



Faculty of Sciences and Technology

Civil Engineering Department

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم الهندسة المدنية

N° d'ordre : M2... /GC/2024

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Civil

Option : Structures

Thème

**ETUDE DE L'INFLUENCE DE LA POROSITE SUR
LA REPONSE DYNAMIQUE ET LA STABILITE
DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES**

Présenté par :

M. SAID Abdelaziz

M. MWANYIKA Gilbert Mlacha

Soutenu le 27/06/2024 devant le jury composé de :

Dr. ELMASCRI Setti

Présidente :

Université de Mostaganem

Dr. BELBACHIR Nesrine

Encadrante :

Université de Mostaganem

Dr. DJILALI Nassira

Examinatrice:

Université de Mostaganem

Année Universitaire 2023/2024

REMERCIEMENTS

Cette mémoire est le fruit de nombreuses années d'efforts et d'apprentissage à différents niveaux d'études, et nous sommes reconnaissants envers Dieu pour cette opportunité. Nous saisissons donc cette occasion pour exprimer notre sincère gratitude envers tous ceux qui nous ont apporté leur aide et nous ont guidés et tous ceux qui nous ont appris une lettre tout au long de ce parcours, depuis notre enfance jusqu'à ce niveau d'accomplissement.

Nous aimerions tout particulièrement remercier notre encadrante, **Dr. BELBACHIR NESRINE**, qui a su nous guider avec expertise et générosité, en partageant inlassablement ses connaissances. Ses conseils avisés ont été une source d'inspiration et ont grandement enrichi notre expérience universitaire. Nous lui sommes reconnaissants pour son engagement sans faille et son soutien indéfectible

Nous exprimons également notre profonde reconnaissance envers tous les professeurs de la **Faculté des Sciences et Technologies**, dont les enseignements nous ont permis d'acquérir les compétences nécessaires pour mener à bien ce travail.

Enfin, nous remercions chaleureusement les membres du jury qui auront l'honneur d'évaluer notre mémoire. Leur expertise et leurs commentaires seront d'une valeur inestimable pour notre progression future.

À tous ceux qui ont contribué à notre réussite, nous adressons nos plus sincères remerciements. Sans votre soutien et vos encouragements, rien de tout cela n'aurait été possible.

DEDICACES

Je dédie ce mémoire à mes chers parents qui ont été toujours à mes côtés et m'ont toujours soutenu tout au long de ces longues années d'études. En signe de reconnaissance, qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour tout ce qu'ils ont consenti d'efforts et de moyens pour me voir réussir dans mes études.

SAID Abdelaziz.

DEDICATION

First of all, I give all the glory and honor to God for the grace and strength to reach this far, and for the vision and patience to follow my dream to the end.

I dedicate this work:

To my beloved family, whose unwavering love and support have been my foundation. Special thanks to Mr. and Mrs. Harrisson Macharia and Mr. and Mrs. Elvis Mwasoko for your extraordinary support.

To my parents, Oliver and Sarah Mwanyika, for nurturing my curiosity and encouraging my every endeavor. Mom and Dad, this achievement is as much yours as it is mine.

To my younger brother, Kevin Nganga, my biggest fan and dearest friend. Your presence and cheerful spirit are a source of endless inspiration and delight to me.

To my grandparents, whose wisdom and stories instilled in me the values of hard work and resilience. Special thanks to my late grandfathers, Mr. Gilbert Mwazighe and Mr. Eliud Mwamunga, and to Mr. and Mrs. Downton Ndighila.

To my mentors, Mr. and Mrs. James Karani and Mr. and Mrs. James Nyaga, who have raised me, prayed for me, and supported me throughout my journey. I am forever grateful to God for your presence in my life.

To my dear friends, Dylan Tomu, Justice Mbaya, Michael Tanaka, Downton Mwaluma, Farah Riri, and Hayet Nedjadi. Your friendship has enriched my life beyond measure.

To my project partner, Mr. Abdelaziz Said, for your hard work and dedication. I am endlessly grateful for meeting and partnering with you.

Finally, to my project supervisor, Dr. Nesrine Belbachir, for your expertise, dedication, and unwavering support.

Thank you all for your love, support, and belief in me. This thesis is dedicated to you.

MWANYIKA Gilbert Mlacha.

Abstract

Composite materials have become essential in several engineering fields due to their excellent mechanical properties, which can be adjusted according to needs. This study analyzes the effect of porosity on the stability and dynamic response of cross-ply laminated plates.

An analytical approach based on higher-order shear deformation theory (HSDT) was employed to develop mathematical models describing the dynamic behavior and stability of composite plates with different levels of porosity. The governing equations were obtained using Hamilton's principle, and solutions were found by applying the Navier procedure. The software MAPLE 12 was used to obtain the results, and the eigenvalue procedure was used to solve the vibration equations.

A series of parametric studies was conducted to examine the impact of various factors, such as the porosity coefficient, plate geometry, and the orthotropy, on natural frequencies and buckling resistance of composite plates. The software ORIGIN 2024 was used to trace the graphs showing the results.

It was observed that increasing porosity reduces the natural frequencies of composite plates, indicating a decrease in the overall stiffness of the material. The results also show that the presence of porosity decreases the critical buckling load of composite plates, compromising their stability under compressive loads.

Keywords:

Porosity, Laminated Composite Plates, Dynamic Response, Stability, Buckling, Analytical approach.

Résumé

Les matériaux composites sont devenus essentiels dans les industries modernes grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, qui peuvent être ajustées selon les besoins. Cette étude analyse l'effet de la porosité sur la stabilité et la réponse dynamique des plaques stratifiées à couches croisées.

Une approche analytique basée sur la théorie de la déformation par cisaillement de haut ordre (HSDT) a été employée pour développer des modèles mathématiques décrivant le comportement dynamique et la stabilité des plaques composites avec différents niveaux de porosité. Les équations gouvernantes ont été obtenues en utilisant le principe de Hamilton, et les solutions trouvées en appliquant la procédure de Navier. Le logiciel MAPLE 12 a été utilisé pour obtenir les résultats, et la procédure "Eigen-Value" a permis de résoudre les équations de vibration.

Une série d'études paramétriques a été conduite pour examiner l'impact de divers facteurs, tels que le coefficient de porosité, la géométrie de la plaque et l'orthotropie, sur les fréquences fondamentales et la résistance au flambement des plaques composites stratifiées. Le logiciel ORIGIN 2024 a permis de tracer les graphes démontrant les résultats.

Il a été observé que l'augmentation de la porosité réduit les fréquences naturelles des plaques composites, indiquant une diminution de la rigidité globale du matériau. Les résultats montrent aussi que la présence de porosité diminue la charge critique de flambement des plaques composites, compromettant leur stabilité sous des charges compressives.

Mots-clés

Porosité, Plaques Composites Stratifiées, Réponse Dynamique, Stabilité, Flambement, Approche analytique.

ملخص

المواد المركبة أصبحت ضرورية في الصناعات الحديثة بفضل خصائصها الميكانيكية الممتازة، التي يمكن تعديلها حسب الاحتياجات. هذه الدراسة تحلل تأثير المسامية على الاستجابة الديناميكية والثبات للصفائح المتكونة من عدة طبقات.

تم اعتماد نهج تحليلي قائم على نظرية التشوه بقص عالي الرتبة (HSDT) لتطوير نموذج رياضي يصف السلوك الديناميكي واستقرار الألواح المركبة بمستويات مختلفة من المسامية. تم الحصول على المعادلات الحاكمة باستخدام مبدأ هاميلتون، وتم إيجاد الحلول بتطبيق إجراء نافيي. تم استعمال برنامج MAPLE 12 للحصول على النتائج، وتم استخدام إجراء القيمة الذاتية لحل معادلات الاهتزاز.

تم إجراء سلسلة من الدراسات البارامترية لفحص تأثير عوامل مختلفة، مثل معامل المسامية، وهندسة اللوح، والخصائص المتعامدة على الترددات الأساسية ومقاومة الانبعاج للألواح المركبة. باستخدام برنامج Origin 2024 تمكنا من حصول رسوم بيانية توضح النتائج.

لوحظ أن زيادة المسامية تقلل الترددات الطبيعية للألواح المركبة، مما يشير إلى انخفاض في الصلابة الإجمالية للمادة. تظهر النتائج أيضاً أن وجود المسامية يقلل من الحمل الحرج للانبعاج للألواح المركبة، مما يضر باستقرارها تحت الأحمال الضاغطة.

الكلمات المفتاحية

المسامية، الألواح المركبة الطباقية، الاستجابة الديناميكية، الاستقرار، الانبعاج، نهج تحليلي.

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$G(p)$	Module de cisaillement avec porosité dans le plan (x, z)
E	Module de Young
$E(p)$	Module de Young avec porosité
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(p)$	Coefficient de Poisson avec porosité
ρ	Poids volumique
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z .
u_0, v_0, w_0	Déplacement d'un point d'axe médian dans les axes x, y, z respectivement
θ_x, θ_y	Rotations dans les axes x et y respectivement
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
σ_{ij}	Tenseur de contrainte
ε_{ij}	Tenseur de déformation
C_{ij}	Tenseur de rigidité
S_{ij}	Composantes de matrice de souplesse
Q_{ij}	Coefficient de rigidité dans le repère locale
\bar{Q}_{ij}	Coefficient de rigidité dans le repère globale
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
ε_f	Déformation en flexion et torsion
$\varepsilon_{xx}^0, \gamma_{xy}^0, \varepsilon_{yy}^0$	Déformations en membrane
ε^0	Déformation au plan médian
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$	Déformations de cisaillement transversale dans le plan moyenne
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
U	Energie de déformation

K	Energie cinétique
W	Energie de travail des forces externes
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y	Moments de flexion
M_{xy}	Moments de torsion
[A]	Matrice de membrane
[B]	Matrice de couplage membrane
[D]	La matrice de rigidité au flexion
D	Propriétés de matériau
p	Coefficient de porosité
∂	Dérivée partielle
<i>i et j</i>	Sont des nombres naturels.
\bar{N}_x, \bar{N}_y	Charge de compression dans les plans x et y respectivement
$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}$	Coefficients de rigidité de la plaque
$\bar{\lambda}$	La charge critique de flambement
$\bar{\omega}$	Vibration critique
[K]	Matrice de rigidité
[M]	Matrice d'inertie
[N]	Matrice de flambement
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Constituants de matériaux composites.....	3
Figure 2 : Les différents types des constituants de base (Draiche, 2014).	5
Figure 3 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice.	6
Figure 4 : Résines époxyde.	7
Figure 5 : Résines polyester.	8
Figure 6 : : Classification schématique des principaux matériaux des renforts.	10
Figure 7 : Les fibres de verre.....	11
Figure 8 : Fibre naturelle de Cactus	12
Figure 9 : Classification selon la forme de renforcement.	13
Figure 10 : Noir de carbone.....	14
Figure 11 : Micro-billes de verre creuses.	14
Figure 12 : Colorants.....	14
Figure 13 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites : lorsqu'une fissure atteinte .	15
Figure 14 : Le monocouche.....	16
Figure 15 : La composition de stratifié	17
Figure 16 : Stratifié unidirectionnel	17
Figure 17 : Stratifiée symétrique	18
Figure 18 : Stratifiée antisymétrique	18
Figure 19 : Stratifie antisymétrique équilibré	18
Figure 20 : Stratifie orthogonal	18
Figure 21 : la composition de sandwich (Berthelot,2013)	19
Figure 22 : Utilisation des matériaux composites dans le domaine d'aéronautique	20
Figure 23 :: utilisation des matériaux composites dans le domaine de transport.....	21
Figure 24 : fabrication de coque de bateau a l'aide des matériaux composite.....	21
Figure 25 : Renforcement du l'intersection poteau poutre avec les fibres de carbone	23
Figure 26 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope	31
Figure 27 : Stratifié hors axes.	35
Figure 28 : Forces par unités de longueur.	38
Figure 29 : Moments par unités de longueur.....	39
Figure 30 : Elément d'un stratifié [Loli 2000].	41
Figure 31 : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, 1997) - CPT.....	24
Figure 32 : Cinématique de Reissner-Mindlin.	25
Figure 33 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.	26
Figure 34 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [Nguyen, 2004].	28
Figure 35 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [Nguyen, 2004]	28
Figure 36 : Plaque composite stratifié.....	45
Figure 37 : Démonstration de la porosité	45
Figure 38 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport a/h pour des plaques symétriques à 4 couches (0°/90°/90°/0°) avec et sans porosité.....	57
Figure 39 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport a/h pour des plaques antisymétriques à 4 couches (0°/90°/0°/90°) avec et sans porosité.	57

Figure 40 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.....	58
Figure 41 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.....	59
Figure 42 : Variation de la charge de flambement en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques symétriques à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	60
Figure 43 : Variation de la charge de flambement en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques antisymétriques à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)	60
Figure 44 :Variation des fréquences naturelles en fonction du rapport a/h pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.....	62
Figure 45 : Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport a/h pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.....	63
Figure 46 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.	64
Figure 47 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.	64
Figure 48 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques symétriques à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)..	65
Figure 49 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques antisymétriques à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$).	66

LISTE DES TABLEAUX

Table 1 : Comparaison des résultats de flambement à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec les recherches précédant.	56
Table 2 : Comparaison des résultats de flambement à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédant.	56
Table 3 : Comparaison des résultats de pulsation libre à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec les recherches précédant.	61
Table 4 : Comparaison des résultats de pulsation libre à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédant.	61
Table 5 : Comparaison des résultats de pulsation libre à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédant.	62

SOMMAIRE

ABSTRACT	I
RESUME.....	II
ملخص.....	III
LISTE DES NOTATIONS.....	IV
LISTE DES FIGURES	VI
LISTE DES TABLEAUX.....	VII
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES	3
1.1. INTRODUCTION.....	3
1.2. CLASSIFICATION DES COMPOSITES	4
1.3. CONSTITUANTS DE MATERIAUX COMPOSITES	4
1.3.1. <i>La matrice</i>	5
1.3.2. <i>Les renforts</i>	9
1.3.3. <i>Les charges et les additifs</i>	14
1.3.4. <i>L'interface fibre-matrice</i>	15
1.4. LA STRUCTURE (ARCHITECTURE) DE COMPOSITES	16
1.4.1. <i>Les monocouches</i>	16
1.4.2. <i>Les stratifiés</i>	16
1.4.3. <i>Les sandwichs</i>	19
1.5. DOMAINES D'APPLICATION DES COMPOSITES	19
1.5.1. <i>Produits aéronautiques</i>	19
1.5.2. <i>Agriculture</i>	20
1.5.3. <i>Transport / Véhicules spéciaux</i>	20
1.5.4. <i>Nautisme</i>	21
1.5.5. <i>Génie civil et la construction</i>	21
1.6. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES MATERIAUX COMPOSITES	25
1.7. CONCLUSION	26
CHAPITRE 2 : THEORIES DES PLAQUES	24
2.1. INTRODUCTION.....	24
2.2. COMPORTEMENT ELASTIQUE D'UN PLI ORTHOTROPE.....	28
2.2.1. <i>Loi de comportement (loi de Hooke généralisé)</i>	29

2.2.2. Différents Types des matériaux	30
2.2.3. Comportement d'un pli dans les axes du matériau	32
2.2.4. Constantes de rigidités réduites d'un pli en dehors de ses axes principaux.....	34
2.2.5. Comportement des composites stratifiés	35
2.3. LES DIFFERENTS MODELES DES STRUCTURES COMPOSITES DANS L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLES (MODELES DE STRUCTURES MULTICOUCHES)	24
2.3.1. Approche monocouche équivalente.....	24
2.3.2. Approche par couche	27
2.3.3. Approche de développement asymptotique	28
2.4. CONCLUSION	42
CHAPITRE 3 : FORMULATION MATHEMATIQUE	44
3.1. INTRODUCTION.....	44
3.2. CONFIGURATION GEOMETRIQUE.....	44
3.3. PLAQUE COMPOSITE AVEC POROSITE	45
3.3.1. Distribution de la porosité (formule)	46
3.4. THEORIE DE DEFORMATION DE CISAILLEMENT :	46
3.4.1. Champ de déplacement	46
3.4.2. Equations constitutives.....	47
3.4.2. Equations gouvernantes	49
3.4.3. SOLUTION NAVIER ET PROBLEME DE VALEUR PROPRE POUR UNE PLAQUE SIMPLEMENT SUPPORTEE	51
3.5. CONCLUSION	54
CHAPITRE 4 : RESULTATS ET CONCLUSION	55
4.1. INTRODUCTION.....	55
4.2. ANALYSE DE FLAMBEMENT	56
4.2.1. Influence du rapport géométrique a/h	56
4.2.2. Influence de l'orthotropie E_1/E_2	58
4.2.3. Influence de la porosité	59
4.3. ANALYSE DE LA VIBRATION LIBRE	61
4.3.1. Influence du rapport géométrique a/h	62
4.3.2. Influence de la d'orthotropie E_1/E_2	63
4.3.3. Influence de la porosité	65
4.4. CONCLUSION	66

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation de matériaux primitifs dans divers domaines industriels et de construction n'a pas suivi l'évolution technologique et ses besoins, incitant ainsi les concepteurs à rechercher de nouveaux matériaux dotés de caractéristiques techniques capables de résoudre les problèmes dans des situations statiques et dynamiques. C'est ainsi qu'ont été développés les matériaux composites, avec des propriétés renforcées et une hétérogénéité particulière, qui ont acquis une large place dans des domaines industriels tels que le maritime, l'aéronautique. Leur utilisation s'étend également au domaine de la construction.

Dans la conception des structures, la réponse ou le comportement dynamique et la stabilité de ces matériaux revêt une importance primordiale. Il est crucial de connaître les paramètres liés aux vibrations et aux différents types de chargement dynamique pour assurer la fiabilité et la sécurité des structures construites avec ces matériaux.

Cependant, ces matériaux sont souvent affectés par des imperfections internes telles que la porosité, résultant de divers défauts de fabrication tels que l'insuffisance de compaction, les défauts de mouillage des fibres ou l'évaporation de solvants volatils.

La présence de porosité dans les composites stratifiés peut avoir un impact significatif sur leurs propriétés mécaniques et dynamiques. En fonction de la taille, de la distribution et du volume des pores, la porosité peut altérer la rigidité, la résistance à la fatigue et compromettre la stabilité globale de la structure.

Ainsi, l'étude de l'influence de la porosité sur la réponse dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées revêt une importance capitale pour garantir la performance et la sécurité des structures construites avec ces matériaux.

PROBLEMATIQUE

L'objectif de cette étude est d'identifier les caractéristiques dynamiques et de stabilité, telles que les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée.

De plus, notre étude vise à explorer l'influence de la porosité sur la réponse dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées. En comprenant comment la porosité influe sur la réponse dynamique et la stabilité, nous pourrions optimiser la conception des plaques composites pour garantir des performances optimales dans diverses applications.

En résumé, cette étude cherche à fournir des informations précieuses sur les caractéristiques dynamiques et la stabilité des plaques stratifiées, en utilisant une approche théorique avancée et en explorant l'impact de la porosité sur leur comportement. Ces résultats pourraient avoir des implications importantes pour la conception et l'optimisation des structures, contribuant ainsi à l'avancement de l'ingénierie des matériaux composites.

ORGANISATION DU MEMOIRE

Partie 1 : Partie Bibliographique

- **Chapitre 1** :Ce chapitre discute les généralités sur les matériaux composite.
- **Chapitre 2** :Ce chapitre aborde les différentes théories des plaques.

Partie 2 : Partie Projet

- **Chapitre 3** :Ce chapitre démontre la formulation mathématique utilisée.

Partie 3 : Partie Analyse et Conclusions

- **Chapitre 4** : Ce dernier chapitre expose les résultats obtenus et les conclusions tirées de l'étude.

La dernière partie constitue la conclusion du mémoire.



*Etude de l'influence de la porosité sur la réponse
dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées*



Chapitre 1

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

1.1. Introduction

Les matériaux composites, considérés comme modernes, suscitent un intérêt croissant dans de nombreux secteurs industriels, et leur utilisation est de plus en plus répandue. Un matériau composite est constitué d'au moins deux composants non miscibles de structures différentes, dont les propriétés individuelles se combinent et se complètent pour offrir des performances globales améliorées. L'un de leurs principaux avantages réside dans la possibilité d'ajuster leurs propriétés en fonction de paramètres de conception tels que la nature des fibres, la disposition des couches, le type de matrice, ainsi que l'orientation et l'architecture des fibres.

Les matériaux composites peuvent adopter des formes complexes et des dimensions variées, s'adaptant ainsi aux besoins de conception des modèles technologiques. Ils peuvent remplir divers rôles, agissant comme éléments principaux de résistance aux chocs et aux vibrations, ou en tant qu'éléments secondaires agissant comme isolants acoustiques ou conducteurs thermiques et électriques. Leur polyvalence se manifeste à travers leurs nombreuses propriétés physiques distinctes.

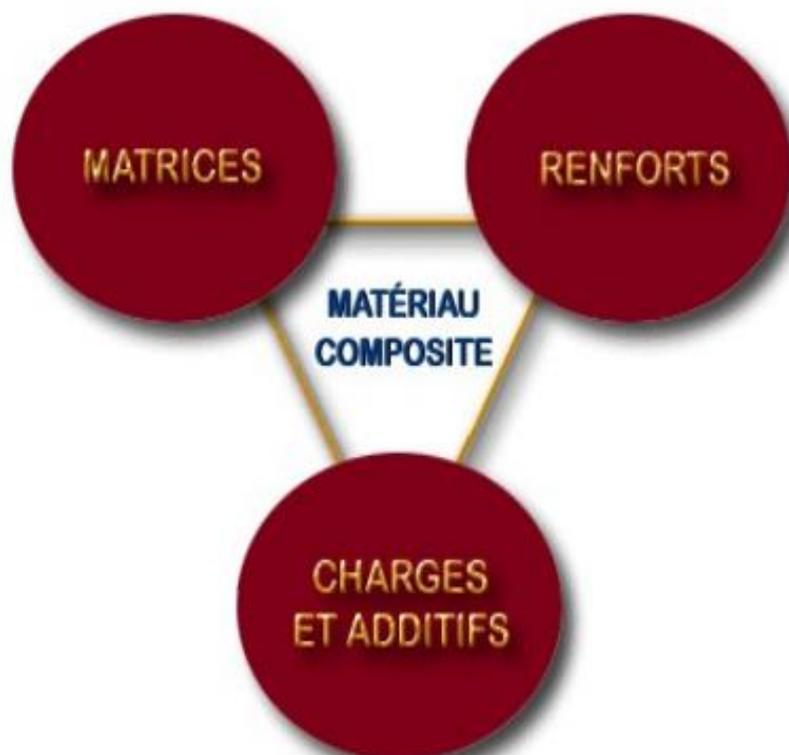


Figure 1 : Constituants de matériaux composites.

