



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة عبد الحميد بن باديس - مستغانم
Abdel Hamid Ibn Badis University – Mostaganem
كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculty of Sciences and Technology
قسم الهندسة الميكانيكية
Department of Mechanical Engineering



N° d'ordre : M2...../GM/2024

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES DE MASTER ACADEMIQUE

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

ETUDE D'UNE PLATFORME DE STEWART

Présenté par

1- Rahmani Norelhouda

Soutenu le 25/06/ 2024 devant le jury composé de :

Président :	ZENASNI Ramdane	Professeur	Université de Mostaganem.
Examineur :	BENAISSA Mohamed	Maître Assistant "A"	Université de Mostaganem
Encadrant :	FLITTI Abdelmadjid	Maitre de Conférences "B"	Université de Mostaganem

Année universitaire 2023 / 2024

Dédicaces

À ma chère maman, qui est mon étoile brillante et mon roc inébranlable, merci pour ton amour inconditionnel et ta sagesse infinie. Ta présence est un cadeau précieux dans ma vie.

À mes merveilleux frères, vous êtes mes premiers amis et mes compagnons de tous les jours. Merci pour vos encouragements permanents, et soutien moral.

À ma tante adorée Lila Daho, tu es comme une seconde maman pour moi. Ta gentillesse, tes conseils et ton amour sont des sources d'inspiration et de réconfort.

À Ikram Belmokadem et Asmae Elgheribi, mes amis fidèles, votre amitié est un trésor rare. Merci pour votre soutien constant, vos sourires contagieux et votre encouragement.

Je vous aime tous profondément et je suis reconnaissant de vous avoir dans ma vie.

Ms.Rahmani norelhouda

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier Allah le tout puissant et miséricordieux pour la volonté, la santé et la patience qu'Il m'a accordée durant toutes ces années d'étude.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements au **Dr. FLITTI Abdelmadjid** qui en tant que directeur de mémoire s'est toujours montré à l'écoute et très conseiller, grand merci à lui pour son entière disponibilité durant toutes les étapes de la réalisation de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury le **Pr. ZENASNI Ramdane** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de mon travail ainsi que Mr. **BENAISSA Mohamed**, grand merci à eux pour leur présence et leur lecture attentive de ce travail malgré leurs préoccupations et leur emploi du temps assez chargé ainsi que les remarques qu'ils m'adresseront lors de la soutenance afin de l'améliorer.

Je tiens à remercier mes parents pour leur contribution, leur soutien moral et financier et leur encouragement.

Liste des figures

Figure I. 1: Robots parallèle série 6 axes.....	3
Figure I. 2: Mécanisme parallèle de Williard L.V. Pollard .	3
Figure I.3: La plateforme de Gough-Stewart pour le test de pneumatiques .	4
Figure I. 4 : Robot Delta de KUKA	4
Figure I. 5: Exemples d'architectures des robots planaires.....	6
Figure I. 6: Exemples d'architectures des robots spatiaux.....	7
Figure I. 7: Opération de « pick and place » avec robots Delta de Fanuc	7
Figure I. 8: Robot parallèle orthoglide	8
Figure I. 9: simulateur de conduite de Renault	9
Figure II. 1: Modélisation géométrique de la plate-forme de Gough-Stewart	10
Figure II. 2: Augustin Louis Cauchy	11
Figure II. 3: Plateforme de Stewart 6SPS à six degrés de liberté	11
Figure II. 4: Modélisation SSM (vue du dessus)	13
Figure II. 5: Modélisation TSSM (vue du dessus)	14
Figure II. 6: Modélisation MSSM (vue du dessus)	14
Figure II. 7: Simulateur de vol (CAE Électronique)	15
Figure II. 8: Système de positionnement 6 axes Stewart Platform (ACROME)	16
Figure II. 9: Bras manipulateur fixé sur la plateforme mobile pour assurer la soudure des pipelines	16
Figure III. 1 : Plateforme de Gough-Stewart convention vectorielle.....	18

Liste des tableaux

Tableau III. 1: Paramètres géométriques d'une plateforme de type Stewart-Gough 20

Tableau III. 2: Huit solutions trouvées pour le cas étudié. 24

Résumé

Résumé

La plateforme de Stewart est l'une des robots parallèles les plus anciens et les plus populaires. Cela est dû à ses multiples applications, telles que les simulateurs de vols, les machines-outils et les machines de mesure de coordonnées.

Contrairement aux robots sériels, le modèle géométrique direct (MGD) de la plateforme de Stewart pose un problème à affronter, en particulier dans le contexte de nouvelles exigences telles que le contrôle en temps réel et en ligne. Il existe, généralement, deux méthodes pour résoudre le modèle géométrique direct de la plateforme Stewart : la méthode analytique et la méthode numérique. La différence fondamentale entre ces deux méthodes réside dans le nombre de solutions trouvées. En effet, la première cherche à trouver le plus grand nombre de solutions alors que la deuxième donne une seule solution.

Ce travail s'inscrit dans ce cadre, et vise à mettre en évidence la différence entre les deux méthodes précitées, pour trouver le MGD d'une plateforme Stewart du type 6-6^P. La résolution numérique, dans ce travail, est basée sur la transformation du problème à un programme non linéaire avec contraintes. Puis à utiliser la programmation séquentielle quadratique comme algorithme de résolution.

Mots-clés : plateforme de Stewart, modèle géométrique direct, solution analytique, solution numérique.

Abstract

The Stewart platform is one of the oldest and most popular parallel robots. This is due to its many applications, such as flight simulators, machine tools and coordinate measuring devices.

Unlike serial robots, the forward kinematics of Stewart's platform poses a problem to be tackled, especially in the context of new requirements such as real-time and on-line control. Generally, there are two methods for solving the forward kinematics model of the Stewart platform: the analytical method and numerical method. The fundamental difference between these two methods lies in the number of solutions found. The first seeks to find as many solutions as possible, while the second gives a single solution.

The aim of this work is to highlight the difference between the two methods for finding the forward kinematics of a 6-6^P Stewart platform. The numerical solution, in this work, is based on transforming the problem into a constrained non-linear program. Quadratic sequential programming is then used as the solution algorithm.

Keywords: Stewart platform, forward kinematics, analytical solution, numerical solution.

المخلص

تعد منصة ستيوارت واحدة من أقدم وأشهر الروبوتات الموازية. ويرجع ذلك إلى تطبيقاتها المتعددة، مثل أجهزة محاكاة الطيران، والأدوات الآلية، وآلات قياس الإحداثيات.

على عكس الروبوتات التسلسلية، يشكل النموذج الهندسي المباشر لمنصة ستيوارت مشكلة يجب مواجهتها، خاصة في سياق المتطلبات الجديدة مثل التحكم في الوقت الفعلي والتحكم عبر الإنترنت. هناك، بشكل عام، طريقتان لحل النموذج الهندسي المباشر لمنصة ستيوارت: الطريقة التحليلية والطريقة العددية. يكمن الاختلاف الأساسي بين هاتين الطريقتين في عدد الحلول التي يتم العثور عليها. في الواقع، يسعى الأول إلى إيجاد أكبر عدد من الحلول بينما يعطي الثاني حلاً واحداً.

يعد هذا العمل جزءاً من هذا الإطار، ويهدف إلى تسليط الضوء على الفرق بين الطريقتين المذكورتين أعلاه، للعثور على النموذج الهندسي المباشر لمنصة ستيوارت من النوع 6-6^P. الحل العددي في هذا العمل يعتمد على تحويل المشكلة إلى برنامج غير خطي مع القيود. ثم استخدم البرمجة التسلسلية التربيعية كخوارزمية حل.

الكلمات المفتاحية: منصة ستيوارت، النموذج الهندسي المباشر، الحل التحليلي، الحل العددي.

