]$$

et B_1, B_2 ont des entrées négatives, et elle est instable puisque la matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & & \\ A_{21} & A_{22} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.0055 & 0.0010 & & \\ 0.1490 & -0.084 & & \end{array} \right] \quad (4.64)$$

possède des entrées diagonales négatives.

En utilisant notre procédure, nous obtenons ce qui suit.

— **Étape 1** : Nous choisissons

$$\Psi_1 = 0.94 \quad , \quad \Psi_2 = 0.77$$

et

$$D_1 = 0.31 \quad , \quad D_2 = 0.55$$

et on vérifie les conditions (4.50) et (4.51)

$$\bar{A}_{11}\Psi_1 + B_1D_1 = 0.5942$$

$$A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 = 2.8571 \times 10^{-4}$$

$$A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 = 0.1160$$

$$\bar{A}_{22}\Psi_2 + B_2D_2 = 0.5446$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Psi_1 + B_1D_1 & A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 & \bar{A}_{22}\Psi_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0053 \\ -0.0106 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : En utilisant la formule (4.52). La matrice de gain est donnée par,

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\Psi_1^{-1} & D_2\Psi_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3298 & 0.7143 \end{bmatrix}$$

où

$$K_1 = \begin{bmatrix} D_1\Psi_1^{-1} \end{bmatrix} = 0.3298$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} D_2\Psi_2^{-1} \end{bmatrix} = 0.7143$$

D'après les matrices obtenues, le système en boucle fermée est positif.

$$\bar{A}_{11} + B_1K_1 = 0.5941702$$

$$A_{12} + B_1K_2 = 0.0002857$$

$$A_{21} + B_2K_1 = 0.11602$$

$$\bar{A}_{22} + B_2K_2 = 0.54457$$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme suivante

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n_1}z - (A_{11} + B_1K_1) & -(A_{12} + B_1K_2) \\ -(A_{21} + B_2K_1) & \mathbb{1}_{n_2}z - (A_{22} + B_2K_2) \end{bmatrix} = z^2 + 0.1613z + 8.7297 \times 10^{-04}$$

et comme tous ses coefficients sont positifs. Le système en boucle fermée est donc asymptoti-

quement stable.

Exemple 7.2. Nous considérons d'abord le système multidimensionnel à temps discret (4.22) pour le cas $d = 2$, $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.9$ avec les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.4000 & 0.2000 & -1.0100 & -0.2000 \\ 0.2000 & 0.0400 & 0.3900 & 0.1000 \\ \hline -0.0100 & -0.1000 & -1.0100 & -0.2000 \\ 0.3000 & 0.5000 & 0.3900 & 0.1000 \end{array} \right] \quad (4.65)$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.16 \\ -0.24 \\ 0.299 \end{bmatrix}$$

L'utilisation des mêmes étapes de calcul, permet de trouver une matrice de gain $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ tel que le système en boucle fermée soit positif et asymptotiquement stable.

Le système fractionnaire (4.22) avec (4.67) n'est pas positif puisque la matrice

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.2000 & 0.2000 & -1.0100 & -0.2000 \\ 0.2000 & 0.6400 & 0.3900 & 0.1000 \\ \hline -0.0100 & -0.1000 & -0.1100 & -0.2000 \\ 0.3000 & 0.5000 & 0.3900 & 1.0000 \end{array} \right] \quad (4.66)$$

et les matrices B_1, B_2 ont des entrées négatives, et c'est instable puisque la matrice

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -0.4000 & 0.2000 & -1.0100 & -0.2000 \\ 0.2000 & 0.0400 & 0.3900 & 0.1000 \\ \hline -0.0100 & -0.1000 & -1.0100 & -0.2000 \\ 0.3000 & 0.5000 & 0.3900 & 0.1000 \end{array} \right] \quad (4.67)$$

possède deux entrées diagonales positives.