1.2. Classification des composites

Les matériaux composites sont généralement divisés en deux catégories distinctes :

- Les composites à Grande Diffusion (GD) combinent des coûts relativement bas avec des caractéristiques moyennes, et sont principalement destinés à des applications de grande série. Leurs propriétés mécaniques sont souvent moins élevées que celles des matériaux de référence tels que l'acier. Ils sont principalement constitués de fibres de verre et sont utilisés dans des applications non sollicitantes, notamment dans l'industrie des transports et les biens d'équipement (Berbain F el, 1997) et
- Les composites à Hautes Performances (HP) offrent des propriétés structurales qui leur permettent d'être utilisés dans des structures soumises à des contraintes. Ils se distinguent par des caractéristiques mécaniques supérieures à celles des composites GD, mais leur coût global est plus élevé en raison du prix des matériaux utilisés et des méthodes de fabrication associées (autoclave, RTM). Ces matériaux sont employés dans des applications de pointe telles que le secteur de l'aéronautique (Berbain F el, 1997).

1.3. Constituants de matériaux composites

Le matériau composite est essentiellement composé d'un renfort, qui améliore les propriétés mécaniques de la pièce, et d'une matrice, qui agit comme un liant. Outre ces deux constituants de base, on trouve également l'interface, des charges et des additifs (KallelKamoun, 1999).

La matrice assure la cohésion entre les éléments du renfort, facilite le transfert des contraintes entre les plis, et offre une protection contre les agressions environnementales telles que la corrosion et le vieillissement dû à l'humidité et aux variations de température. Ainsi, le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface entre le renfort et la matrice sont des facteurs déterminants pour les propriétés mécaniques du matériau composite.

L'interface joue un rôle crucial en assurant la compatibilité entre le renfort et la matrice, en facilitant le transfert des contraintes de la matrice au renfort, et en étant ajustée pour répondre aux propriétés désirées grâce à un traitement de surface.

Les "charges", qui sont des ajouts appropriés, sont utilisées pour réduire les coûts et conférer aux matériaux des propriétés spécifiques ou complémentaires. Ces additifs peuvent être des catalyseurs, des accélérateurs de polymérisation, des colorants ou encore des agents de démoulage.

La figure ci-dessous présente quelques-uns des différents types de constituants de base des matériaux composites.

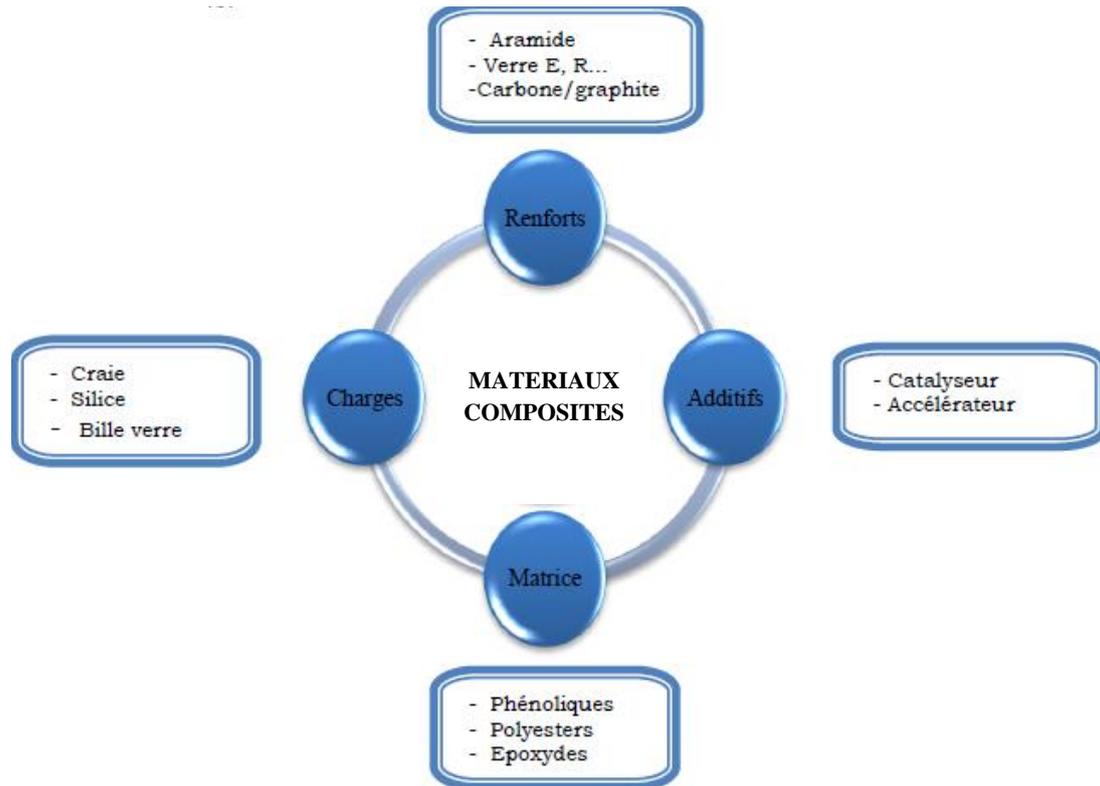


Figure 2 : Les différents types des constituants de base des matériaux composites (Draiche, 2014).

1.3.1. La matrice

Le rôle principal de la matrice dans un matériau composite est de servir d'enrobage tout en assurant l'adhésion entre les fibres, ce qui permet d'optimiser le transfert des contraintes mécaniques appliquées. En outre, la matrice confère la forme requise aux matériaux et offre des avantages en termes de résistance chimique de la structure. Le choix des matrices varie selon le domaine d'application des composites. On distingue plusieurs types de matrices, notamment les polymères (résines), parmi lesquels figurent les polyesters, les vinylesters et les époxydes. La composition chimique et les propriétés physiques de la résine ont un impact sur la fabrication et les propriétés finales des matériaux composites. Ainsi, les variations dans la composition, l'état physique ou la morphologie d'une résine, ainsi que la présence d'impuretés, peuvent affecter les performances du matériau composite et sa durabilité à long terme.

Types de matrices :

- Matrices organiques et
- Matrices minérales.

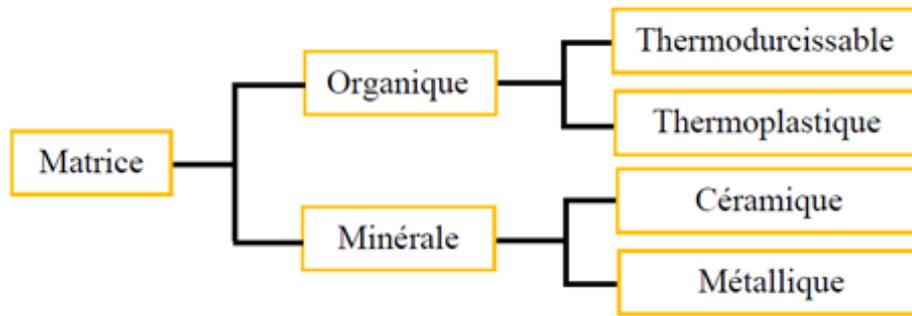


Figure 3 : Classification schématique des principaux matériaux de matrice (Dris, 2007).

a. Les matrices organiques

Le terme "composite à matrice organique" est généralement utilisé pour englober deux classes de composites : les composites à matrice polymérique et les composites à matrice de carbone. Les avantages potentiels offerts par ces matériaux sont bien connus et diversifiés : réduction de la masse, intégration de fonctionnalités, diminution des coûts, et bien d'autres. Cependant, ils doivent également répondre à des critères de durabilité à long terme et être utilisés de manière optimale, même dans des conditions environnementales extrêmes telles que des variations de température, d'humidité, ou des niveaux de pollution élevés, ainsi que dans des situations de sollicitations intenses, qu'elles soient statiques ou dynamique

La fabrication des composites à matrice organique emploie deux types de matrices :

- les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des composites à matrice organique actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) ;
- les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage) et
- les élastomères.

i. Matrices thermodurcissables

Les matrices thermodurcissables sont parmi les polymères les plus couramment utilisés comme matrices dans les matériaux composites "structuraux". Sous forme liquide à l'état initial, ces résines subissent une transformation irréversible lors de la polymérisation, passant ainsi à l'état solide (ce processus permet une seule mise en forme). Leurs caractéristiques thermomécaniques élevées en font les plus utilisées à ce jour. Trois familles principales de résines thermodurcissables sont généralement distinguées (Berthelot, 1992).

➤ **Résines époxyde**

Les résines époxydes sont définies par leur composition à base de polymères contenant des groupes époxyde. Un groupe époxyde est une structure moléculaire composée d'un atome d'oxygène et de deux atomes de carbone. Les époxydes sont des résines thermodurcissables polymérisables comportant un ou plusieurs groupes époxydes susceptibles de durcir. Elles sont largement utilisées dans les pré-imprégnés et les adhésifs structuraux.

Les avantages des époxydes résident dans leur grande résistance, leur module élevé, leur excellente adhérence, leur faible rétraction, leur bonne résistance chimique et leur facilité de traitement. Cependant, ils présentent également des inconvénients tels que leur fragilité et la réduction de leurs propriétés en présence d'humidité. De plus, le coût de ces résines est généralement plus élevé que celui des polyesters.

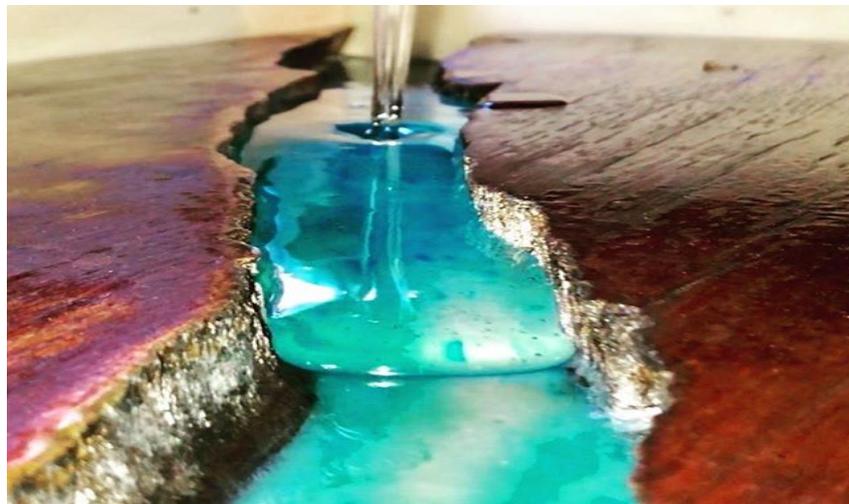


Figure 4 : Résines époxyde.

➤ **Les résines polyimides**

Les résines polyimides offrent d'excellentes propriétés mécaniques, surtout à des températures élevées, mais elles sont très sensibles aux chocs. Pour pallier cette faiblesse, il est possible d'améliorer leur résistance en les mélangeant avec des résines thermoplastiques avant leur polymérisation.

➤ **Résines polyester**

Le terme "résine de polyester thermodurcissable" désigne généralement la résine de polyester ortho-phthalique ou iso-phthalique. Ces résines sont relativement peu coûteuses et sont utilisées dans des applications nécessitant un traitement rapide et économique. L'incorporation de charges spécifiques dans les polyesters peut accroître leur résistance à la rupture due à l'arc électrique. Les résines de polyester iso-phthalique offrent une stabilité thermique et dimensionnelle ainsi qu'une résistance au fluage supérieure.

En général, les principaux avantages des structures composites à matrice de résine polyester renforcées par des fibres résident dans leur faible coût et leur capacité à être traitées rapidement. Les composites fibres/polyesters peuvent être fabriqués selon diverses méthodes, notamment l'empilement humide, le moulage sous presse (sous vide), le moulage par injection, l'enroulement filamentaire, la pultrusion et l'autoclave.



Figure 5 : Résines polyester.

➤ **Matrices en résine des phénoliques**

Les résines phénoliques durcissent généralement par voie de condensation avec libération d'eau. La matrice résultante se distingue par sa résistance chimique et thermique, ainsi que par sa dureté. De plus, elle produit peu de fumée et de substances toxiques.

Du fait de leurs viscosités et poids moléculaires plus élevés, ces résines sont particulièrement adaptées à la fabrication de structures composites présentant des formes exceptionnelles et des courbures complexes.

ii. Matrices thermoplastiques

Les matrices thermoplastiques sont composées de polymères à chaîne linéaire ou ramifiée, ce qui signifie qu'elles peuvent être monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont généralement fusibles et solubles. Contrairement aux matrices thermodurcissables, dans le cas des thermoplastiques, c'est la matière première déjà polymérisée qui est chauffée, tandis que la pièce conserve sa forme après refroidissement. Ce processus est réversible. Les thermoplastiques sont utilisés lorsque la température se situe près de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes, et jusqu'à leur température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins.

Les principales résines thermoplastiques incluent le polyamide, le polyéthylène, le polycarbonate et le polychlorure de vinyle (PVC).

iii. Les élastomères

Les élastomères, communément appelés "caoutchoucs", font partie de la vaste famille des polymères. Ils peuvent être d'origine naturelle ou synthétique et se distinguent par leur structure unique qui leur confère une grande élasticité, pouvant atteindre jusqu'à 500% d'allongement par rapport à leur taille initiale. Ces matériaux sont largement utilisés comme solutions antivibratoires dans divers domaines tels que l'automobile, l'aéronautique et l'industrie. Parmi les élastomères les plus courants, on trouve les silicones, les polyuréthanes, le néoprène, le latex, etc.

b. Matrices minérales

➤ *Les composites à matrices céramiques*

Lorsque les températures d'utilisation dépassent 1000°C, les composites à matrice céramique sont souvent utilisés. Dans ce type de composite, le renfort est généralement composé de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblées par un tissage multidimensionnel. Ces matériaux sont principalement développés dans le domaine aérospatial pour servir de structures thermiques en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

➤ *Les composites à matrice métallique*

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C rend pratiquement impossible l'utilisation de matrices organiques, nécessitant ainsi l'immersion de l'élément de renforcement dans une matrice métallique. Les principaux matériaux de matrice métallique comprennent les alliages d'aluminium, les alliages de titane ainsi que les alliages de fer. D'autres métaux sont également utilisés comme matériaux de matrice, notamment le cuivre, le plomb, le magnésium, le cobalt, l'argent et les superalliages.

1.3.2. Les renforts

Les matériaux composites tirent la majeure partie de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort, telles que la rigidité, la résistance à la rupture, la dureté, etc. Le choix approprié du renfort peut également améliorer certaines propriétés physiques du composite, telles que le comportement thermique, la résistance à la température, la résistance au feu, la résistance à l'abrasion, les propriétés électriques, etc. Pour développer des composites performants, les renforts recherchés doivent avoir des caractéristiques mécaniques élevées, une faible masse volumique, une bonne compatibilité avec les résines, une facilité de mise en œuvre, un faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique, etc.) et leurs formes dépendent de l'application. Cependant, les renforts les plus couramment utilisés se présentent sous forme de fibres et sont disponibles dans différentes formes commerciales.

Ils sont caractérisés par :

- la nature de la fibre : organiques, inorganique et
- la forme de renforcement.

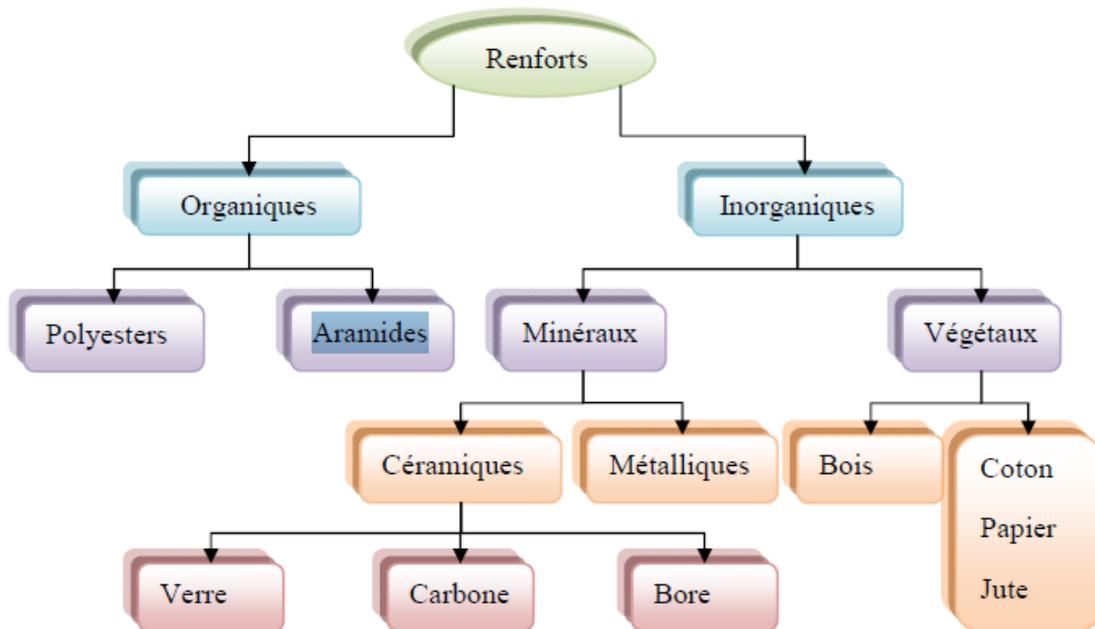


Figure 6 : : Classification schématique des principaux matériaux des renforts.

a. Les types de renforts

Les fibres de renfort les plus répandues comprennent :

- Fibres de verre ;
- Fibres de carbone ;
- Fibres d'aramide, connues sous le nom de "Kevlar" ;
- Fibres de bore ;
- Fibres métalliques (d'acier, de cuivre, d'aluminium) ;
- Fibres de silice (ou de quartz) ;
- Fibres de polyéthylène à haut module et
- Les fibres naturelles/végétales.

i. Les fibres de verre

Les avantages des fibres de verre sont notables : leur coût réduit en fait une option attrayante, elles sont utiles dans certaines applications militaires, résistent à la corrosion chimique ou galvanique, possèdent des propriétés électriques intéressantes, et sont disponibles dans une variété de produits. Cependant, leur coefficient de dilatation thermique et leurs propriétés mécaniques par rapport aux composites renforcés de fibres de carbone peuvent être considérés comme des inconvénients distincts (Prombut, 2007).



Figure 7 : Les fibres de verre.

Les composites en fibre de verre présentent un inconvénient en ce qui concerne leurs propriétés en traction par rapport aux composites renforcés de fibres d'aramide. Cependant, les avantages des composites renforcés de fibres de verre résident dans leur bonne tenue au cisaillement et à la compression, ainsi que dans leurs capacités d'absorption de l'humidité.

Les applications des produits en composite en fibre de verre sont nombreuses, notamment dans les dispositifs de filtration, l'isolation thermique et électrique, les réservoirs de pression, les produits structuraux pour les véhicules automobiles, ainsi que dans de nombreux usages militaires et aérospatiaux.

ii. Les fibres de bore

La fibre de bore élémentaire est produite par une réaction sur un fil de tungstène chauffé qui est étiré en continu à travers un réacteur contenant BCl_3 et H_3 . Le substrat du fil de tungstène réagit pour former du borure de tungstène dans le noyau. La structure cristalline du bore déposé est considérée comme amorphe en raison de sa petite taille. Le bore est disponible sous forme de fibres cylindriques dans deux diamètres nominaux, de 0,10 et 0,16 mm, avec des densités respectives de 2,57 et 2,49 g/cm^3 . Le module de traction et la résistance de la fibre de bore varient entre 40 GPa et 3600 MPa. Sa conductivité thermique et sa dilatation thermique sont faibles. Les fibres de bore sont plus coûteuses que les fibres de carbone.

Ces fibres de bore sont généralement trouvées sous forme de pré-imprégnés en filament dans la matrice époxyde, et sont utilisées dans des applications aérospatiales exigeant une haute résistance et/ou rigidité, ainsi que pour le renforcement sélectif dans les articles de sport. L'utilisation la plus remarquable de cette fibre est dans les sections stabilisatrices des avions militaires.

iii. Fibre de silice (ou de quartz)

Les fibres de silice sont fabriquées de manière similaire au verre, par fusion, et sont principalement utilisées en raison de leur excellente résistance chimique et thermique, notamment dans les tuyères des moteurs de fusée.

iv. Fibres de polyéthylène de haut module

Les fibres de polyéthylène à haut module offrent une résistance à la traction exceptionnelle mais ont une mauvaise capacité à être mouillées. Pour des structures peu sollicitées, il est encore possible d'utiliser des fibres synthétiques courantes en polyamide ou en polyester.

v. Les fibres végétales ou naturelles

Les fibres naturelles peuvent être obtenues à partir de matériaux fibreux d'origine animale ou végétale, parmi lesquels les plus couramment utilisées sont le coton, le lin, le sisal, le cactus etc. Les fibres naturelles ont des propriétés de type isotrope transverse et peuvent atteindre des niveaux de performance similaires à ceux des fibres de verre. Cependant, ces fibres présentent une compatibilité médiocre avec la matrice (Balay et al, 2004), (Billoët, 1993).



Figure 8 : Fibre naturelle de Cactus

b. Forme de renforcement

Les composites peuvent être classés en fonction des formes des renforts en quatre catégories distinctes (Reinhart et Clements, 1993 ; Gurdal et al., 1999) :

- i. Composites à renforts de particules ;
- ii. Composites à renforts de fibres ;
- iii. Composites stratifiés et
- iv. Composites à renforts de paillettes.

