

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS DE MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
FILIERE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



UNIVERSITE  
Abdelhamid Ibn Badis  
MOSTAGANEM

Thèse Présentée par :

**Souad SALMI**

Pour l'Obtention du Diplôme de :

**Doctorat LMD**

*Filière : Mathématiques Appliquées*

*Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la décision*

---

## Contribution à l'Analyse des Modèles Fractionnaires Bidimensionnels

---

*Date de soutenance : 17/10/2024*

*Devant le jury composé de :*

<b>Président :</b>	Abdessamad AMIR	Professeur	UMAB
<b>Examineur :</b>	Boubakeur BENAHMED	Professeur	NHSM, Alger
<b>Examineur :</b>	Mohammed Amine GHEZZAR	MCA	NHSM, Alger
<b>Examineur :</b>	Laïd DJILALI	MCA	UMAB
<b>Directeur de thèse :</b>	Djillali BOUAGADA	Professeur	UMAB, Alger

Année Universitaire : 2023 / 2024

D  
O  
C  
T  
O  
R  
A  
T

---

## Dédicaces

*Je dédie ce travail*

*à mes chers parents,*

*à mon mari et à mon fils adoré.*

*Votre soutien et votre amour inconditionnels  
sont ma source d'inspiration et de force.*

---

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à ALLAH pour nous avoir donné la force, le courage et la détermination nécessaire pour accomplir ce projet de thèse.

Je souhaite exprimer ma plus sincère reconnaissance envers mon directeur de thèse, Monsieur Djillali BOUAGADA, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem pour son engagement indéfectible, son expertise inestimable et ses conseils éclairés qui ont été d'une importance capitale pour l'aboutissement de cette thèse. Sa disponibilité, son soutien constant et sa bienveillance ont été des piliers essentiels qui m'ont permis de surmonter les défis rencontrés durant cette période de recherche. Je suis profondément reconnaissant pour le temps et l'effort qu'il a consacré à superviser ce travail, ainsi que pour ses précieux commentaires et suggestions qui ont enrichi la qualité de ce projet. Merci infiniment, Professeur Djillali BOUAGADA, pour avoir été un mentor exceptionnel et un guide éclairé tout au long de ce voyage académique.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Monsieur. Abdessamad AMIR, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, pour m'avoir honoré en acceptant de présider le jury de ma thèse. Sa présence en tant que président du jury a été une grande chance et son expertise a été très précieux pour cette soutenance.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur Mohammed Amine GHEZZAR Docteur à l'école Nationale Supérieure de Mathématiques, Monsieur Laïd DJILALI Docteur à l'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, Monsieur Boubakeur BENAHMED Professeur à l'école Nationale Supérieure de Mathématiques pour avoir accepté d'occuper ce rôle. Leurs contributions en tant que membres du jury a été d'une importance cruciale pour le succès de cette thèse.

---

# Liste des Publications

## Revues Internationales

- 1- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA : Stability Margins for Generalized Fractional Two-Dimensional State Space Models. Archives of Control Sciences, **34 (1)**, 2024, 23–37, (Catégorie A, Thomson reuters).
- 2- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Stability Robust for Fractional Generalized Multi-Dimensional State Space Models, International Journal of Computer Mathematics, **101 (4)**, 2024, 432-446 (Catégorie A).

## Conférences Nationales et Internationales

- 1- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Marge de stabilité pour les modèles bidimensionnels d'ordre non entier à espaces d'états généralisés, 2<sup>ème</sup> Doctoriale des Mathématiques Appliquées, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, 23 juin 2022.
- 2- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Sur une classe de modèles incertains fractionnaires à deux dimensions, La journée des équations aux dérivées partielles et applications, Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes, 30 juin 2022.
- 3- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Sur la stabilité des systèmes d'espaces d'états à deux dimension, National Conference on Mathematics and Applications, Abdelhafid Boussouf University Center of Mila, 29–30 November 2022.
- 4- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Sur l'analyse des modèles fractionnaires incertains bidirectionnels, 3<sup>ème</sup> Doctoriale des Mathématiques Appliquées, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, 20 juin 2023.
- 5- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. On The Stability Radius of a Fractional Generalized Multidimensional State Space Systems, University Politehnica of Bucharest, Center for Research and Training in Innovative Techniques of Applied Mathematics in Engineering "Traian Lalescu" (CiTi) in collaboration with "1 Decembrie 1918" University of Alba Iulia, Romania, 28–30 June 2023.
- 6- Souad SALMI and Djillali BOUAGADA. Une nouvelle approche sur la stabilité robuste dans les systèmes fractionnaires multidimensionnels, The First National Conference on

---

Differential Geometry and Dynamical Systems DGDS 2023, Relizane University, 19–20  
December 2023.

---

# Notations

$\otimes$	Produit de Kronecker.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace des vecteurs réels de dimension $n$ .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espace des matrices de dimension $n \times m$ .
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$ .
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs complexes de dimension $n$ .
$\mathbb{C}_-$	Ensemble des nombres complexes à parties réelles négatives.
$A^\top$	Transposée d'une matrice $A$ .
$A^{-1}$	Inverse d'une matrice $A$ .
$\sigma(A)$	Spectre de la matrice $A$ .
$X(s)$	Transformée de Laplace de la fonction $x(t)$ .
$X(z)$	Transformée $Z$ de la fonction $x(t)$ .
$Re(z)$	Partie réelle du nombre complexe $z$ .
$Im(z)$	Partie imaginaire du nombre complexe $z$ .
$\mathcal{LMIs}$	(En anglais) Linear Matrix inequalities.
$\ G\ _2$	Norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert $G$ .
$\ G\ _\infty$	Norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert $G$ .
$eig(A)$	Valeurs propres de la matrice $A$ .

# Table des matières

<b>Dédicaces</b>	<b>2</b>
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Liste des Publications</b>	<b>4</b>
<b>Notations</b>	<b>6</b>
<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>1 Principes fondamentaux de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire</b>	<b>13</b>
1 Introduction . . . . .	13
2 Matrices particulières . . . . .	13
2.1 Décomposition en valeurs singulières . . . . .	14
2.2 Produit de Kronecker . . . . .	15
3 Analyse des Inégalités Matricielles Linéaires . . . . .	16
3.1 La convexité . . . . .	17
3.2 Lemme du complément de Schur . . . . .	17
4 Quelques concept essentiels sur le calcul fractionnaire . . . . .	18
4.1 Fonctions Spéciales . . . . .	18
4.2 Intégration Fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	19
4.3 Dérivation Fractionnaire . . . . .	19
4.4 Relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo	20
5 Transformé de Laplace unidimensionnel . . . . .	20
6 La $\mathcal{Z}$ - transformée unidimensionnel . . . . .	22
6.1 Quelques propriétés principales de la $\mathcal{Z}$ -transformée . . . . .	23
7 Systèmes bidimensionnels . . . . .	24

7.1	Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser discret . . . . .	24
7.2	Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser continu . . . . .	24
7.3	Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini F-M discret : . . . . .	24
7.4	Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini F-M continu : . . . . .	25
8	Applications . . . . .	25
8.1	Équation des ondes fractionnaires . . . . .	25
8.2	Modélisation des Circuits Électriques . . . . .	26
9	Conclusion . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Marges de stabilité et <math>\mathcal{D}</math>-stabilité pour les modèles 2D fractionnaires à espace d'états généralisés.</b>	<b>29</b>
1	Introduction . . . . .	29
2	Transformée de Laplace bidimensionnel . . . . .	30
3	$\mathcal{Z}$ -Transformé bidimensionnel . . . . .	30
4	Réalisation minimale . . . . .	31
5	Fonction de transfert . . . . .	32
6	Description du modèle . . . . .	34
7	Marges de stabilité pour les systèmes 2D d'ordre fractionnaires . . . . .	35
8	Région $\mathcal{LMJ}$ et $\mathcal{D}$ -stabilité pour les systèmes fractionnaires bidimensionnels . . .	42
8.1	$\mathcal{D}$ -stabilité du système 2D fractionnaire en boucle ouverte . . . . .	43
8.2	$\mathcal{D}$ -stabilité du système 2D fractionnaire en boucle fermée . . . . .	44
9	Exemples numériques . . . . .	44
10	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>la Stabilité Robuste pour les Modèles d'Espaces d'États Multidimensionnels Généralisés avec des Dérivées Fractionnaires</b>	<b>48</b>
1	Introduction . . . . .	48
2	Préliminaires . . . . .	49
2.1	La Transformée de Laplace multidimensionnel . . . . .	49
2.2	La $\mathcal{Z}$ -Transformée multidimensionnel . . . . .	50
2.3	Inégalités de Riccati pour le cas des systèmes à temps continu . . . . .	50
2.4	Inégalités de Riccati pour le cas des systèmes à temps discret . . . . .	50
3	Formulation du Problème . . . . .	50
4	Marges de stabilité pour les systèmes dD fractionnaires en temps continu et discret . . . . .	52
4.1	Lemme Borné Réel pour les Systèmes dD Fractionnaire à temps continu .	55
4.2	Lemme borné réel pour les systèmes dD fractionnaires à temps discret . .	57



4.3	Évaluation de la Marge de Stabilité . . . . .	59
5	Région $\mathcal{LMJ}$ et $\mathcal{D}_d$ stabilité des systèmes multidimensionnels fractionnaires . . .	60
5.1	Processus pour Assurer la Stabilité Stricte des Systèmes Multidimensionnels dans certaine région . . . . .	61
6	Exemples . . . . .	62
7	Conclusion . . . . .	64

**Conclusion générale** **65**

**Bibliographie** **67**

# Introduction

Les mathématiques, en tant que langage universel de la science, fournissent un cadre analytique et structuré pour explorer et comprendre les phénomènes du monde qui nous entoure. Leur force réside dans leur capacité à transformer des concepts abstraits en outils tangibles capables de dévoiler des mécanismes cachés et des relations fondamentales dans divers domaines telle que la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie et bien d'autres.

la théorie de contrôle, est un domaine d'une importance capitale dans la gestion et l'optimisation des systèmes dynamiques [34, 59]. Cette théorie transforme l'évolution d'un système, initialement déterminé par des paramètres et des commandes bien choisis, vers un état final spécifiquement visé. Cela peut impliquer une panoplie d'objectifs, allant de la stabilité et de la réactivité optimale à la minimisation de coûts ou à l'atteinte de performances cibles.

La vie quotidienne est régie par des phénomènes dynamiques qui nécessitent des outils mathématiques sophistiqués pour être compris. la modélisation occupe une place centrale, offrant un moyen de traduire ces phénomènes à un système en équations. Cette traduction revêt différentes formes, allant des systèmes en équations différentielles ordinaires aux dérivées partielles, en passant par des dérivées fractionnaires [58, 52].