Nous suivons donc la procédure ci-dessus

— **Étape 1** : Nous choisissons

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0.383 & 0 \\ 0 & 0.28 \end{bmatrix}$$

et

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0.41 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0.45 & -0.6 \end{bmatrix}$$

et nous vérifions les conditions (4.50) et (4.51) car

$$\bar{A}_{11}\Psi_1 + B_1D_1 = \begin{bmatrix} 0.2008 & 0.2012 \\ 0.0688 & 0.4480 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0120 & 0.1071 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 = \begin{bmatrix} 0.1868 & 0.1880 \\ 0.0548 & 0.1412 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22}\Psi_2 + B_2D_2 = \begin{bmatrix} 0.1720 & 0.3143 \\ 0.0387 & 0.3593 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Psi_1 + B_1D_1 & A_{12}\Psi_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Psi_1 + B_2D_1 & \bar{A}_{22}\Psi_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0989 \\ -0.0070 \\ -0.0034 \\ -0.0386 \end{bmatrix}.$$

Étape 2 : En utilisant la formule (4.52). La matrice de gain s'écrit sous la forme suivante

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\Psi_1^{-1} & D_2\Psi_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8200 & -1.2000 & -1.1749 & -2.1429 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} D_1\Psi_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8200 & -1.2000 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} D_2\Psi_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1749 & -2.1429 \end{bmatrix}$$

D'après les matrices obtenues, le système en boucle fermée est positif.

$$\bar{A}_{11} + B_1K_1 = \begin{bmatrix} 0.2082 & 0.2012 \\ 0.0688 & 0.4480 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} + B_1K_2 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0120 & 0.1071 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} + B_2K_1 = \begin{bmatrix} 0.1868 & 0.188 \\ 0.05482 & 0.1412 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22} + B_2K_2 = \begin{bmatrix} 0.171976 & 0.314296 \\ 0.0387049 & 0.3592729 \end{bmatrix}$$

Soit alors,

Le polynôme caractéristique associé à l'exemple est donné par

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n1}z - (A_{11} + B_1K_1) & -(A_{12} + B_1K_2) \\ -(A_{21} + B_2K_1) & \mathbb{1}_{n2}z - (A_{22} + B_2K_2) \end{bmatrix} = z^4 + 1.82z^3 + 1.11z^2 + 0.24 * z + 0.01$$

il est clair que tous ses coefficients sont positifs, alors le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

Exemple 7.3. En comparant notre approche et en se basant sur les articles [117] et [74], nous adaptons les mêmes simulations et résultats.

Tout d'abord pour l'exemple de [74], le modèle fractionnaire de Roesser avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5$ et les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0.1 & 0.01 & 0.2 & 0.1 \\ -0.3 & -0.1 & -1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

est instable car A et B ont des coefficients négatifs.

Nous utilisons l'approche proposée pour confirmer nos résultats, nous obtenons alors

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & -2 & -0,67 \end{bmatrix}$$

Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable puisque tous les coefficients de son polynôme caractéristique sont positifs

$$P(z) = z^4 + 0.773z^3 + 0.173z^2 + 0.01z + 0.0002$$

D'autre part, pour l'exemple de [117], le modèle fractionnaire de Roesser avec $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5$

et les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1.1225 & 0.8 \\ 0.149 & 0.24 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -19 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

est instable puisque A et B ont des coefficients négatifs.

Nous utilisons l'approche proposée pour confirmer nos résultats, nous obtenons alors

$$K = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,07 \end{bmatrix}$$

Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable puisque tous les coefficients de son polynôme caractéristique sont positifs

$$P(z) = z^2 + \frac{781}{400}z + \frac{2061}{3125}$$

Pour une autre matrice de gain $K = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.08 \end{bmatrix}$ Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable car tous les coefficients de son polynôme caractéristique sont positifs.

$$P(z) = z^2 + \frac{149}{80}z + \frac{19117}{25000}$$

Les figures 4.1, 4.2 illustrent respectivement le comportement des variables d'état $x^h(i, j)$ et $x^v(i, j)$.