Table des matières

Dédicaces.....	ii
Remerciements	iii
Liste des figures.....	iv
Liste des tableaux.....	v
Résumé.....	vi
Table des matières.....	vii
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les robots parallèles	3
I.1 Introduction	3
I.2. Les principales propriétés d'un robots parallèles	5
I.3. Architecture des robots parallèles	6
I.3.1 Les robots parallèles planaires.....	6
I.3.2. Les robots parallèles spatiaux.....	6
I.4. Principales applications des robots parallèle.....	7
Chapitre II	2
Chapitre II : Plateforme de Stewart.....	10
II.1. Introduction.....	10
II.2. Création et développement.....	10
II.3. Description générale de la plateforme de Stewart	11
II.4. Configurations.....	12
II.4.1. Base plane.....	13
II.4.2. SSM.....	13
II.4.3. TSSM.....	13
II.5. Avantages du Mécanisme	14
II.6. Principales applications de la plateforme de Stewart.....	15
II.7. Conclusion	16
Chapitre III : Modélisation Géométrique.....	18
III.1. Introduction	18

III.2. Modèle géométrique inverse (MGI).....	18
III.3. Modèle géométrique directe (MGD) par la méthode analytique	20
III.4. Modèle géométrique directe (MGD) par les méthodes numériques.....	25
III.4.1. La programmation quadratique séquentielle (SQP).....	25
III.4.2. Solution numérique	26
III.5. Conclusion.....	27
Conclusion générale	28

Introduction générale

Introduction générale

Les chercheurs et scientifiques ont toujours cherché des moyens d'améliorer la vie quotidienne des êtres humains, et l'une des solutions les plus répandues est la robotique. Elle représente une technologie moderne extrêmement avancée et largement utilisée pour faciliter la vie de l'humanité. En effet, l'intégration de robots dans l'industrie a permis de décharger les travailleurs de tâches répétitives et difficiles, telles que le déplacement d'objets lourds, les opérations d'assemblage, les microsoudures, etc. Cela a entraîné une amélioration significative de l'efficacité et, surtout, de la précision. Parmi les robots les plus renommés dédiés à ces tâches, on trouve notamment les robots parallèles. [1]

Les robots parallèles sont une catégorie de robots présentant des chaînes cinématiques fermées. Le champ des architectures cinématiques possibles est très vaste, ainsi que le nombre de domaines d'applications qui s'étendent de la micromanipulation à la manipulation de charges élevées, en passant par des applications industrielles plus classiques telles que le « Pick-and-place » à haute cadence (jusqu'à 3 ou 4 produits déplacés par seconde). Les performances des robots parallèles sont complémentaires et généralement à l'opposé de celles des robots série. Ils ouvrent donc de nouvelles pistes pour la robotisation de certaines tâches. Ils représentent aujourd'hui une faible part de marché pour les robots industriels commercialisés, mais ils s'imposent naturellement pour certaines applications. Pour d'autres, ils sont en concurrence avec leurs homologues série. Une fois leur architecture cinématique choisie, leur étude demande de la méthodologie et une modélisation fine afin d'évaluer leurs performances. Cet aspect ne doit pas être négligé car les performances sont extrêmement sensibles à leur géométrie, en particulier à cause de la présence de nouveaux types de singularités par rapport aux robots série [2]. Les robots parallèles les plus répondus sont, sans doute, la plateforme de Stewart et le robot Delta. Ces deux robots trouvent plusieurs applications.

L'objectif de ce travail est d'étudier la modélisation géométrique d'une plateforme de Stewart du type 6-6^P. Cette plateforme se caractérise, des autres plateformes, par une base fixe plane et l'hexagone formé par les six sommets de la plateforme mobile et similaire à celui formé par les sommets de la base.

Ce manuscrit est structuré en trois chapitres de la manière suivante :

- La première donne un aperçu général sur les robots parallèles.
- Le deuxième est consacré à donner un aperçu général sur la plateforme de Stewart.

Introduction générale

- Le troisième chapitre présente les résultats obtenus pour le modèle géométrique inverse et direct.
- Enfin, une conclusion pour discuter les résultats obtenus.

Chapitre I

Généralités sur les robots parallèles

Chapitre I : Généralités sur les robots parallèles

I.1 Introduction

Un robot parallèle se définit classiquement par une plate-forme mobile, portant l'organe terminal (ou effecteur), reliée à une base fixe (châssis) par au moins deux jambes composées d'articulations actionnées et d'articulations passives (figure I.1) [3]. Cette architecture lui offre une meilleure rigidité et une plus grande précision pour certaines applications, en revanche, elle peut être plus complexe à concevoir et à contrôler [3].



Figure I. 1: Robots parallèle série 6 axes.

En 1941, Williard L.V. Pollard conçoit, ce qui est considéré comme, le premier robot parallèle industriel pour les opérations de peinture par pulvérisation. La conception consiste en un système à cinq degrés de liberté, composé de trois chaînes cinématiques indépendantes [4].

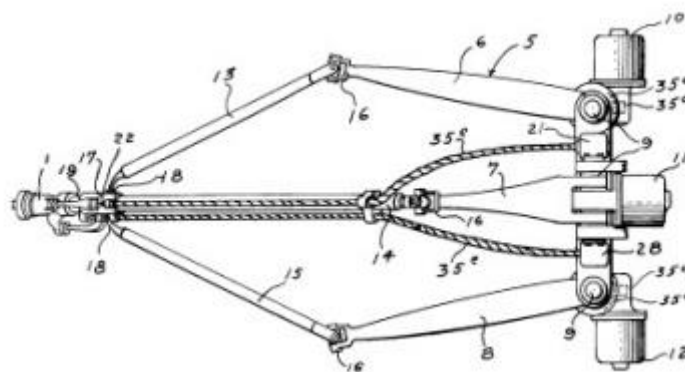


Figure I. 2: Mécanisme parallèle de Williard L.V. Pollard [4].

Eric Gough a conçu, en 1947, la première plateforme octaédrique de type hexapode avec des côtés de longueur variable [4]. Gough l'a appelée machine d'essai universelle [4] ou plate-forme universelle. Cette plateforme a été inventé dans l'objectif de simuler le processus d'atterrissage d'un avion. La

compagnie Dunlop a adopté, aussi, ce mécanisme machine pour tester les pneus qu'elle fabrique [4]. En 1965, Stewart a proposé une plateforme 6-DOF destinée à être utilisée comme simulateur de vol. Sa conception était différente de celle proposée par Gough. Ironiquement, la plateforme de Gough est souvent appelée plate-forme de Stewart [3]. A la fin des années soixante, l'américain Klaus Cappel a pu fabriquer le premier simulateur de vol fonctionnel. Sa conception était basée sur un hexapode octaédrique présentant la même architecture cinématique que celle proposée par Gough[3].

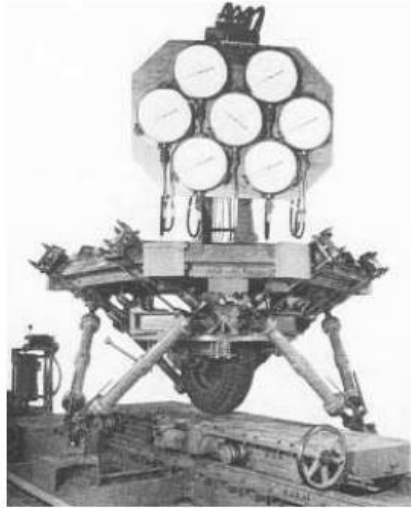


Figure I.3: La plateforme de Gough-Stewart pour le test de pneumatiques [5].

Durant vingtaine d'années suivante la conception des robots parallèles n'a pas connue des progrès significatifs jusqu'à ce que, au milieu des années quatre-vingts, Reymond Clavel, professeur à l'École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), présente son fameux robot Delta [3]. Ce robot, qui est à ce jour le robot parallèle le plus vendu dans le monde, marque l'arrivée des robots parallèles rapides destinés, entre autres, à des tâches industrielles de type « Pick-and-Place » afin de remplacer les robots de type SCARA. La figure 1.6 illustre un modèle commercialisé par la société ABB. [6]

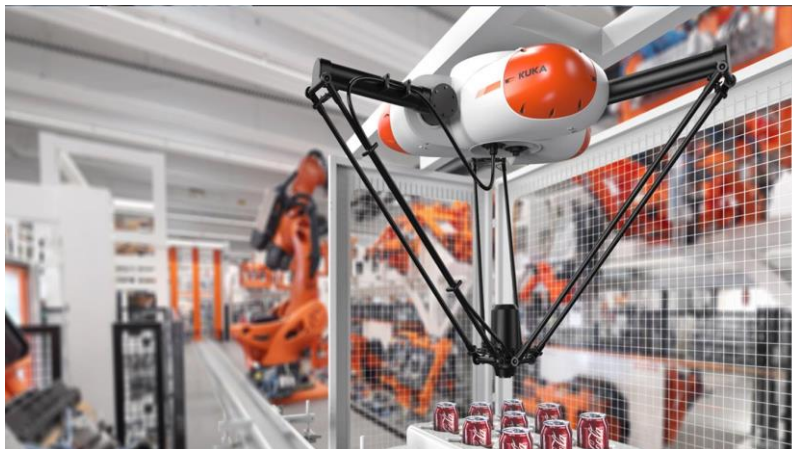


Figure I. 4 : Robot Delta de KUKA [7].

Au cours des trois dernières décennies, une multitude d'architectures de robots parallèles ont été développées, offrant un large éventail d'applications potentielles [6], telles que :

- Plateformes de mouvement pour simulateurs.
- Robots manipulateurs pour des processus industriels, notamment pour la prise et le dépôt d'objets.
- Machines-outils.
- Robots médicaux, notamment des manipulateurs utilisés en microchirurgie.
- Positionneurs de haute précision, entre autres.