De nombreux phénomènes réels, tels que la diffusion anormale, la croissance fractale et les processus de mémoire longue ne peuvent pas être décrits avec précision par des équations différentielles avec une dérivée classique. La dérivation d'ordre fractionnaire constitue une voie éminente pour appréhender avec acuité, ces dynamiques avec complexité élevée. Le calcul fractionnaire, en effet élargir la palette d'outils analytiques traditionnels en offrant une perspective nouvelle et captivante sur les opérations fondamentales de dérivation et d'intégration [52, 67, 61, 67]. Les applications du calcul fractionnaire s'étendent dans la modélisation des processus de diffusion dans les matériaux, la présentation des comportements anormaux dans les systèmes biologiques, etc. Cette flexibilité en fait un outil inestimable dans la boîte à outils des mathématiques des scientifiques et des ingénieurs qui cherchent constamment des méthodes plus exactes pour comprendre et prédire le monde qui nous entoure.

Ces dernières décennies, une attention considérable a été focalisé aux systèmes bidimensionnels et multidimensionnels grâce à leurs applications dans plusieurs disciplines en ingénieries, en automatique dans les sciences biologiques, elle est essentielle pour modéliser les interaction au sien des écosystèmes, les dynamiques de population et les processus biochimiques. Ces systèmes sont caractérisés par la propagation de l'information dans plusieurs directions indépendantes [22, 50].

Le problème de la stabilité et de la stabilité robuste pour les systèmes 2D et multidimensionnels est une question très essentielle et cruciale en théorie du contrôle plus précisément

pour le contrôle des systèmes d'ordre fractionnaire en raison des propriétés de mémoire et des comportements à long terme qui nécessitent une compréhension approfondie de la stabilité pour assurer leur fonctionnement prévisible et fiable [46, 39, 69, 14].

Dans le domaine des systèmes de contrôle, certains systèmes sont naturellement stables, ce qui signifie qu'ils peuvent résister aux perturbations et revenir à un état stable. D'autres, cependant, sont plus sensibles aux perturbations qui ne peuvent pas être anticipées avec précision ou qui sont inconnues au moment de la conception du système. Les perturbations peuvent provenir de diverses sources, telles que des variations dans les conditions environnementales, des défaillances matérielles, des erreurs de mesure, etc. Par exemple, dans le domaine financier, certains systèmes financiers sont sensibles aux changements économiques imprévisibles, susceptibles d'entraîner des situations financières difficiles. Dans le domaine des communications, les réseaux de communication peuvent se fragiliser face à des pannes matérielles inattendues ou à des attaques malveillantes. En automatisation industrielle, les systèmes de contrôle automatisés peuvent devenir fragiles en cas de dysfonctionnement des capteurs ou des actionneurs.

Les systèmes d'ordre fractionnaire qui sont fragiles et qui perdent leur stabilité en raison de perturbations représentent en effet un domaine de recherche complexe et ouvert dans la théorie du contrôle. La principale contribution de cette thèse comprend l'analyse de la stabilité robuste des modèles fractionnaires bidimensionnelles et multidimensionnelles.

## Structuration de la Thèse :

Dans cette thèse, nous abordons deux axes de recherche centraux développés autour des systèmes à représentation d'état, comme exploré dans [12]. Notre attention se porte spécifiquement sur la question cruciale de la marge de stabilité et de la stabilité au sein d'une région  $\mathcal{LMJ}$  dans l'espace complexe. L'objectif principal de ce travail est de compléter et généraliser les contributions existantes dans le domaine de la stabilité robuste en théorie de contrôle.

Notre travail est organisé comme suit,

### Chapitre 1 :

Ce premier chapitre fournit une base théorique de la théorie des matrices tel que, des inégalités matricielles linéaires  $\mathcal{LMJ}$ s, ainsi que quelques définitions nécessaires et concepts essentiels en calcul fractionnaire. Il répertorie également quelques modèles des systèmes bidimensionnels de Fornasini-Marchesini et de Roesser pour les cas continu et discret. On terminera ce chapitre par quelques exemples d'applications pour les systèmes bidirectionnels d'ordre fractionnaire.

## Chapitre 2 :

Ce chapitre se focalise sur l'étude d'une nouvelle catégorie de systèmes bidimensionnels de Roesser d'ordre fractionnaire avec un espace d'états généralisés. Nous exposons ainsi nos résultats, qui englobent l'établissement de nouvelles conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, concernant la marge et la région de stabilité dans l'espace complexe pour le système considéré. Ces résultats reposent sur l'utilisation des Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ) et le produit de Kronecker.

## Chapitre 3

Ce chapitre représente une étape cruciale de notre étude, où nous élargissons nos investigations à une nouvelle classe de systèmes multidimensionnels d'ordre fractionnaire à espace d'état généralisé. En se basant sur les résultats du chapitre précédent, nous généralisons nos conditions et résultats, offrant ainsi une perspective élargie et adaptable à cette nouvelle catégorie de systèmes. L'analyse approfondie des Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ) et du produit de Kronecker demeure au cœur de cette généralisation, renforçant la robustesse et l'applicabilité de nos conclusions.

# Principes fondamentaux de la théorie des matrices et du calcul fractionnaire

## 1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions clés de la théorie des matrices, ainsi que les inégalités matricielles linéaires. De plus, nous présentons quelques concepts fondamentaux en calcul fractionnaire. Nous exposons également deux transformations essentielles : la transformation de Laplace pour les systèmes à temps continu et la  $\mathcal{Z}$ -transformée pour les systèmes à temps discret, en mettant en avant quelques-unes de leurs propriétés. Ensuite, nous abordons quelques systèmes bidimensionnels, en explorant notamment les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini Marchisini. En conclusion de ce chapitre, nous illustrons quelques applications des modèles bidimensionnels d'ordre fractionnaire dans certains domaines.

## 2 Matrices particulières

Dans cette section, on va mettre en lumière l'importance de certaines matrices particulières qui joueront un rôle central tout au long de ce chapitre.

**Définition 2.1.** [28] Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite définie positive si pour tout vecteur non nul  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  on a  $x^\top A x > 0$ .

**Définition 2.2.** [28] Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite définie négative si pour tout vecteur non nul  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  on a  $x^\top A x < 0$ .

**Définition 2.3.** [28] Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est dite symétrique si elle égale à sa propre transposé  $A = A^\top$ .

**Définition 2.4.** [28] Une matrice en blocs est une matrice qui peut être subdivisées en blocs rectangulaires de dimensions inférieures.

**Définition 2.5.** [28] une matrice diagonale par blocs est une matrice carrée qui possède des matrices blocs carrée sur la diagonale principale.

## 2.1 Décomposition en valeurs singulières

La factorisation en valeurs singulières (Singular Value Décomposition, SVD en anglais) est une technique mathématique importante en algèbre linéaire et en traitement de données. Elle est généralement utilisée pour calculer l'inverse généralisé d'une matrice. En essence, la SVD permet de décomposer des matrices en composantes plus simples, ce qui en fait un outil puissant pour comprendre et traiter des données complexes.

**Définition 2.6.** [72] Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Alors, il existe trois matrices  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tel que la matrice  $A$  possède une factorisation sous la forme :  $A = USV^T$  où

- Les colonnes de  $U$  sont les vecteurs propres (normalisés) de la matrice  $AA^T$  (ie.  $UU^T = U^T U = I$ )
- Les colonnes de  $V$  sont les vecteurs propres (normalisés) de la matrice  $A^T A$  (ie.  $VV^T = V^T V = I$ )
- La matrice  $S$  contient dans ses coefficients diagonaux les valeurs singulières de la matrice  $A^T A$  tel que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_k$  avec  $k = \text{rank}(A)$ ,

$$S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

### Pseudo-Inverse (Inverse Généralisé)

Le pseudo-inverse connu sous le nom d'inverse généralisé ou Moore-Penrose pseudo-inverse, est une généralisation de l'inverse d'une matrice. Elle est utilisée pour inverser des matrices qui ne sont pas nécessairement carrées ou qui ont un rang incomplet.

**Définition 2.7.** [1] Considérons une matrice  $A$  de dimensions  $m \times n$  avec un rang  $k$  et sa décomposition en valeurs singulières  $A = USV^T$ . La matrice  $A^+ = VS^+U^T$  est connue sous le nom de matrice pseudo-inverse, également appelée l'inverse généralisé de Moore-Penrose de  $A$ . La matrice  $S^+$  est définie de la manière suivante

$$S^+ = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

Où

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_k}\right).$$

## 2.2 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est une opération fondamentale en algèbre linéaire qui nous permet de combiner des matrices de manière puissante. Examinons maintenant sa définition et quelques-unes de ses propriétés clés pour mieux appréhender son importance.

**Définition 2.8.** [28, 11] *Le produit de Kronecker de deux matrices  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  notée  $A \otimes B$  est une matrice de taille  $pm \times qn$  définie par*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{pmatrix}.$$

### Quelques propriétés sur le produit de Kronecker

Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  et  $C \in \mathbb{R}^{r \times s}$

1 Associativité :

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C).$$

2 Distributivité par rapport à l'addition :

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$

3 La distributivité par rapport à l'opérateur de transposition

$$(A \otimes B)^{\top} = A^{\top} \otimes B^{\top}.$$

4 Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Alors,

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1} \\ \det(A \otimes B) &= \det(A)^m \det(B)^p \\ \text{tr}(A \otimes B) &= \text{tr}(A)\text{tr}(B) \end{aligned}$$

### 3 Analyse des Inégalités Matricielles Linéaires

Les  $\mathcal{LMJ}$ s jouent un rôle essentiel dans l'étude de la stabilité des systèmes de contrôle. Ces inégalités ont été progressivement intégrées dans des contextes plus larges, tel que la conception de régulateurs robustes qui garantissent non seulement la stabilité mais aussi les performances désirées même en présence des incertitudes. Par exemple, la méthode de conception des régulateurs  $\mathcal{H}_\infty$  repose sur les  $\mathcal{LMJ}$ s pour minimiser les effets des perturbations tout en préservant la stabilité du système. Dans cette section, on va rappeler quelques définitions essentielles, propriétés et notions de base sur les  $\mathcal{LMJ}$ s.

**Définition 3.1.** [20, 11] Une inégalité matricielle linéaire notée  $\mathcal{LMJ}$  est une expression sous la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \succ 0, \quad (1.2)$$

où  $(F_i)_{i=1,n}$  sont des matrices réelles symétriques et  $x = (x_i)_{i=1,n}$  est un vecteur de valeurs inconnues.

**Remarque 3.1.** L'inégalité " $\succ$ " dans (1.2) signifie "définie positive" c'est à dire  $u^\top F(x)u \succ 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$   $u \neq 0$ , ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur de  $F(x)$  est positive.

**Exemple 3.1.**

$$\begin{bmatrix} x_2 - 3 & x_1 + 2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

est une  $\mathcal{LMJ}$  qui comporte deux variables,  $x_1$  et  $x_2$ . On peut également exprimer cette  $\mathcal{LMJ}$  de la manière suivante.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0.$$

**Proposition 3.1.** [11] Si un système contient plusieurs  $\mathcal{LMJ}$ s, alors on peut combiner ces  $\mathcal{LMJ}$ s en une seule. Considérons  $k$  applications affines  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  de  $\mathbb{R}$  vers un espace de matrices symétriques d'ordre  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Ainsi, les  $\mathcal{LMJ}$ s

$$F_1 \succ 0, F_2 \succ 0, \dots, F_k \succ 0 \quad (1.3)$$

sont équivalents à une  $\mathcal{LMJ}$ , impliquant une matrice de taille  $(n_1 + n_2 + \dots + n_k) \times (n_1 + n_2 + \dots + n_k)$



$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{bmatrix} \succ 0. \quad (1.4)$$

### 3.1 La convexité

La convexité est l'une des propriétés importantes des  $\mathcal{LMJ}$ s. Cette caractéristique fondamentale confère aux  $\mathcal{LMJ}$  un pouvoir remarquable pour modéliser et résoudre une vaste gamme de problèmes d'optimisation.