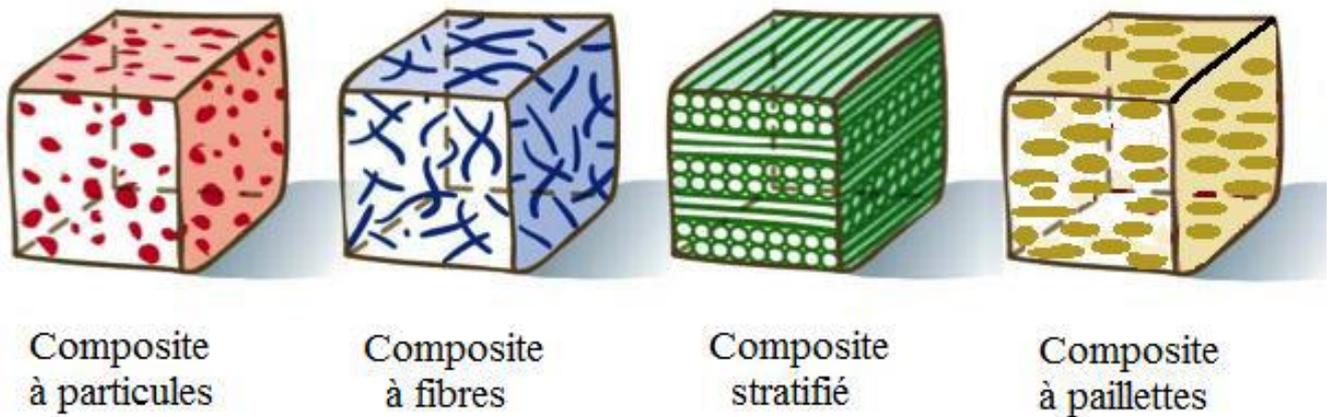


Figure 9 : Classification selon la forme de renforcement (Boufaïda, 2015).

i. Composites à renforts de particules

Les composites à renforts de particules sont des matériaux dans lesquels des particules d'un ou plusieurs matériaux sont dispersées dans une matrice. Le béton, un exemple classique, illustre ce concept : il est constitué de particules de sable et de gravier qui sont liées ensemble par la réaction chimique entre le ciment et l'eau, formant ainsi la matrice. Le béton, en tant que composite de particules, présente une complexité considérable, avec de nombreux paramètres influençant ses propriétés (Beeby, 1979), (Powers et Brownyard, 1948).

ii. Composites à renforts de fibres

Le rôle des fibres dans la structure est similaire à celui des armatures, à savoir reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres jouent un rôle crucial en restreignant la formation, la propagation et la fusion des microfissures au sein de la matrice. Les fibres agissent en renforçant la matrice d'acier en cousant à la fois les fissures existantes pour empêcher leur expansion et en limitant la formation de nouvelles fissures (Pierre, 1998), (Chan, 1997), (Beaudoin, 1990), (Naaman, 1989).

iii. Composite stratifié

Ces composites sont formés par superposition de couches de matériaux différents. Les stratifiés peuvent offrir une combinaison unique de propriétés, telles qu'une haute résistance mécanique et une légèreté, en fonction des matériaux utilisés et de l'orientation des couches.

iv. Composites à renforts de paillettes

Les paillettes sont caractérisées par leur petite taille par rapport aux autres dimensions. Leur dispersion, en tant que "particules minces", est généralement aléatoire. Cependant, il est possible d'aligner les paillettes de manière parallèle les unes aux autres pour obtenir des propriétés plus uniformes dans le plan.

1.3.3. Les charges et les additifs

Les charges sont des particules solides dispersées dans la matrice, pouvant être minérales, organiques ou métalliques. Elles sont utilisées de manière similaire à celles des plastiques traditionnels.

Par exemple, on peut rencontrer des micro-billes de verre creuses, du noir de carbone, des particules de silice, des poudres métalliques ou des billes thermoplastiques ajoutées aux matrices thermodurcissables.



Figure 11 : Micro-billes de verre creuses.



Figure 10 : Noir de carbone.

Les additifs sont encore plus variés. Une classe d'additifs couramment utilisée est celle des agents d'interface, qui favorisent l'adhésion des fibres à la matrice.

On trouve également des stabilisants pour retarder la dégradation due à l'oxygène, aux UV ou à l'ozone, des ignifugeants pour prévenir l'inflammation, des agents de démoulage, des colorants, etc.



Figure 12 : Colorants.

Cette diversité d'additifs permet de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite et d'adapter ses propriétés aux besoins du concepteur. Les quantités de produits ajoutés peuvent varier, allant de quelques dizaines de pour cent pour les charges à quelques pour cent pour les additifs.

1.3.4. L'interface fibre-matrice

Les composites, en tant que matériaux hétérogènes, présentent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort. Tant que le composite reste intact, les deux composants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue alors aucun rôle particulier. Cependant, lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer en raison d'une surcharge ou de la fatigue, l'interface devient cruciale.

En effet, les interfaces ont la capacité de dévier les fissures : lorsqu'une fissure se propage dans la matrice et atteint l'interface, elle a tendance à ne pas la traverser, préservant ainsi les renforts de tout dommage. Au lieu de cela, la fissure change de direction et suit l'interface. Ce phénomène, connu sous le nom de décohésion, se traduit par un décollement progressif entre les renforts et la matrice. Ainsi, au lieu d'une rupture brutale, on observe une décohésion progressive des constituants (Draiche, 2014).

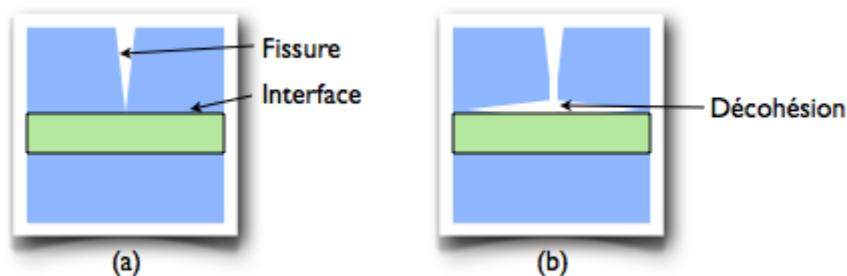


Figure 13 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites : lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b).

Ce mécanisme de décohésion, associé au faible taux de défauts, explique un paradoxe : les composites à base de fibres de verre longues, par exemple, sont beaucoup plus résistants que le verre massif, bien que leurs propriétés mécaniques proviennent principalement des fibres de verre. Ceci met en lumière un aspect fondamental des composites : grâce à leur structure et leur géométrie, ils présentent des propriétés distinctes de celles de leurs constituants individuels.

Par exemple, certains composites à fibres et à matrices céramiques peuvent avoir un comportement ductile, même si les céramiques sont généralement considérées comme fragiles. Cette capacité des composites à modifier leur comportement mécanique en fonction de leur structure est essentielle pour leur utilisation dans une gamme diversifiée d'applications.

1.4. La structure (architecture) de composites

La rigidité d'un composite est influencée par plusieurs facteurs, notamment le nombre de couches, leur arrangement, leur nature, leur orientation et leur séquence d'empilement. Les matériaux composites structuraux sont généralement classés en trois catégories principales.

1.4.1. Les monocouches

Ces composites consistent en une seule couche de matériau renforcé. Ils sont souvent utilisés dans des applications nécessitant une rigidité spécifique dans une direction donnée.

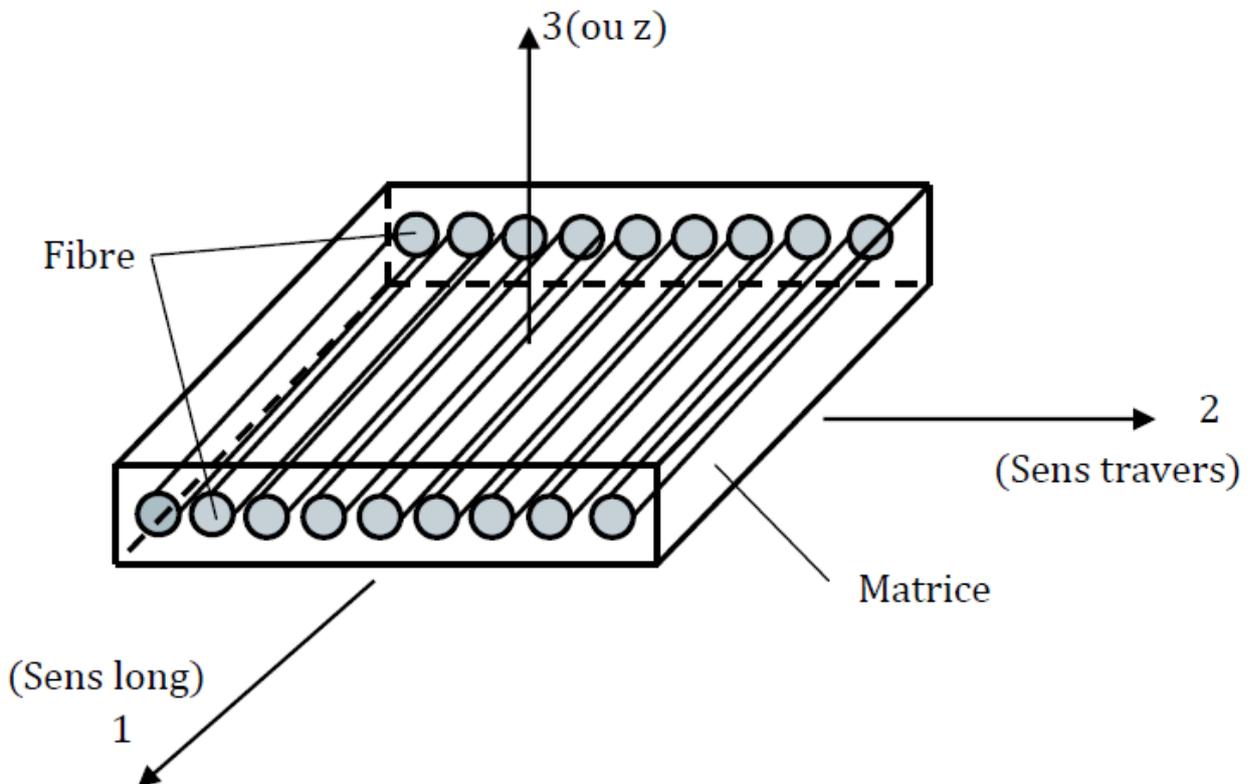


Figure 14 : Le monocouche

1.4.2. Les stratifiés

Ces composites sont constitués de plusieurs couches de matériaux, généralement disposées de manière alternée pour améliorer la résistance et la rigidité dans différentes directions. Cette configuration permet de répondre à des exigences mécaniques plus complexes.

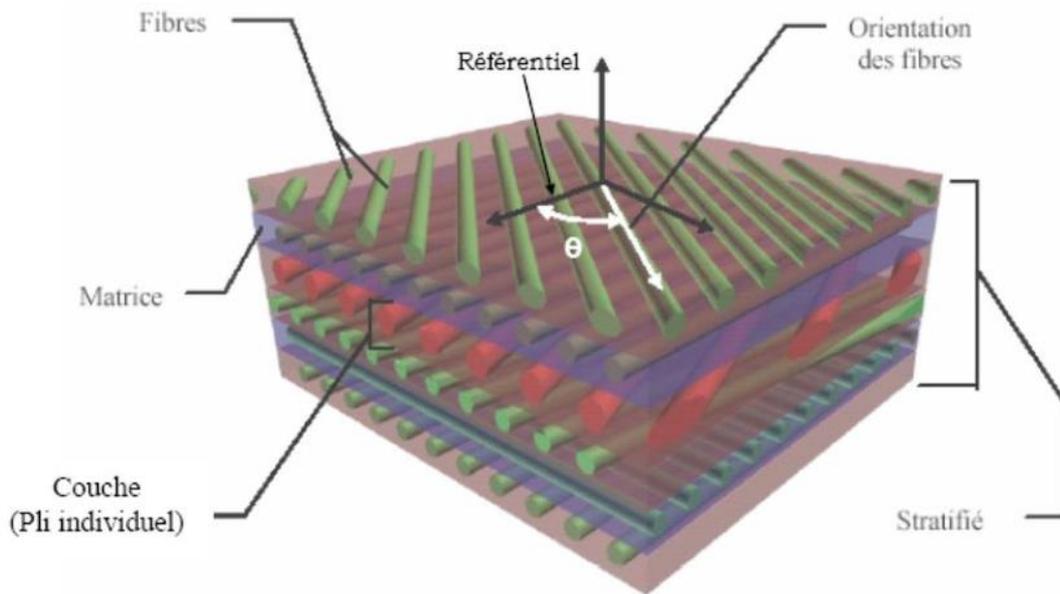


Figure 15 : La composition de stratifié

Chaque couche dans un stratifié composite est définie par son orientation, ce qui correspond à l'angle que font les fibres par rapport à une direction de référence. Habituellement, cette direction de référence est celle des fibres unidirectionnelles orientées à 0° .

La séquence d'empilement du stratifié décrit le nombre et l'orientation des couches successives en parcourant le stratifié d'une face à l'autre. Par conséquent, un stratifié est considéré comme unidirectionnel si toutes les couches ont le même angle, c'est-à-dire si toutes les fibres sont alignées dans une seule direction.

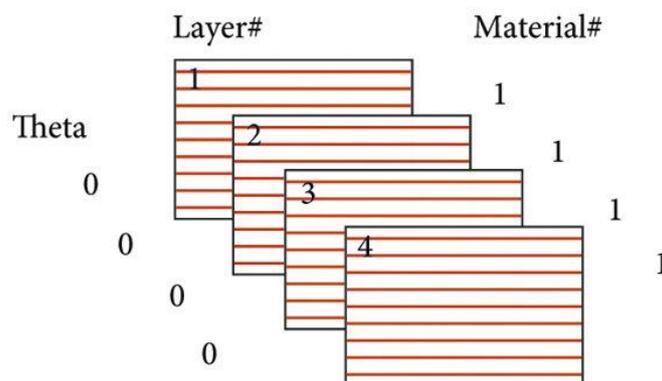


Figure 16 : Stratifié unidirectionnel

À l'inverse, un stratifié est dit multidirectionnel lorsque les couches successives sont orientées à des angles différents, comme dans le cas d'un stratifié multidirectionnel, par exemple $[0/ +45/ -45/ 90/ 90/ +45/ -45/ 0]$.

Le choix de la séquence d'empilement, en particulier des orientations, permet de conférer des propriétés mécaniques spécifiques au stratifié. Voici quelques types courants de stratifiés :

a. Équilibré :

Un stratifié qui a autant de couches orientées dans le sens $+\theta$ que de couches orientées dans le sens $-\theta$.

b. Symétrique :

un stratifié dans lequel les couches sont disposées de manière symétrique par rapport à un plan médian.

c. Antisymétrique :

Un stratifié dans lequel les couches sont disposées de manière antisymétrique par rapport à un plan médian

d. Orthogonal :

Un stratifié qui contient autant de couches orientées à 0° que de couches orientées à 90° .

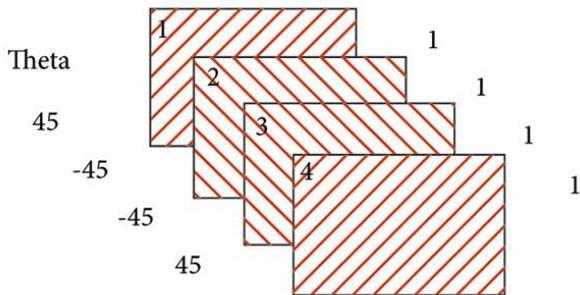


Figure 17 : Stratifiée symétrique

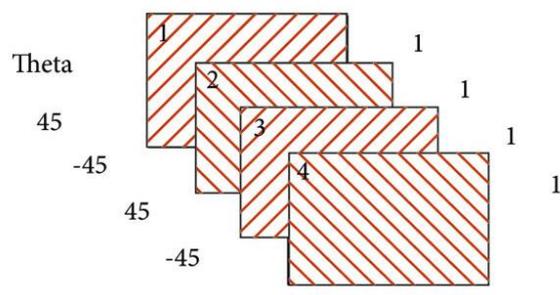


Figure 18 : Stratifiée antisymétrique

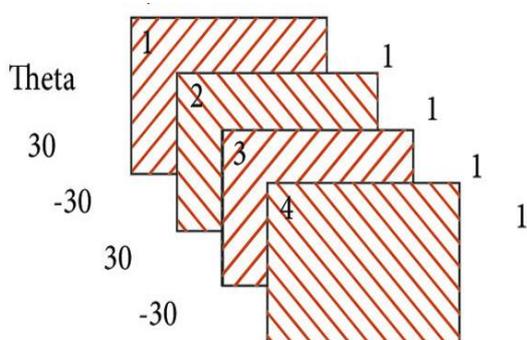


Figure 19 : Stratifie antisymétrique équilibré

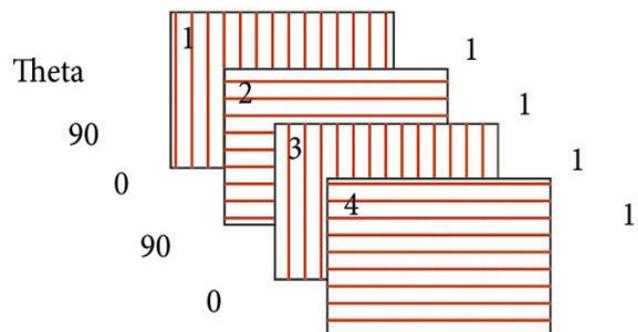


Figure 20 : Stratifie orthogonal

1.4.3. Les sandwichs

Ces composites sont constitués de deux couches externes, appelées peaux, qui sont séparées par un noyau léger et résistant appelé l'âme, qui peut être en mousse, en bois ou en nid d'abeille. Cette structure offre une combinaison unique de rigidité et de légèreté, les rendant idéaux pour de nombreuses applications, notamment dans l'industrie aéronautique et automobile. Les peaux et l'âme sont assemblées par collage à l'aide d'adhésifs, souvent des résines telles que les polyesters ou les époxydes. Ces adhésifs jouent un rôle essentiel dans le transfert des contraintes mécaniques entre les peaux et l'âme, tout en offrant une protection aux fibres contre les agressions extérieures de l'environnement.

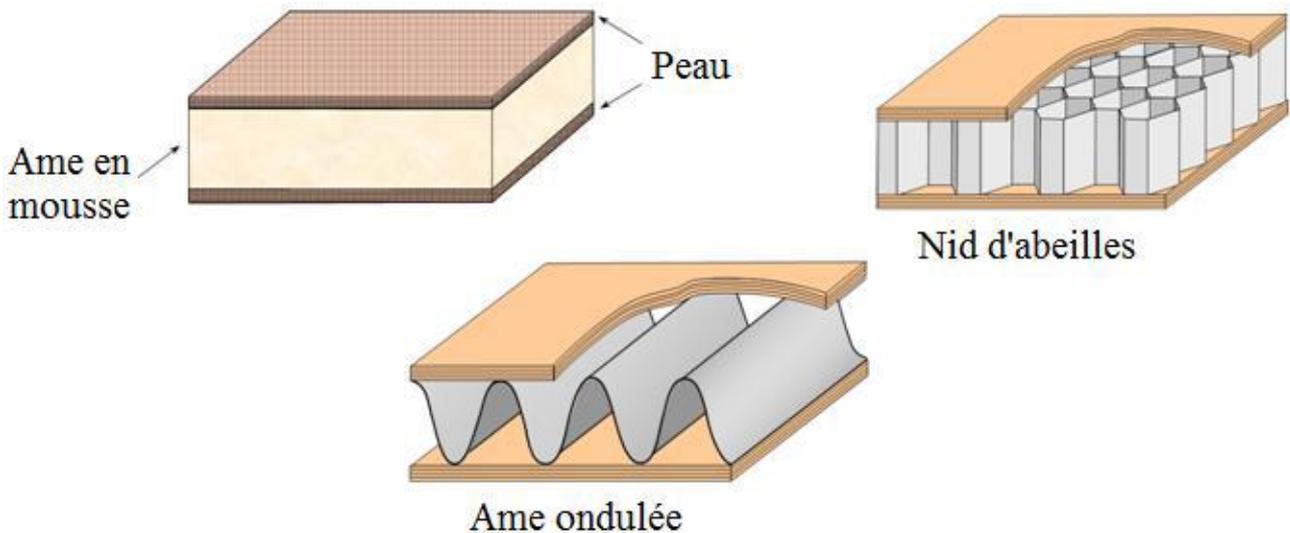


Figure 21 : la composition de sandwich (Berthelot,2013)

1.5. Domaines d'application des composites

Les matériaux composites remplacent de plus en plus les métaux traditionnels dans un large éventail d'applications industrielles. Leur utilisation s'étend à de nombreux domaines et devient omniprésente dans notre vie quotidienne. En plus de leur utilisation dans l'aéronautique et l'aérospatiale, ils sont également présents dans des secteurs tels que le génie civil, l'automobile, la construction navale, l'énergie éolienne, le domaine sportif, et bien d'autres encore.

1.5.1. Produits aéronautiques

Les matériaux composites gagnent en popularité dans le secteur de l'aviation. Dans l'aéronautique, deux types de composites sont couramment utilisés : les composites céramiques dans les moteurs, et les composites à base de carbone principalement dans la structure de l'avion, incluant les ailes, le fuselage, les freins, etc.

L'adoption de matériaux composites améliore la qualité des matériaux dans ce domaine. En raison de la complexité structurelle des avions, il est possible de combiner différents types de

composites pour obtenir les caractéristiques souhaitées. Cette capacité à assembler plusieurs matériaux permet de créer une gamme variée de matériaux adaptés à différentes applications.