I.2. Les principales propriétés d'un robots parallèles

L'architecture des robots parallèles a les rendus comme un choix incontournable pour de nombreuses applications. En effet, elle leurs offre les principaux avantages suivants :

- ✓ Architecture à chaînes cinématiques indépendantes : l'architecture parallèle assure un contrôle plus précis, une meilleure répartition des charges une haute précision et une grande rigidité.
- ✓ Positionnement des actionneurs : souvent, pour ces robots, les actionneurs sont fixés sur la base, ou très proche de cette dernière ce qui offre plusieurs une plus grande variété de choix pour les moteurs et les réducteurs, ainsi qu'une simplification des problèmes de liaison et de câblage.
- ✓ Faible masse mobile et capacité de charge élevée : Malgré une masse mobile réduite, les robots parallèles peuvent supporter des charges très lourdes, ce qui les rend adaptés à des applications telles que les simulateurs de vol.
- ✓ Haute dynamique et accélérations élevées.
- ✓ Facilité d'intégration de capteurs : Les capteurs peuvent être intégrés facilement dans la structure du robot parallèle, ce qui améliore sa capacité à percevoir et à réagir à son environnement.
- ✓ Polyvalence des échelles de taille : Les robots parallèles peuvent être utilisés à des échelles allant du très grand (comme les simulateurs de vol) au très petit (comme les micro-robots utilisés en microchirurgie).

Cependant, malgré leurs nombreux avantages, les robots parallèles présentent également quelques inconvénients, notamment un espace de travail relativement restreint et une complexité de commande accrue en raison de leur comportement non linéaire. Ces aspects doivent être pris en compte lors de la conception et de l'utilisation de ces systèmes [6].

I.3. Architecture des robots parallèles

I.3.1 Les robots parallèles planaires

Les robots parallèles planaires sont des systèmes dans lesquels la plate-forme mobile du robot se déplace dans un plan, offrant généralement trois degrés de liberté : deux translations et une rotation autour de la normale au plan de la plate-forme. Pour concevoir un robot parallèle pleinement parallèle, il est nécessaire d'avoir trois chaînes cinématiques indépendantes, chacune étant motorisée par un actionneur.

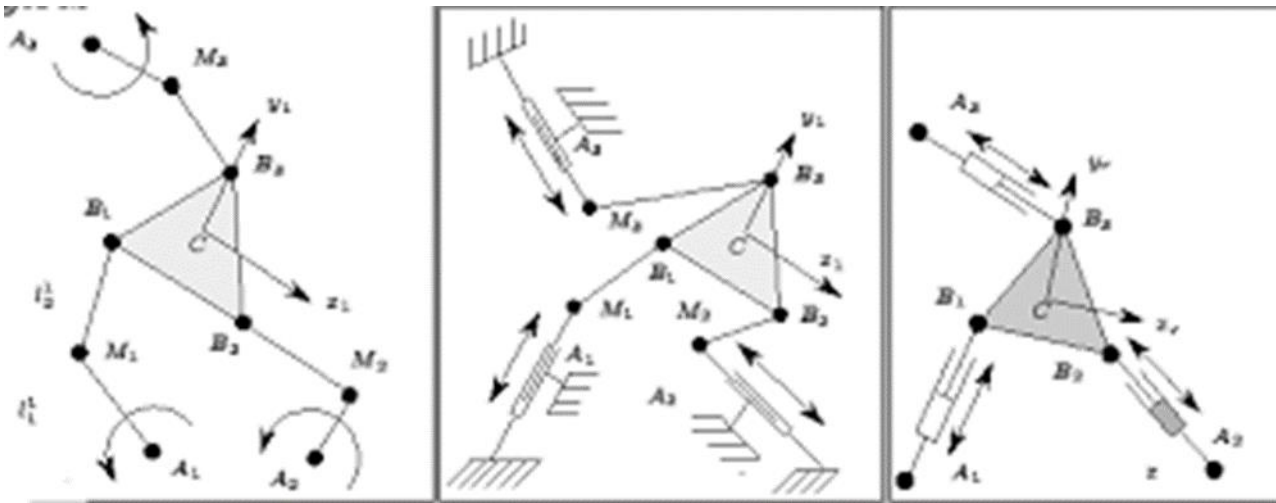


Figure I. 5: Exemples d'architectures des robots planaires.

I.3.2. Les robots parallèles spatiaux

Dans les robots parallèles spatiaux, la liaison entre la plate-forme mobile et la base fixe est assurée par des chaînes cinématiques qui permettent à la plate-forme de bénéficier de trois à six degrés de liberté. Cette architecture leur offre une grande flexibilité de mouvement leur permettant, ainsi, d'être utilisés dans diverses applications industrielles et robotiques avancées.

Les robots parallèles à trois degrés de liberté en translation sont souvent représentés par des configurations comme le Delta, tandis que ceux à six degrés de liberté sont souvent associés à des structures telles que la plate-forme de Gough-Stewart, largement, connue sous le nom de plate-forme de Stewart [8].

La plate-forme de Gough-Stewart est l'un des exemples les plus célèbres de robot parallèle à six degrés de liberté. Elle se compose d'une base fixe et d'une plate-forme mobile, reliées entre elles par six actionneurs linéaires, chacun permettant un mouvement le long d'un axe spécifique. Cette configuration offre une grande flexibilité de mouvement à la plate-forme, lui permettant de se déplacer dans l'espace selon six degrés de liberté : trois de translation et trois de rotation.

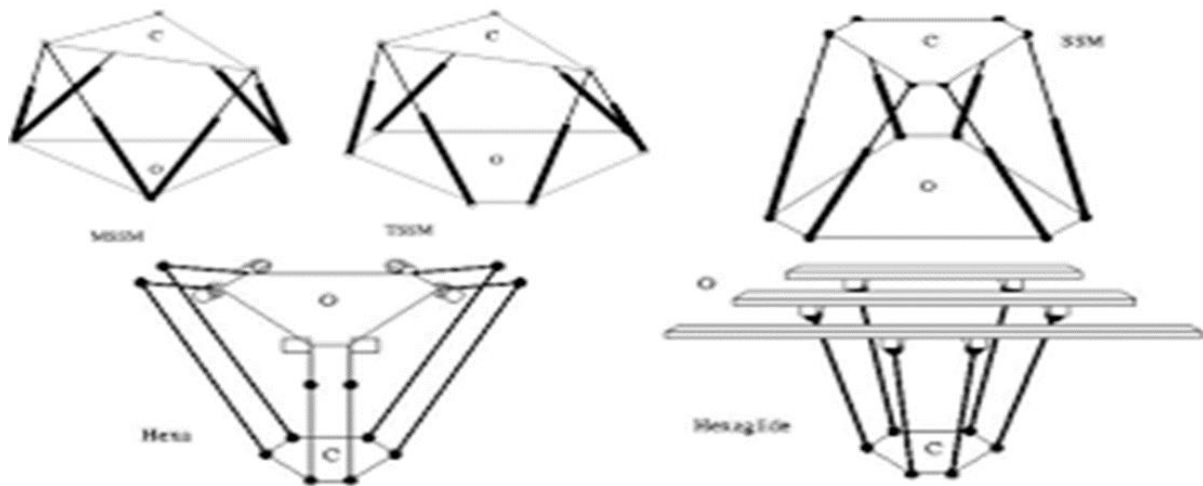


Figure I. 6: Exemples d'architectures des robots spatiaux.

I.4. Principales applications des robots parallèle

Les robots parallèles, sont utilisés dans une variété de domaines d'application, surtout dans des domaines nécessitant une précision et une flexibilité élevées. Les principales applications, de cette famille de robots, sont les suivantes :

- **Les applications du type « Pick and place »** : les tâches du type « chargement et déchargement » (largement connue sous l'appellation anglo-saxon « pick and place ») consiste, essentiellement, à prendre un objet d'une position initiale et à le placer dans une autre position [4]. Cette action est très courante dans les chaînes d'assemblage ou d'emballage industrielle. Le robot Delta est, sans doute, le meilleur candidat pour ce type d'application, surtout dans les industries agroalimentaires [4].