**Définition 3.2** (Ensembles Convexes). [11] *Un ensemble  $C$  est dit convexe si*

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in C : (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in C. \quad (1.5)$$

Pour  $x_1$  et  $x_2$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle le segment reliant  $x_1$  à  $x_2$  l'ensemble

$$[x_1, x_2] = \{(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 : \lambda \in [0, 1]\}. \quad (1.6)$$

**Définition 3.3** (Fonction convexe). [11] *Soit  $C$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  est dite convexe si*

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in C : f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \quad (1.7)$$

**Définition 3.4** (Contrainte  $\mathcal{LMJ}$  convexe). [11] *L' $\mathcal{LMJ}$  (1.2) est une contrainte convexe sur la variable  $x$  si l'ensemble  $C = \{x : F(x) > 0\}$  est convexe.*

### 3.2 Lemme du complément de Schur

Le lemme du complément de Schur joue un rôle crucial dans la simplification et la résolution des  $\mathcal{LMJ}$ s. Il est utilisé pour transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en des inégalités matricielles linéaires plus simples.

**Lemme 3.1.** [20] *Soient  $Q(x) = Q(x)^\top$ ,  $R(x) = R(x)^\top$  et  $S(x)$  varie de manière affine en fonction de  $x$ . Alors, l' $\mathcal{LMJ}$  :*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^\top & R(x) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (1.8)$$

est équivalent à

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^\top \succ 0. \quad (1.9)$$

## 4 Quelques concept essentiels sur le calcul fractionnaire

Le concept du calcul fractionnaire constitue en effet une généralisation puissante de la dérivation et de l'intégration classique à un ordre arbitraire. Cette généralisation est particulièrement utile pour d'écrire des phénomènes complexes et des systèmes dynamiques dont le comportement ne peut pas toujours être pleinement appréhendé à l'aide des dérivées classiques. Ainsi, le calcul fractionnaire offre un cadre mathématique riche et flexible pour modéliser et résoudre des problèmes qui dépassent les limites du calcul classique. Plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire existent. Bien qu'elles ne conduisent pas systématiquement aux mêmes résultats, elles sont considérées comme équivalentes pour un vaste éventail de fonctions. Dans cette section, on présente quelques fonctions de base qui sont très utiles dans la théorie du calcul fractionnaire. Ensuite, on définit l'opérateur d'intégration fractionnaire, ainsi que les deux définitions les plus couramment employées des dérivées fractionnaires, à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous mettrons en lumière les propriétés essentielles de ces concepts.

### 4.1 Fonctions Spéciales

**Définition 4.1** (Fonction Gamma d'Euler). [52, 67] est une fonction mathématique spéciale qui généralise la notion de factorielle pour les nombres réels et complexes. Elle est définie pour tout nombre complexe ou réel positif ( $x > 0$ ) par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0, \quad (1.10)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(0^+) = +\infty$ . L'intégration par partie de (1.10) donne la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x). \quad (1.11)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la fonction factorielle

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.12)$$

**Définition 4.2** (Fonction Béta d'Euler). [52, 67] La fonction Béta est définie par l'intégrale suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 (1 - t)^{x-1} t^{y-1} dt, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+. \quad (1.13)$$

La relation entre les fonctions Gamma et Béta est donnée par l'expression suivante :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x). \quad (1.14)$$

**Définition 4.3** (Fonction de Mittag Leffer à un paramètre). [52, 67] Est une fonction à variable complexe définie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.15)$$

**Définition 4.4** (Fonction de Mittag Leffer à deux paramètre). [52, 67] Est une fonction à variable complexe définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

## 4.2 Intégration Fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégration fractionnaire selon l'approche de Riemann-Liouville est une généralisation de l'intégration ordinaire qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction élevée à une puissance fractionnaire. Cette approche repose sur la formule de Cauchy, qui est un outil mathématique important pour effectuer cette opération.

La formule de Cauchy permet de calculer l'intégrale répétée d'une fonction  $f$  à  $n$  reprises. La formule de Cauchy est donnée par :

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.17)$$

L'extension de la formule de Cauchy (1.17) à un ordre réel positif nécessite la substitution de la fonction factorielle par la fonction Gamma.

**Définition 4.5.** [63] Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $\alpha \geq 0$ . L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  est donnée par

$$I_a^\alpha := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0 \quad t \geq 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

## 4.3 Dérivation Fractionnaire

Dans cette partie, on va examiner certaines définitions essentielles de la dérivation fractionnaire, posant ainsi les fondements de cette approche mathématique captivante.

### Dérivée Fractionnaire selon l'Approche de Riemann-Liouville

**Définition 4.6.** [63] Soient  $n - 1 < \alpha \leq n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, t[$ . Alors la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  aux sens de Riemann-Liouville est donnée par

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) := \begin{cases} D^n I_a^{n-\alpha} f(t), & n - 1 < \alpha < n, \\ D^n f(t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (1.19)$$

### Dérivée Fractionnaire selon l'Approche de Caputo

**Définition 4.7.** [63, 42] Soient  $n - 1 < \alpha \leq n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $f$  une fonction de classe  $C^n([a, b], \mathbb{R})$ . La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  aux sens de Caputo de la fonction  $f$  est donnée par

$${}^C D_a^\alpha f(t) := \begin{cases} I_a^{n-\alpha} D^n f(t), & n - 1 < \alpha < n, \\ D^n f(t), & \alpha = n. \end{cases} \quad (1.20)$$

## 4.4 Relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

La dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont deux approches complémentaires pour le calcul des dérivées fractionnaires, chacune adaptée à des contextes différents en fonction des conditions initiales et des applications. la dérivation fractionnaire de Caputo est souvent préférée, car elle est plus proche de la dérivée classique. La formule suivante montre comment la dérivation fractionnaire de Caputo est reliée à la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville par une opération d'intégration.

[68] Soient  $n - 1 < \alpha < n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ . Alors,

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha \left( f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right). \quad (1.21)$$

Si  $f^{(i)}(a) = 0$  pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , on aura

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t). \quad (1.22)$$

## 5 Transformé de Laplace unidimensionnel

La transformée de Laplace est un concept fondamental en mathématiques appliquées et en sciences de l'ingénierie. Elle a été développée par le mathématicien français Pierre-Simon

Laplace au 18e siècle. Cette opération mathématique offre un outil puissant pour simplifier la résolution d'équations différentielles et convertir des fonctions dépendant du temps en une représentation dans un espace de fréquences complexes. Nous nous basons pour se faire aux références [18, 19, 38, 73].

### Conditions d'existence de la Transformée de Laplace

Pour que la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  soit définie, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- $f$  doit être définie pour  $t \geq 0$ .
- $f$  soit de croissance exponentielle c'est à dire il doit exister une constante  $M$  et une valeur réelle  $\sigma$  telles que  $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$  pour tous  $t \geq 0$ .
- $f(t)$  doit être absolument intégrable sur  $[0, \infty)$ , c'est-à-dire,

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\nu t} dt < \infty \quad \text{pour un certain } \nu.$$

**Définition 5.1.** [19] Une fonction  $f$  est dite causale si et seulement si :  $f(t) = 0$ , pour  $t < 0$ .

**Définition 5.2.** [19] La transformée de Laplace d'une fonction causale  $f(t)$  est une fonction à variable complexe  $s$  représentée par  $F(s)$  avec  $\text{Re}(s) > 0$  et elle est définie par la relation suivante :

$$\mathcal{L}[f(t)] := F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1.23)$$

**Définition 5.3.** [18] La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction causale  $f$  est :

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}. \quad (1.24)$$

**Définition 5.4.** [38] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$ , ( $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ) d'une fonction causale  $f$  est donnée par

$$\mathcal{L}[^{RL}D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}. \quad (1.25)$$

**Définition 5.5.** [38] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre  $\alpha > 0$ , ( $n - 1 \leq \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ) d'une fonction causale  $f$  est donnée par

$$\mathcal{L}[^C D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} [D^k f(t)]_{t=0}. \quad (1.26)$$

### Quelques propriétés principales de la transformée de Laplace

Soient  $f, g$  des fonctions causales et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $s > 0$ . Alors,

#### Linéarité

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s).\end{aligned}\tag{1.27}$$

#### Dérivée temporelle

La transformation de Laplace de la fonction  $f'(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).\tag{1.28}$$

#### Intégration temporelle

La transformation de Laplace de  $\int f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}.\tag{1.29}$$

#### Produit de convolution

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f \star g)(t)] &= \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \\ &= F(s)G(s)\end{aligned}\tag{1.30}$$

où  $(f \star g)(t) = \int_0^t f(s)g(s - \tau)$ .

#### Déplacement dans le temps

La transformation de Laplace de  $f(t - a)$  est donnée par

$$\mathcal{L}[f(t - a)] = e^{-as}F(s).\tag{1.31}$$

#### Changement d'échelle

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{F(s)}{a}.\tag{1.32}$$

## 6 La $\mathcal{Z}$ - transformée unidimensionnel

La transformée en  $\mathcal{Z}$  est une technique mathématique essentielle employée en automatique et en traitement du signal, cette transformation est similaire à la transformée de Laplace mais adapté au contexte discret.

#### Conditions d'existence de la $\mathcal{Z}$ -Transformée

Pour que la transformée en  $\mathcal{Z}$  d'une séquence  $x[n]$  soit définie, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- $x[n]$  doit être définie pour tous les entiers  $n$ .
- Il doit exister une constante  $M$  et une valeur réelle  $\alpha$  telles que  $|x[n]| \leq M\alpha^n$  pour tous les entiers  $n$ .
- $x[n]$  doit être absolument sommable, c'est-à-dire,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \beta^{-n} < \infty \quad \text{pour un certain } \beta.$$

**Définition 6.1.** [73] La  $\mathcal{Z}$ -transformée d'une fonction unidimensionnel discrète  $x(n)$  est la fonction notée  $X(z)$  et définie par la relation suivante :

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.33)$$

où  $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ .