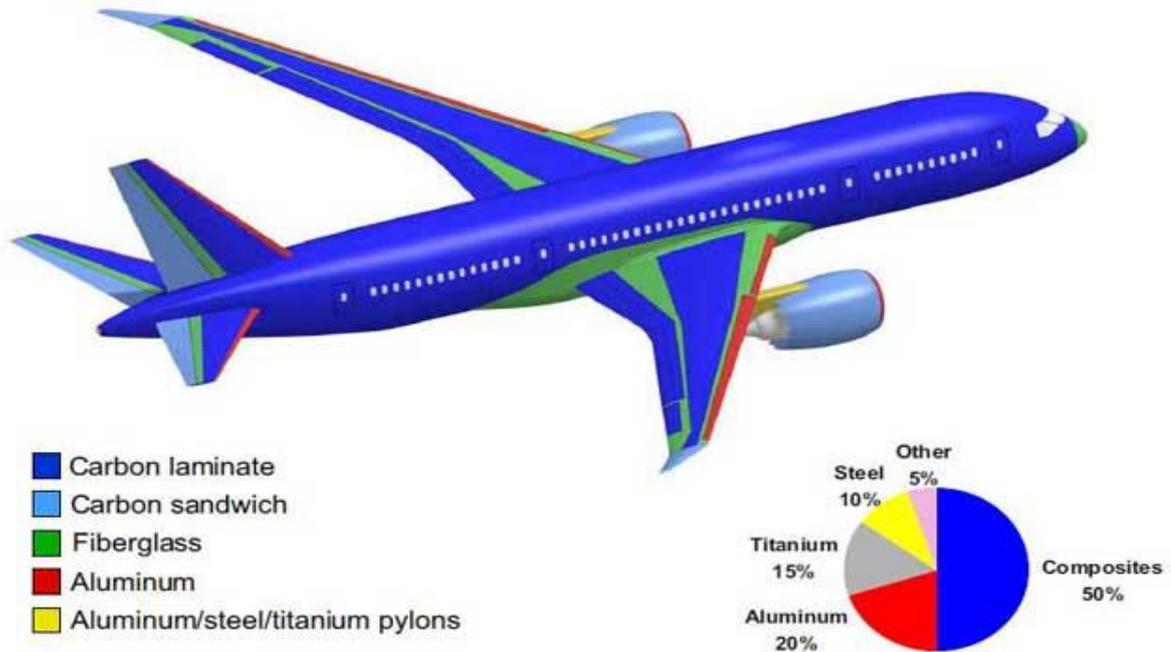


Figure 22 : Utilisation des matériaux composites dans le domaine d'aéronautique

1.5.2. Agriculture

Robuste et résistant aux conditions extérieures, le composite est largement utilisé dans la fabrication du matériel agricole, que ce soit pour les équipements mobiles tels que les tracteurs, les machines à balles rondes et les semoirs, ou pour les installations fixes comme les robots de traite, les cuves et les abreuvoirs. Sa capacité à être réparé en fait un atout majeur dans ce secteur d'activité.

1.5.3. Transport / Véhicules spéciaux

Le transport collectif, en tant qu'alternative viable à la voiture individuelle, connaît un essor remarquable. Les bus, les tramways, les trolleybus et même les camions de pompiers, les véhicules d'intervention ou les ambulances intègrent largement des matériaux composites à la fois pour leur aménagement intérieur et leur carrosserie. Cette tendance démontre l'adoption généralisée des composites dans divers secteurs du transport pour leurs avantages en termes de légèreté, de résistance et de flexibilité de conception.



Figure 23 :: utilisation des matériaux composites dans le domaine de transport

1.5.4. Nautisme

Résistant aux effets cumulés du temps et des conditions météorologiques, le composite est un matériau incontournable dans le domaine du nautisme. Utilisé pour les coques et les ponts des bateaux, il est omniprésent aussi bien dans la navigation de loisir, comme les péniches fluviales et les bateaux destinés aux loisirs, que dans la plaisance avec les voiliers et les yachts, ou encore dans la pêche avec les barques et les bateaux gonflables à fond rigide.



Figure 24 : Fabrication de coque de bateau a l'aide des matériaux composite

1.5.5. Energies renouvelables

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans le domaine des énergies renouvelables en raison de leurs propriétés uniques et de leurs nombreux avantages. Voici quelques applications spécifiques dans ce domaine :

a. Éoliennes :

Les pales des éoliennes sont souvent fabriquées à partir de matériaux composites, principalement des fibres de verre ou de carbone renforcées de résine époxy. Ces matériaux offrent un excellent rapport résistance/poids, ce qui permet de produire des pales plus légères et plus résistantes, augmentant ainsi l'efficacité et la durabilité des éoliennes.

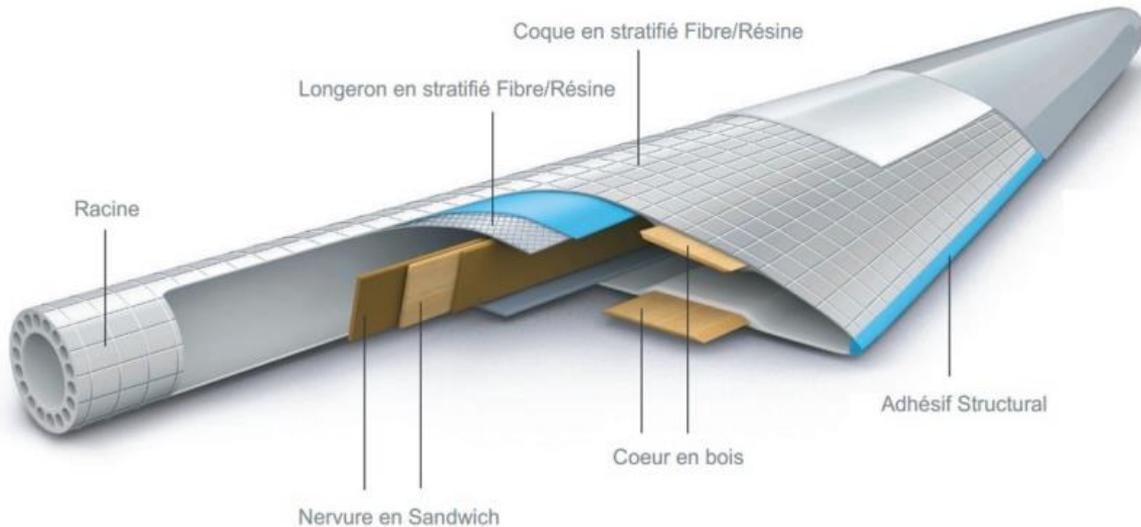


Figure 25 : Exemple de configuration structurelle d'une pale éolienne moderne (Grunewald, 2017)

b. Énergie solaire :

Les panneaux solaires utilisent des matériaux composites pour les structures de support et les encadrements. Ces matériaux sont résistants à la corrosion, légers et durables, ce qui les rend idéaux pour les installations solaires exposées aux intempéries.

1.5.6. Génie civil et la construction

Les matériaux composites sont largement utilisés dans le domaine du génie civil et de la construction en raison de leurs propriétés exceptionnelles, telles que leur haute résistance, leur légèreté et leur durabilité. Voici quelques applications courantes :

a. Renforcement des structures existantes :

i. Renforcement des ponts et des viaducs

Les composites renforcés de fibres (FRP) sont utilisés pour renforcer et réparer les ponts, augmentant leur capacité de charge et leur durée de vie sans ajouter un poids significatif.

- **Poutres en composite** : Utilisation de poutres en fibres de carbone ou de verre pour remplacer les poutres en acier ou en béton. Exemple : Le pont de la rivière Halgurd en

Irak utilise des poutres en composite de fibres de verre pour réduire le poids et augmenter la durabilité.

- **Tabliers de ponts** : Construction de tabliers en matériaux composites pour améliorer la résistance et la durabilité. Exemple : Le pont de Bond Street à Hamilton, au Canada, utilise un tablier en fibres de verre et de résine.
- ii. **Réhabilitation des bâtiments** : Les matériaux composites sont utilisés pour renforcer les éléments structurels des bâtiments existants, comme les colonnes, les poutres et les murs, afin d'améliorer leur résistance sismique et leur durabilité.



Figure 26 : Renforcement de l'intersection poteau poutre avec les fibres de carbone

b. Infrastructure de Transport

- **Rails de chemin de fer** : Utilisation de traverses en composite pour les rails, offrant une durabilité et une résistance accrues. Exemple : Le projet de chemin de fer à grande vitesse de la Californie utilise des traverses en composite de fibres de verre.
- **Pistes d'atterrissage et routes** : Renforcement des pistes d'atterrissage et des routes avec des géo composites pour améliorer la résistance et réduire l'entretien. Exemple : L'aéroport de Schiphol aux Pays-Bas utilise des géo composites pour renforcer les pistes.



Figure 27 : Traverses en composite de fibre de verre de chemin de fer

c. Construction marine et côtière :

- **Structures offshore :** Les composites sont utilisés dans la construction de structures offshore, comme les plateformes pétrolières en raison de leur résistance à la corrosion et à l'eau salée.
- **Jetées et quais :** Les matériaux composites sont utilisés pour construire des jetées et des quais, offrant une durabilité et une résistance à la dégradation par l'eau et les intempéries.

d. Éléments architecturaux :

- **Façades de bâtiments :** Les panneaux composites sont utilisés pour les façades de bâtiments, offrant des options esthétiques variées et une résistance accrue aux intempéries.

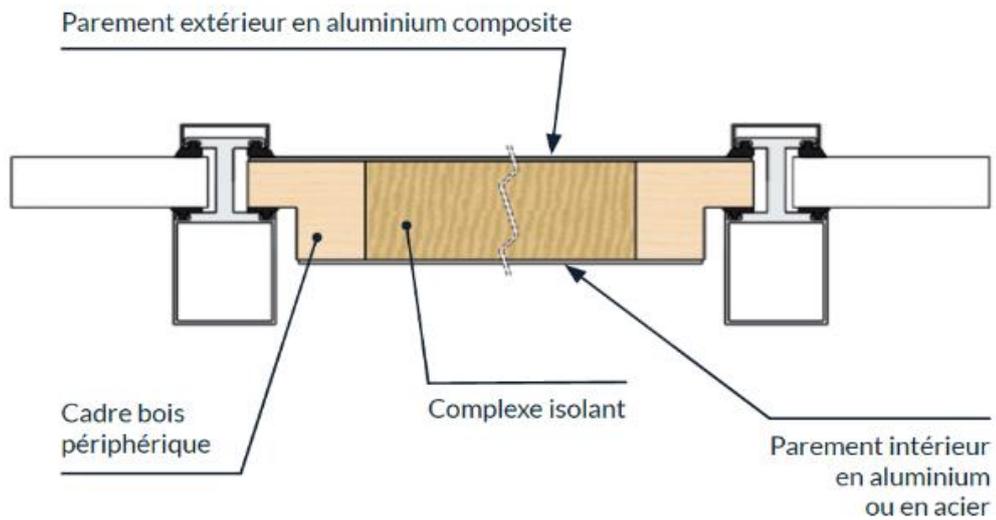


Figure 28 : Les panneaux composites pour les façades de bâtiments

- **Toitures et dômes** : Les composites peuvent être utilisés pour construire des toitures légères et des dômes architecturaux, offrant des possibilités de conception innovantes.

1.6. Avantages et inconvénients des matériaux composites

Les composites présentent de nombreux avantages grâce à leurs excellentes caractéristiques spécifiques :

- La capacité à dimensionner les structures de formes complexes selon les besoins spécifiques, offrant ainsi des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement et réduisant les coûts d'assemblage ;
- La possibilité de fabriquer des matériaux avec des propriétés particulières telles qu'un coefficient de Poisson négatif ou une dilatation quasi-nulle ;

- Des rigidités et des résistances spécifiques importantes permettant la conception de structures haute performance tout en réalisant des gains de masse par rapport aux solutions métalliques ;
- Une légèreté accrue ;
- Une insensibilité aux produits chimiques tels que les huiles et les liquides hydrauliques.
- Une bonne conductivité thermique et électrique ;
- Une tenue mécanique particulière, incluant la résistance à la fatigue et aux contraintes.
- Une rigidité adaptable selon le type de renfort ;
- Une bonne résistance à l'humidité et à la corrosion et
- Une bonne tenue au feu.

Cependant, plusieurs inconvénients sont associés aux matériaux composites :

- Des coûts de fabrication supérieurs à ceux des matériaux traditionnels, incluant le temps, les études et la mise en œuvre, ainsi qu'une sensibilité accrue aux singularités géométriques telles que les trous ou les entailles, qui peuvent constituer des points faibles au sein de la structure.
- Une sensibilité accrue aux impacts.
- Une complexité accrue dans la mise en œuvre des réparations.
- Une difficulté de détection des problèmes, nécessitant une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage.

1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous plongeons dans l'univers des matériaux composites, scrutant les caractéristiques des renforts, les éléments constitutifs des matrices, ainsi que les multiples types de composites et leurs applications répandues. Nous constatons que ces matériaux sont devenus incontournables, utilisés non seulement dans le domaine de l'aérospatiale, mais également dans de nombreux secteurs commerciaux en ingénierie mécanique, tels que la fabrication de moteurs, de machines, la gestion thermique, l'industrie automobile et le génie civil.

L'avenir des composites repose sur des processus de conception intégrés, prenant en considération des paramètres variés tels que la forme, la masse, la résistance, la rigidité, la durabilité et les coûts. Les outils de conception devront permettre aux clients de visualiser l'impact de différentes conceptions sur ces paramètres.

*Etude de l'influence de la porosité sur la réponse dynamique
et la stabilité des plaques composites stratifiées*

Chapitre 2

THEORIES DES PLAQUES

CHAPITRE 2 : THEORIES DES PLAQUES

2.1. Introduction

Les structures composites multicouches sont des assemblages composés de couches homogènes et anisotropes reliées entre elles. Ces structures présentent généralement une épaisseur relativement faible par rapport à leurs autres dimensions, ce qui en fait des choix populaires dans de nombreuses applications industrielles et d'ingénierie.

2.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles (Modèles de structures multicouches)

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models) ;
- Approche par couche LW (Layer-wise) et
- Approche développement asymptotique.

2.2.1. Approche monocouche équivalente

Parmi les différentes classes de théories, l'approche de monocouche équivalente est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter un stratifié hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent (homogénéisation), ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D bien plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu à travers l'épaisseur de la structure multicouche.

Dans l'analyse des plaques en flexion, on peut utiliser trois théories fondamentales :

- Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT) ;
- Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et
- Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

a. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle de "plaque mince" lorsque la déformation due au cisaillement est négligeable par rapport à la déformation due à la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, l'impact du cisaillement sur la déformation est directement lié au rapport d'élanement l/h .

La théorie classique des plaques minces (CPT) repose sur les hypothèses de Love-Kirchhoff (Kirchhoff, 1850), (Love, 1934) qui stipulent qu'une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation. Cela signifie que les effets du cisaillement transverse sont négligés. Le champ de déplacement associé à cette théorie est décrit par l'équation

(2.61). La cinématique illustrée par la figure 31 montre l'état déformé d'une structure monocouche selon le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, ce qui implique que les contraintes et déformations dues au cisaillement transverse sont nulles.

Cependant, cette approche tend à sous-estimer les déformations et à surestimer les charges critiques de flambement ainsi que les fréquences propres des structures modélisées. Ces erreurs sont particulièrement prononcées pour les stratifiés fortement anisotropes. Néanmoins, ce modèle est bien adapté pour décrire le comportement des plaques à haut élancement ou à faible épaisseur par rapport à la longueur d'onde de flexion, ce qui justifie son nom de "modèle des plaques minces". Ce modèle de plaques peut être référencé dans les travaux de Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959), ainsi que de Reddy (2003).

Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où (u, v, w) représente le vecteur des déplacements, d'un point matériel de coordonnées nominales (x, y, z) , de même (u_0, v_0, w_0) ce sont les déplacements du feuillet moyen. Le plan principal de la plaque est le plan x - y et l'épaisseur h de cette dernière est orientée selon l'axe z (avec $z \in [-h/2, h/2]$).

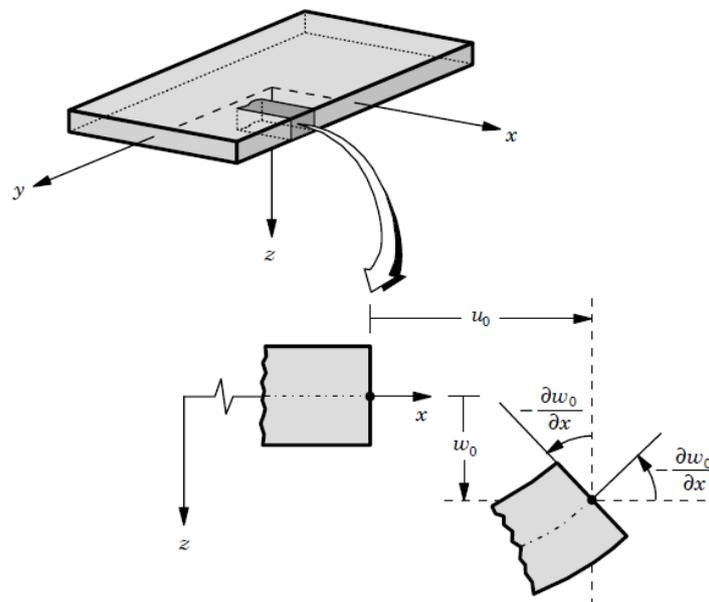


Figure 29 : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy, 1997) - CPT.

b. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Afin de dépasser les limitations de la CPT, les théories du premier ordre ont été proposées. Ces théories sont l'extension des théories conventionnelles développées par Reissner (1945) et Mindlin (1951). L'hypothèse principale de la FSDT est qu'une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque reste droite mais pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure (Figure.32).

La FSDT est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Avec : ϕ_x, ϕ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y, respectivement (figure 32), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz} - w_{0,x} \quad \text{et} \quad \phi_y = \gamma_{yz} - w_{0,y} \tag{2.3}$$

Où γ_{xz} et γ_{yz} sont les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

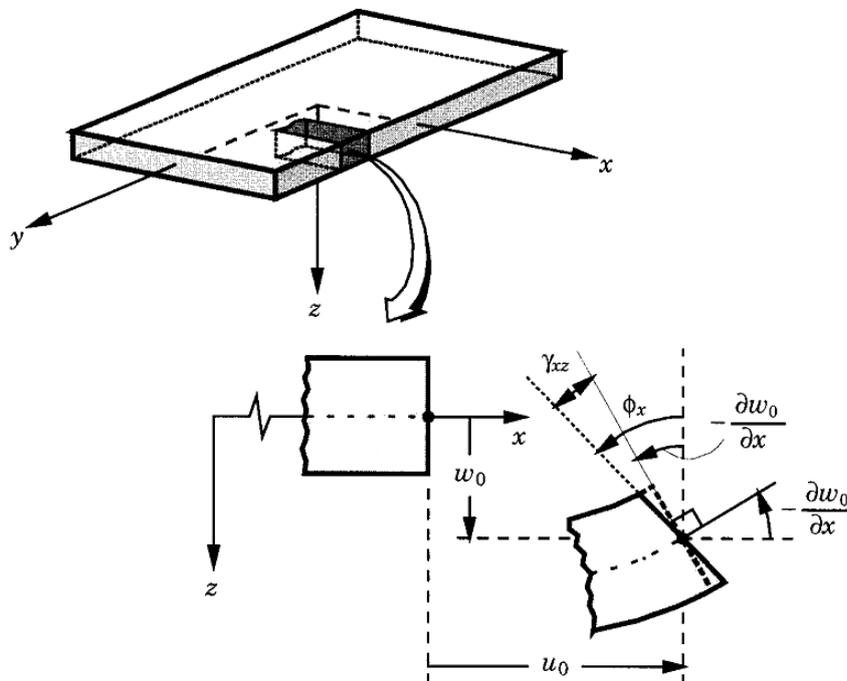


Figure 30 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Dans cette théorie, les contraintes de cisaillement transversales sont supposées constantes à travers l'épaisseur; elle a donc besoin d'un coefficient de correction de cisaillement pour satisfaire la condition de contraintes nulles sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque.

c. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacements dans l'épaisseur (voir Figure 33). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans plusieurs références scientifiques (Nelson et Lorch, 1974),(Krishna et Vellaichamy, 1987). (Christensen et Wu E, 1977).

Le champ de déplacement est généralement comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Où u, v et w représentent les déplacements dans les directions (x,y,z) . Les composantes de déplacements u_0, v_0, w_0 sont ceux d'un point du plan moyen $(x,y,z = 0)$. φ_x et φ_y sont les rotations dues au cisaillement autour de l'axe x et y .

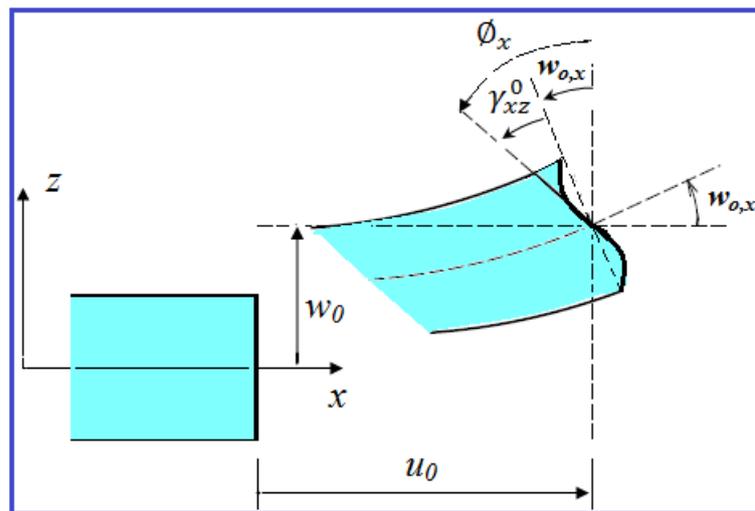


Figure 31 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature. A savoir que $f(z) = 0$ pour le

cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre $f(z) = z$ au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse.

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur :

- L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan, 1969) donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (2.5)$$

- L'approche de Reissner (Reissner, 1945) exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.6)$$

- Selon l'approche de Reddy (Reddy, 1984), La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.7)$$

L'approche de Touratier (Touratier, 1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) \quad (2.8)$$

2.2.2. Approche par couche

Les approches par couche sont des méthodes qui tiennent compte des différences entre les différentes couches d'un matériau stratifié, contrairement aux théories qui traitent le matériau comme une couche unique homogénéisée. Les deux approches principales dans ce domaine sont l'approche en zigzag et l'approche des couches discrètes.

a. Les modèles zig-zag

Cette méthode est conçue pour modéliser les déformations des plaques stratifiées en tenant compte des discontinuités de cisaillement entre les différentes couches. Elle s'appelle "zigzag" car elle permet des discontinuités dans les gradients de déplacement, ce qui crée un effet de zigzag entre les couches. Cela la rend particulièrement utile pour les matériaux composites stratifiés où les propriétés mécaniques diffèrent considérablement entre les couches. Elle offre une précision supérieure par rapport aux approches qui supposent des déformations continues, car elle prend en compte les discontinuités internes du matériau.