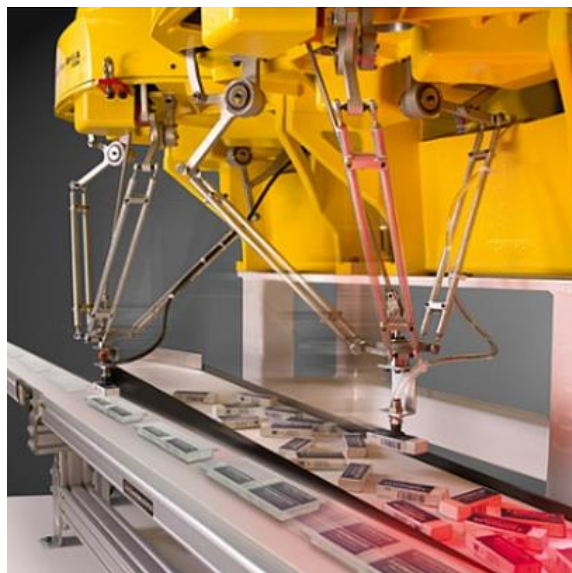


Figure I. 7: Opération de « pick and place » avec robots Delta de Fanuc [9].

- **Opérations d'usinage :** L'usinage est le terme général utilisé pour décrire l'enlèvement de matière d'une pièce [4]. La quasi-totalité des opérations d'usinage exigent une grande précision dans le positionnement de l'outil ainsi qu'une exactitude dans le suivi des trajectoires. Les machines-outils doivent, donc, répondre à ces exigences sévères. La morphologie des robots parallèles, destinés à l'usinage, offre un meilleur soutien à la broche de coupe en raison de l'existence d'un plus grand nombre de points d'appui, ce qui rend, de plus, le robot moins sensible aux erreurs produites par les forces de contact [10]. Cependant, les principaux inconvénients, de ces robots, qui peuvent restreindre leur utilisation, pour ces applications sont leur espace de travail réduit et leurs configurations singulières étendues [3].



Figure I. 8: Robot parallèle orthoglide [11].

- **Machine de mesure tridimensionnelle :** l'architecture parallèle garantit une précision accrue, ce qui a poussé à utiliser les robots parallèles comme des machines de mesure tridimensionnelles [3, 4].
- **Simulateurs de mouvements :** Les simulateurs de mouvements sont les applications les plus fameuses des robots parallèles. En effet, en plus d'être utilisés comme simulateurs de vol, les simulateurs de mouvement ont également été utilisés comme simulateurs de voiture, de navire et d'espace [3, 4]. À cette fin, les appareils doivent avoir des mouvements à 6 degrés de liberté,

une capacité suffisante pour supporter de lourdes charges, des mouvements rapides et précis, et une grande rigidité [3, 4].



Figure I. 9: simulateur de conduite de Renault [12].

- **Imprimantes 3D :** Le robot Delta à actionneurs linéaires est largement utilisé pour l'impression 3D en raison des barres de parallélogramme qui maintiennent la nacelle parfaitement horizontale [3].
- **Applications médicales :** Grâce à leur architecture en boucle fermée, certains robots parallèles, comme la plate-forme de Gough-Stewart ou le robot delta, ont été intégrés avec succès dans ce domaine [3].

Chapitre II

Plateforme de Stewart

Chapitre II : Plateforme de Stewart

II.1. Introduction

La plateforme de Gough-Stewart est un exemple emblématique de manipulateur parallèle, caractérisé par la connexion de son effecteur à la base via plusieurs branches. Cette structure permet d'obtenir une grande rigidité et précision, tout en permettant une distribution équilibrée des charges. La figure II.1 montre une modélisation géométrique de cette plate-forme, où la base fixe et la plate-forme mobile sont interconnectées par six actionneurs prismatiques, dont les longueurs varient pour définir la position de la plate-forme mobile [13].

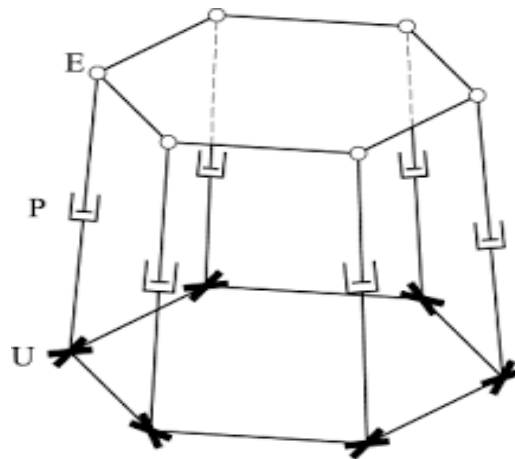


Figure II. 1: Modélisation géométrique de la plate-forme de Gough-Stewart [14].

La plateforme de Gough-Stewart est un mécanisme sophistiqué et polyvalent, utilisant des vérins prismatiques et des articulations complexes pour obtenir un contrôle précis sur la position et l'orientation de son effecteur mobile [13].

II.2. Création et développement

Dans les années 1800, Augustin Louis Cauchy, pionnier dans l'analyse mathématique, a étudié la raideur d'un « octaèdre articulé » qui est l'ancêtre de l'hexapode [15].



Figure II. 2: Augustin Louis Cauchy [15]

En 1949, V. Eric Gough, ingénieur chez Dunlop en Angleterre, avance dans les recherches et construit un mécanisme parallèle pour tester des pneus sous différentes charges. Quelques années plus tard, en 1965, D. Stewart commence à utiliser une variante de l'hexapode pour des simulateurs de vol [15].

Le robot qu'il a construit sera renommé en son nom la « plateforme de Stewart », que l'on retrouve aussi parfois sous l'appellation plus juste de « plateforme de Gough-Stewart ». Au fur et à mesure des années, l'hexapode a été mis à jour par plusieurs ingénieurs (Klaus Cappel, H. McCallion, etc...) [15].

II.3. Description générale de la plateforme de Stewart

La plateforme Stewart-Gough comporte six membres identiques relient la plateforme mobile à la base fixe par des articulations sphériques aux points B_i et A_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ respectivement [16].

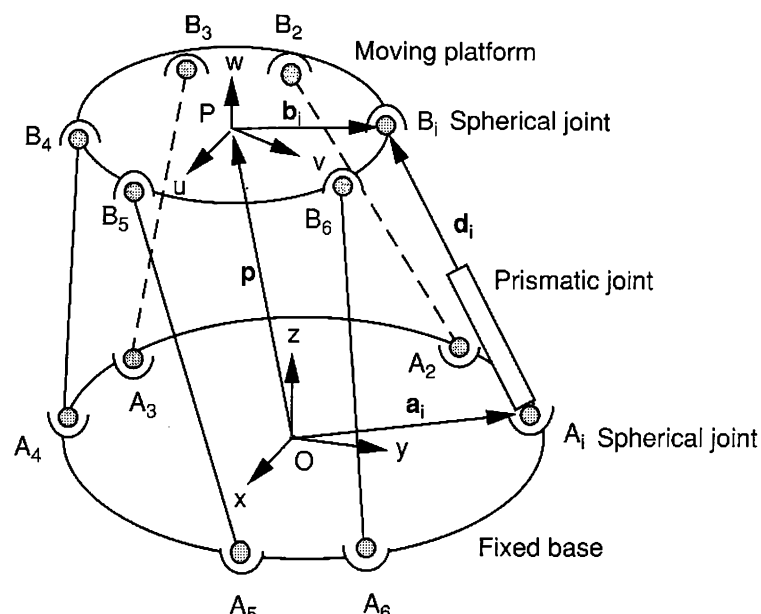


Figure II. 3: Plateforme de Stewart 6SPS à six degrés de liberté [16].

Chaque membre est constitué d'un membre supérieur et d'un membre inférieur reliés par une articulation prismatique. Des vérins hydrauliques peuvent être utilisés pour faire varier les longueurs des articulations prismatiques et donc contrôler l'emplacement de la plateforme mobile [16]. Ainsi, le robot parallèle est un Robot 6SPS.

Dans la figure II.3, les points d'attache A_i appartient à un plan sur la base fixe. Alors que, les B_i pour appartient à un plan sur la plateforme mobile. Cependant, pour une plateforme Stewart générale, ces points d'attache ne se trouvent pas nécessairement sur un seul plan. Il y a 14 corps reliés par 6 articulations prismatiques et 12 articulations sphériques. Le nombre de degrés de liberté (NDL) du mécanisme est donc [16]:

$$NDL = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i = 6(14 - 18 - 1) + (6 + 3 \times 12) = 12 \quad (\text{II.1})$$

Où :

- λ : degrés de liberté de l'espace dans lequel un mécanisme est destiné à fonctionner,
- n : nombre de du corps de mécanisme, y compris le corps fixe.
- j : nombre d'articulations dans un mécanisme, en supposant que toutes les articulations sont binaire.
- f_i : degrés de mouvement relatif autorisés par l'articulation i .

Cependant, il existe 6 degrés de liberté passifs associés aux six membres du SPS. La plateforme mobile possède donc 6 degrés de liberté. A noter qu'une branche SPS peut être remplacée par une branche SPU sans compromettre les degrés de liberté globaux du mécanisme [16].