## 6.1 Quelques propriétés principales de la $\mathcal{Z}$ -transformée

Si  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$  ont des  $\mathcal{Z}$ -transformées  $X_1(z)$  et  $X_2(z)$  respectivement et pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Alors,

### Linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] &= \alpha \mathcal{Z}[x_1(n)] + \beta \mathcal{Z}[x_2(n)] \\ &= \alpha X_1(z) + \beta X_2(z). \end{aligned} \quad (1.34)$$

### Décalage temporel

Soit  $k$  un entier positif. Alors,

$$\mathcal{Z}[x(n - k)] = z^{-k} X(z). \quad (1.35)$$

### Produit de Convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_1(n) \star x_2(n)] &= \mathcal{Z}[x_1(n)] \mathcal{Z}[x_2(n)] \\ &= X_1(z) X_2(z). \end{aligned} \quad (1.36)$$

### La $\mathcal{Z}$ -transformée de la dérivée

$$\mathcal{Z}[x'(n)] = z(X(z) - x(0)). \quad (1.37)$$

## 7 Systèmes bidimensionnels

### 7.1 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser discret

Le modèle de Roesser est l'un des plus couramment utilisé pour représenter les systèmes en deux dimensions [24, 27, 32, 37, 39, 60]. L'élément caractéristique principal de ce modèle à espace d'états réside dans la décomposition du vecteur d'état en deux composantes, appelées respectivement horizontale et verticale, notées  $x^h$  et  $x^v$ . Dans les applications pratiques, ces composantes ont généralement une signification bien définie. Le modèle discret de Roesser en deux dimensions est ensuite défini de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} x^h(i_1 + 1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i_1, i_2) \quad (1.38)$$
$$y(i_1, i_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i_1, i_2) \\ x^v(i_1, i_2) \end{bmatrix} + Du(i_1, i_2)$$

où,  $x^h(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$  et  $x^v(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$ , sont respectivement les variables d'état horizontales et verticales discrètes,  $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_+$ ,  $u(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2, D$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

### 7.2 Modèle bidimensionnel de Givone-Roesser continu

Tout comme dans le cas discret, les modèles continus de Roesser sont très couramment utilisés pour représenter des systèmes 2-D pratiques [24, 27, 32, 37, 39, 60]. Le vecteur d'état est à nouveau décomposé en ses composantes horizontales et verticales.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t_1, t_2)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x^v(t_1, t_2)}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \quad (1.39)$$
$$y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Du(t_1, t_2)$$

### 7.3 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini F-M discret :

Le premier modèle d'état bidimensionnel a été introduit en 1976 par Fornasini et Marchesini [22, 24] qui ont proposé des modèles pour les systèmes 2D qui ne reposaient pas sur la partition de la variable l'état.



**Premier modèle de F-M**

$$\begin{aligned} x(i_1 + 1, i_2 + 1) &= A_0x(i_1, i_2) + A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + Bu(i_1, i_2) \\ y(i_1, i_2) &= Cx(i_1, i_2), \end{aligned} \quad (1.40)$$

**Deuxième modèle de F-M**

$$\begin{aligned} x(i_1 + 1, i_2 + 1) &= A_1x(i_1 + 1, i_2) + A_2x(i_1, i_2 + 1) + B_1u(i_1 + 1, i_2) + B_2u(i_1, i_2 + 1) \\ y(i_1, i_2) &= Cx(i_1, i_2) + Du(i_1, i_2), \end{aligned} \quad (1.41)$$

où,  $x(i_1, i_2) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(i, j) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(i, j) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $A_1, A_2, B_1, B_2, C, D$  sont des matrices de dimensions appropriées.

## 7.4 Modèle bidimensionnel de Fornasini-Marchesini F-M continu :

De manière similaire au cas discret, le premier modèle continue de Fornasini-Marchesini est caractérisé par les équations suivantes :

**Premier modèle de F-M**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= A_0x(t_1, t_2) + A_1 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + Bu(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) &= Cx(t_1, t_2) + Du(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.42)$$

**Deuxième modèle de F-M**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= A_1 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + B_1 \frac{u(t_1, t_2)}{\partial t_1} + B_2 \frac{u(t_1, t_2)}{\partial t_2} \\ y(t_1, t_2) &= Cx(t_1, t_2) + Du(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.43)$$

## 8 Applications

### 8.1 Équation des ondes fractionnaires

L'équation des ondes est l'un des concepts fondamentaux en mathématiques appliquées, en sciences physiques et en ingénierie. Elle est exprimée sous forme d'une équation aux dérivées partielles prenant en compte deux directions spatiales (par exemple,  $x$  et  $y$ ). Elle permet de décrire comment les quantités se répandent dans un espace bidimensionnel au fil du temps.

L'étude des ondes remonte au 18ème siècle avec les travaux du mathématicien français Jean le Rond d'Alembert. Cette théorie permet de comprendre comment les ondes se propagent, se réfléchissent, se diffractent et interagissent avec leur environnement, ce qui revêt une importance cruciale dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques.

Concéderons le modèle d'équation des ondes bidimensionnel d'ordre fractionnaire qui peut

être formulé comme suit :

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (1.44)$$

où

- $v(x, y, t)$  est la fonction d'onde à deux dimensions en fonction des variables spatiales  $(x, y)$  et de la variable temporelle  $t$ .
- $\alpha$  est un paramètre qui détermine l'ordre des dérivées fractionnaires par rapport à l'espace.

La solution de l'équation (1.44) est disponible dans la littérature, comme mentionné dans la référence [41] avec les conditions initiales :

$$v(x, y, 0) = x^4, \quad v_t(x, y, 0) = y^4. \quad (1.45)$$

par

$$v(x, y, t) = x^4 \cos ht + y^4 \sin ht. \quad (1.46)$$

La figure 1.1 illustre l'évolution de la solution obtenue  $v(x, y, t)$  pour  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 1.80$ ,  $\alpha = 1.70$ ,  $\alpha = 1.50$ ,  $t = 1$  et  $0 < x, y \leq 1$ .

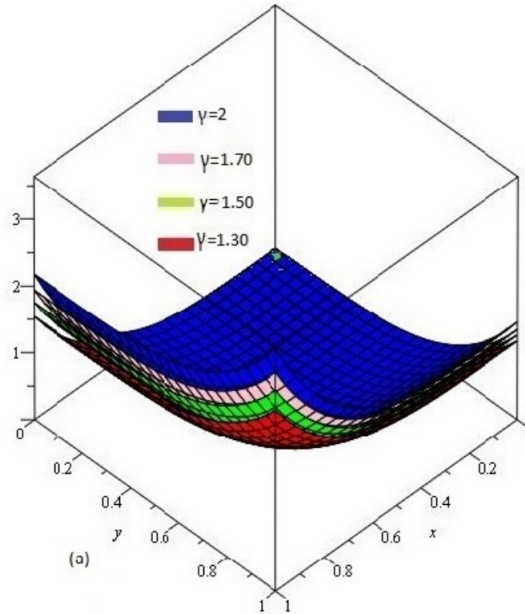


FIGURE 1.1 – Solution de l'équation des ondes

## 8.2 Modélisation des Circuits Électriques

Dans cet exemple, nous considérons une application innovante de modélisation bidimensionnelle d'ordre fractionnaire d'un circuit électrique mentionné dans la référence [33]. Nous

montrons comment les équations aux dérivées partielles fractionnaires peuvent être utilisées pour capturer des phénomènes complexes. Examinons le circuit électrique illustré dans la Figure 1.2, où les composants comprennent des résistances désignées par  $R_1, R_2, R_3$ , des capacités notées  $C_1, C_2$  et une source de tension  $e = e(t)$ . Les tensions aux bornes des condensateurs,  $u_1 = u_1(t)$  et  $u_2 = u_2(t)$ , servent de variables d'état  $x_1 = u_1$  et  $x_2 = u_2$ , tandis que la source de tension agit en tant qu'entrée, notée  $u = e$ . Le courant  $i(t)$  dans le condensateur  $C$  avec sa tension  $u_c(t)$  est lié par la formule.

$$i_c(t) = CD_t^\alpha u_c(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.47)$$

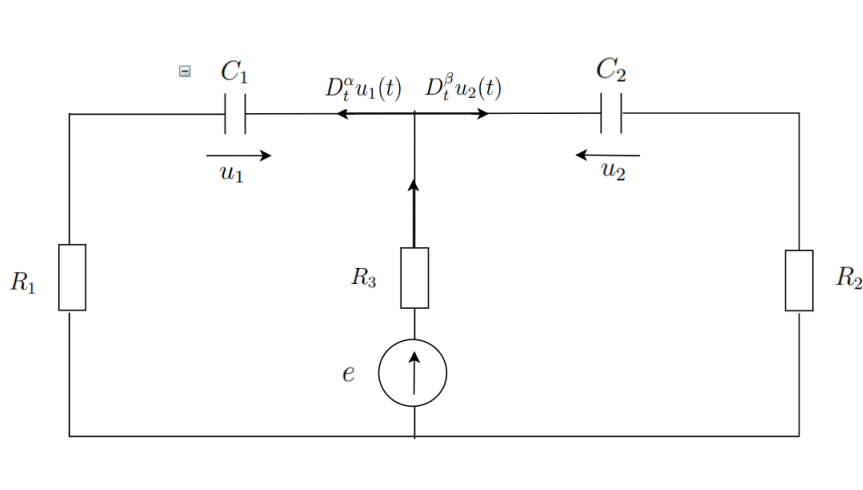


FIGURE 1.2 – Circuit électrique

En utilisant les lois de Kirchhoff, nous pouvons écrire les équations

$$R_1 C_1 D_t^\alpha u_1(t) + u_1(t) + R_3 \left( C_1 D_t^\alpha u_1(t) + C_2 D_t^\beta u_2(t) \right) = e \quad (1.48)$$

$$R_2 C_2 D_t^\beta u_2(t) + u_2(t) + R_3 \left( C_1 D_t^\alpha u_1(t) + C_2 D_t^\beta u_2(t) \right) = e$$

Les équations (1.48) peuvent être réécrites sous la forme

$$\begin{bmatrix} D^\alpha u_1(t) \\ D^\beta u_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + B e. \quad (1.49)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 + R_3}{C_1 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} & \frac{R_3}{C_1 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} \\ \frac{R_3}{C_2 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} & -\frac{R_1 + R_3}{C_2 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{C_1 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} \\ \frac{R_1}{C_2 [R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3]} \end{bmatrix}$$

## 9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques définitions et concepts de base de la théorie des matrices et des inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ) ainsi que le complément de Schur qui est très important dans les chapitres qui suit. En suite, nous avons présenté des fonctions spéciales, intégration fractionnaire de Riemann Liouville et quelques différentes approches de dérivées fractionnaires et deux transformations intégrales les plus importantes (Laplace et  $\mathcal{Z}$ -transformée), leurs propriétés sont également présentées. Pour conclure ce chapitre, nous avons exploré divers systèmes bidimensionnels, mettant particulièrement en lumière les modèles de Givone-Roesser et de Fornasini Marchisini. En conclusion, nous avons présenté différentes applications de modèles bidimensionnels d'ordre fractionnaire dans divers domaines.

# Marges de stabilité et $\mathcal{D}$ -stabilité pour les modèles 2D fractionnaires à espace d'états généralisés.

## 1 Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un outil puissant pour modéliser de nombreux problèmes dans divers domaines tels que la mécanique, la physique, la chimie, la biologie, l'économie, le traitement du signal et la théorie de contrôle (voir, par exemple, [6, 7, 17, 29, 38, 33, 40, 42, 49, 58]). La raison principale du succès de la théorie du calcul fractionnaire réside dans le fait que ces nouveaux modèles à ordre fractionnaire sont plus précis que les modèles à ordre entier. D'autre part, une attention particulière a été focalisée aux systèmes bidimensionnels (2D) au cours des dernières décennies en raison de leur implication dans de nombreux défis pratiques. Pour plus de détails voir les références ([24, 27, 22, 60, 32, 4]). L'importance de ces systèmes réside dans leur capacité à simplifier et à illustrer avec précision des comportements et des interactions complexes, fournissant ainsi une image plus claire des processus du monde réel. [51, 35]. Ces systèmes bidimensionnels se caractérisent par la diffusion d'informations sous forme de deux variables indépendantes dans deux directions distinctes, telles que le temps et la distance ou la longueur et la largeur, etc.