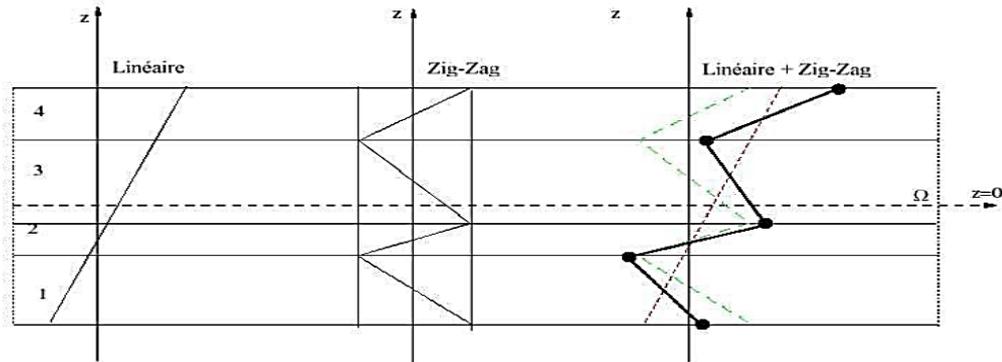


Figure 32 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre (Nguyen, 2004).

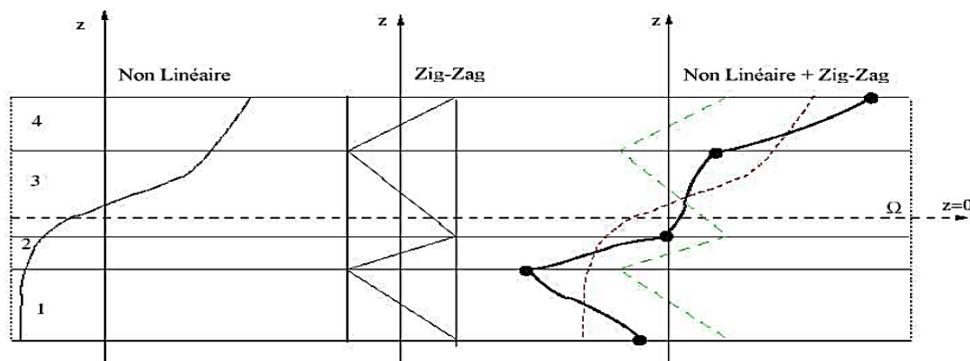


Figure 33 : Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. (Nguyen, 2004)

b. Les modèles en couches discrètes

Cette approche considère chaque couche comme une entité distincte avec ses propres propriétés mécaniques. Contrairement à l'approche en zigzag, qui permet des changements de pente à l'intérieur de la plaque, l'approche des couches discrètes traite chaque couche séparément, souvent en utilisant des éléments finis pour simuler leur comportement. Cela permet de modéliser de manière précise les interactions entre les différentes couches et de mieux comprendre le comportement global du matériau stratifié. Elle est particulièrement utile pour des analyses de structures composites complexes, comme les panneaux sandwich ou les plaques multicouches avec des propriétés anisotropes.

Ces deux approches offrent une précision accrue pour les simulations des matériaux composites stratifiés, en comparaison avec les théories simplifiées qui homogénéisent le matériau. Elles sont particulièrement utiles pour des applications où la compréhension détaillée des interactions entre les différentes couches est cruciale.

2.2.3. Approche de développement asymptotique

L'approche de développement asymptotique est utilisée pour des structures où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est relativement faible, ce qui suggère une faible épaisseur par rapport à l'échelle globale. L'idée est de développer des solutions asymptotiques basées sur ce

rapport. Cette approche intervient lors de l'intégration des équations d'élasticité, y compris les équations constitutives et les équations du mouvement.

La structure des déformations est considérée comme composée de deux parties : une partie intérieure où les variations sont faibles et une partie aux frontières où les variations peuvent être significatives. Pour résoudre ce type de problème, il est courant de construire deux types d'intégrales : les intégrales intérieures, qui correspondent à des solutions avec de faibles variations au sein du domaine, et les intégrales aux bords, qui traitent des variations plus importantes près des frontières (souvent appelées couches limites). Ces intégrales aux bords fournissent des solutions pour les zones où le comportement de la structure change de manière significative (Fredrichs 1961, Johnson 1971, Allix 1989, Lecuyer 1991) . Des travaux comme ceux de (Ladeveze 1988, Allix 1989) ont exploré cette approche en détail.

Dans ces travaux, la méthode commence par utiliser les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, à proximité des bords, des problèmes tridimensionnels sont posés pour déterminer les champs correcteurs (contraintes et déplacements). Ces problèmes tridimensionnels sont ensuite décomposés en problèmes bidimensionnels correspondant aux couches limites perpendiculaires au bord. Une approche mixte, combinant contraintes et déplacements, est résolue par des séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et aux interfaces est également pris en compte.

2.3. Comportement élastique d'un pli orthotrope

2.3.1. Loi de comportement (loi de Hooke généralisé)

Lorsque l'on traite des contraintes, des déformations et des coefficients de rigidité dans le cadre de la loi de Hooke, une notation indicielle peut être utilisée pour simplifier les équations et les rendre plus compréhensibles. Dans le cas des matériaux élastiques anisotropes, comme les composites, la loi de Hooke relie les contraintes (σ_{ij}) et les déformations (ε_{ij}) par le biais d'un tenseur de rigidité (C_{ij}). Cette relation est généralement écrite sous forme d'une équation tensorielle, mais peut être simplifiée à l'aide d'une notation matricielle.

En raison de la symétrie du tenseur de contraintes (σ_{ij}) et du tenseur de déformations (ε_{ij}), le nombre de composantes indépendantes peut être réduit à six. Cette réduction permet de représenter le tenseur de rigidité à l'aide d'une notation compacte.

Dans le tenseur des contraintes, les composantes symétriques sont :

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

- Les contraintes normales : $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$.
- Les contraintes de cisaillement : $\sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}, \sigma_{23}=\sigma_{32}$.

Dans le tenseur des déformations, les composantes symétriques sont :

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- Les déformations normales : $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$.
- Les déformations de cisaillement : $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}, \varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}, \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}$.

Cette symétrie permet de reformuler le tenseur d'élasticité (C_{ij}) en utilisant une notation matricielle où chaque indice correspond à une combinaison unique de composantes.

La *loi de Hooke* est réécrite en notation vectorielle en utilisant les formes contractées des tenseurs de contraintes et de déformations selon l'équation :

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \varepsilon \} \quad (2.11)$$

Où

σ : tenseur de contrainte ;

C : tenseur d'élasticité et

ε : tenseur de déformation.

2.3.2. Différents Types des matériaux

Dans cette section, nous allons présenter les différents types des matériaux concernant leurs comportements mécaniques.

a. Matériaux anisotropes

Les matériaux anisotropes sont des matériaux dont les propriétés mécaniques (comme le module d'élasticité, le module de cisaillement, le coefficient de Poisson, etc.) varient selon la direction dans laquelle on les mesure mais ils ne présentent pas de plans de symétrie (Nye, J.F, 1985).

La loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

b. Matériaux monocliniques

Les matériaux monocliniques constituent une classe de matériaux anisotropes. Ils ont des propriétés mécaniques qui diffèrent en fonction de la direction dans laquelle elles sont mesurées. Ils possèdent un seul plan de symétrie, ce qui signifie que leurs propriétés sont symétriques par rapport à un certain plan, mais pas dans les autres directions.

La loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

c. Matériaux orthotropes

Les matériaux orthotropes sont des matériaux dont les propriétés mécaniques varient selon trois directions orthogonales. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnelles (Kollar et Springer, 2003).

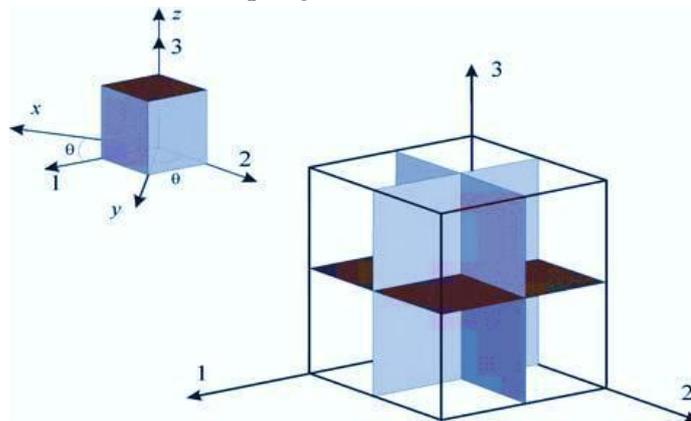


Figure 34 : Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie (Kollar et Springer, 2003).

La loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$[c] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

d. Matériaux isotropes

L'hypothèse d'isotropie impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. Il n'existe alors pas de direction privilégiée. En d'autres termes, le tenseur de raideur doit être invariant pour tout changement de base.

Donc, les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions :

$$E_1 = E_2 = E_3; \nu_2 = \nu_1 = \nu_3; G_1 = G_2 = G_3$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}$$

2.3.3. Comportement d'un pli dans les axes du matériau

Le comportement élastique d'un matériau orthotrope, rapporté à ses axes principaux peut être décrit soit par sa matrice de rigidité C :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

Soit par la matrice de souplesse est définie par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Un état de contraintes planes (à deux dimensions) est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Pour un état de contraintes planes : $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

La déformation normale « ε_z » peut être exprimé en fonction des composantes des contraintes planes en utilisant la fait que $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = \bar{S}_{13}\sigma_x + \bar{S}_{23}\sigma_y + \bar{S}_{36}\tau_{xy} \quad (2.19)$$

Dans le plan matériel principal, les termes des coefficients de rigidité C_{i6} ($i \neq 6$) sont nuls, par conséquent : $Q_{16} = Q_{26} = 0$. Ainsi, dans le plan principal d'un matériau orthotrope, les équations constitutives en contraintes planes auront la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

En inversant cette dernière équation, nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Ou $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$ et $Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$ $Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$ (2.22)

$$Q_{12} = \frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}}$$

Les éléments de cette matrice en contrainte plane sont :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \quad (2.23)$$

$$S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Etant donné que la matrice de souplesse est symétrique : $S_{12} = S_{21}$ donc nous aurons :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.24)$$

Les constantes qui peuvent être mesurées dans le laboratoire d'une façon exacte sont E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} . Une mesure exacte du coefficient de poisson ν_{12} est souvent très difficile car, il est très petit pour plusieurs matériaux composites.

Les expressions explicites des termes Q_{ij} en fonction des constantes de l'ingénieur :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3.4. Constantes de rigidités réduites d'un pli en dehors de ses axes principaux

L'équation constitutive de contrainte plane dans un repère arbitraire $x - y$ est alors écrite comme suit :

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_x \quad (2.26)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Soit

$$\{\sigma\}_x = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon\}_x \quad (2.28)$$

Ou $[\bar{Q}]^k$ matrice de rigidité réduite transformée du k correspondant a la cote z .

Où les termes \bar{Q}_{ij} sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(n^4 + m^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(n^4 + m^4) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})n^3m \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})nm^3 \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(n^4 + m^4)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Avec :

- ❖ m : $\cos \theta$
- ❖ n : $\sin \theta$

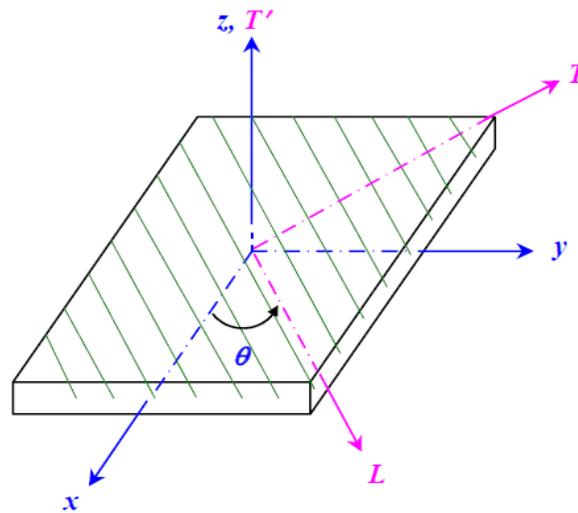


Figure 35 : Stratifié hors axes.

2.3.5. Comportement des composites stratifiés

L'analyse du comportement mécanique élastique d'une structure composée de matériaux composites s'effectue généralement en utilisant la théorie des plaques stratifiées. Cette approche repose sur l'évaluation des champs de déplacements et des champs de déformations en tout point de la structure.

a. Champ des déplacements

Le champ de déplacement se réfère à la distribution des déplacements à travers une structure, ce qui est essentiel pour comprendre son comportement sous différentes conditions de charge et pour analyser comment les structures se déforment sous l'effet des charges et des contraintes. Dans ces modèles, les déplacements u, v, et w en un point donné de la plaque, avec des coordonnées x, y, z référencées au plan moyen de la plaque, sont exprimés de la manière suivante pour la théorie de déformation en cisaillement de première ordre :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Sachant que u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point $x, y, z = 0$ du plan moyen

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= u_0(x, y, 0) \\
 v_0(x, y) &= v_0(x, y, 0) \\
 w_0(x, y) &= w_0(x, y, 0)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

b. Champ des déformations

À partir du champ de déplacements, on peut dériver le champ de déformations, qui peut être formulé en coordonnées cartésiennes selon les relations suivantes, issues de la théorie de l'élasticité linéaire :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \tag{2.32}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \tag{2.33}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \tag{2.34}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{2.35}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \tag{2.36}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \tag{2.37}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \tag{2.38}$$

Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles, soit :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xz} &= 0 \\
 \gamma_{yz} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Cette hypothèse implique :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{2.40}$$

$$\varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{2.41}$$

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{2.42}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.43)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (2.44)$$

La matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Le champ des déformations est la superposition :

-des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

S'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0, v_0) dans le plan (O, x, y) des points de ce plan ;

-des déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

S'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M . Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(M) = zk(x, y) \quad (2.48)$$

En posant :

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

la matrice $k(x, y)$ est appelée matrice des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Ou plus simplement :

$$\{\varepsilon\}_x = \{\varepsilon^0\}_x + z\{k\}_x \quad (2.50)$$

C'est l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

c. Expression des résultantes et moments

i. Résultantes en membrane

Les forces par unité de longueur $\{N_x, N_y, N_{xy}\}$ sont définies comme suit :

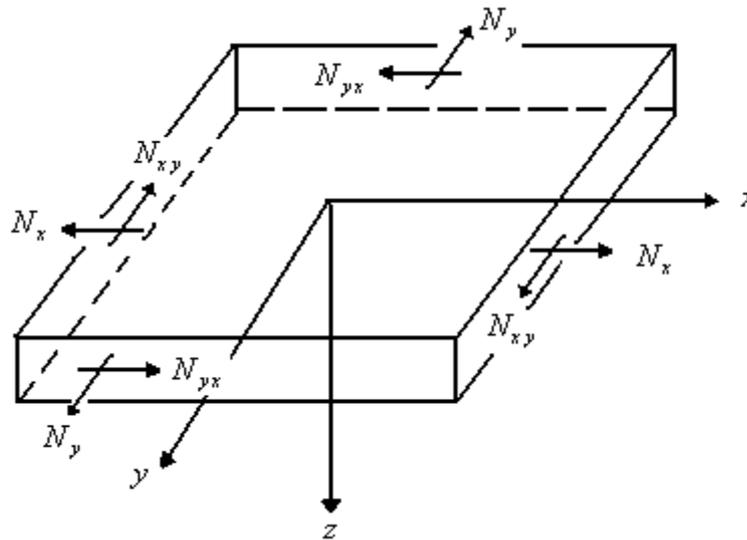


Figure 36 : Forces par unités de longueur.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-H}^{+H} \sigma_x dz \\ N_y &= \int_{-H}^{+H} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-H}^{+H} \sigma_{xy} dz \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les trois équations peuvent être écrites sous la forme condensée :

$$\{N\} = \int_{-H}^{+H} \{\sigma_x\} dz \quad (2.52)$$

Nous aurons :

$$\{N\} = \int_{-H}^{+H} [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} dz + \int_{-H}^{+H} [\bar{Q}]^k \{K\} z dz \quad (2.53)$$

Ou bien sous une autre forme :

$$\{N\} = \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}] dz \right) \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q}]^k z dz \right) \{K\} \quad (2.54)$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{K\} \quad (2.55)$$

Où

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (Z_k - Z_{k-1}) \quad (2.56)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (2.57)$$

La matrice \bar{Q}^k est constante à travers chaque couche mais peut être différente d'une couche à une autre.

L'équation $\{N\} = [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{K\}$ relie les forces de membrane par unité de longueur aux déformations du plan médium $\{\varepsilon^0\}$, et les courbures du stratifié $\{K\}$ par les matrices [A] et [B]. La matrice [A] représente « la matrice de membrane » et la matrice [B] représente « la matrice de couplage membrane - flexion ».

ii. Moments par unité de longueur

On définit les moments par unité de longueur $\{M_x, M_y, M_z\}$ comme l'intégrale des forces « $\sigma_i z dz$ », ainsi :

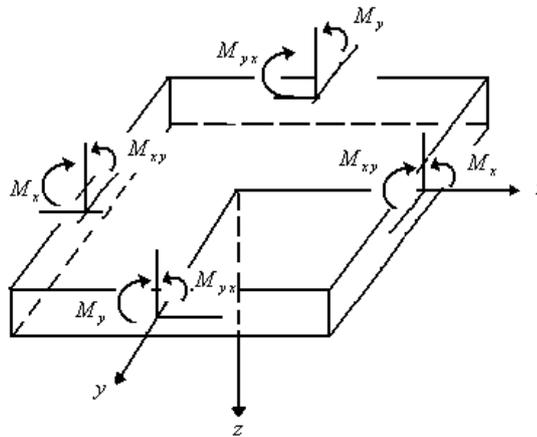


Figure 37 : Moments par unités de longueur.

M_x : moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y.

$$M_x = \int_{-H}^{+H} \sigma_x z dz \quad (2.58)$$

M_y : moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x.

$$M_y = \int_{-H}^{+H} \sigma_y z dz \quad (2.59)$$

M_{xy} : moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy}

$$M_{xy} = \int_{-H}^{+H} \tau_{xy} z dz \quad (2.60)$$

Ou bien sous une forme condensée :

$$M = \int_{-H}^{+H} \{\sigma\} z dz \quad (2.61)$$

Substituant l'équation (2.20) dans l'équation (2.53), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{K\} \quad (2.62)$$

Où la matrice de flexion est définie comme suit :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.63)$$

iii. Équation constitutive d'un stratifié

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions des résultantes et moments suivant une seule écriture matricielle sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

Les termes de la matrice introduite sont donnés par les expressions suivantes :

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^K (z_k - z_{k-1}) \quad (2.66)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^K (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.67)$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^K (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.68)$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage membrane –flexion –torsion. Ce couplage existe même si les matériaux des couches sont isotropes. Il résulte de la structure en couches de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul (B=0), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique. La symétrie implique une symétrie des propriétés des couches, de leurs côtes et de leurs orientations.

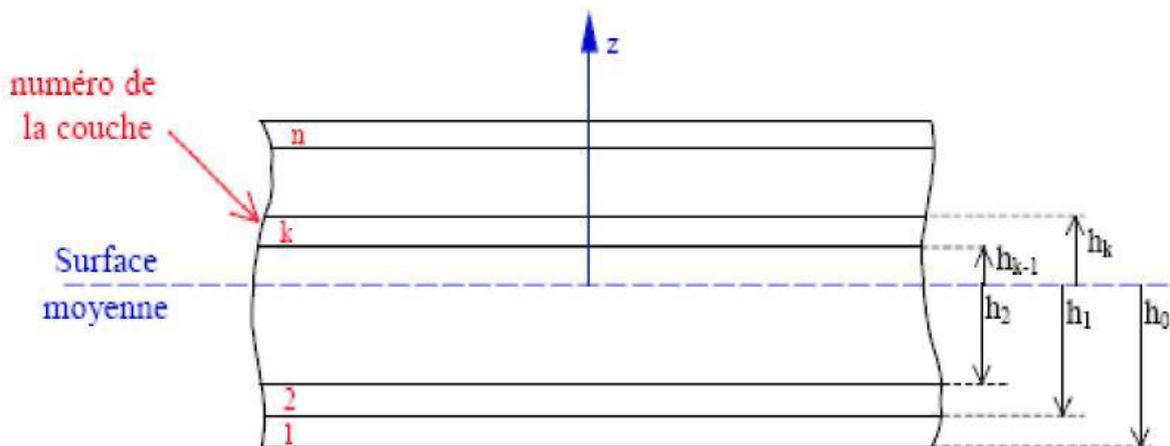


Figure 38 : Elément d'un stratifié [Loli 2000].

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté différentes théories des plaques, à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche, et l'approche de développement asymptotique. Nous avons également conclu que l'approche monocouche équivalente convient mieux aux matériaux composites lorsque les propriétés mécaniques ne subissent pas de changements brusques.

Par conséquent, nous avons adopté le modèle monocouche équivalente pour analyser des plaques épaisses, en particulier dans le contexte de théories d'ordre supérieur où il est crucial de tenir compte du cisaillement transversal pour obtenir des résultats plus précis. Ces théories permettent une meilleure compréhension des comportements structuraux, en particulier dans le cas des composites, et fournissent des outils efficaces pour des études approfondies.



*Etude de l'influence de la porosité sur la réponse
dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées*



Chapitre 3

FORMULATION MATHÉMATIQUE

CHAPITRE 3 : FORMULATION MATHÉMATIQUE

3.1. Introduction

Les plaques rectangulaires représentent des éléments structurels fondamentaux largement utilisés dans une multitude d'applications industrielles et architecturales. Leur utilisation croissante met en évidence l'impératif d'étudier leur comportement vibratoire et leur stabilité, une démarche essentielle pour concevoir des structures plus performantes et résilientes.

L'objectif de ce chapitre est d'identifier les caractéristiques dynamiques et de stabilité, telles que les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée en tenant compte de la présence des porosités.