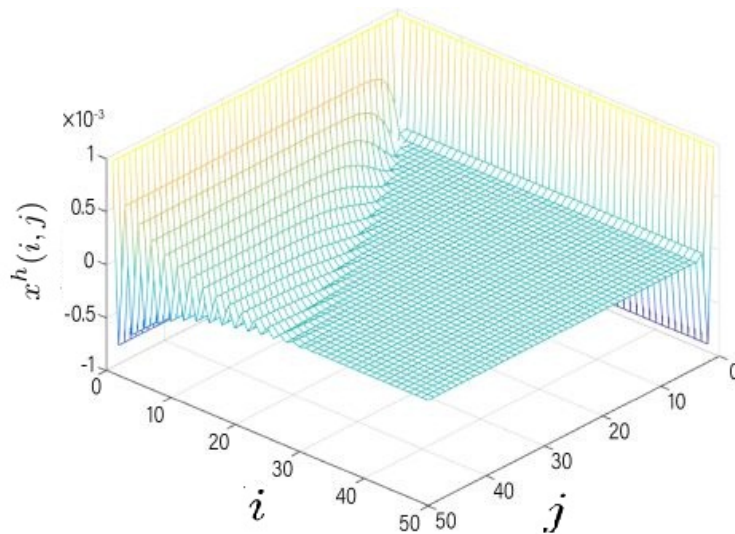
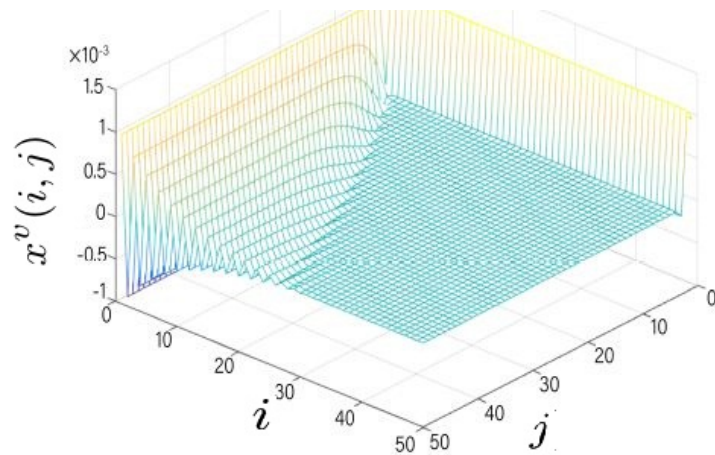


FIGURE 4.1 – La représentation graphique de $x^h(i, j)$

FIGURE 4.2 – La représentation graphique de $x^v(i, j)$

Dans le cadre de ce chapitre, notre analyse a porté sur la résolution d'un système fractionnaire multidimensionnel à temps discret, décrit par le modèle de Roesser et manipulé à l'aide de la transformée de Z. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la positivité de cette catégorie de systèmes. Plus spécifiquement, notre attention s'est focalisée sur l'étude de la stabilité et de la stabilisation de ces systèmes, en employant une nouvelle approche basée sur une matrice de gain.

Les résultats obtenus ont été validés au moyen de quelques exemples numériques, démontrant ainsi la précision et l'efficacité de l'approche que nous avons proposée.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est d'explorer les systèmes dynamiques linéaires fractionnaires, à la fois unidimensionnels et multidimensionnels, en raison de leur émergence croissante dans divers domaines ces dernières années.

Notre étude, organisée en deux grandes parties, commence par présenter les bases de la théorie des matrices et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Toutefois, une attention particulière est également portée à une nouvelle dérivée appelée dérivée conforme, mettant en évidence ses particularités lors de comparaisons avec d'autres dérivées d'ordre fractionnaire. Cette analyse commence par l'étude de la solvabilité des systèmes fractionnaires unidimensionnels en utilisant cette dérivée conforme. Par la suite, différentes classes de systèmes fractionnaires, à la fois unidimensionnels et bidimensionnels, sont classifiées pour définir les critères de positivité et de stabilité. Au cours de cette phase, un problème d'intérêt est abordé : la solvabilité du modèle de Fornasini-Marchesini fractionnaire en trois dimensions, décrit par la dérivée conforme. Une nouvelle méthode basée sur la transformée triple de Laplace est développée pour résoudre ce problème, menant à l'établissement des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir la positivité des systèmes. Ces résultats représentent une extension significative des travaux antérieurs cités dans [76], [65], et [82].

Dans la seconde partie de notre étude, nous avons abordé le problème de la solvabilité pour une classe de modèles multidimensionnels (dD) de Roesser à temps discret. Après avoir évalué les conditions nécessaires et suffisantes de positivité, l'attention s'est portée sur la stabilité et la stabilisation à l'aide d'une matrice de gain par retour d'état, tout en approfondissant les résultats des travaux existants sur ce type de systèmes. Malgré ces avancées, certains aspects méritent une réflexion plus approfondie, et de nombreuses perspectives restent ouvertes pour de futures recherches.

Analyse et synthèse sur le problème de la stabilisation des modèles multidimensionnels fractionnaires

Résumé : Ce travail porte essentiellement sur la classe des systèmes conformables fractionnaires multidimensionnels vu leur importante utilisation dans de nombreux domaines.

Nous avons tout d'abord étudié la résolution des systèmes conformables fractionnaires tridimensionnels par la transformée de Laplace. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la positivité de cette classe de systèmes ont été établies. Nous avons également étudié la classe des modèles multidimensionnels de Roesser fractionnaires à temps discret. Nous avons fait une analyse sur la stabilité de cette classe de modèles en utilisant une nouvelle approche basée sur la matrice de gain.