Récemment, la stabilité des systèmes dans le domaine de la théorie de contrôle a attiré une attention considérable de la part des chercheurs et des praticiens [4, 57, 66]. De plus, des recherches récentes mettent en évidence que même de légères perturbations dans les coefficients du régulateur peuvent rendre le système en boucle fermée instable ou vulnérable face à des incertitudes qui ne peuvent être négligées.

La marge de stabilité joue un rôle central en tant qu'indicateur, mesurant les perturbations ou les incertitudes avant qu'un système ne perde sa stabilité. Dans [12], les auteurs utilisent le rayon de stabilité pour mesurer la distance instable des systèmes linéaires invariants. Dans [47] il existe également des résultats de stabilité et de stabilisation pour les systèmes incertains fractionnaires d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique robuste des systèmes en boucle fermée avec des dérivées fractionnaires ( $0 < \alpha < 1$ ) et ( $1 < \alpha < 2$ ) en terme des inégalités matricielles linéaires  $\mathcal{LMJs}$  ont été développées dans [44].

Dans ce chapitre, nous étendons les recherches de ([12, 16]) afin d'explorer les conditions relatives à la marge de stabilité et à la  $\mathcal{D}$ -région de stabilité pour les systèmes bidimensionnels généralisés avec des dérivées fractionnaires en temps continu et discret. Ces conditions sont formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires strictes ( $\mathcal{LMJs}$ ). Des exemples numériques sont présentés pour illustrer les méthodes proposées.

## 2 Transformée de Laplace bidimensionnel

### Conditions d'existence de la Transformée de Laplace bidimensionnelle

Pour que la transformée de Laplace bidimensionnelle d'une fonction  $f(t_1, t_2)$  soit définie, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- $f(t_1, t_2)$  doit être définie pour  $t_1 \geq 0$  et  $t_2 \geq 0$ .
- Il doit exister une constante  $M$  et des valeurs réelles  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  telles que

$$|f(t_1, t_2)| \leq M e^{\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2} \quad \text{pour tous } t_1, t_2 \geq 0.$$

- $f(t_1, t_2)$  doit être absolument intégrable sur  $[0, \infty) \times [0, \infty]$ , c'est-à-dire,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(t_1, t_2)| e^{-\sigma_1 t_1 - \sigma_2 t_2} dt_1 dt_2 < \infty \quad \text{pour certains } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2.$$

**Définition 2.1.** La transformée de Laplace à deux dimensions d'une fonction  $f(t_1, t_2)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$F(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 t_1 - s_2 t_2} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad t_1, t_2 > 0, \quad (2.1)$$

$s_1, s_2$  sont des variables complexes indépendantes.

## 3 $\mathcal{Z}$ -Transformé bidimensionnel

### Conditions d'existence de la Transformée en $\mathcal{Z}$ bidimensionnelle

Pour que la transformée en  $Z$  bidimensionnelle d'une séquence  $x[n_1, n_2]$  soit définie, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- $x[n_1, n_2]$  doit être définie pour tous les entiers  $n_1$  et  $n_2$ .
- Il doit exister une constante  $M$  et des valeurs réelles  $r_1$  et  $r_2$  telles que

$$|x[n_1, n_2]| \leq Mr_1^{n_1} r_2^{n_2} \quad \text{pour tous les entiers } n_1 \text{ et } n_2.$$

- $x[n_1, n_2]$  doit être absolument sommable, c'est-à-dire,

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |x[n_1, n_2]| r_1^{-n_1} r_2^{-n_2} < \infty \quad \text{pour certains } r_1 \text{ et } r_2.$$

**Définition 3.1.** *la  $Z$ -transformée bidimensionnelle de la séquence  $f(n_1, n_2)$  est définie par la somme double suivante :*

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}, \quad (2.2)$$

$z_1, z_2$  sont des variables complexes.

## 4 Réalisation minimale

Le processus de modélisation mathématique d'un problème réel débute par l'application rigoureuse des lois physiques qui régissent son comportement pour formuler un modèle mathématique initial. Ce modèle est capable de représenter n'importe quelle trajectoire de sortie, quelle que soient les conditions initiales et les commandes externes cette représentation concise à capturer son comportement essentiel. Le critère généralement favorisé pour cela est, en effet, "la réalisation minimale".

**Définition 4.1.** *Une réalisation  $(A, B, C, D)$  d'un système linéaire invariant dans le temps est dite minimale si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

- 1 **Contrôlabilité** : *Le couple  $(A, B)$  est contrôlable, c'est-à-dire que la matrice de contrôlabilité  $\mathcal{C}$  définie par*

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

*a un rang complet, ( $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ ) où  $n$  est l'ordre du système.*

- 2 **Observabilité** : *Le couple  $(A, C)$  est observable, c'est-à-dire que la matrice d'observa-*

bilité  $\mathcal{O}$  définie par

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

a un rang complet, ( $\text{rang}(\mathcal{O}) = n$ ).

## 5 Fonction de transfert

La fonction de transfert est une fonction dépendant de variables complexes  $s$ , exprime le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie et celle de l'entrée d'un système. Son obtention peut se faire par des manipulations algébriques simples des équations différentielles qui décrivent les systèmes à un ordre élevé. La forme générale de la fonction de transfert est représentée de manière standard [8].

considérons le système bidimensionnel de Roesser d'écrit par les équations d'espace d'état sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_{t_1}^h(t_1, t_2) \\ x_{t_2}^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \quad (2.5)$$

$$y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + Du(t_1, t_2) \quad (2.6)$$

où,  $x^h(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_1}$  et  $x^v(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n_2}$  représentent les vecteurs d'état horizontaux et verticaux respectivement en  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p$  représentent les vecteurs d'entrée et de sortie respectivement. Les matrices  $A_{i,j} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$  pour  $i, j = 1, 2$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m}$  pour  $i = 1, 2$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n_i}$  pour  $i = 1, 2$ , et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Par l'application de la transformée de Laplace bidimensionnel, on obtient :

$$\begin{aligned} s_1 X^h(s_1, s_2) &= A_{11} X^h(s_1, s_2) + A_{12} X^v(s_1, s_2) + B_1 U(s_1, s_2) \\ s_2 X^v(s_1, s_2) &= A_{21} X^h(s_1, s_2) + A_{22} X^v(s_1, s_2) + B_2 U(s_1, s_2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$Y(s_1, s_2) = C_1 X^h(s_1, s_2) + C_2 X^v(s_1, s_2) + DU(s_1, s_2) \quad (2.8)$$



ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} (s_1 I_{n_1} - A_{11})X^h(s_1, s_2) &= A_{12}X^v(s_1, s_2) + B_1U(s_1, s_2) \\ (s_2 I_{n_2} - A_{22})X^v(s_1, s_2) &= A_{21}X^h(s_1, s_2) + B_2U(s_1, s_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$Y(s_1, s_2) = C_1X^h(s_1, s_2) + C_2X^v(s_1, s_2) + DU(s_1, s_2), \quad (2.10)$$

ce qui implique,

$$\begin{bmatrix} X^h(s_1, s_2) \\ X^v(s_1, s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s_2 I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U(s_1, s_2), \quad (2.11)$$

substituant (2.10) dans (2.11), on obtient :

$$Y(s_1, s_2) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s_2 I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D \right) U(s_1, s_2), \quad (2.12)$$

ainsi, la fonction de transfert associée au système (2.5), (2.6) est donnée par,

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2) &= \frac{Y(s_1, s_2)}{U(s_1, s_2)} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & s_2 I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Définition 5.1.** [71, 48] (La norme  $\mathcal{H}_2$ ) Soit  $\{A, B, C, D\}$  une représentation d'espace d'état d'un système linéaire, et soit  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , sa fonction de transfert. La norme  $\mathcal{H}_2$  d'un tel système est définie comme suit,

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)G_*(j\omega)d\omega, \quad (2.14)$$

où  $G_*(j\omega)$  est la transposée conjuguée de  $G(j\omega)$ ,  $s = j\omega$  et  $j^2 = -1$ .

**Définition 5.2.** [48] (La norme  $\mathcal{H}_\infty$ ) La norme  $\mathcal{H}_\infty$  représente la valeur maximale du rapport entre l'énergie du signal de sortie et l'énergie du signal d'entrée, elle est définie par :

$$\|G(\cdot)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)), \quad (2.15)$$

où  $\bar{\sigma}$  désigne la plus grande des valeurs singulières.

## 6 Description du modèle

Considérons le système linéaire fractionnaire décrit par l'équation d'état suivante :

$$\lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha E x(t_1, t_2) = A_0 x(t_1, t_2) + \lambda_2^\alpha A_1 x(t_1, t_2) + B u(t_1, t_2) \quad (2.16)$$

et l'équation de la sortie :

$$y(t_1, t_2) = C x(t_1, t_2) + D u(t_1, t_2), \quad (2.17)$$

où, ( $0 < \alpha < 1$ ), les opérateurs différentiels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondent respectivement aux opérateurs différentiels  $s_1$  et  $s_2$  dans la transformée de Laplace lorsque l'équation (2.16) décrit un système en temps continu. En revanche, pour les équations (2.16) décrivant un système en temps discret, les opérateurs de retard  $z_1$  et  $z_2$  sont utilisés dans la  $\mathcal{Z}$ -transformée.  $E$ ,  $A_0$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  sont des matrices constantes. Les vecteurs  $x(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^p$  correspondent respectivement les états, l'entrée et la sortie du système (2.16). Nous établissons la dérivée partielle pour les systèmes fractionnaires bidimensionnels à temps continu par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha x(t_1, t_2) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1^\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial t_2^\alpha} x(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{(\Gamma(n-\alpha))^2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \frac{x_{t_1}^{(n)}(\tau)}{(t_1-\tau)^{\alpha+1-n}} \frac{x_{t_2}^{(n)}(s)}{(t_2-s)^{\alpha+1-n}} ds d\tau. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Maintenant, nous examinons l'équation (2.16) et introduisons un nouveau vecteur d'état donné par

$$\xi(t_1, t_2) = \lambda_1^\alpha E x(t_1, t_2) - A_1 x(t_1, t_2), \quad (2.19)$$

multipliant l'équation (2.19) par  $\lambda_2^\alpha$ ,

$$\lambda_2^\alpha \xi(t_1, t_2) = \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha E x(t_1, t_2) - \lambda_2^\alpha A_1 x(t_1, t_2), \quad (2.20)$$

les équations (2.20) et (2.16), donnent

$$\begin{aligned} \lambda_1^\alpha \lambda_2^\alpha E x(t_1, t_2) &= \lambda_2^\alpha \xi(t_1, t_2) + \lambda_2^\alpha A_1 x(t_1, t_2) \\ &= A_0 x(t_1, t_2) + \lambda_2^\alpha A_1 x(t_1, t_2) + B u(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

ainsi,

$$\begin{cases} \lambda_1^\alpha E x(t_1, t_2) &= \xi(t_1, t_2) + A_1 x(t_1, t_2) \\ \lambda_2^\alpha \xi(t_1, t_2) &= A_0 x(t_1, t_2) + B u(t_1, t_2), \end{cases} \quad (2.22)$$

par conséquent, le nouveau système linéaire fractionnaire 2D de Roesser est,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E & 0 \\ 0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} X(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} A_1 & I_n \\ A_0 & 0 \end{bmatrix} X(t_1, t_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} X(t_1, t_2) + Du(t_1, t_2), \end{cases} \quad (2.23)$$

où  $X(t_1, t_2)$  est définie par :

$$X(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} x(t_1, t_2) \\ \xi(t_1, t_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