3.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire en matériau composite stratifié, prenant en compte la présence de la porosité. Cette plaque a des dimensions de longueur, largeur et épaisseur égales à a , b , et h respectivement. Le système de coordonnées cartésiennes global est choisi de telle sorte que l'origine se trouve dans le coin et sur le plan médian de la plaque $z = 0$. Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme suit :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a ; \\ 0 \leq y \leq b \text{ et} \\ \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans cette configuration :

- x et y définissent les dimensions de la plaque dans le plan horizontal.
- z définit l'épaisseur de la plaque, avec l'origine située sur son plan médian. Les valeurs de z varient de $-\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$, où $\frac{h}{2}$ représente la moitié de l'épaisseur totale de la plaque.

Cette configuration permet de modéliser efficacement la géométrie d'une plaque rectangulaire stratifiée, en prenant en compte ses dimensions et sa structure en trois dimensions. La prise en compte de la porosité dans la plaque est également cruciale pour une analyse précise de son comportement.

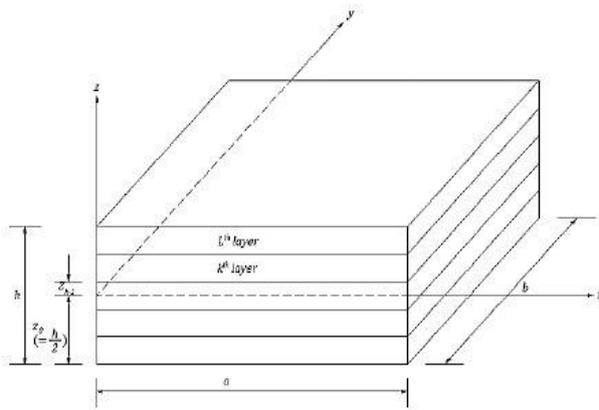


Figure 39 : Plaque composite stratifié

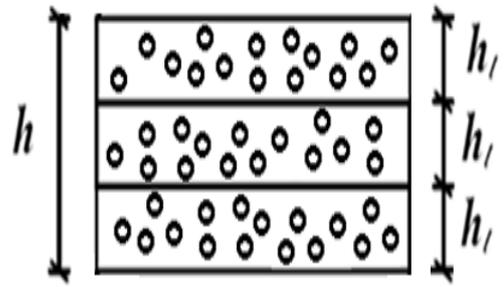


Figure 40: Modèle de distribution de la porosité

Avec

h_l : l'épaisseur d'une seule couche et

h : l'épaisseur de la plaque

3.3. Plaque composite avec porosité

La présence de la porosité dans une plaque composite stratifiée peut avoir un impact significatif sur ses propriétés mécaniques et son comportement global. La porosité se réfère aux espaces vides ou aux pores présents dans le matériau composite, ce qui peut entraîner une réduction de la densité apparente et une diminution des propriétés mécaniques telles que la résistance et la rigidité.

Lorsque nous considérons une plaque composite avec porosité, il est important de prendre en compte plusieurs aspects :

- **Distribution de la porosité** : La porosité peut être distribuée de manière homogène ou non dans la plaque. La distribution inhomogène peut résulter en des variations locales de propriétés mécaniques et peut influencer la réponse dynamique de la structure.
- **Effets sur les propriétés mécaniques** : La présence de porosité réduit généralement la résistance et la rigidité du matériau composite. Cela peut entraîner une diminution de la capacité de charge et une augmentation de la sensibilité aux dommages tels que la fissuration et le délaminage.
- **Effets sur la réponse dynamique** : La porosité peut également affecter la réponse dynamique de la plaque composite. Elle peut introduire des modes de vibration supplémentaires, modifier les fréquences naturelles et influencer la distribution des déformations dans la structure.

- **Influence sur la stabilité :** La présence de porosité peut également avoir des implications sur la stabilité de la plaque composite, notamment en ce qui concerne sa capacité à résister à des charges dynamiques ou à des conditions environnementales sévères.

L'analyse de l'influence de la porosité sur la réponse dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées est essentielle pour comprendre pleinement le comportement de la structure dans des conditions réelles. Donc il est nécessaire de développer des modélisations analytiques, numériques ou effectuer des expériences pour évaluer les effets spécifiques de la porosité et pour développer des stratégies d'optimisation visant à minimiser ses effets négatifs sur les performances de la plaque composite.

3.3.1. Distribution de la porosité(formule)

Un modèle de distribution uniforme de la porosité dans une plaque composite a été adopté dans ce travail (Figure 37).

La propriété effective du matériau D, c'est-à-dire (module de Young E, coefficient de Poisson ν , module de cisaillement etc. dépendent de la porosité (p) comme suit :

$$D(p)=D(1-p) \quad (3.2)$$

Où p ($p \ll 1$) représente la fraction volumique de la porosité. Quand $p=0$ le matériau devient parfait.

Les propriétés matérielles de la plaque stratifiée orthotrope en fonction de la porosité (p) comme suit :

$$\begin{aligned} E_1(p) &= E_{01}(1-p) \\ E_2(p) &= E_{02}(1-p) \\ G_{12}(p) &= G_{13}(p) = G_{012}(1-p) \\ G_{23}(p) &= G_{023}(1-p) \\ \nu_{12}(p) &= \nu_{012}(1-p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.4. Théorie de déformation de cisaillement :

3.4.1. Champ de déplacement

En se basant sur la théorie des plaques épaisses, le champ de déplacement proposé dans cette étude contient cinq variables et il est défini comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Où la fonction de cisaillement est une fonction polynomiale exprimée par :

$$f := z * \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right) * z^2 + \left(\frac{2}{5} \right) * z^4 \right) \text{ (Daikh et Zenkour, 2020)} \quad (3.5)$$

3.4.2. Equations constitutives

a. Champs des déformations

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^\theta \\ k_y^\theta \\ k_{xy}^\theta \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^\theta \\ k_y^\theta \\ k_{xy}^\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (3.8)$$

b. Champs des contraintes

L'état de contrainte est donné par la Loi de Hooke comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(p)} & Q_{12}^{(p)} & 0 \\ Q_{12}^{(d)} & Q_{22}^{(p)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^{(p)} & 0 \\ 0 & Q_{55}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx},)$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités Q_{ij} peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme :

$$\begin{aligned}
 Q_{11}(p) &= \frac{E_1(p)}{1 - \nu_{12}(p)\nu_{21}(p)} & ; Q_{22}(p) &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}(p)\nu_{21}(p)} \\
 Q_{12}(p) &= \frac{\nu_{12}(p)E_2(p)}{1 - \nu_{12}(p)\nu_{21}(p)} = \frac{\nu_{21}(p)E_1(p)}{1 - \nu_{12}(p)\nu_{21}(p)} & (3.10)
 \end{aligned}$$

$$Q_{66}(p) = G_{12}(p) ; Q_{44}(p) = G_{23}(p) ; Q_{55}(p) = G_{13}(p)$$

Étant donné que le matériau stratifié se compose de plusieurs couches orthotropes dont les axes sont orientés de manière arbitraire par rapport aux coordonnées du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées du repère local au repère global du stratifié (x, y, z). Dans ce repère global, les relations constitutives pour n'importe quelle couche k d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées (x, y) correspondent à un état de contraintes planes. Elles peuvent être exprimées à l'aide des coefficients de rigidité réduite \bar{Q}_{ij} de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(p) & \bar{Q}_{12}(p) & 0 \\ \bar{Q}_{12}(p) & \bar{Q}_{22}(p) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}(p) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (3.11.a)$$

De même, les contraintes de cisaillement transverse s'écrivent dans la couche k par :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44}(p) & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}(p) \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_k \quad (3.11.b)$$

Où $\bar{Q}_{ij}(p)$ est les propriétés du matériau réduit transformé qui dépendent de la porosité (p) sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11}(p) &= Q_{11}(p) \cos^4 \theta + 2(Q_{12}(p) + 2Q_{66}(p)) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}(p) \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12}(p) &= (Q_{11}(p) + Q_{22}(p) - 4Q_{66}(p)) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(p)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{22}(p) &= Q_{11}(p) \sin^4 \theta + 2(Q_{12}(p) + 2Q_{66}(p)) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}(p) \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{26}(p) &= (Q_{11}(p) - Q_{12}(p) - 2Q_{66}(p)) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12}(p) - Q_{22}(p) + 2Q_{66}(p)) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (3.12) \\
 \bar{Q}_{66}(p) &= (Q_{11}(p) + Q_{22}(p) - 2Q_{12}(p) - 2Q_{66}(p)) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(p)(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{44}(p) &= Q_{44}(p) \cos^2 \theta + Q_{55}(p) \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{45}(p) &= (Q_{55}(p) - Q_{44}(p)) \cos \theta \sin \theta \\
 \bar{Q}_{55}(p) &= Q_{55}(p) \cos^2 \theta - Q_{44}(p) \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

où θ est l'angle d'orientation de la fibre.

3.4.2. Equations gouvernantes

Utilisant le principe d'énergie d'Hamilton qui dérive l'équation du mouvement de la plaque composite stratifiée:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W) dt = 0 \quad (3.13)$$

Où U est l'énergie de déformation et K est l'énergie cinétique de la plaque composite et W est le travail des forces externes. En utilisant le principe d'énergie totale minimale nous aurons une équation générale du mouvement et des conditions aux limites.

La variation de l'énergie de déformation δU est exprimée par :

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA dz \quad (3.14)$$

La variation de l'énergie cinétique δK est donnée par :

$$\delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dA dz \quad (3.15)$$

La variation du travail des forces externes δW est donnée par :

$$\delta W = \int_A \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w dA \quad (3.16)$$

Où \bar{N}_x et \bar{N}_y sont les charges de compression dans le plan sur les côtés de la plaque.

En tenant compte des variations des équations précédentes et en intégrant par partie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} - \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dv \right] - \int_A \left[\bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta w dA dt = 0 \quad (3.17)$$

En utilisant des variations des équations précédentes cette équation prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_2}^{t_1} \left[\int_A \left\{ -\delta u_0 \frac{\partial N_x}{\partial x} - \delta v_0 \frac{\partial N_y}{\partial y} - \delta u_0 \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \delta v_0 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \delta w_0 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \delta w_0 \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\delta w_0 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \delta \theta_x \frac{\partial P_x}{\partial x} - \delta \theta_y \frac{\partial P_y}{\partial y} - \delta \theta_x \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - \delta \theta_y \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \delta \theta_x R_x + \delta \theta_y R_y \right\} dA - \int_A \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \delta w_0 + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \delta w_0 \right) dA \right. \\
 & \left. - \int_A \left\{ \delta u_0 \left(-I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_4 \ddot{\theta}_x \right) + \delta v_0 \left(-I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_4 \ddot{\theta}_y \right) + \delta w_0 \left(-I_1 \ddot{w}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - I_5 \frac{\ddot{\theta}_x}{\partial x} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - I_2 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + I_3 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} - I_5 \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) + \delta \theta_x \left(-I_4 \ddot{u}_0 + I_5 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_6 \ddot{\theta}_x \right) + \delta \theta_y \left(-I_4 \ddot{v}_0 + I_5 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_6 \ddot{\theta}_y \right) dA \right\} dt \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Les résultantes des contraintes par unité de longueur N , M , P et R des couches totales de la Plaque sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x & M_y & M_{xy} \\ P_x & P_y & P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \tag{3.19}$$

$$(R_x, R_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz$$

En utilisant l'équation (3.11) dans l'équation (3.19), la résultante des contraintes d'une plaque laminée peut être liée au nombre total des couches par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & C_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ C_{ij} & E_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \\ k_\theta \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad \{R\} = [F_{ij}] \{\theta\} \quad (i, j = 4, 5) \tag{3.20}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
 N &= \{N_x \quad N_y \quad N_{xy}\}, M = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}, P = \{P_x \quad P_y \quad P_{xy}\}, R = \{R_x \quad R_y\} \\
 \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0\}, k = \{k_x \quad k_y \quad k_{xy}\}, k_\theta = \{k_x^\theta \quad k_y^\theta \quad k_{xy}^\theta\}, \theta = \{\theta_x \quad \theta_y\}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix}, G_{ij} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{16} \\ G_{12} & G_{22} & G_{26} \\ G_{16} & G_{26} & G_{66} \end{bmatrix}, F_{ij} = \{F_{44} \quad F_{55}\} \tag{3.22}$$

Où $(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij})$ représentent les coefficients de rigidité de la plaque, sont définis comme

$$(A_{ij} \quad B_{ij} \quad C_{ij} \quad D_{ij} \quad E_{ij} \quad G_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \left(1 \quad Z \quad f(z) \quad z^2 \quad zf(z) \quad [f(z)]^2 \right) dz, \quad i,j=1,2,6 \quad (3.23.a)$$

$$(F_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} [g(z)]^2 \bar{Q}_{ij} dz, \quad i,j=4,5 \quad (3.23.b)$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1, z, z^2, f(z), Zf(z), [f(z)]^2 \right) dz \quad (3.23.c)$$

En rassemblant les coefficients des $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x$ et $\delta \theta_y$ dans l'équation (3.18), les équations du mouvement résultant sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_4 \ddot{\theta}_x \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + I_4 \ddot{\theta}_y \\ \frac{\partial M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= I_1 \ddot{w}_0 + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Rx &= I_4 \ddot{u}_0 - I_5 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_6 \ddot{\theta}_x \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - Ry &= I_4 \ddot{v}_0 - I_5 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + I_6 \ddot{\theta}_y \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4.3. Solution Navier et problème de valeur propre pour une plaque simplement supportée

Les conditions aux limites le long des bords de la plaque simplement supportée peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} N_x = v = w = M_x = P_x = \theta_x &= 0 \text{ à } x = 0, a \\ N_y = u = w = M_y = P_y = \theta_y &= 0 \text{ à } y = 0, b \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour la solution analytique des équations (3.24), la méthode Navier est utilisée dans les conditions aux limites spécifiées. Les fonctions de déplacement qui satisfont aux équations des conditions aux limites (3.25) sont sélectionnées comme la série de Fourier suivante :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0_{mn}} \cos \alpha \sin \beta e^{i\omega t} \\
 v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0_{mn}} \sin \alpha \cos \beta e^{i\omega t} \\
 w_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0_{mn}} \sin \alpha \sin \beta e^{i\omega t} \\
 \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{x0_{mn}} \cos \alpha \sin \beta e^{i\omega t} \\
 \theta_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{y0_{mn}} \sin \alpha \cos \beta e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi x}{a}$$

$$\beta = \frac{n\pi y}{b}$$

m et n représente les nombres des modes (Eigen modes)

Où $u_{0_{mn}}, v_{0_{mn}}, w_{0_{mn}}, \theta_{x0_{mn}}$ et $\theta_{y0_{mn}}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associé au (m, n) ième mode propre.

Supposons que la plaque est soumise à un chargement de compression dans le plan sous la forme

$$\bar{N}_x = -N_0, \quad \bar{N}_y = -\gamma N_0 \tag{3.27}$$

γ est le paramètre non dimensionnel de chargement ($\gamma = 0$ dans le cas d'un chargement uni-axial et $\gamma = 1$ dans le cas d'un chargement bi-axial)

Certains composants de rigidité des plaques sont :

$$A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, D_{16} = D_{26} = 0, E_{16} = E_{26} = 0 \tag{3.28}$$

Pour les plaques composites à plis croisés laminées symétriquement, et :

$$\begin{aligned}
 A_{16} = A_{26} = F_{45} = 0, D_{16} = D_{26} = 0, E_{16} = E_{26} = 0 \\
 B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0, C_{12} = C_{16} = C_{26} = C_{66} = 0 \\
 A_{11} = A_{22}, B_{11} = -B_{22}, C_{11} = -C_{22}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pour plaques composites stratifiées antisymétriques à plis croisés.

En remplaçant les équations (3.23) et (3.26) – (3.29) dans les équations de mouvement (3.24), nous obtenons les équations aux valeurs propres ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n, pour le problème de vibration libre :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\} \tag{3.30}$$

et pour problème de flambement :

$$([K]-[N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (3.31)$$

Où ;

[K] est la matrice de rigidité :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{23} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

[M] est la matrice d'inertie :

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -\alpha I_2 & I_4 & 0 \\ 0 & I_1 & -\beta I_2 & 0 & I_4 \\ -\alpha I_2 & -\beta I_2 & -I_3(\alpha^2 + \beta^2) & -\alpha I_5 & -\beta I_5 \\ I_4 & 0 & -\alpha I_5 & I_6 & 0 \\ 0 & I_4 & -\beta I_5 & 0 & I_6 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

[N] est la matrice de flambement :

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_0(\alpha^2 + \beta^2\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et} \quad (3.34)$$

{Δ} est le vecteur de déformation :

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Avec :

$$k_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$$

$$k_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66})$$

$$k_{13} = -B_{11}\alpha^3$$

$$k_{14} = C_{11}\alpha^2 + C_{66}\beta^2$$

$$\begin{aligned}
 k_{15} &= (C_{12} + C_{66})\alpha\beta \\
 k_{21} &= k_{12} \\
 k_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\
 k_{23} &= -B_{22}\beta^3 \\
 k_{24} &= (C_{66} + C_{12})\alpha\beta \\
 k_{25} &= C_{22}\beta^2 + C_{66}\alpha^2 \\
 k_{31} &= k_{13} \\
 k_{32} &= k_{23} \\
 k_{33} &= D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 \\
 k_{34} &= -E_{11}\alpha^3 - 2E_{66}\alpha\beta^2 - E_{12}\alpha\beta^2 \\
 k_{35} &= (-E_{12} - 2E_{66})\alpha^2\beta - E_{22}\beta^3 \\
 k_{41} &= k_{14} \\
 k_{42} &= k_{24} \\
 k_{43} &= k_{34} \\
 k_{44} &= G_{11}\alpha^2 + G_{66}\beta^2 + F_{55} \\
 k_{45} &= (G_{66} + G_{12})\alpha\beta \\
 k_{51} &= k_{15} \\
 k_{52} &= k_{25} \\
 k_{53} &= k_{35} \\
 k_{54} &= k_{45} \\
 k_{55} &= G_{66}\alpha^2 + G_{22}\beta^2 + F_{44}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation du modèle analytique des plaques composites stratifiées en tenant compte de la présence des porosités pour étudier le comportement dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées simplement appuyées. Le champ de déplacement contient cinq variables, et la fonction de gauchissement proposée est une fonction polynomiale. En utilisant le principe de Hamilton, nous avons dérivé les équations du mouvement pour la plaque rectangulaire en matériaux composites stratifiés. Les solutions ont été obtenues en appliquant la solution de Navier, permettant ainsi de déterminer les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement en résolvant le problème en valeurs propres.

L'analyse comparative des résultats obtenus avec la théorie proposée par rapport aux solutions existantes dans la littérature ainsi qu'une étude paramétrique est présentée dans le chapitre suivant, offrant ainsi une perspective critique sur l'efficacité et la précision de notre approche dans la modélisation du comportement des plaques composites stratifiées.



*Etude de l'influence de la porosité sur la réponse
dynamique et la stabilité des plaques composites stratifiées*



Chapitre 4

RESULTATS,
DISCUSSION ET
CONCLUSION

CHAPITRE 4 : RESULTATS ET CONCLUSION

4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse des vibrations libres et du flambement d'une plaque composée de matériaux composites stratifiés, en intégrant les effets de la porosité. Un modèle de porosité uniforme est utilisé dans les composites stratifiés, avec des propriétés matérielles orthotropes. Les équations gouvernantes ont été obtenues en utilisant le principe de Hamilton, et les solutions trouvées en appliquant la procédure de Navier. Le logiciel MAPLE 12 a été utilisé pour obtenir les résultats, et la procédure «valeur propre» a permis de résoudre les équations de vibration.

Les résultats numériques sont présentés et les effets des coefficients de porosité, des angles d'orientation des fibres et de la séquence des laminas sur les fréquences de vibration et les charges critiques du flambement des plaques carrées simplement appuyées sont discutés. Ce chapitre comprend également une comparaison des résultats obtenus avec cette nouvelle théorie par rapport aux solutions existantes dans la littérature.

➤ *Caractéristiques des matériaux utilisée*

On suppose que l'épaisseur et les propriétés matérielles de toutes les couches sont les mêmes. Dans l'analyse, les propriétés élastiques des laminas sont supposées être :

E représente le module de Young et G le module de cisaillement.

Avec :

$$\frac{E_1}{E_2} = 40$$

$$\frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6 \quad \frac{G_{23}}{E_2} = 0.5 \quad \nu_{12} = 0.25 \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (4.1)$$

Cette plaque a des dimensions de

- Longueur « a » ;
- Largeur « b » et
- Épaisseur « h ».

b=a, qui implique une plaque carrée.

m et n représente les nombres des modes (Eigen modes)

➤ **Les formules adimensionnelles**

Les relations suivantes sont utilisées pour la présentation de la fréquence fondamentale adimensionnelle et de la charge de flambement adimensionnelle.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad ; \quad \bar{\lambda} = \bar{N}_0 \frac{b^2}{E_2 h^3} \quad (4.2)$$

4.2. Analyse de flambement

Les facteurs de charge de flambement sont calculés à l'aide de l'équation de stabilité (3.30) en tant que problème de valeurs propres. Les facteurs de charge de flambement de différentes plaques stratifiées avec des plis croisés symétriques et antisymétriques sont présentés ici pour évaluer la précision de la théorie présente. L'objectif est de vérifier l'exactitude et la convergence du travail présent grâce aux résultats numériques obtenus. Ces résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus par d'autres chercheurs. On constate que les résultats des différentes théories sont presque identiques et montrent une excellente concordance avec la théorie actuelle.

Table 1 : Comparaison des résultats de flambement à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec les recherches précédentes.

Flambement a/h=10					
E1/E2	CPT (Phan et Reddy, 1985)	HSDT (Phan et Reddy, 1985)	3D Elasticité (Noor, 1975)	Akavci (2007)	Théorie Présente
3	5.7538	5.1143	5.2944	5.393277	5.39324
10	11.492	9.774	9.7621	9.941176	9.94085
20	19.712	15.298	15.0191	15.30154	15.30036
30	27.936	19.957	19.304	19.68068	19.67847
40	36.16	23.34	22.8807	23.34956	23.34633

Table 2 : Comparaison des résultats de flambement à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédentes.