Puisque les membres sont reliés à la plateforme mobile et à la base fixe par des articulations sphériques, aucun moment de flexion ou couple de torsion ne sera transmis aux membres. La force agissant sur chaque membre est dirigée le long de l'axe longitudinal du membre. Par conséquent, ces membres peuvent être constitués de tiges cylindriques creuses pour produire un manipulateur léger, très rigide et à grande vitesse [16].

II.4. Configurations

La plateforme de Stewart ou plateforme/positionneur hexapode est un type de robot parallèle. Cependant, plusieurs architectures se sont développées au fil du temps pour diverses applications. [13]

II.4.1. Base plane

Comme son nom l'indique, cette configuration impose que tous les points d'attache de la base du manipulateur soient situés dans un même plan. Cette disposition est très répandue, puisqu'elle conduit à une construction plus simple et intuitive [13].

II.4.2. SSM

SSM est l'acronyme de "Simplified Symmetric Manipulator", qui se traduit par "manipulateur symétrique simplifié". Cette configuration, illustrée à la figure II.4, exige que la base et la plateforme soient planes et possèdent toutes deux une forme symétrique par rapport à un axe. [13]

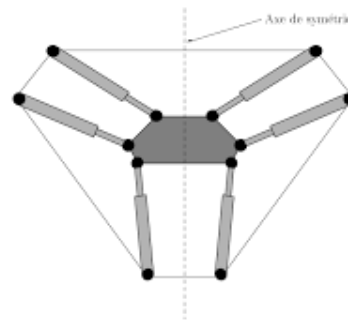


Figure II. 4:Modélisation SSM (vue du dessus) [14].

II.4.3. TSSM

Le TSSM (Triangular Simplified Symmetric Manipulator) est une variante du SSM qui impose que la plate-forme soit triangulaire et symétrique. Pour répondre à cette exigence, la plate-forme doit être un triangle isocèle ou équilatéral. À la figure II.5, qui illustre une configuration TSSM, on observe qu'il n'y a que trois points d'attache pour les actionneurs sur la plate-forme, ce qui les oblige à se regrouper par paires. [13]

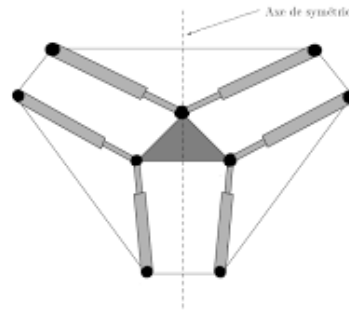


Figure II. 5: Modélisation TSSM (vue du dessus) [14].

II.4.4. MSSM

L'architecture du MSSM (Minimal Simplified Symmetric Manipulator) représente une évolution logique des configurations SSM et TSSM. Dans cette architecture, la base doit également avoir la forme d'un triangle isocèle ou équilatéral. Par conséquent, les actionneurs doivent être groupés par paires sur la base, comme illustré à la figure II.6. Pour éviter que des pattes ne se superposent, deux actionneurs partageant un point d'attache commun sur la base doivent être fixés à des points distincts sur la plate-forme.

Cette architecture ne présente pas seulement un grand intérêt pratique (car de nombreuses plateformes de Gough-Stewart existantes ont une géométrie similaire à celle du MSSM) mais, également, elle facilite, fortement, l'analyse des lieux de singularité [13].

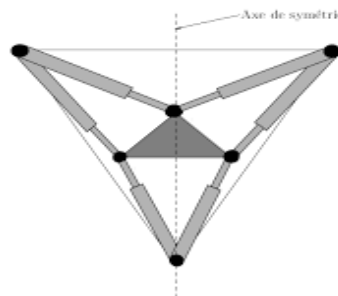


Figure II. 6: Modélisation MSSM (vue du dessus) [14].

II.5. Avantages du Mécanisme

L'architecture de la plateforme de Stewart, offre les avantages suivants :

- **Précision et Rigidité :** La structure parallèle permet une distribution équilibrée des charges et une grande rigidité, ce qui améliore la précision des mouvements [3].

- **Flexibilité** : La possibilité de disposer les points d'attache de manière quelconque offre une grande flexibilité dans la conception et l'adaptation à différentes applications [3].
- **Redondance et Sécurité**: L'indépendance des vérins permet une redondance fonctionnelle. Si un vérin tombe en panne, les autres peuvent compenser partiellement la perte de fonctionnalité, augmentant ainsi la sécurité du système. [3]

II.6. Principales applications de la plateforme de Stewart

Ce type de robot parallèle est couramment utilisé dans des domaines nécessitant une précision et une flexibilité élevées, tels que :

- **Simulateurs de Vol** : La plate-forme peut reproduire les mouvements d'un avion, permettant une simulation réaliste des conditions de vol.



Figure II. 7: Simulateur de vol (CAE Électronique) [17].

- **Plateformes de Stabilisation** : Utilisées pour stabiliser des équipements sensibles, comme des caméras ou des instruments de mesure, contre les vibrations ou les mouvements indésirables.



Figure II. 8: Système de positionnement 6 axes Stewart Platform (ACROME) [18].

- **Machines-outils de Haute Précision** : Utilisées dans l'industrie manufacturière pour des opérations nécessitant une grande précision, comme l'usinage complexe ou la fabrication de composants électroniques.



Figure II. 9: Bras manipulateur fixé sur la plateforme mobile pour assurer la soudure des pipelines [19].

- **Dispositifs de Réalité Virtuelle et Augmentée** : Offrant une immersion complète en reproduisant des mouvements réalistes en réponse aux actions de l'utilisateur.

II.7. Conclusion

La plate-forme de Gough-Stewart est un mécanisme de manipulation sophistiqué et versatile, adapté à de nombreuses applications nécessitant un contrôle précis et une grande adaptabilité. Sa structure basée sur deux plateformes et six vérins indépendants permet de positionner et d'orienter la plateforme

supérieure avec une grande précision, faisant de ce mécanisme un choix privilégié dans de nombreux secteurs technologiques avancés.

Chapitre III

Modélisation Géométrique

Chapitre III : Modélisation Géométrique

III.1. Introduction

La plateforme de Stewart, est un système mécaniques robotisés qui utilise plusieurs actionneurs linéaires parallèles pour contrôler précisément le mouvement d'une plateforme mobile par rapport à une base fixe. La modélisation géométrique directe consiste à déterminer la position et l'orientation de la plateforme mobile en fonction des longueurs des actionneurs, tandis que la modélisation géométrique inverse vise à calculer les longueurs nécessaires des actionneurs pour atteindre une position et une orientation désirées de la plateforme. [13]

Pour résoudre le système de manière efficace, nous nous appuyons sur des équations non linéaires, car les relations entre les longueurs des actionneurs et les coordonnées spatiales de la plateforme ne sont pas linéaires. Cela nécessite l'utilisation de méthodes numériques avancées telles que les méthodes d'itération (comme la méthode de Newton-Raphson) ou d'autres techniques d'optimisation pour converger vers une solution précise et stable.

III.2. Modèle géométrique inverse (MGI)

Un des principaux problèmes dans l'étude du mouvement des manipulateurs est le problème géométrique inverse. Celui-ci consiste à exprimer les variables articulaires en termes de variables cartésiennes du robot. Dans le cas de la plateforme de Gough-Stewart, il s'agit de déterminer les longueurs des actionneurs prismatiques [13] [20] [21].

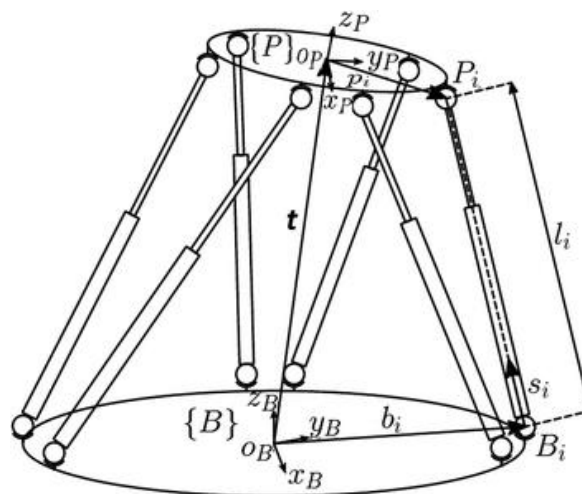


Figure III. 1 : Plateforme de Gough-Stewart convention vectorielle.