## 7 Marges de stabilité pour les systèmes 2D d'ordre fractionnaires

En nous appuyant sur les travaux présentés dans [12], examinons le système défini par les équations (2.23). Supposons que la réalisation de ce système soit à la fois minimale et strictement stable. Cette supposition conduit à l'idée que toutes les valeurs propres du système, tel que considéré, se situent dans l'ouvert défini par  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  dans le plan complexe et satisfaisant la condition

$$\left| \arg \left( \text{eig} \left( \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & I_n \\ A_0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (2.24)$$

En fermant la boucle avec  $u = \Delta y$  où  $\Delta$  représente une perturbation, on obtient,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E & 0 \\ 0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} X(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} A_1 & I_n \\ A_0 & 0 \end{bmatrix} X(t_1, t_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \Delta y(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} X(t_1, t_2) + D \Delta y(t_1, t_2), \end{cases} \quad (2.25)$$

Après élimination de  $y(t_1, t_2)$ , on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E & 0 \\ 0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} X(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} A_1 & I_n \\ A(\Delta) & 0 \end{bmatrix} X(t_1, t_2), \quad (2.26)$$

avec,

$$A(\Delta) = A_0 + B(I_m - \Delta D)^{-1} \Delta C,$$

ou,  $(I_m - \Delta D)^{-1} \Delta = \Delta(I_p - D\Delta)^{-1}$  qui se vérifie facilement par la relation  $\Delta(I_p - D\Delta) = (I_m - \Delta D)\Delta$ .

L'analyse du système obtenu donné par (2.26) est donc cruciale pour comprendre comment elle peut affecter la stabilité et le comportement global du système.

Notre objectif est de déterminer les conditions nécessaires pour assurer la stabilité stricte du système en boucle fermée défini par (2.26). Pour garantir cette propriété, nous devons faire une analyse approfondie des valeurs propres et des nouvelles techniques de stabilité tout en se basant sur [30, 12] et le lemme 3.1.

On définit par conséquent le concept de rayon de stabilité associé au système perturbé (2.26). Ce rayon de stabilité est défini comme la plus petite perturbation  $\Delta$  capable de déstabiliser le système. Cette approche nous permettra d'identifier la marge de robustesse du système face aux perturbations,

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \inf_{\Delta} \left\{ \|\Delta\|_2 : \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A(\Delta) & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} \text{ admet des valeurs propres instable} \right\}. \quad (2.27)$$

Une formulation équivalente de ce rayon de stabilité est donc donnée par :

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \inf_{(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \in \partial\Gamma_1 \times \partial\Gamma_2} \left\{ \inf_{\Delta} \left\{ \|\Delta\|_2 : \det \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A(\Delta) & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} = 0 \right\} \right\}. \quad (2.28)$$

Ainsi,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A(\Delta) & \lambda_2^\alpha I_n \end{pmatrix} = 0, \quad (2.29)$$

qui est équivalent de tester

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} (I_m - \Delta D)^{-1} \begin{bmatrix} \Delta C & 0 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (2.30)$$

d'après le lemme 3.1, l'équation (2.30) peut être reformuler comme suit,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n & 0 \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n & B \\ \Delta C & 0 & I_m - \Delta D \end{pmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Ainsi, la condition (2.31) peut s'écrire sous la forme,

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n & 0 \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n & B \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C & 0 & -D \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (2.32)$$

Comme la matrice  $\begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix}$  est inversible. Donc, tester (2.32) est équivalent à tester,

$$\det \left( I_{2n+m} + \begin{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \\ I_m \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C & 0 & -D \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (2.33)$$

puisque  $\det(I + RS) = 0$  implique que  $\det(I + SR) = 0$  pour toutes les matrices  $R, S$  conformes, (2.33) conduit finalement à :

$$\det(I_m - \Delta G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)) = 0,$$

où,

$$G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) = \begin{bmatrix} C & 0 & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \lambda_1^\alpha E - A_1 & -I_n \\ -A_0 & \lambda_2^\alpha I_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \\ I_m \end{bmatrix}.$$

maintenant on peut ré-exprimer le rayon de stabilité de la manière suivante :

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \inf_{(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \in \partial\Gamma_1 \times \partial\Gamma_2} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : \det(I_m - \Delta G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)) = 0 \} \right\}.$$

qui est équivalent à

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \left[ \sup_{(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \in \partial\Gamma_1 \times \partial\Gamma_2} \|G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)\|_2 \right]^{-1} = \|G(\cdot, \cdot)\|_\infty^{-1}. \quad (2.34)$$

Pour les systèmes 2D fractionnaires en temps continu

$$\partial\Gamma_1 = |\omega_1|^\alpha \left[ \cos \left( \alpha \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1) \right) \right) + j \sin \left( \alpha \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1) \right) \right) \right], \quad \omega_1 \in \mathbb{R} - \{0\},$$

$$\partial\Gamma_2 = |\omega_2|^\alpha \left[ \cos \left( \alpha \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2) \right) \right) + j \sin \left( \alpha \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2) \right) \right) \right], \quad \omega_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Par conséquent, le rayon de stabilité obtenu par l'équation. (2.34) peut s'écrire sous la forme

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \left[ \sup_{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}} \left\| G \begin{pmatrix} |\omega_1|^\alpha \begin{bmatrix} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) + \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) \end{bmatrix}, \\ |\omega_2|^\alpha \begin{bmatrix} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) + \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\|_2 \right]^{-1},$$

et pour les systèmes à temps discret

$$\partial\Gamma_1 = e^{|\omega_1|^\alpha [\cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) + j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1)))]}, \quad \omega_1 \in \mathbb{R} - \{0\},$$

$$\partial\Gamma_2 = e^{|\omega_2|^\alpha [\cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) + j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2)))]}, \quad \omega_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ainsi,

$$r_C(E, A_0, A_1, B, C, D) := \left[ \sup_{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}} \left\| G \begin{pmatrix} e^{|\omega_1|^\alpha \begin{bmatrix} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) + \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) \end{bmatrix}}, \\ e^{|\omega_2|^\alpha \begin{bmatrix} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) + \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) \end{bmatrix}} \end{pmatrix} \right\|_2 \right]^{-1}.$$

Pour les cas en temps continu et discret, on a

$$\arg(\omega_i) = \begin{cases} 2k\pi & \text{si } \omega_i \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \\ \pi + 2k\pi & \text{si } \omega_i \in \mathbb{R}^- - \{0\} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2.$$

Pour  $E = I_n$ , ces connexions sont assez standard. On les rappelle dans le théorème suivant, basé sur [12], formulé pour une matrice  $E$  donné arbitraire.

**Théorème 7.1.** *Supposons que le système en boucle ouverte (2.23) est strictement stable. Alors le système en boucle fermée (2.26) est strictement stable si et seulement si  $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$  vérifie*

$$\|\Delta\|_2 < \mu_\star^{-1}, \quad (2.35)$$

où,

$$\mu_\star := \|G(\cdot, \cdot)\|_\infty := \sup_{(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \in \partial\Gamma_1 \times \partial\Gamma_2} \|G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)\|_2. \quad (2.36)$$

$\partial\Gamma_i = j^\alpha \mathbb{R}$  pour la cas à temps continu et  $\partial\Gamma_i = e^{j^\alpha \mathbb{R}}$  dans le cas à temps discret, pour  $i = 1, 2$ .

Notons que si l'on impose la condition que  $\Delta$  soit réel, (2.35) et (2.36) ne deviennent que des conditions suffisantes de stabilité. Cependant, le théorème affirme que la stabilité est assurée pour tout  $\Delta$  (qu'il soit réel ou complexe) qui satisfait (2.35) et (2.36). Le problème clé pour le calcul de  $\mu_\star$  est de construire des conditions calculables pour une limite supérieure  $\mu$  de  $\mu_\star$ . Un tel  $\mu > \mu_\star$  doit satisfaire

$$\mu^2 I_m - G_\star(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)G(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \succ 0, \quad \forall (\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) \in \partial\Gamma_1 \times \partial\Gamma_2, \quad (2.37)$$

avec,

$$G_\star(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) := G \left( \begin{array}{c} |\omega_1|^\alpha \left[ \begin{array}{c} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) - \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) \end{array} \right], \\ |\omega_2|^\alpha \left[ \begin{array}{c} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) - \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) \end{array} \right] \end{array} \right)^\top$$

dans le cas continu, et

$$G_\star(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha) = G \left( \begin{array}{c} e \left[ \begin{array}{c} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) - \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1))) \end{array} \right], \\ e \left[ \begin{array}{c} \cos(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) - \\ j \sin(\alpha(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_2))) \end{array} \right] \end{array} \right)^\top,$$

dans le cas à temps discret.

## 7. MARGES DE STABILITÉ POUR LES SYSTÈMES 2D D'ORDRE FRACTIONNAIRES

pour les systèmes à temps continu,  $\mu > \mu_* \geq 0$ , si et seulement si

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -E^\top Y_1 A_1 - A_1^\top Y_1 E & -E^\top Y_1 - A_0^\top Y_2 & 0 \\ -Y_2 A_0 - Y_1 E & 0 & -Y_2 B \\ \hline 0 & -B^\top Y_2 & \mu^2 I_m \end{array} \right] - \begin{bmatrix} C^\top \\ 0 \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 & D \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.38)$$

où,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Y = Y^\top,$$

et pour un temps discret,  $\mu > \mu_* \geq 0$  si et seulement si

$$\left[ \begin{array}{cc|c} E^\top Y_1 E - A_1^\top Y_1 A_1 - A_0^\top Y_2 A_0 & -A_1^\top Y_1 & -A_0^\top Y_2 B \\ -Y_1 A_1 & Y_2 - Y_1 & 0 \\ \hline -B^\top Y_2 A_0 & 0 & \mu^2 I_m - B^\top Y_2 B \end{array} \right] - \begin{bmatrix} C^\top \\ 0 \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 & D \end{bmatrix} \succ 0, \quad (2.39)$$

où,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Y = Y^\top.$$

Dans le cas où  $E = I_n$ , le système d'espace d'état sera standard, ce qui entrainera l'établissement d'autres inégalités matricielles linéaires.