Mots-Clés. Modèles fractionnaires conformables, Systèmes tridimensionnels, Systèmes multidimensionnels, Positivité, Stabilité et stabilisation, Matrice de gain.

Analysis and synthesis on the problem of stabilization of fractional multidimensional models

Abstract : This work primarily focuses on the class of multidimensional conformable fractional systems due to their significant application in various fields.

First, we studied the resolution of three-dimensional conformable fractional systems using the Laplace transform. Necessary and sufficient conditions for the positivity of this class of systems have been established. We also examined the class of multidimensional discrete-time fractional Roesser models. An analysis of the stability of this class of models was conducted using a new approach based on the gain matrix.

Key Words. Conformable fractional models, Three-dimensional systems, Multidimensional systems, Positivity, Stability and stabilization, The gain matrix.

يتركز هذا العمل بشكل أساسي على فئة الأنظمة الكسرية المتوافقة متعددة الأبعاد نظرًا لتطبيقاتها المهمة في مجالات متنوعة.

أولاً، درسنا حل الأنظمة الكسرية المتوافقة ثلاثية الأبعاد باستخدام تحويل لابلاس. وقد وضع شروط ضرورية وكافية لإيجابية هذه الفئة من الأنظمة. كما درسنا فئة نماذج رويسر الكسرية متعددة الأبعاد في الزمن المنفصل. وقد تم إجراء تحليل لاستقرار هذه الفئة من النماذج باستخدام نهج جديد قائم على مصفوفة الكسب.

Bibliographie

- [1] Z.Al-Zhour,F. Alrawajeh,N. Al-Mutairi,and R. Alkhasawneh, (2019), New Results on the Conformable Fractional Sumudu Transform : Theories and Applications, Int. J. Anal. Appl., 17, no. 6, 1019-1033.<https://doi.org/10.28924/2291-8639-17-2019-1019>.
- [2] T. Abdeljawad,(2015), On conformable fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics 279, 57-66 .
- [3] Z. Al-Zhour, F. Alrawajeh, N. Al-Mutairi and R. Alkhasawneh,(2019),New results on the conformable fractional sumudu transform :theories and applications. International J. Analysis and Applications, **17**, No 6, 1019-1033.
- [4] G. M. Amine,(2017), analyse et synthèse de certaines classes de systèmes bidimensionnels fractionnaires et/ou singuliers, thèse de doctorat en science université mostaganem . <http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/2679?show=full>
- [5] B.D.O.Anderson and E.I Jury, (1986), Stability and the matrix Lypunov equation for discrete 2-dimensional systems.IEEE Transactions on Circuits and Systems, **33(3)**. <https://doi.org/10.1109/TCS.1986.1085912>.
- [6] K.J. Aström,(1970), Introduction to stochastic control theory, Academic press.
- [7] S.Attasi,(1973), Systèmes linéaires homogènes à deux indices,”IRIA RAPPORT Laroria, Vol.31.
- [8] O.Bachelier, T.Cluzeau, R. David, F. Jose Silva Alvarez, N.Yeganefar and N.Yeganefar (2017), Structural Stability, Asymptotic Stability, and Exponential Stability for Linear Multidimensional Systems : the Good, the Bad, and the Ugly. <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1390258>.
- [9] D.Baleanu, J. A. T.Machado, and A. C. J. Luo,(2012), Fractional Dynamics and Control, Springer-Verlag, New York.
- [10] R.B.Bapat, T.E.S.Raghavan,,(1977), Nonnegative matrices and applications, Encyclopédia of mathematics and its applications 64, Cambridge University press.