Comme illustré dans la figure III.1, les deux systèmes de coordonnées (O, X, Y, Z) et (O', X', Y', Z') sont fixes à la plateforme de base et à la plateforme mobile, respectivement. Les actionneurs, sont désignées par les vecteurs L_i , relie la plateforme mobile à la base fixe à par des articulations sphériques aux points A_i et B_i , avec $i = 1, \dots, 6$. Dans cette plateforme Stewart 6 – 6^p, comme les deux hexagones sont similaires, on peut écrire que [21] :

$$A_i = \mu * B_i \text{ avec } i = 1, \dots, 6 \quad \text{III. 1}$$

avec:

$$B_i = B_{x_i} * x + B_{y_i} * y + B_{z_i} * z \quad \text{avec } i = 1, \dots, 6$$

$$\text{Et } x = [1 \ 0 \ 0]^T, y = [0 \ 1 \ 0]^T, z = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

Dans la plateforme Stewart 6 – 6^p, $B_{z_i} = 0$, donc :

$$B_i = B_{x_i} * x + B_{y_i} * y \quad \text{III. 2}$$

Pour une position P et une orientation R données de la plateforme mobile dans le repère de la base, le vecteur L_i de l'articulation i s'exprime sous la somme vectorielle suivante :

$$L_i = R * A_i + P - B_i \quad \text{III. 3}$$

En injectant la relation (III. 1) dans la relation (III. 3), cette dernière devient :

$$L_i = (\mu * R - E) * B_i + P \quad \text{III. 4}$$

Ainsi, la longueur de chaque articulation peut être obtenue par la relation suivante:

$$L_i^2 = [(\mu * R - E)B_i + P]^T [(\mu * R - E)B_i + P] \quad \text{III. 5}$$

D'où :

$$L_i = \pm \{ [(\mu R - E)B_i + P]^T [(\mu R - E)B_i + P] \}^{1/2} \quad \text{III. 6}$$

Ici, le résultat négatif est sans signification, donc il peut être omis. À partir de (III.6), on peut remarquer que cette plate-forme Stewart peut avoir une propriété de symétrie dans sa cinématique. Cette propriété de symétrie peut être utilisée pour obtenir des solutions analytiques des cinématiques directes de sorte que certaines racines inutiles puissent être omises.

Dans le cadre de ce travail, on a établi un script sous l'environnement Matlab qui permet de trouver la géométrie inverse de la plateforme de Stewart. Pour tester ce programme, on a pris les données géométriques de Ping et al. [21].

Tableau III. 1: Paramètres géométriques d'une plateforme de type Stewart-Gough [21].

DESCRIPTION	QUANTITÉ	UNITÉ
B_1	$[0.8387, 0.5446, 0]^t$	m
B_2	$[0.4495, 1.1126, 0]^t$	m
B_3	$[-0.0349, 0.9994, 0]^t$	m
B_4	$[-1.1883, -0.1678, 0]^t$	m
B_5	$[-0.9135, 0.4067, 0]^t$	m
B_6	$[0.3708, -1.1413, 0]^t$	m
μ	0.618	-

Pour la position $P=[0,0,2]^t$ et une orientation donnée par la matrice suivante:

$$R = \begin{bmatrix} 0.6751 & 0.6589 & -0.3317 \\ -0.5030 & 0.7401 & 0.4464 \\ 0.5397 & -0.1345 & 0.8311 \end{bmatrix}$$

Le modèle géométrique inverse a donné les résultats suivants :

$$L_1 = 2.3180$$

$$L_2 = 2.1959$$

$$L_3 = 2.0236$$

$$L_4 = 1.7939$$

$$L_5 = 1.8033$$

$$L_6 = 2.3748$$

Ces résultats sont identiques à ceux donnés par Ping et al. [21] pour la même configuration de la plateforme de Stewart.

III.3. Modèle géométrique directe (MGD) par la méthode analytique

Dans la modélisation géométrique directe de la plateforme Stewart, les six longueurs L_i ($i = 1, \dots, 6$) dans (III.6) sont données, tandis que R et P sont inconnues. En développant (III. 5), les équations quadratiques suivantes peuvent être obtenues :

$$L_i^2 = P^T P + B_i^T [(\mu R^T - E)(\mu R - E)] B_i + 2B_i^T (\mu R^T - E) P \quad \text{III. 7}$$

En substituant (III.2) dans (III. 7), cela donne :

$$L_i^2 = P^T P + 2 B_{x_i} [X^T (\mu R^T P - P)] + 2 B_{y_i} [Y^T (\mu R^T P - P)] - 2\mu \{ B_{x_i}^2 (X^T R X) + B_{x_i} B_{y_i} (X^T R Y + Y^T R X) + B_{y_i}^2 (Y^T R Y) \} + (\mu^2 + 1)(B_{x_i}^2 + B_{y_i}^2) \quad \text{III. 8}$$

En définissant $W = [W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6]^T$ avec :

$$\begin{cases} W_1 = P^T P \\ W_2 = X^T (\mu R^T P - P) \\ W_3 = Y^T (\mu R^T P - P) \end{cases} \quad \text{III. 9}$$

Et

$$\begin{cases} W_4 = X^T R X \\ W_5 = X^T R Y + Y^T R X \\ W_6 = Y^T R Y \end{cases} \quad \text{III. 10}$$

L'équation (III. 8) devient un ensemble d'équations algébriques linéaires :

$$QW = d \quad \text{III. 11}$$

D'où la matrice $Q = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6]^T$ avec

$$Q_i = [1, 2 B_{x_i}, 2 B_{y_i}, -2\mu B_{x_i}^2, -2\mu B_{x_i} B_{y_i}, -2\mu B_{y_i}^2] \quad \text{III. 12}$$

Et $d = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^T$ avec

$$d_i = L_i^2 - (\mu^2 + 1)(B_{x_i}^2 + B_{y_i}^2) \quad \text{III. 13}$$

Si la matrice Q n'est pas singulière, c'est-à-dire si les six sommets d'une plateforme (soit la base, soit la mobile) ne se trouvent pas sur une courbe quadratique, W peut être obtenu comme :

$$W = Q^{-1}d \quad \text{III. 14}$$

Maintenant que W est connu, les équations (III.9) et (III.10) peut être utilisé pour analyser la pose (à la fois l'orientation et la position) de la plateforme mobile.

Représentons l'orientation de la plateforme mobile par un axe dirigé par un vecteur unitaire $\hat{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ et d'un angle $\theta : \{ \hat{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T, \theta \}$. Par conséquent, la matrice de rotation peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} s_x^2 v\theta + c\theta & s_x s_y v\theta - s_z s\theta & s_x s_z v\theta + s_y s\theta \\ s_x s_y v\theta + s_z s\theta & s_y^2 v\theta + c\theta & s_z s_y v\theta - s_x s\theta \\ s_x s_z v\theta - s_y s\theta & s_z s_y v\theta + s_x s\theta & s_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} \quad \text{III. 15}$$

$s\theta = \sin\theta$, $c\theta = \cos\theta$, and $v\theta = 1 - \cos\theta$ sont utilisés comme des notations abrégées.

Il convient de signaler, que :

$$\begin{cases} W_4 = \mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X} = r_{11} \\ W_5 = \mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{R} \mathbf{X} = r_{12} + r_{21} \\ W_6 = \mathbf{Y}^T \mathbf{R} \mathbf{Y} = r_{22} \end{cases} \quad \text{III. 16}$$

Dans lequel r_{ij} désigne les composantes de la matrice de rotation \mathbf{R} .

Des équations (III. 15) et (III.16) conduit aux trois relations non linéaires suivantes :

$$W_4 = s_x^2 v\theta + c\theta \quad \text{III. 17}$$

$$W_5 = 2 s_x s_y v\theta \quad \text{III. 18}$$

$$W_6 = s_y^2 v\theta + c\theta \quad \text{III. 19}$$

Comme $\hat{\mathbf{s}}$ est un vecteur unitaire, alors :

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1 \quad \text{III. 20}$$

À partir des équations (III.17) et (III. 19) , s_x^2 et s_y^2 peuvent être déterminés comme suit :

$$s_x^2 = \frac{W_4 - c\theta}{v\theta}, s_y^2 = \frac{W_6 - c\theta}{v\theta} \quad \text{III. 21}$$

En substituant l'équation (III. 18) dans l'équation (III.21), et avec quelques manipulations, une équation quadratique en $\cos\theta$ est obtenue,

$$\cos^2\theta - B \cos\theta + C = 0 \quad \text{III. 22}$$

Dans laquelle :

$$B = W_4 + W_6, C = W_6 W_4 - W_5^2/4 \quad \text{III. 23}$$

Ainsi, les paramètres qui décrivent l'orientation peuvent être obtenus comme suit :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} (B - \sqrt{B^2 - 4C}) \quad \text{III. 24}$$

Et si $W_4 \neq c\theta$, alors

$$s_x = \sqrt{\frac{W_4 - c\theta}{v\theta}}, s_y = \frac{W_5}{2s_x v\theta}, s_z = \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2} \quad \text{III. 25}$$