Flambement a/h=10						
E1/E	Noor (1975)	HSDT (Reddy et Khdeir, 1989)	FSDT (Reddy et Khdeir, 1989)	Setoodeh (Satoodeh et Karami, 2004)	Akavci (2007)	Théorie Présente
20	7.8196	8.1151	8.0423	8.0455	8.12231 7	8.12063
30	9.3746	9.8695	9.7347	9.6995	9.88260 6	9.87957
40	10.817	11.563	11.353	11.2382	11.5828 2	11.57815

4.2.1. Influence du rapport géométrique a/h

Afin de mieux comprendre l'influence des paramètres de géométrie de la plaque composite stratifiée considérées sur leur stabilité, on a représenté sur les graphes (les Figures 38 et 39) l'évolution de la valeur critique de flambement en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h), du stratifié croisé symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) ; et antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$).

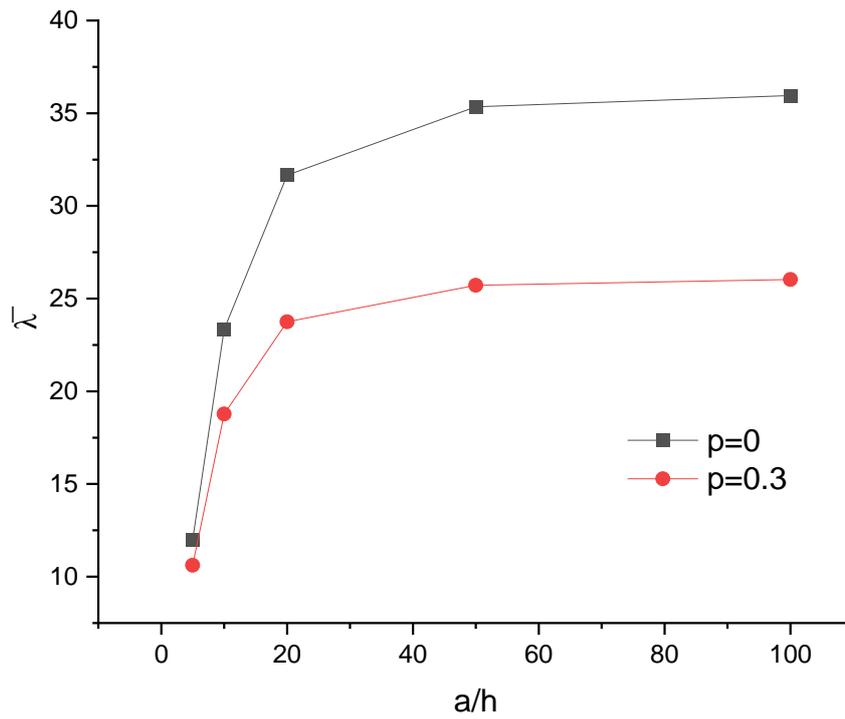


Figure 41 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport a/h pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.

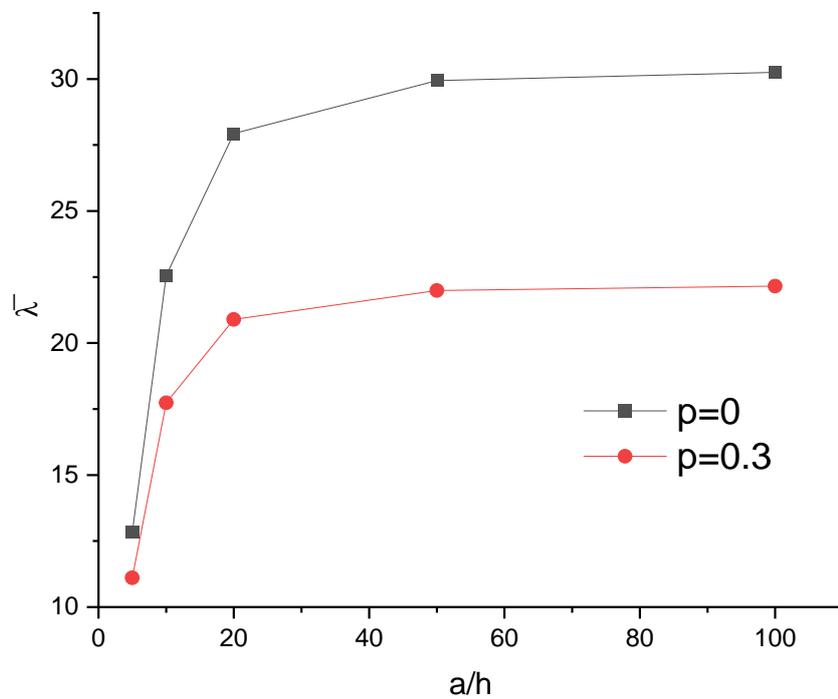


Figure 42 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport a/h pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.

On observe une augmentation de la valeur de la charge critique de flambement adimensionnelle avec l'accroissement du rapport longueur sur épaisseur (a/h) pour la plaque symétrique (Figure 38) ainsi que pour la plaque antisymétrique (Figure 39). Il est aussi observé que les valeurs de la charge critique de flambement de la plaque sans porosité dépassent celles de la plaque qui contient de porosité que ce soit pour les plaques à couches symétriques ou antisymétriques. Cependant, dès que ce rapport atteint $a/h = 50$, la charge critique de flambement demeure presque constante pour la courbe ($p=0$) et pour la courbe ($p=0.3$). On peut alors conclure que la plaque mince est plus résistante au flambement dans les deux cas.

4.2.2. Influence de l'orthotropie E_1/E_2

Pour mieux comprendre l'influence du degré de l'orthotropie sur la charge critique de flambement de la plaque composite stratifiée. Ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules d'Young suivant les deux directions différentes du matériau E_1/E_2 . On a représenté sur les graphes (les figures 40 et 41) l'évolution de la valeur critique de flambement en fonction du rapport E_1/E_2 des stratifiés croisés symétriques ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sans porosité ($p=0$) et avec de porosité ($p=0,3$) (Figure 40) et plaques stratifiés antisymétriques ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sans porosité et de porosité (Figure 41).

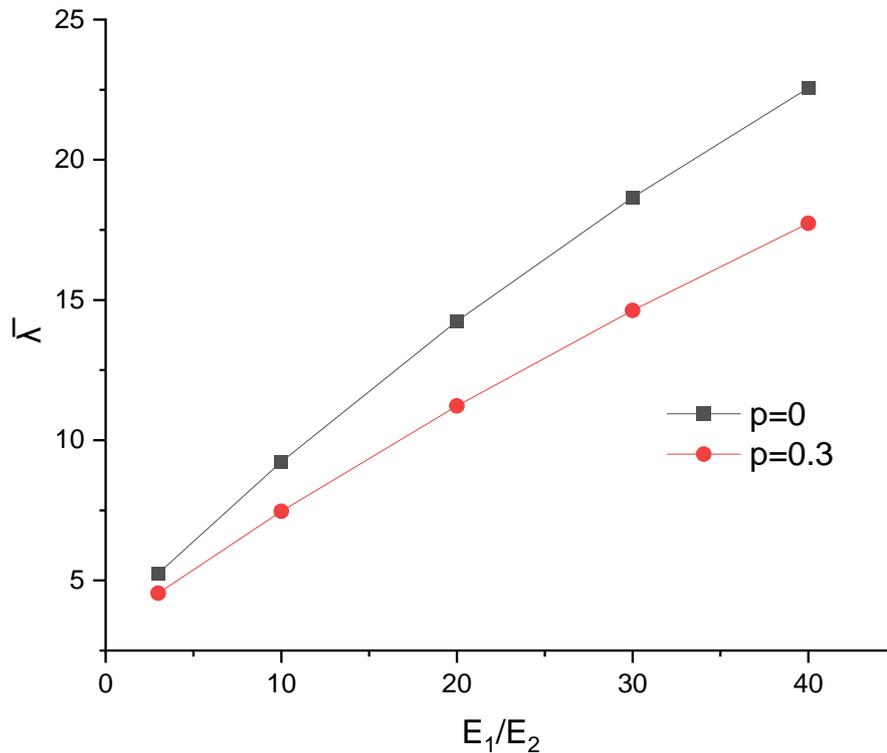


Figure 43 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.

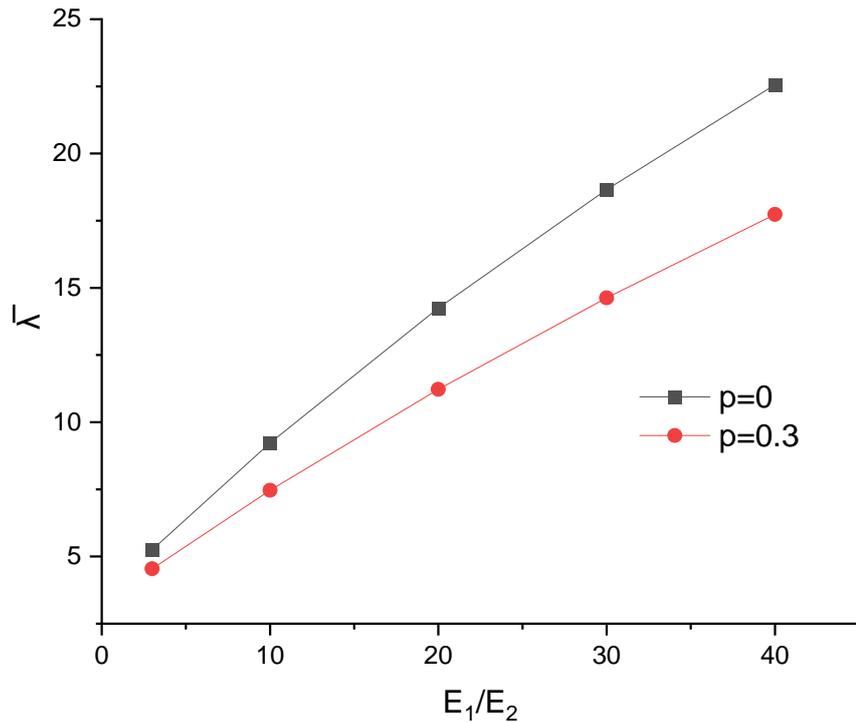


Figure 44 : Variation de la charge de flambement en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.

On observe une augmentation de la valeur de la charge critique de flambement adimensionnelle avec l'accroissement du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour la plaque symétrique ainsi que pour la plaque antisymétrique. Il est aussi observé que la stabilité de la plaque sans porosité est supérieure à celle de la plaque qui contient de porosité que ce soit pour les plaques à couches symétriques ou antisymétriques. On peut alors conclure qu'avec l'augmentation du rapport d'orthotropie de chaque pli, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent augmentent la valeur de la charge critique de flambement.

4.2.3. Influence de la porosité

Pour montrer l'influence de la porosité sur la charge critique de flambement, on a représenté sur les graphes (les Figures 42 et 43) l'évolution de la valeur critique de flambement en fonction de la porosité des stratifiés croisés symétriques à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) (Figure 42) et plaques stratifiés antisymétriques à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) (Figure 43).

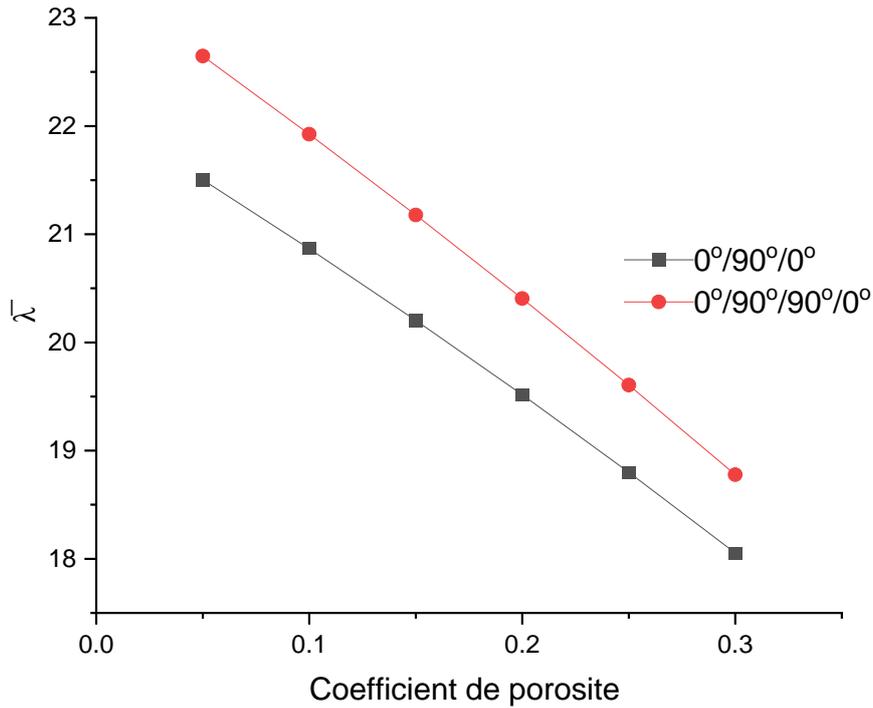


Figure 45 : Variation de la charge de flambement en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques symétriques à 3 couches (0°/90°/0°) et 4 couches (0°/90°/90°/0°)

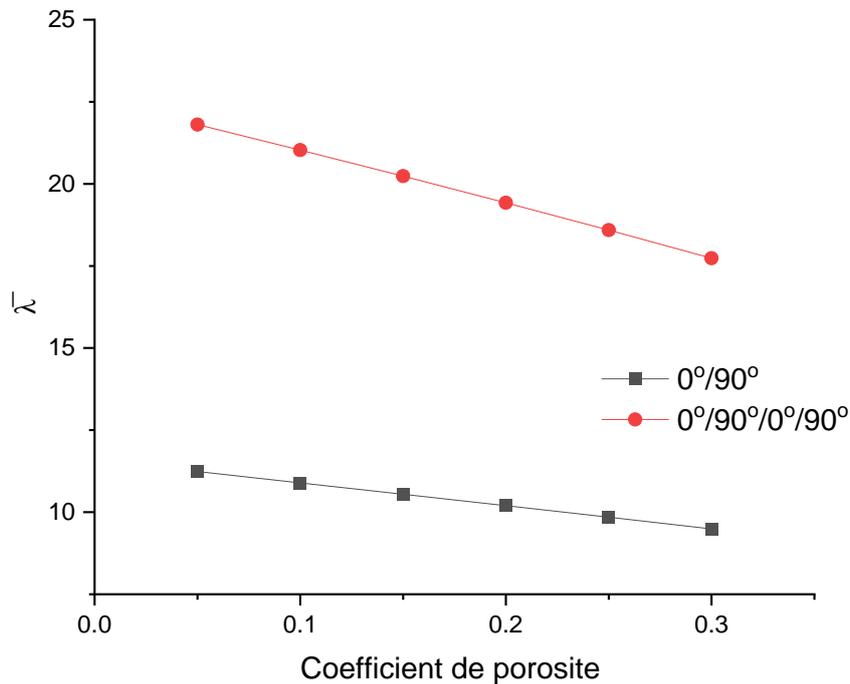


Figure 46 : Variation de la charge de flambement en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques antisymétriques à 2 couches (0°/90°) et 4 couches (0°/90°/0°/90°)

On observe une diminution de la valeur critique de flambement adimensionnelle avec l'accroissement de la porosité pour les deux cas de plaques symétriques et antisymétriques. Il est aussi observé que la stabilité de la plaque à 4 couches dépasse celle de la plaque à 3 couches et à 2 couches pour les plaques symétriques et les plaques antisymétriques, respectivement. On

peut alors conclure qu'avec l'augmentation de la porosité, la rigidité de la plaque antisymétrique est diminuée et par conséquent nous avons une diminution de la valeur de la charge critique de flambement.

4.3. Analyse de la vibration libre

Les fréquences fondamentales des systèmes sont calculées par l'équation de vibration libre (3.29) comme problème aux valeurs propres. Les fréquences fondamentales non dimensionnelles des plaques stratifiées à plis croisés symétriques et antisymétriques sont présentées ici pour estimer l'exactitude de la théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevée. Il est observé, après comparaison avec les résultats obtenus par diverses théories, qu'ils sont presque identiques, démontrant une excellente cohérence avec la théorie actuelle.

Table 3 : Comparaison des résultats des fréquences naturelles d'une plaque à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec les recherches précédentes.

$E_1/E_2=40$					
a/h	Kant (Kant et Swaminathan, 2001)	Matsunaga (Matsunaga, 2000)	HSDT (Reddy, 1984)	Akavci (2007)	Théorie Présente
2	5.4033	5.3211	5.5065	5.6709	5.51691
20	17.647	17.6369	17.6457	17.6480 6	17.64756
50	18.672	18.6702	18.6718	18.6721	18.67199
100	18.8357	18.8352	18.8356	18.8356 9	18.83566

Table 4 : Comparaison des résultats des fréquences naturelles d'une plaque à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédentes.

a/h=5					
E_1/E_2	3D Elasticité (Noor, 1973)	Kant (Kant et Swaminathan, 2001)	HSDT (Reddy, 1984)	Akavci(2007)	Théorie Présente
3	6.5455	6.4319	6.5008	6.5009	6.5008
10	8.1445	8.101	8.1954	8.1932	8.1936
20	9.4055	9.4338	9.6265	9.6209	9.6225
30	10.165	10.246	10.534	10.526	10.5295
40	10.679	10.799	11.171	11.161	11.1657

Table 5 : Comparaison des résultats de fréquences naturelles à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) avec les recherches précédentes.

a/h=5					
E1/E2	3D Elasticité (Noor, 1973)	Kant (Kant et Swaminathan, 2001)	HSDT (Reddy, 1984)	Akavci(2007)	Théorie Présent
3	6.2578	6.1566	6.2169	6.2181	6.21778276
10	6.9845	6.9363	6.9887	6.9939	6.992694458
20	7.6745	7.6883	7.821	7.8324	7.830002646
30	8.1763	8.257	8.505	8.5228	8.519225348
40	8.5625	8.7097	9.0871	9.1114	9.106656382

4.3.1. Influence du rapport géométrique a/h

Pour montrer l'influence des paramètres de la géométrie d'une plaque composite stratifiée sur leur fréquences naturelles en prenant en compte de la porosité, on a représenté sur les graphes (les Figures 44 et 45) l'évolution de la valeur de la fréquence naturelle en fonction du rapport longueur/épaisseur (a/h) d'un stratifié croisé symétrique ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sans porosité ($p=0$) et avec porosité ($p=0,3$) (Figure 44) et plaque stratifié antisymétrique ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sans porosité ($p=0$) et avec porosité ($p=0,3$) (Figure 45).

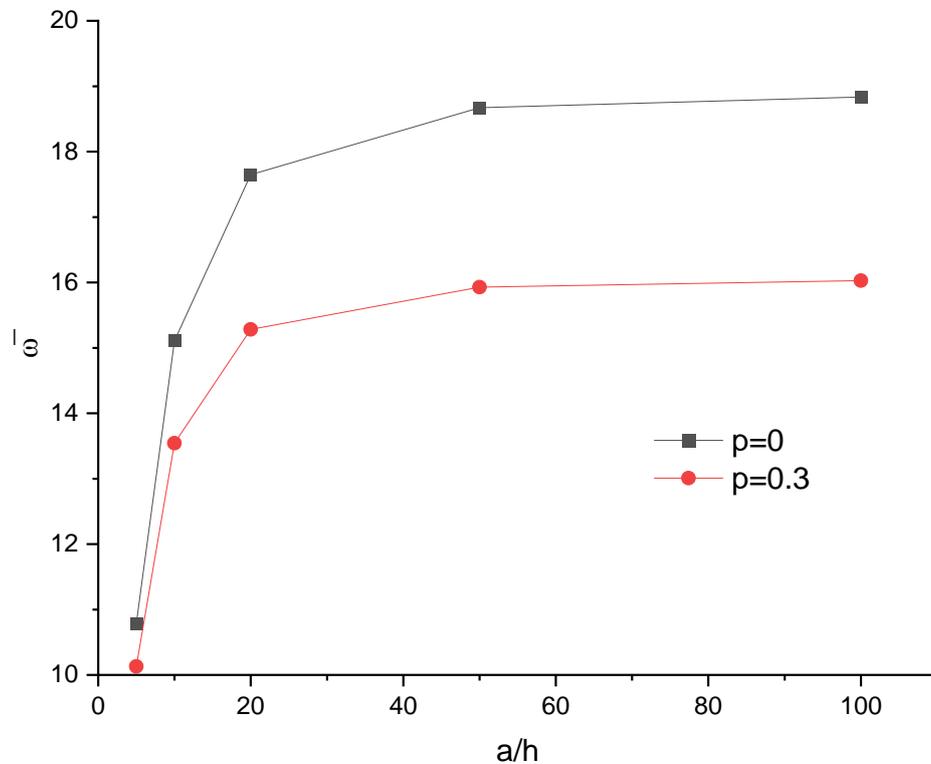


Figure 47 : Variation des fréquences naturelles en fonction du rapport a/h pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.

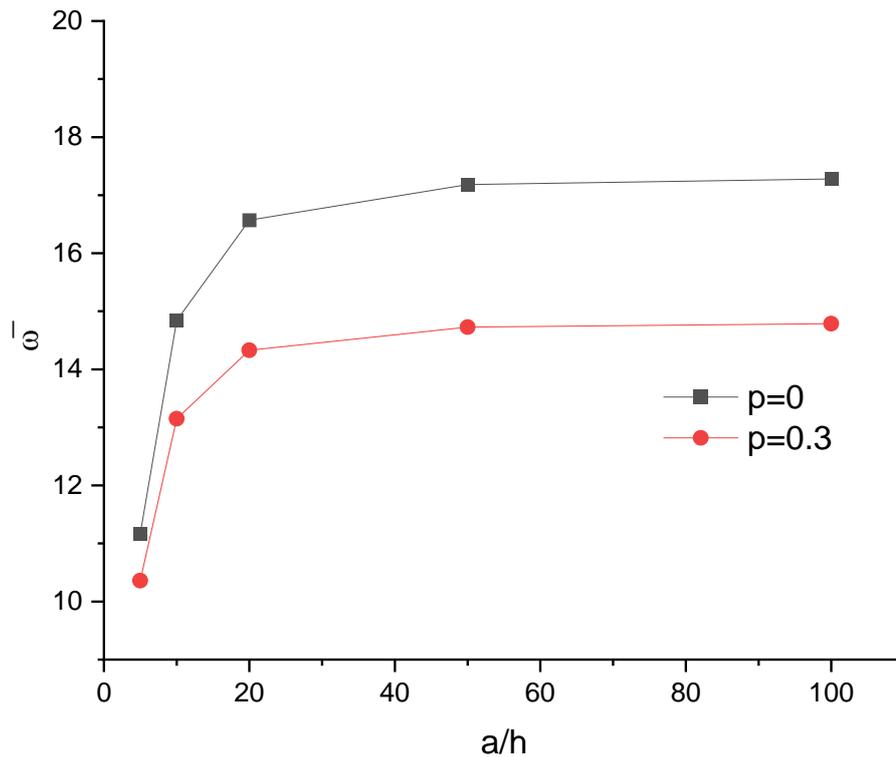


Figure 48 : Variation de la fréquence naturelle en fonction du rapport a/h pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.