- [11] S. Basu,(2002), Multidimensional causal, stable, perfect reconstruction filter banks, IEEE Trans. on Automatic Control, **49(6)**,832-843.
- [12] K. Benyettou, D. Bouagada and M.A. Ghezzar,(2021), Solution of 2D State Space Continuous-Time Conformable Fractional Linear System Using Laplace and Sumudu Transform. Comput Math Model **32(2)**, 94–109, <https://doi.org/10.1007/s10598-021-09519-w>.
- [13] K.Benyettou ,D.Bouagada, (2022),Admissibility tests for multidimensional singular fractional continuous-time models. Archives of Control Sciences 32(3).
- [14] A.Berman, R.J.Plemmons,(1979), Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press .
- [15] A.Berman, M.Neumann, R.J.Stern,, (1989), Nonnegative matrices in dynamic systems, John Wiley and Sons.
- [16] A. Bhanotar , F.B. Belgacem,(2022),Theory and Applications of Distinctive Conformable Triple Laplace and Sumudu Transforms Decomposition Methods. J.Part.Diff.Eq., **35**No.1, 49–77.
- [17] S. Bonnet, (2008), Approches numériques pour la commande des systèmes dynamiques, Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie Compiègne, France.
- [18] N. K. Bose,(1982), Applied Multidimensional System Theory, Van Nostrand Reinhold Comp, New York.
- [19] N. K. Bose,(1984), Multidimensional System Theory, Publishing Comp.
- [20] N.K.Bose,(2003), Multidimensional Systems Theory and Applications, 2nd edition. Springer verlag.<https://doi.org/10.1007/978-94-017-0275-1>.
- [21] D. Bouagada,(2004), Influence of The Value of Discretization Step on Positivity of 2D Linear Continuous-Discrete Systems. Far East Journal of Mathematical Sciences, 15(1), 107-112.
- [22] D. Bouagada. Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, Thèse de Doctorat d'état, Université d'es-sénia Oran ,(2007), <https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/ThesisBouagada.pdf> .
- [23] D. Bouagada,P. Van Dooren,(2010), LMI Conditions for The Stability of 2D State-Space Models. K. Proc. 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems .
- [24] D.Bouagada, and P . V. Dooren,(2012), *State space solution of implicit fractional continuous-time systems*, An international journal for theory and Applications. **15(3)**, 356-361.

- [25] S.Bouguessa, D.Bouagada, M.A.Ghezzar,(2021), Influence of discretization step on positivity of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 38(1).
- [26] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan,(1994) *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), ISBN : ISBN 0 - 89871 -334 – X.
- [27] J.W Bruce, M. Bologna, P. Grigolini,(2003), *Physics of Fractal Operators*, Institute for Nonlinear Science, Springer-Verlag New York.
- [28] F. Cacace, L. Farina, R. Setola, A. Germani (eds.), (2017) *Positive Systems, Theory and Applications (POSTA 2016)* Rome Italy , 1st edition. Springer International Publishing Switzerland.
- [29] M.Chadli, M.Darouach ,(2012), Novel Bounded Real Lemma for Discrete-Time Descriptor Systems, Application to H1 control Design. *Automatica* 48(2), 449-453.
- [30] R .Caponetto,(2010), *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*, World scientific series on nonlinear science, Series A, **72**, World scientific, Singapore.
- [31] M. Caputo and M. Fabrizio, (2015), A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, **vol. 1, no. 2**, 1-13.
- [32] Carsten Scherer and Siep Weiland, (2004), *Lecture notes on DISC, Course on linear matrix inequalities in control*, Univ. Delft (Pays -Bas).
- [33] L. Dami, A. Benzaouia,, (2018), Stabilization of Positive 2D Fractional-Order Continuous-Time Systems with Delays. *Circuits Systems and Signal Processing*, 38(5).
- [34] L. Dami, M. Benhayoun, A. Benzaouia,, (2020), Admissibility and stabilization of singular continuous 2D systems described by Roesser model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 31, p 673-687.
- [35] R. D'Andrea and G. E. Dullerud,(2003), Distributed Control Design for Spatially Interconnected Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **48(9)**,1478-1495.
- [36] H. D. Decell,, (1965), *A Special Form of A Generalized Inverse of An Arbitrary Matrix*. Manned Spacecraft Center Houston, Texas. April.
- [37] L.Debnath, and D.Bhatta,(2007), *Integral Transforms and their Applications*, Chapman and Hall/CRC
- [38] I.N.Doye, M.Darouach, M.Zasadzinski and N.Radhy ,(2013),Robust Stabilization of Uncertain Descriptor Fractional-Order Systems. *Automatica* 49(6) :1907-1913.