Sinon , si $W_6 \neq c\theta$, alors

$$\mathbf{s}_y = \sqrt{\frac{W_6 - c\theta}{v\theta}} \quad , \quad \mathbf{s}_x = \frac{W_5}{2s_y v\theta} \quad , \quad \mathbf{s}_z = \sqrt{1 - \mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_y^2} \quad \text{III. 26}$$

et dans le cas où $W_4 = W_6 = c\theta$, then alors

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_y = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{s}_z = \mathbf{1} \quad \text{III. 27}$$

Ici, la racine positive de $B^2 - 4C$ est omise, de sorte que les racines complexes inutiles de θ sont évitées. En outre, les racines négatives de $\mathbf{s}_x \mathbf{s}_z$ fournissent quatre représentations différentes pour l'orientation de la plateforme mobile. Ces quatre rotations sont :

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_x \quad \mathbf{s}_y \quad \mathbf{s}_z]^T \quad , \quad \mathbf{s} = [\mathbf{s}_x \quad \mathbf{s}_y - \mathbf{s}_z]^T \quad , \quad \mathbf{s} = [-\mathbf{s}_x \quad -\mathbf{s}_y \quad \mathbf{s}_z]^T \quad , \quad \mathbf{s} = [-\mathbf{s}_x \quad -\mathbf{s}_y - \mathbf{s}_z]^T$$

Par la substitution de ces paramètres dans l'équation (III.15), quatre matrices de rotation de R_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) différentes peuvent être obtenues.

Maintenant que l'orientation de la plateforme mobile est déterminée, la position du son centre est trouvée en utilisant $W_1, W_2, et W_3$.

Si on pose que ;

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{X}^T (\mu \mathbf{R}^T - \mathbf{E})$$

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{Y}^T (\mu \mathbf{R}^T - \mathbf{E})$$

On obtient pour chaque matrice R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) les relations suivantes :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = W_1 \quad \text{III. 28}$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{P} = W_2 \quad \text{III. 29}$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} = W_3 \quad \text{III. 30}$$

Évidemment, (III.29) et (III.30) représentent deux plans et leur intersection est une ligne, donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{r}_1 \quad \text{III. 31}$$

Où

t est le paramètre de la ligne,

\mathbf{r}_0 est une ligne dans le plan engendré par les vecteurs U et V

$$\mathbf{r}_0 = \frac{(V^T V)W_2 - (U^T V)W_3}{(U^T U)(V^T V) - (U^T V)^2} \mathbf{U} + \frac{(U^T V)W_2 - (U^T U)W_3}{(U^T U)(V^T V) - (U^T V)^2} \mathbf{V} \quad \text{III. 32}$$

Et \mathbf{r}_1 est un vecteur unitaire, perpendiculaire à la fois aux vecteurs U et V :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \quad \text{III. 33}$$

Ici " \times " est le produit vectoriel.

r_0 et r_1 sont reliés par :

$$\mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{III. 34}$$

La ligne (III.32) coupe la sphère (III.29) en deux points $P1$ et $P2$, qui sont les solutions de (III. 28-III.30).

$$\mathbf{P1} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad \text{III. 35}$$

$$\mathbf{P2} = \mathbf{r}_0 - t\mathbf{r}_1 \quad \text{III. 36}$$

Et

$$t = \sqrt{W_1 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{r}_0} \quad \text{III. 37}$$

Pour une position articulaire donnée ; le modèle géométrique direct de la plateforme Stewart 6 – 6^p par la méthode analytique donne huit solutions si elle n'est pas dégénérée.

Afin de tester cette méthode, on a implanté cette méthode sous l'environnement Matlab. Comme Input de ce programme on a introduit données géométriques données par du tableau III.1 et les variables articulaires obtenus lors de la section précédente Ainsi, on a obtenu les huit solutions données par le tableau III.2

Tableau III. 2: Huit solutions trouvées pour le cas étudié.

Matrice R	$\{\hat{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T, \theta\}$	Position
$\begin{bmatrix} 0.6751 & -0.5030 & 0.5397 \\ 0.6589 & 0.7401 & -0.1345 \\ -0.3317 & 0.4464 & 0.8311 \end{bmatrix}$	[0.9009, 0.1612, 0.2418, 0.3224]	[-0.6612, 1.3540, 1.3151]
		[-0.6691, -0.2594, -1.8668]
$\begin{bmatrix} 0.6751 & 0.6589 & -0.3317 \\ -0.5030 & 0.7401 & -0.4464 \\ -0.5397 & 0.1345 & 0.8311 \end{bmatrix}$	[0.9009, 0.1612, 0.2418, -0.3224]	[-1.4862, -0.6278, 1.1819]
		[0, 0, -2]
$\begin{bmatrix} 0.6751 & -0.5030 & -0.5397 \\ 0.6589 & 0.7401 & 0.1345 \\ 0.3317 & -0.4464 & 0.8311 \end{bmatrix}$	[0.9009, -0.1612, -0.2418, 0.3224]	[-0.6691, -0.2594, -1.8668]
		[-0.6612, 1.3540, -1.3151]
$\begin{bmatrix} 0.6751 & 0.6589 & -0.3317 \\ -0.5030 & 0.7401 & 0.4464 \\ 0.5397 & -0.1345 & 0.8311 \end{bmatrix}$	[0.9009, -0.1612, -0.2418, -0.3224]	[0, 0, 2]
		[-1.4862, -0.6278, -1.1819]

III.4. Modèle géométrique directe (MGD) par les méthodes numériques

III.4.1. La programmation quadratique séquentielle (SQP)

La programmation quadratique séquentielle, ou SQP d'après l'abréviation anglaise (Successive Quadratic programming), est utilisée pour la résolution des problèmes généraux d'optimisation non linéaire avec contraintes. Les problèmes à résoudre avec cette méthode sont de la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \quad x \in \mathfrak{R}^n \\ \text{Soumise à } & \begin{cases} h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, p \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, l \end{cases} \quad p + l = m \end{aligned} \quad \text{III.38}$$

Où toutes les fonctions du problème sont continues différentiables.

La programmation quadratique séquentielle basée sur la formulation itérative et la solution de sous problème de la programmation quadratique, on obtient le sous problème en utilisant une approximation quadratique de Lagrangien et par linéarisation des contraintes.

Alors on peut écrire le sous problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{d} + \nabla_f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} & \mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n \\ \text{sous :} \\ \nabla_{h_i}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + h_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0 & i = 1, \dots, p \\ \nabla_{g_i}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0 & i = 1, \dots, k \end{cases} \quad \text{III.39}$$

Où B est une approximation du hessien du Lagangien. B peut être obtenue par une approximation du type quasi-Newton de cette matrice hessienne, en particulier d'après la méthode de BFGS. L'algorithme général de SQP peut être décrit comme suit :

L'algorithme général de SQP

1. Soit $k=0$. Initialiser $x^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ et $\mu^{(k)}$. Initialiser la matrice hessienne H du lagrangien.
2. Calculer $f(x^{(k)})$, $\nabla_f(x^{(k)})$, $g_i(x^{(k)})$, $\nabla_{g_i}(x^{(k)})$, $h_i(x^{(k)})$, $\nabla_{h_i}(x^{(k)})$
3. Vérifier les conditions de Kuhn-Tucker:

$$\|\nabla_{L(x,\lambda,\mu)}(x^{(k)})\| \leq \varepsilon$$
 avec $\mu \geq 0$
 Si cette condition est satisfaite, arrêt. Sinon, continuation à l'étape 4.
4. Résoudre le sous-problème QP correspondant afin d'obtenir une direction de recherche d :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } \frac{1}{2} d^T B^{(k)} d + \nabla_f(x^{(k)})^T d & d \in \mathfrak{R}^n \\ \text{sous :} & \\ \nabla_{h_i}(x^{(k)})^T d + h_i(x^{(k)}) = 0 & i = 1, \dots, p \\ \nabla_{g_i}(x^{(k)})^T d + g_i(x^{(k)}) \leq 0 & i = 1, \dots, k \end{array} \right.$$
5. Effectuer une recherche dans la direction d par une méthode donnée afin d'obtenir l'intensité de déplacement $\alpha^{(k)}$.
6. Poser $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d$ et $k = k + 1$.
7. Si la tolérance par rapport à la stationnarité de la solution est remplie, arrêt. Sinon, retour à l'étape 2.

De nombreuses variantes de la Programmation Quadratique Successive (SQP) existent. Lorsque le nombre d'équations est important et que le nombre de degrés de liberté est faible, les méthodes de SQP basées sur un hessien réduit sont performantes. Toutefois, le nombre de contraintes d'inégalité peut rester important et la solution du problème QP est primordiale pour l'amélioration de ces méthodes.