On observe une augmentation de la valeur de la fréquence propre avec l'accroissement du rapport longueur sur épaisseur (a/h) pour la plaque symétrique ainsi que pour la plaque antisymétrique. Il est aussi observé que les valeurs des fréquences naturelles de la plaque sans porosité sont plus élevées par rapport à celles de la plaque avec porosité que ce soit pour les plaques à couches symétriques ou antisymétriques. Cependant, dès que ce rapport atteint $a/h = 50$ pour les deux cas, les valeurs des fréquences fondamentales demeurent presque constantes, indépendamment du rapport (a/h). On peut alors conclure que la plaque mince a des fréquences naturelles plus élevées qu'une plaque épaisse dans les deux types de plaques.

4.3.2. Influence de la d'orthotropie E_1/E_2

Pour mieux comprendre l'influence du degré de l'orthotropie sur les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées, ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules d'Young suivant les deux directions différentes du matériau E_1/E_2 . On a représenté sur les graphes (les Figures 46 et 47) l'évolution des fréquences fondamentales en fonction du rapport E_1/E_2 , des stratifiés croisés symétriques ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sans porosité et avec un coefficient 0.3 de porosité (Figure 46) et plaques stratifiés antisymétriques ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sans porosité et avec un coefficient 0.3 de porosité (Figure 47).

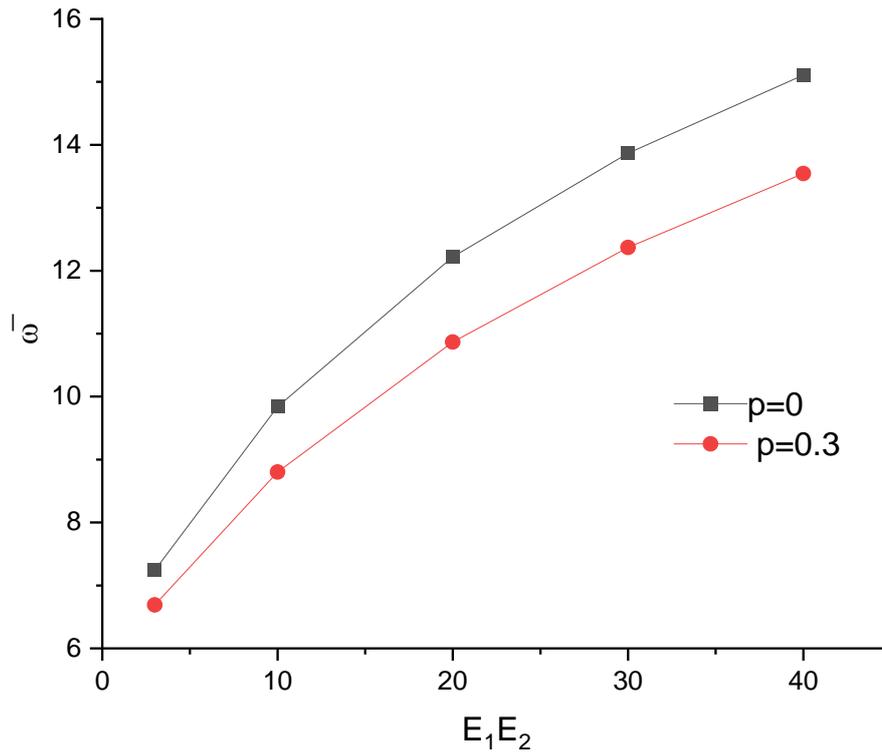


Figure 49 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques symétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) avec et sans porosité.

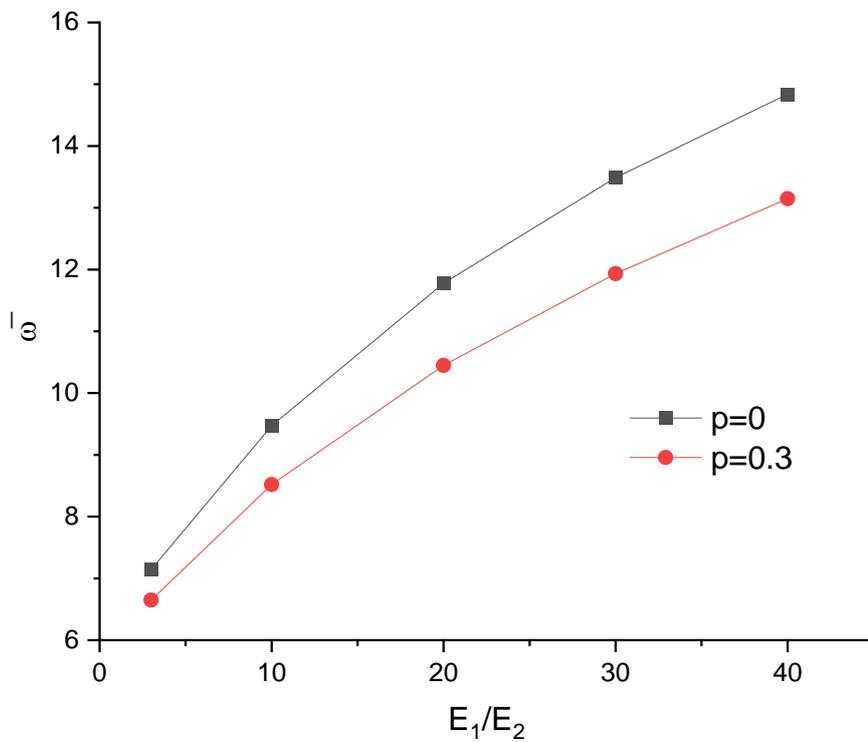


Figure 50 : Variation de la charge de la fréquence naturelle en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour des plaques antisymétriques à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec et sans porosité.

On observe une augmentation des valeurs de la fréquence naturelle avec l'accroissement du rapport d'orthotropie E_1/E_2 pour la plaque symétrique ainsi que pour la plaque antisymétrique. Il est aussi observé que les fréquences naturelles de la plaque sans porosité sont supérieures à celles de la plaque avec porosité que ce soit pour les plaques à couches symétriques ou antisymétriques. On peut alors conclure qu'avec l'augmentation du rapport d'orthotropie de chaque pli, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent la fréquence propre accroit.

4.3.3. Influence de la porosité

Pour montrer l'influence de la porosité sur les fréquences naturelles des plaque stratifiées, on a représenté sur les graphes (les Figures 48 et 49) l'évolution de la valeur critique de flambement en fonction de pourcentage de la porosité des stratifiés croisés symétriques à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) (Figure 48) et plaques stratifiées antisymétriques à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$) (Figure 49).

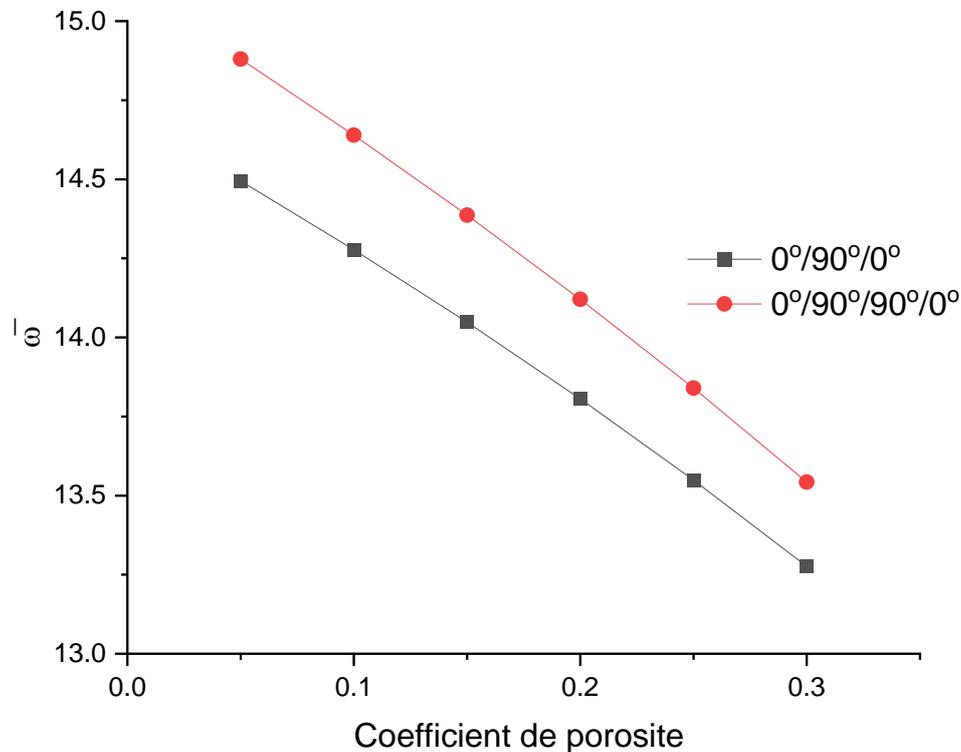


Figure 51 : Variation de la fréquence naturelle en fonction du pourcentage de la porosité pour des plaques symétriques à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

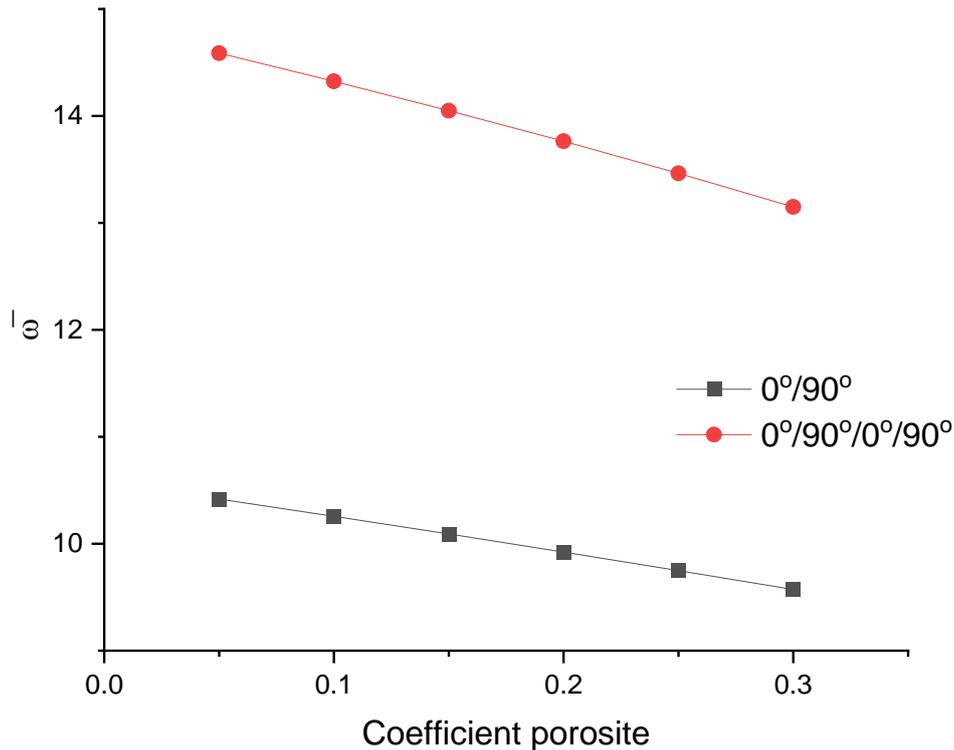


Figure 52 : Variation de de la fréquence naturelle en fonction du la pourcentage de la porosité pour des plaques antisymétriques à 2 couches ($0^\circ/90^\circ$) et 4 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)

On constate que la fréquence propre diminue avec l'augmentation du coefficient de porosité, tant pour les plaques symétriques ainsi que pour les plaques antisymétriques. De plus, les valeurs de la fréquence fondamentale pour une plaque à 4 couches sont plus élevées que celles des plaques à 3 couches et à 2 couches, que ce soit pour les plaques à couches symétriques ou antisymétriques. En conclusion, l'augmentation de la porosité réduit la rigidité des plaques, ce qui entraîne une diminution des valeurs de la fréquence propre.

4.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats obtenus à l'aide du calcul analytique basé sur la théorie des plaques à ordres élevés (HSDT) pour analyser la stabilité et la réponse en vibration libre des plaques stratifiées carrées simplement appuyées. Nous avons réalisé plusieurs applications numériques afin de prédire les différents paramètres influençant le flambement critique et la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques carrées en matériaux composites stratifiés à plis croisés.

La comparaison avec les résultats analytiques disponibles dans la littérature montre que la formulation présentée est en bon accord avec ces derniers. La précision et l'efficacité de la théorie actuelle nous permettent d'analyser l'influence de la porosité dans les plaques stratifiées, démontrant que cette porosité a un impact négatif sur la stabilité et la réponse dynamique. Par conséquent, il est essentiel de minimiser la porosité autant que possible.

CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des plaques stratifiées dans les domaines de l'ingénierie structurelle est d'une importance capitale, étant donné leur capacité à résister aux chocs et aux vibrations. Que ce soit dans les secteurs mécanique, aéronautique, aérospatial, civil, naval, sportif ou militaire, ces matériaux offrent des solutions avancées pour des applications variées et exigeantes. L'analyse de la stabilité et du comportement vibratoire des plaques stratifiées constitue donc un domaine de recherche essentiel pour améliorer les performances structurelles et la fiabilité des matériaux composites.

Dans le cadre de notre travail, nous avons employé une nouvelle fonction de cisaillement transverse, spécialement développée pour caractériser l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur des plaques stratifiées. Cette fonction s'inscrit dans le cadre de la théorie des plaques à ordres élevés (HSDT - High-Order Shear Deformation Theory), qui s'avère bien adaptée à la modélisation des structures composites stratifiées sans nécessiter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement.

La théorie des plaques à ordres élevés permet de mieux capturer les effets complexes de déformation et de contrainte dans les matériaux composites, offrant ainsi une précision accrue dans les prévisions de comportement dynamique. En particulier, cette approche permet de modéliser de manière plus réaliste l'effet de gauchissement, qui est crucial pour une analyse détaillée des réponses vibratoires et de stabilité.

Un aspect critique abordé dans cette étude est l'influence de la porosité sur les performances des plaques composites stratifiées. La porosité, qui peut survenir en raison de défauts de fabrication ou de l'utilisation de techniques de production inadéquates, a un impact négatif significatif sur les propriétés mécaniques des matériaux composites. Les résultats montrent que la présence de porosité réduit la stabilité structurelle et altère le comportement dynamique, diminuant ainsi la durabilité et la fiabilité des structures composites.

Pour pallier ces problèmes, il est impératif de mettre en œuvre des techniques de fabrication avancées visant à minimiser la porosité. Des méthodes telles que le contrôle rigoureux des conditions de fabrication, l'utilisation de matériaux de haute qualité et l'adoption de procédés innovants peuvent contribuer à réduire les défauts et à améliorer les propriétés finales des plaques composites.

En conclusion, cette étude met en lumière l'importance de la modélisation précise et de la fabrication de haute qualité dans l'optimisation des performances des plaques stratifiées. La prise en compte de la porosité et l'utilisation de théories avancées comme la HSDT sont essentielles pour le développement de structures composites durables et fiables, capables de répondre aux exigences croissantes des applications industrielles modernes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Berbain F., Chevalier A., Choudin C., Mise en œuvre des composites - Méthodes et matériels. Techniques de l'ingénieur. Plastiques et Composites, no. A 3720, 1997.
2. Berthelot, J. M., Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures. Paris, Masson, 615 p, 1992.
3. KallelKamoun, I., Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique, 1999, Ecully, Ecole centrale de Lyon
4. Prombut, P., Caractérisation de la propagation de délaminage des stratifiés composites multidirectionnels, 2007, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
5. Faria, A.W., Modélisation par éléments finis de plaques composites : contribution a l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes (PhD Thesis). Uberlândia : Universidade Federal de Uberlândia. Université de Franche-Comté. Besançon, França, 2010.
6. Rahmane, Abdelhafid, and Toufik Benmansour. Étude du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs. Diss. Université Frères Mentouri-Constantine 1, 2018.
7. DRAICHE, KADA. Contribution à l'analyse de la vibration des plaques composites comportant des patches. Diss. 2014.
8. Nedri K., El Meiche N., Tounsi A., Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory. *Mechanics of Composite Materials*, 49(6): 629 – 640, 2014.
9. Nye, J.F., Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices. 1985: Oxford university press.
10. Kollar, L.P. and G.S. Springer, Mechanics of composite structures. 2003 : Cambridge university Press.
11. Berbain F., Chevalier A., Choudin C., Mise en œuvre des composites - Méthodes et matériels. Techniques de l'ingénieur. Plastiques et Composites, no. A 3720, 1997.
12. Reinhart T.J., Clements L.L., Introduction to composites. Engineered materials handbook: Composites. Ohio, USA: ASM International, vol.1: 27–34, 1993.
13. Gurdal Z., Haftka R.T., Hajela P., Design and optimization of laminated composite materials. Canada: Wiley-Interscience Publication, 352 p. ISBN 047125276X., 1999.

14. Beeby A.W., The prediction of crack widths in hardened concrete. *The structural Engineer*, vol. 57A (1): 9–17, 1979.
15. Powers T.C., Brownyard T.L., Studies of the physical properties of hardened cement paste. Bulletin 23, Research laboratories of the Portland cement association, Chicago, 1948.
16. Pierre, P., Etude du comportement mécanique des composites cimentaires armés de microfibres d'acier. Thèse de doctorat de l'Université Laval, Québec, Canada, 1998.
17. Chan, Y.W., LI, V.C., Effects of transition zone densification on fiber/cement paste bond strength improvement. *Advanced cement-based materials*, vol. 5: 8–17, 1997.
18. Beaudoin J.J., Handbook of fiber-reinforced concrete-principles, properties developments and applications. Noyes publication, U.S.A, 332 p, 1990.
19. Naaman A. E., Homriche J. R., Tensile stress-strain properties of SIFCON. *ACI Materials journal*, vol. 86(3): 244–251, 1989.
20. Kirchhoff G (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40, 51-88.
21. Love AEH (1934). A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press.
22. Reddy JN (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, London.
23. Reddy JN., A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*, 51: 745–752, 1984.
24. M. Touratier, An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*, 29 (8): 901–916, 1991.
25. Reissner E (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech*, 12 (2) 69-77.
26. Mindlin, RD (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. of Appl. Mech.*, 18, 31-38.
27. Nelson RB, Lorch DR (1974). A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 41(1), 177-183.

28. Krishna Murty A, Vellaichamy S (1987). On higher order shear deformation theory of laminated composite panels. *Composite Structures*, 8 (4), 247-270.
29. Christensen Lo K R, Wu E (1977). A high-order theory of plate deformation-Part 1: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*. 44(4), 663-668 et 669-676.
30. Nelson RB, Lorch DR (1974) Krishna Murty A, Vellaichamy S (1987). Christensen Lo K R, Wu E (1977).
31. Timoshenko SP., *Vibration problems in engineering*. Princeton: Van Nostrand, 1955.
32. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill.
33. Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
34. Akavci, S. S. "Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation." *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 26.18 (2007): 1907-1919.
35. Belarbi, M. O., Daikh, A. A., Garg, A., Merzouki, T., Chalak, H. D., & Hirane, H. (2021). Nonlocal finite element model for the bending and buckling analysis of functionally graded nanobeams using a novel shear deformation theory. *Composite Structures*, 264, 113712.
36. Ambartsumyan S.A., *Theory of Anisotropic Plate*. Economic Publishing Co, 1969.
37. Daikh AA, Zenkour AM. Bending of functionally graded sandwich nanoplates resting on Pasternak foundation under different boundary conditions. *J ApplComput Mech* 2020.
38. Reddy, J. N. (1984). A Simple Higher Order Theory for Laminated Composite Plates, *J. Appl. Mech.*, 51:745–752.
39. Phan, N. D. and Reddy, J. N. (1985). Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-order Shear Deformation Theory, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 21: 2201–2219.
40. Kant, T. and Swaminathan, K. (2001). Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory, *Composite Structures*, 53: 73–85.

41. Matsunaga, H. (2000). Vibration and Stability of Cross-ply Laminated Composite Plates According to a Global Higher-order Plate Theory, *Composite Structures*, 48: 231–244.
42. Setoodeh, A. R. and Karami, G. (2004). Static, Free Vibration and Buckling Analysis of Anisotropic Thick Laminated Composite Plates on Distributed and Point Elastic Supports using a 3-D Layer-wise FEM *Engineering Structures*, 26: 211–220.
43. Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Liew, K.M. (1996). Buckling and Vibration of Thick Laminates on Pasternak Foundation, *J. Eng Mech. ASCE*, 122(1): 54–63.
44. Noor, A. K. (1975). Stability of Multilayered Composite Plates, *Fibre Sci. Technology*, 8(2): 81–89.
45. Reddy, J. N. and Khdeir, A. A. (1989). Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories, *AIAA J.*, 12: 1808–1817.
46. Noor, A. K. (1973). Free Vibration of Multilayered Composite Plates, *AIAA J.*, 11: 1038–1039.
47. Boufaïda, Zakariya, et al. "Influence of the fiber/matrix strength on the mechanical properties of a glass fiber/thermoplastic-matrix plain weave fabric composite." *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 75 (2015): 28-38.
48. Dris, L., *Évaluation simultanée des vitesses de propagation et d'atténuation des ultrasons dans des matériaux composites et polymériques*, 2007.
49. S. J. Grunewald, New 3D Printing Material Mimics Light Weight Balsa Wood for use in Wind Turbine Construction, <https://3dprintingindustry.com/news/3d-printing-material-light-weight-balsawood-29265/>, 03/03/2017.