- [39] H. Eltayeb, I. Bachar, and Adem K, (2019), Conformable Double Laplace Transform and One Dimensional Fractional Burgers Equation, *Symmetry.*, **11**, No.3, 417.
- [40] M. El-Shahed , A. Salem, (2004), On the generalized Navier-stokes equations, *Appl. Math. Comput* 156, 287-293.
- [41] Elosmani O. A, Bouagada D., Van Dooren P. , Benyettou K, (2021), LMI Stability Test for Multidimensional Linear State-Space Models. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 390, 113363. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113363>.
- [42] Elosmani O. A, Commandabilité et Analyse de la Stabilité des Systèmes Multidimensionnels Singuliers Linéaires, Thèse de Doctorat d'état, Université de Mostaganem, 14 mai 2018.
- [43] W.Fei, (2002/2003), Some problems on linear preservers, Undergraduate research opportunity, Programme in science, supervisor : Dr.Victor Tan, Département de Mathématiques de Singapour.
- [44] E. Fornasini, G. Marchesini , (1976), "State-Space Realization Theory of TwoDimensional Filters." *IEEE Trans. Aut. Contr*, Vol AC-21, pp. 484-492.
- [45] E. Fornasini, G. Maechesini,(1978), Doubly Indexed Dynamical Systems : Statespace Models and Structural Properties. *Mathematical Systems Theory*, Vol 12, pp. 59-72.
- [46] K.Galkowski,(2001) *State-Space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD ($n > 2$) case*,Springer-Verlag, London.
- [47] F.R. Gantmacher (1998), "The Theory of Matrices." Chelsea Pub. Comp. London.
- [48] F. R.Gantmacher,(2000), *The Theory of Matrices*, American Mathematical Society Chelsea Publishing, Rhode Island.
- [49] M.Ghangui,D.Mehdi, O.Bachelier, and M.Chaabane, (2018),On the robust state feedback stabilization of nD hybrid Roesser models with implicit LFRuncertainty. *International Journal of Control* (12), 1–20. <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1454987>
- [50] S., L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [51] M.A Ghezzar, D. Bouagada and M. Chadli,, (2018), Influence of discretization step on positivity of a certain class of two-dimensional continuous-discrete fractional linear systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **35(3)**, 845–86. <https://doi-org.eres.qnl.qa/10.1093/imamci/dnx005>.
- [52] M.A.Ghezzar,D. Bouagada, K.Benyettou, M.Chadli, P.V.Dooren,(2021), On the stability of 2D general Roesser Lyapunov systems. *Mathematica* (1), 85-97.

- [53] A. Graham,(1981), Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications, Ellis Ho-wood Limited. P019. 1EB. E.
- [54] M. S. Hashemi,(2018),Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives, Chaos Solutions Fractal. **107**, 161-169 .
- [55] M. S. Hashemi,(2018), Some new exact solutions of (2+1)-dimensional nonlinear Heisen-berg ferromagnetic spin chain with the conformable time fractional derivative,Opt. Quant. Electron, **107**, 50-79.
- [56] R.A.Horn, C.R.Johnson,(1991) Topics in matrix analysis, Cambridge University, Press.
- [57] T.Huang,(2002), Stability of two dimensional recursive filters. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 20(2) :158–163. <https://doi.org/10.1109/TAU.1972.1162364>.
- [58] D. Idczak, R. Kamocki, and M. Majewski,(2013), On a fractional continuous counterpart of Fornasini ?Marchesini model nDS 13, in : Proceedings of the 8th International Workshop on Multidimensional Systems, Erlangen. pp. 1-5.
- [59] S.Jayaraman, S.Esakkirajan and T.Veerakumar, (2011),Digital Image Processing. New Delhi : Tata Mc GrawHill Education Private Limited.
- [60] E.I.Jury,(1973),Inners and Stability of Dynamic Systems .John Wiley sons : New York. London. Sydney. Toronto.
- [61] R.Khalil, M. Al Horani, A.Yousef, and M. Sababhehb, (2014), A new definition of fractional derivative, J. of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- [62] T.Kaczorek, Przemyslaw Przyborowski, Positive Continuous-Time Linear Lyapunov Sys-tems, The International Conference on Computer as a Tool-Warsaw, September 9-12.
- [63] T.Kaczorek, (1985), Two Dimensional Linear Systems. Springer Verlag, Berlin.
- [64] T. Kaczorek,(1999), General Response Formula and Minimum Energy Control for the General Singular Model of 2-D Systems, IEEE transaction on automatic control , 35(4), 433-436.
- [65] T.Kaczorek,(2000) Positive 1D and 2D systems, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag London Ltd.
- [66] T.Kaczorek,(2002), Positive 1 D and 2D Systems, 1st Edition, Springer-Verlag London .
- [67] T.Kaczorek ,(2005) Reachability and minimum energy control of positive 2D systems with delays. Control and Cybernetics 34(2) :411-423.
- [68] T.Kaczorek,(2008), Positive fractional 2D hybrid linear systems, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences 56(3), 273-277.