Pour le cas à temps continu



$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -X_1 A_1 - A_1^\top X_1 & -X_1 - A_0^\top X_2 & 0 & C^\top \\ -X_2 A_0 - X_1 & 0 & -X_2 B & 0 \\ \hline 0 & -B^\top X_2 & \mu I_m & D^\top \\ \hline C & 0 & D & \mu I_p \end{array} \right] \succ 0, \quad (2.40)$$

où,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \quad X = X^\top.$$

Pour le cas à temps discret,

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} X_1 - A_1^\top X_1 A_1 - A_0^\top X_2 A_0 & -A_1^\top X_1 & -A_1^\top X_2 B & C^\top \\ -X_1 A_1 & X_2 - X_1 & 0 & 0 \\ \hline -B^\top X_2 A_0 & 0 & \mu I_m - B^\top X_2 B & D^\top \\ \hline C & 0 & D & \mu I_p \end{array} \right] \succ 0, \quad (2.41)$$

avec,

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \quad X = X^\top.$$

Si la matrice  $E$  est de rang plein, alors elle sera inversible ainsi des nouvelles conditions seront établies sur la réalisation de l'espace d'état standard donnée ci-dessous,

$$\left[ \begin{array}{cc|c} E^{-1} A_1 & E^{-1} & 0 \\ A_0 & 0 & B \\ \hline C & 0 & D \end{array} \right]$$

et en imposant  $X = \begin{bmatrix} E^\top Y E & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$ , les conditions suivantes qui sont pour les systèmes à

temps continu,

$$\left( \begin{array}{cc|cc} -E^\top Y_1 A_1 - A_1^\top Y_1 E & -E^\top Y_1 - A_0^\top Y_2 & 0 & C^\top \\ -Y_2 A_0 - Y_1 E & 0 & -Y_2 B & 0 \\ \hline 0 & -B^\top Y_2 & \mu I_m & D^\top \\ \hline C & 0 & D & \mu I_p \end{array} \right) \succ 0, \quad (2.42)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Y = Y^\top. \quad (2.43)$$

et pour le cas d'un système à temps discret,

$$\left( \begin{array}{cc|cc} E^\top Y_1 E - A_1^\top Y_1 A_1 - A_0^\top Y_2 A_0 & -A_1^\top Y_1 & -A_0^\top Y_2 B & C^\top \\ Y_1 A_1 & Y_2 - Y_1 & 0 & 0 \\ \hline -B^\top Y_2 A_0 & 0 & \mu I_m - B^\top Y_2 B & D^\top \\ \hline C & 0 & D & \mu I_p \end{array} \right) \succ 0, \quad (2.44)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Y = Y^\top.$$

## 8 Région $\mathcal{LMJ}$ et $\mathcal{D}$ -stabilité pour les systèmes fractionnaires bidimensionnels

Dans cette section, on s'intéresse à l'extension des résultats obtenus dans la référence [12]. On explore de nouvelles conditions visant à garantir la stricte stabilité du système en boucle fermée au sein d'une zone spécifiquement délimitée dans le plan complexe.

on va proposer une nouvelle définition de la région  $\mathcal{D}$  dans le plan complexe, précisément associée au système fractionnaire bidimensionnel étudié. Cette région de stabilité est définie comme suit :

**Définition 8.1.** *Un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  dans le plan complexe associé aux systèmes bidimensionnels est appelé une région  $\mathcal{LMJ}$ , s'il existe des matrices symétriques  $R_{i0} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $R_{i1} \in$*

$\mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $i = 1, 2$ , telles que

$$\mathcal{D} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \sum_{i=1}^2 R_{i0} + z_i R_{i1} + z_i^* R_{i1}^\top \prec 0\}. \quad (2.45)$$

On va présenter deux résultats fondamentaux. Le premier résultat est sous la forme d'un théorème énonçant les conditions suffisantes pour garantir que le système en boucle ouverte est strictement  $\mathcal{D}$ -stable. Notre deuxième résultat prend la forme d'un théorème énonçant les conditions suffisantes pour assurer la  $\mathcal{D}$ -stabilité stricte du système en boucle fermée. Ces résultats théoriques offrent des directives précieuses pour la conception de systèmes de contrôle robustes et fiables, en assurant la stabilité dans une région spécifiée du plan complexe.

## 8.1 $\mathcal{D}$ -stabilité du système 2D fractionnaire en boucle ouverte

**Définition 8.2.** *Le système 2D fractionnaire (2.23) est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si tous ses pôles sont dans la région  $\mathcal{D}$ .*

**Théorème 8.1.** *Le système (2.23) avec  $\text{rang}(E) = n$  est  $\mathcal{D}$ -stable s'il existe une matrice symétrique définie positive  $Y$  telle que*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{D}} := & \begin{pmatrix} R_{10} & 0 \\ 0 & R_{20} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E^\top Y_1 E & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{21} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E^\top Y_1 E & E^\top Y_1 \\ Y_2 A_0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} R_{11}^\top & 0 \\ 0 & R_{21}^\top \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A_1^\top Y_1 E & A_0^\top Y_2 \\ Y_1 E & 0 \end{pmatrix} \prec 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

*Démonstration.* La démonstration découle directement de l'application du résultat obtenu dans [16] au problème des valeurs propres généralisé  $\begin{pmatrix} E^{-1} A_1 & E^{-1} \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}$  en remplaçant  $X$  par  $\begin{pmatrix} E^\top Y_1 E & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ . □

## 8.2 $\mathcal{D}$ -stabilité du système 2D fractionnaire en boucle fermée

Nous analysons maintenant la localisation des valeurs propres du système en boucle fermée (2.26) dans le plan complexe. On va supposer que le système en boucle ouverte (2.23) est  $\mathcal{D}$ -stable et on va rechercher des conditions suffisantes pour que le système (2.26) soit  $\mathcal{D}$ -stable pour un sous-ensemble donné  $\mathcal{D}$  inclus dans  $\mathbb{C}_-$ .

**Théorème 8.2.** *Le système (2.26) avec une incertitude*

$$\Delta \in \mathbb{C}^{p \times m}, \|\Delta\|_2 < \mu^{-1} \quad (2.48)$$

est  $\mathcal{D}$ -stable s'il existe des matrices symétriques définies positives  $Y \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et  $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$  telles que

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(Y) & & 0 & Q_2^\top P \otimes C^\top \\ \hline & & Q_1^\top \otimes Y_2 B & 0 \\ \hline 0 & Q_1 \otimes B^\top Y_2 & -\mu P \otimes I_n & P \otimes D^\top \\ \hline P Q_2 \otimes C & 0 & P \otimes D & -\mu P \otimes I_n \end{array} \right) \prec 0, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

où,  $R_1 = Q_1^\top Q_2$  est une factorisation avec  $Q_1$  et  $Q_2$  de rang plein  $r$ .

*Démonstration.* Ceci découle facilement de l'application du résultat de [16] à la réalisation standard de l'espace d'états.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} E^{-1} A_1 & E^{-1} & 0 \\ A_0 & 0 & B \\ \hline C & 0 & D \end{array} \right],$$

où, on remplace ensuite  $X$  par  $\begin{bmatrix} E^\top Y E & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$ . □

## 9 Exemples numériques

Dans cette section, on va fournir quelques exemples numériques afin d'illustrer les résultats obtenus au cours de ce chapitre.

**Exemple 9.1.** *Considérons le système bidimensionnel à temps discret d'ordre fractionnaire représenté par la réalisation suivante :*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans [75], les auteurs ont montré que le système en question est stable. Dans notre cas, en comparant les résultats avec notre approche et en appliquant l'LMJ (2.41), on trouve une solution réalisable donnée par

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.4504 & 0 \\ 0 & 1.0094 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.5630 & 0 \\ 0 & 1.9613 \end{bmatrix},$$

$$\mu = 2.9954,$$

Ce qui montre que le système en boucle fermée est strictement stable.

**Exemple 9.2.** Considérons le système d'espace d'états continu fractionnaire décrit par (2.23) avec  $\alpha = 0.4$  comme suit,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -0.02 \lambda_1^{0.4} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{0.4} \end{bmatrix} x(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} -0.0055 & 1 \\ -0.114 & 0 \end{bmatrix} x(t_1, t_2) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.001 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \\ y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x(t_1, t_2) + 0.4 u(t_1, t_2). \end{cases} \quad (2.50)$$

On peut facilement vérifier que le système (2.50) est stable, car ces valeurs propres sont  $-0,2750$  et  $-0,1140$ , satisfaisant la condition (2.24). De plus, en appliquant l'LMJ (2.38), une solution réalisable est trouvée

$$Y_1 = 4,2173; \quad Y_2 = 0,7399; \quad \mu = 1,2138 \times 10^3.$$

Cela implique que le système en boucle fermée est strictement stable.

**Exemple 9.3.** *Considérons le système linéaire d'ordre fractionnaire (2.23) avec  $\alpha = 0.5$  comme suit*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{0.5} x^h(t_1, t_2) \\ \lambda_2^{0.5} x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & 1 \\ -142.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 178.25 \end{bmatrix} u(t_1, t_2) \quad (2.51)$$

$$y(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(t_1, t_2) \\ x^v(t_1, t_2) \end{bmatrix}.$$

*Considérons la région LMJ (2.45) avec*

$$R_{10} = \begin{bmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & -2 \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}, \quad R_{11} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & 2 \sin \frac{\pi}{3} \\ -2 \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix},$$

$$R_{20} = \begin{bmatrix} -150 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix}, \quad R_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

*ce qui signifie que la région associée à la première direction représente un disque de centre zéro et un rayon de 150 et la deuxième région associée à la deuxième direction est un secteur conique d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .*

*En utilisant notre approche sur le système en boucle ouverte décrit par l'équation (2.51), nous observons que la condition LMJ énoncée dans le théorème 8.1 peut être satisfaite. De plus, une solution admissible est fournie par*

$$Y_1 = 1,1709 \times 10^{-16}, \quad Y_2 = 7,2167 \times 10^{-19},$$

*ce qui démontre la stabilité stricte du système dans la région  $\mathcal{D}$ .*

*En appliquant le résultat énoncé dans le théorème 8.2 au système en boucle fermée, on constate que la condition LMJ peut être réalisée. La solution admissible est la suivante :*

$$\mu = 1,6440, \quad Y_1 = 5,2940 \times 10^{-23}, \quad Y_2 = 1,5510 \times 10^{-25},$$

*on peut choisir  $P = I_{2 \times 2}$ .*

*Ainsi, on déduit que le système en boucle fermée est également strictement  $\mathcal{D}$ -stable.*

## 10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau modèle d'espace d'états bidimensionnel généralisé avec un ordre fractionnaire. Nous avons dérivé des résultats étendus sur les conditions de marge de stabilité du système perturbé. Ensuite, une nouvelle région  $\mathcal{D}$  dans le plan complexe associée à un tel système a été introduite. De plus, la stabilité dans cette région  $\mathcal{D}$  a été étudiée pour le problème considéré en utilisant le produit de Kronecker et l'outil des inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMIs}$ ). Enfin, des exemples numériques ont été fournis pour illustrer l'efficacité de nos principaux résultats.