III.4.2. Solution numérique

Pour générer une solution numérique au problème cinématique direct, supposons que les longueurs des membres $L = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6]^T$ sont données et que le problème consiste à obtenir la position $P^A = [P_x, P_y, P_z]^T$ et l'orientation de la plateforme mobile représentée par les paramètres de vis $\{\hat{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T, \theta\}$. Par conséquent, sept variables inconnues peuvent être encapsulées par le vecteur x comme [20]

$$x = [P_x, P_y, P_z, s_x, s_y, s_z, \theta]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T \tag{III. 40}$$

Le vecteur de position inconnue P et la matrice d'orientation $R(x)$ peuvent être déterminés en fonction de x par les équations suivantes [20] :

$$P(x) = [x_1, x_2, x_3]^T \quad \text{III. 41}$$

$$R(x) = \begin{bmatrix} x_4^2 v x_7 + c x_7 & x_5 x_4 v x_7 - x_6 s x_7 & x_6 x_4 v x_7 + x_5 s x_7 \\ x_5 x_4 v x_7 + x_6 s x_7 & x_5^2 v x_7 + c x_7 & x_5 x_6 v x_7 - x_4 s x_7 \\ x_6 x_4 v x_7 - x_5 s x_7 & x_5 x_6 v x_7 + x_4 s x_7 & x_6^2 v x_7 + c x_7 \end{bmatrix} \quad \text{III.42}$$

La solution numérique consiste à trouver le vecteur x qui minimise le programme non linéaire suivant [20] [22] :

$$\text{Min } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (-L_i^2 + [R(x)B_i + P(x) - A_i]^T [R(x)B_i + P(x) - A_i])^2$$

Soumise à

$$\begin{cases} -L^2 + [R(x)B_i + P(x) - A_i]^T [R(x)B_i + P(x) - A_i] = 0 & j = 1, \dots, 6 \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{III.43}$$

Pour résoudre ce problème non linéaire avec contraintes, la fonction du Matlab *fmincon* est utilisée. L'algorithme de SQP est choisi comme algorithme de résolution et on a pris une précision de 10^{-5} .

Afin de vérifier le préprogramme élaboré, au cours de ce travail, pour la résolution numérique du MGD de la plateforme de Stewart, on a pris les mêmes données que celles de la section précédente. Comme vecteur initiale, on a pris $x_0 = [3; 1; 1; -0.2; -0.6; 0; 0]^t$.

Le programme a donné la solution suivante :

$$P = \begin{bmatrix} -0.6613 \\ 1.3539 \\ 1.3152 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0.6752 & -0.5029 & 0.5396 \\ 0.6588 & 0.7402 & -0.1345 \\ -0.3317 & 0.4463 & 0.8311 \end{bmatrix}$$

Cette solution est très proche de la première solution trouvée par la méthode analytique.

III.5. Conclusion

En résumé, les calculs de géométrie dans les plateformes Stewart sont fondamentaux pour contrôler efficacement le mouvement et la position d'objets dans des environnements robotiques variés. La résolution de ces systèmes par des équations non linéaires représente une approche mathématique avancée nécessaire à la mise en œuvre et à l'optimisation de telles plateformes dans des applications réelles, allant de la simulation virtuelle à la robotique industrielle avancée.

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail met en évidence l'importance des robots parallèles, et en particulier de la plateforme de Stewart, dans diverses applications industrielles et technologiques. La plateforme de Stewart se distingue par sa capacité à offrir une grande précision et adaptabilité, ce qui la rend indispensable dans des domaines nécessitant un contrôle de mouvement sophistiqué. La modélisation géométrique, tant directe qu'inverse, est cruciale pour exploiter pleinement les capacités de cette plateforme.

Cependant, la modélisation géométrique directe de la plateforme de Stewart suscite, encore, des discussions et des débats. En effet, la complexité mathématique de cette modélisation est devenue une lacune sérieuse qui empêche l'utilisation de cette plateforme dans de nombreuses implémentations à grande vitesse, en temps réel et en ligne [20].

Dans ce travail, deux méthodes de résolution du modèle géométrique direct d'une plateforme Stewart du type 6-6^P sont présentées. Sur la lumière des résultats trouvés, les constatations suivantes peuvent être dégagées :

- La méthode analytique donne huit solutions du MGD. En revanche, cette méthode exige que la matrice Q ne soit pas singulière.
- La méthode numérique, basée sur la programmation non linéaire, donne une seule solution et cette solution est un optimum local. Ainsi, la solution trouvée dépend du choix du vecteur initial. Il convient de signaler, qu'un mauvais choix de ce vecteur peut conduire à la convergence de l'algorithme de résolution.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] N. E. H. MAIZI, «Coordination bio-inspirée d'un essaim de robots :application au problème de recherche et de sauvetage,» Mémoire de Fin d'études Master en Systèmes et technologie de l'information et de la communication - Université de Guelma, 2020.
- [2] «technique de l'ingénieur,» 17 2 2024. [En ligne]. Available: <https://www.techniques-ingenieur.fr/>.
- [3] J.-P. Merlet, *Parallel Robots*, Springer Netherlands, 2006.
- [4] J. M. E. Hernández, CONTRIBUTION TO NONLINEAR ROBUST CONTROL OF PARALLEL KINEMATIC MANIPULATORS: DESIGN AND EXPERIMENTS, Universidad Politécnica de Tulancingo, 2020/12/04.
- [5] F. PACCOT, Contributions à la commande dynamique référencée capteur de robots parallèles, Thèse de Doctorat Université Blaise PASCAL – Clermont II, 2009.
- [6] B. S. D. ARAS, «univ-blida,» 2022. [En ligne]. Available: <https://di.univ-blida.dz/jspui/bitstream/123456789/20660/1/Finale%20pfe.pdf>. [Accès le avril 2024].
- [7] [En ligne]. Available: <https://www.kuka.com/fr-be/produits-et-prestations/syst%C3%A8mes-de-robots/robots-industriels/robots-delta-kr>. [Accès le 16 05 2024].
- [8] Clavel.R, *Dynamic_analysis_of_Clavel's_Delta_parallel_robot*, 1988.
- [9] [En ligne]. Available: <https://industrie-du-futur.info/les-robots-industriels/>. [Accès le 04 Juin 2024].
- [10] Y. a. G. F. Zhao, «Inverse dynamics of the 6-dof out-parallel manipulator by means of the principle of virtual work.,» *Robotica*, vol. 27, n° 12, p. 259–268., 2009.
- [11] R. & C. S. & C. D. & W. P. Ur-Rehman, «Path placement optimization of manipulators based on energy consumption: Application to the orthoglide 3-axis,» *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, p. 1125–1141, 2010.
- [12] [En ligne]. Available: <https://www.usine-digitale.fr/article/renault-investit-25-millions-d-euros-dans-un-simulateur-pour-la-voiture-autonome.N584088>. [Accès le 04 juin 2024].
- [13] k. doyon, ANALYSE VECTORIELLE DES LIEUX DE SINGULARITÉ DE LA PLATE-FORME DE GOUGH-STEWART, QUÉBEC: FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE - UNIVERSITÉ LAVAL, 2012.
- [14] Mayer St-Onge, «Étude et représentation des lieux de singularité de la plate-forme de Gough-Stewart,» Québec, 1997, p. 134 p.
- [15] «symetrie,» 2024. [En ligne]. Available: <https://symetrie.fr/hexapodes-fr/generalites/histoire-de-lhexapode/#:~:text=UTILISATIONS,et%20spatiaux%2C%20la%20chirurgie%20orthop%C3%A9dique%E2%80%A6>. [Accès le mai 2024].
- [16] L.-W. TSAI, *ROBOT ANALYSIS The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, 1999.
- [17] «CAE,» Produits de simulation aéronautique, [En ligne]. Available: <https://www.cae.com/fr/sim.products/home.asp>. [Accès le mai 2024].

Références bibliographiques

- [18] «directindustry,» ACROME, [En ligne]. Available: <https://www.directindustry.fr/prod/acrome/product-244672-2501893.html>. [Accès le mai 2024].
- [19] «mdpi,» KUKA, [En ligne]. Available: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/15/5827>. [Accès le mai 2024].
- [20] H. D.Taghirad, Parallel Robots Mechanics and Control, CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business, 2013.
- [21] P. J. a. H. Wu, «A Closed-Form Forward Kinematics Solution for the 6–6p Stewart Platform,» *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 14, n° 14, pp. 522-526, AUGUST 2001.
- [22] S. kenouche, «univ-biskra,» 09 novembre 2018. [En ligne]. Available: <http://sites.univ-biskra.dz/kenouche/>. [Accès le juin 2024].