- [69] T.Kaczorek,(2008), Asymptotic stability of positive 2D linear systems. proceedings of the 13th Scientific Conference on Computer Applications in Electrical Engineering, poznan,poland, pp 1-5.
- [70] T. Kaczorek ,(2009), Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state-feedbacks, LMI approach. Archives of Control Sciences, 19(2) 165-177.
- [71] T. Kaczorek, (2009), Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state-feedbacks, LMI approach. Archives of Control Sciences 19(2) :165-177.
- [72] T.Kaczorek,M. Buslowicz,(2010), simple conditions for practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 19(2) :263-269. <https://doi.org/10.2478/v10006-009-0022-6>
- [73] T. Kaczorek,(2010), "Stability and Stabilisation of Positive Fractional Linear Systems by State-Feedbacks." Bulletin of the Polish Academy of Sciences technical Sciences, Vol.58,No 4.
- [74] T.Kaczorek and K.Galkowski,(2010), positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by the Roesser model. Journal of Computational and Applied Mathematics 20(1) :85–92. <https://doi.org/10.2478/v10006-010-0006-6>
- [75] T.Kaczorek, ,(2011) *Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **21(2)**, 379–384.
- [76] T.Kaczorek,(2011), Positive fractional 2D continuous-discrete linear systems, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences 59(4), 575-579.
- [77] T. Kaczorek,, (2011) *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [78] T. Kaczorek,(2013), Comparison of Approximation Methods of Positive Stable Continuous-Time Linear Systems by Positive Stable Discrete-Time Systems. Archives of Electrical Engineering, 62(2), pp.345-355,
- [79] T. Kaczorek, K. Rogowski,(2015), *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, 1st Edition, Springer International Publishing Switzerland .
- [80] T.Kaczorek, K.Rogowski ,(2015), *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*, Studies in Systems, Decision and Control, **13** Springer International Publishing, Switzerland.
- [81] T. Kaczorek. Kamil Borawski,, (2016), Minimum energy control of descriptor discrete-time linear systems by the use of Weierstrass-Kronecker decomposition, Archives of Control Sciences, Volume 26(LXII) , No. 2, pages 177-187.
- [82] T. Kaczorek, (2018), Analysis of positive linear continuous-time systems using the conformable derivative, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 28(2), 35–340.

- [83] T. Kaczorek, Some recent developpments in positive 2D systems, Springer Verlag,Heidelberg.
- [84] R. Khalil, M. Al Horani , A. Yousef, M. Sababhehb,(2014), A new definition of fractional derivative,Journal of Computational and Applied Mathematics, **264**,65–70.
- [85] P.Lancaster, M.Tismenetsky,(1985), The theory of matrices, Second Edition with Applications, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press.
- [86] F.L Lewis, B.G Mertzios,(1992), On the analysis of two-dimensional discrete singular systems, circuits systems signal process , 11(3), 399–419.
- [87] C.Li,D. Qian,Y.Q Chen, On Riemann-Liouville and Caputo Derivatives, Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 562494, 15 pages.
- [88] A. M. Lyapunov ,(1907), Problème général de la stabilité du mouvement. Ann.Frac.Sci. Toulouse, volume 9, pp. 203-474,.
- [89] S. Marir , M. Chadli, D. Bouagada, (2017), Admissibility conditions for singular linear continuoustime fractional-order systems, Journal of the Franklin Institute, 352(2).
- [90] J.L. Matheus and F.M. Torres,(2017), Variational Calculus with Conformable Fractional Derivatives , IEEE/CAA Journal OF Automatica Sinica, 4(2), 340-352 .
- [91] B.G Mertzios, (1990), Computation of the fundamental matrix sequence and the Cayley-Hamilton theorem in singular 2-D systems, Progress in Systems and Control Theory, 3, https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3462-3_36.
- [92] T.M.Michael,(2006), Multiorder multidimensinal systems : Computation of the transfer function using the DFT, A Master's Thesis, Montclair State University.
- [93] N. MILIANI, D. BOUAGADA and K. BENYETTOU, (2023), On the analysis of positivity and stabilization of fractional multidimensional discrete linear systems. Int. J. Dynam. Control <https://doi.org/10.1007/s40435-023-01243-0>.
- [94] C. A. Monje,(2010), Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications, Advances in Industrial Control, Springer.
- [95] K.Oldham, and J. H Spanier,(1974) The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Publisher : Academic Press. ISBN 0-12-525550-0.
- [96] M.D.Ortigueira, F.Coito,(2004), From differences to derivatives. Fractional Calculus and Applied Analysis 7(4) : 459-471.
- [97] M. D.Ortigueira, J . A . T . Machado,(2006), Fractional calculus applications in signals and systems, Signal Processing, Elsevier, Special Issue, **86**(10), 2503–3094 .

- [98] M. D. Ortigueira and J. A. T. Machado, (2022), The 21st Century Systems : An Updated Vision of Discrete-Time Fractional Models. *IEEE Circuits and Systems Magazine* 22(3) :6-21. 10.1109/MCAS.2022.3160908.
- [99] O. Ozkan, and A. Kurt, (2018), On conformable double Laplace transform, *Opt Quant Electron*, 50 -103 .
- [100] O. Ozkan and A. Kurt, (2020), Conformable fractional double laplace transform and its applications to fractional partial integro-differential equations, *Journal of Fractional Calculus and Applications.*, **11**, No. 1, 70-81.
- [101] P. Ostalczyk, (2008), *Epitome of Fractional Calculus, Theory and its Applications in Automatics.*
- [102] G. G. Parra, A. J. Arenas, and B.M. Chen-Charpentier, (2014), A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1), *Math. Method. Appl. Sci.*, 37, 2218-2226.
- [103] I. Petras, (2011), *Fractional-Order Nonlinear Systems, Nonlinear Physical Science, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*
- [104] I. Podlubny, (1998), *Fractional Differential Equations*, **198**, Academic Press, New York .
- [105] A.D. Poularikas, (1999) , *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*, Boca Raton : CRC Press LLC.
- [106] K. Rogowski, (2017), Solution to the Fractional-Order 2D Continuous Systems Described by the Second Fornasini-Marchesini, *IFAC PapersOnLine*, 50(1), 97489752.
- [107] K. Rogowski, (2020), General Response Formula for CFD Pseudo-Fractional 2D Continuous Linear Systems Described by the Roesser Model, *Symmetry*, **12(12)**, <https://doi.org/10.3390/sym12121934>.
- [108] R.P. Roesser, A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-20, 1975, 1-10.
- [109] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. T. Machado, (2007), *Advances in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*”, Springer Netherlands, London.
- [110] S. G. Samko, , A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, (1993), *Fractional Integrals and derivatives : Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam, the Netherlands.
- [111] H. H. Sherief, A.M. Abd El-Latief, (2014), Application of fractional order theory of thermo elasticity to a 2D problem for a half-space, *Appl. Math. Comput.*, **248**, 584-592.

- [112] G. Steodoro, J. A. T. Machado, E. C. Oliveira, (2019) A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.008>
- [113] D. M. Sullivan, (1992), Frequency-dependent FDTD methods using Z transforms, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*.
- [114] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France.
- [115] S. Tofghi, M. Shafiee, S. M. Alavinia, (2015), Stability analysis of three-dimensional : 3D systems using a wave advanced model (WAM), *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **39**(6), 896-906. <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0142331215621125>.
- [116] J. Vashi, and M. G. Timol, (2016), *Laplace and Sumudu transforms and their application*, *International Journal of Innovation Science, Engineering & Technology*, **3**(8), 538–542.
- [117] L. Xiaoxue, H. Xiaorong, Y. Jing and L. Min, (2022) Stability and Stabilization of 2D Linear Discrete Systems with Fractional Orders Based on the Discrimination System of Polynomials. *Mathematics* 10(11) :1862. <https://doi.org/10.3390/math10111862>
- [118] S. Xu, J. Lam, Z. Lin, K. Galkowski, W. Paszke, E. Rogers and D. H. Owens, (2003), Positive real control of two-dimensional systems : Roesser models and linear repetitive processes. *International Journal of Control* 76(11) :1047–1058. <https://doi.org/10.1080/0020717031000091423>
- [119] S. Xu and J. Lam, (2006), *Control and Filtering of Singular Systems*. Springer, Berlin.
- [120] V. A. Yakubovich, (1964), Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory. *Soviet Math. Dokl.*, 5 :652-656.
- [121] Y. Zou, H. Xu and W. Wang, (2008), Stability for two dimensional singular discrete systems described by general model. *Multidimensional Systems and Signal Processing* 2 :219–229. <https://doi.org/10.1007/s11045-007-0027-y>.