# la Stabilité Robuste pour les Modèles d'Espaces d'États Multidimensionnels Généralisés avec des Dérivées Fractionnaires

## 1 Introduction

Les modèles d'espace d'états multidimensionnels, d'ordre fractionnaire est un sujet de recherche intense dans le domaine de la théorie du contrôle en raison de leur capacité à modéliser de manière plus précise des systèmes réels [3, 9, 10, 23]. Ces systèmes opèrent dans deux directions spatiales ou plus, prenant en compte les dynamiques et interactions dans ces différentes dimensions. Leur application est étendue, couvrant des domaines théoriques et pratiques tels que le contrôle et la robotique, le traitement d'images et de signaux, ainsi que l'analyse géospatiale [38, 36, 55, 56, 61, 63, 64].

L'étude de la stabilité et de la robustesse des systèmes fractionnaires multidimensionnels constitue actuellement l'un des domaines de recherche les plus cruciaux en mathématiques appliquées. Cela implique que de nombreux mathématiciens et chercheurs se penchent sur ce sujet en raison de son importance et de ses applications potentielles [21, 2, 46, 70].

Dans le domaine des systèmes de contrôle, certains systèmes sont fragiles, ce qui les rend susceptibles de perdre leur stabilité en raison d'incertitudes ou de perturbations, pour finalement devenir instables. Le concept de la marge de stabilité joue un rôle central dans la compréhension et l'analyse de ces types de systèmes.

La marge de stabilité joue un rôle important dans la quantification de la robustesse d'un système soumis aux perturbations. Elle mesure l'amplitude maximale de perturbations que le système peut tolérer tout en restant stable. En évaluant la marge de stabilité, les ingénieurs



peuvent évaluer la résilience du système aux incertitudes et aux perturbations externes, facilitant ainsi la conception d'algorithmes de contrôle robustes.

En plus de la marge de stabilité, la région de stabilité représente une région dans le plan complexe qui caractérise les valeurs des paramètres pour lesquelles le système reste stable. En étudiant la forme et l'emplacement de la région de stabilité, des informations précieuses peuvent être obtenues sur les caractéristiques de stabilité du système. Cette connaissance est cruciale pour concevoir des stratégies de contrôle garantissant le fonctionnement stable du système. De nombreux efforts ont été consacrés au développement de critères de stabilité. Motivés par les travaux obtenus par [12, 15, 54].

Dans ce chapitre on va considérer une nouvelle classe de systèmes d'espace d'état généralisé multidimensionnels avec des dérivées fractionnaires. Pour établir la robustesse de ce type de système, nous avons introduit une nouvelle adaptation du lemme borné réel sous la forme d'inégalités matricielles linéaires dans les contextes continu et discret. Cette extension joue un rôle crucial dans la détermination de la marge de stabilité des systèmes considérés, en quantifiant la proximité d'un système avec l'instabilité, et fournit des informations critiques sur sa capacité à résister aux perturbations. De plus, nous approfondissons le système considérés, cela délimite la plage de paramètres dans laquelle le système reste stable dans certaines régions  $\mathcal{D}_d$  du plan complexe. A travers une analyse théorique et des exemples pratiques, nous démontrons l'importance de notre teste de stabilité pour assurer la robustesse du système considéré. Ces études sont essentielles à la conception et à la mise en œuvre de systèmes fiables.

## 2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et lemmes fondamentaux qui ont été utilisés tout au long de ce chapitre. Nous examinerons également les définitions 5.1 et 5.2 introduites dans le deuxième chapitre. Ces concepts jouent un rôle essentiel dans l'analyse et la compréhension de notre résultats principaux de ce chapitre.

### 2.1 La Transformée de Laplace multidimensionnel

**Définition 2.1.** [21, 4] *La transformée de Laplace de la fonction  $f(t_1, \dots, t_d)$  pour tous  $d$  variables indépendantes  $t_1, \dots, t_d$ , est la fonction  $F(s_1, \dots, s_d)$  pour toutes les variables complexes indépendantes  $s_1, \dots, s_d$  définie par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t_1, \dots, t_d)] &:= F(s_1, \dots, s_d) \\ &= \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} [e^{-s_1 t_1 - \dots - s_d t_d} f(t_1, \dots, t_d)] dt_1 \dots dt_d. \end{aligned}$$

## 2.2 La $\mathcal{Z}$ -Transformée multidimensionnel

**Définition 2.2.** Soit  $x(n_1, \dots, n_d)$  un signal à temps discret. Alors,

$$X(z_1, \dots, z_d) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_d=-\infty}^{+\infty} x(n_1, \dots, n_d) z^{-n_1} \times \dots \times z^{-n_d},$$

est appelé la  $z$ -transformation de  $x(n_1, \dots, n_d)$  où,  $(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ .

## 2.3 Inégalités de Riccati pour le cas des systèmes à temps continu

**Lemme 2.1.** [54] Soient  $\tilde{A}, \tilde{R}$  et  $\tilde{Q}$ , tel que  $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\tilde{R} = \tilde{R}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{Q} = \tilde{Q}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Alors, l'inégalité de Riccati pour les systèmes à temps continu définie par

$$\tilde{A}^* X + X \tilde{A} + X \tilde{R} X + \tilde{Q} \prec 0, \quad (3.1)$$

admet une unique solution  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

## 2.4 Inégalités de Riccati pour le cas des systèmes à temps discret

**Lemme 2.2.** [65] Soient  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{M}$  et  $\tilde{R}$  tel que  $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\tilde{R} = \tilde{R}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{Q} = \tilde{Q}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{M} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . Alors, l'inégalité de Riccati pour les systèmes à temps discret définie par

$$X - \tilde{A}^* X \tilde{A} + \tilde{Q} + (\tilde{A}^* X \tilde{B} + \tilde{M}^*)(\tilde{R} + \tilde{B}^\top X \tilde{B})^{-1}(\tilde{B}^\top X \tilde{A} + \tilde{M}) \succ 0, \quad (3.2)$$

admet une unique solution  $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Lemme 2.3.** [54] Soient  $E$  une matrice inversible et des ordres fractionnaires  $1 < \alpha_i < 2$ . Alors, La réalisation  $\{E, A, B, C, D\}$  est strictement stable si et seulement si

$$|\arg(\text{eig}(E^{-1}A))| > \alpha_i \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

## 3 Formulation du Problème

En s'inspirant de [4], on va présenter une formulation globale pour les systèmes fractionnaires multidimensionnels  $dD$  à temps continu, définis par le modèle de Roesser.

$$\begin{aligned} K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d X_d(t_1, \dots, t_d) &= A_d X_d(t_1, \dots, t_d) + B u(t_1, \dots, t_d) \\ y(t_1, \dots, t_d) &= C X_d(t_1, \dots, t_d) + D u(t_1, \dots, t_d) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Où,

$$E_d = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1d} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{d1} & E_{d2} & \cdots & E_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ supposée être inversible.}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1d} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & A_{d2} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ est la matrice dynamique.}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{ est la matrice de contrôle.}$$

$$C = [C_1, \dots, C_d] \in \mathbb{R}^{p \times n}, \text{ est la matrice de sortie.}$$

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , est la matrice de transmission

$$X_d = \begin{bmatrix} x_1(t_1, \dots, t_d) \\ x_2(t_1, \dots, t_d) \\ \vdots \\ x_d(t_1, \dots, t_d) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ représente l'état des sous-vecteurs}$$

$u(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^m$ , est le vecteur d'entrée.

$y(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^p$ , est le vecteur de sortie.

$$K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\alpha_1} I_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2^{\alpha_2} I_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_d^{\alpha_d} I_{n_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

représente la matrice des opérateurs différentiels  $\text{diag}_{i=1}^d s_i^{\alpha_i} I_{n_i}$  dans la transformée de Laplace lorsque (3.3) est à temps continu et  $\text{diag}_{i=1}^d z_i^{\alpha_i} I_{n_i}$  dans la  $\mathcal{Z}$ -transformée lorsque (3.3) est à temps

discret.

## 4 Marges de stabilité pour les systèmes dD fractionnaires en temps continu et discret

En considérant le système (3.3), on va supposer que la réalisation ci-dessus est minimale et strictement stable, ce qui signifie que toutes ses valeurs propres généralisées se situent dans les ensembles ouverts  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  du plan complexe.

Si on ferme la boucle avec  $u(t_1, \dots, t_d) = \Delta y(t_1, \dots, t_d)$ , on obtient :

$$K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d X_d = A_d(\Delta) X_d, \quad (3.4)$$

où,  $A_d(\Delta)$  est définie par

$$A_d(\Delta) := A_d + B(I_m - \Delta D)^{-1} \Delta C. \quad (3.5)$$

Nos objectifs principaux sont de proposer de nouvelles conditions pour garantir que le système multidimensionnel d'ordre fractionnaire en boucle fermée (3.4) est également strictement stable.

Pour atteindre ces objectifs, on spécifie le rayon de stabilité correspondant au système perturbé (3.4) comme la plus petite perturbation  $\Delta$  déstabilisant le système. Autrement dit, on cherche des conditions sous lesquelles le système en boucle fermée reste stable malgré des perturbations. Le rayon de stabilité représente la taille maximale de ces perturbations sans compromettre la stabilité du système.

$$\begin{aligned} r_C(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D) \\ := \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : [K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d(\Delta)] \text{ admet des valeurs propres instables} \} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La stabilité ne sera perdue que si l'une des valeurs propres dépasse la limite  $\partial\Gamma_1 \times \dots \times \partial\Gamma_d$  de la région de stabilité  $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_d$ . Une expression équivalente de ce rayon de stabilité est ainsi fournie par,

$$r_C(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D) := \inf_{\lambda_i^{\alpha_i} \in \partial\Gamma_i} \left\{ \inf_{\Delta} \{ \|\Delta\|_2 : \det [K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d(\Delta)] = 0 \} \right\}. \quad (3.7)$$

Maintenant on va tester

$$\det [K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d(\Delta)] = 0, \quad (3.8)$$

qui est le complément de Schur de

$$\det \begin{bmatrix} K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d & B \\ \Delta C & I_m - \Delta D \end{bmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Comme  $\lambda_i^{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  sont les valeurs propres de  $(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d(\Delta))$  donc  $(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)$  est inversible. Alors (3.9) peut être écrite comme suit,

$$\det \left( I_{n+m} + \begin{bmatrix} - (K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)^{-1} B \\ I_m \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Ensuite, en appliquant la relation  $\det(I + RS) = \det(I + SR)$ , on obtient

$$\det [I - \Delta G(\lambda_1, \dots, \lambda_d)] = 0,$$

où,

$$G(\lambda_1, \dots, \lambda_d) := C (K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)^{-1} B + D,$$

on peut déduire que le rayon de stabilité est égal à la norme dite  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert  $G$ .

$$\begin{aligned} r_C(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D) &= \left[ \sup_{\lambda_i^{\alpha_i} \in \partial \Gamma_i} \|G(\lambda_1, \dots, \lambda_d)\|_2 \right]^{-1} \\ &= \|G\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour les systèmes fractionnaires en temps continu, la frontière  $\partial \Gamma_i$  s'exprime comme suit :

$$\partial \Gamma_i = |\omega_i|^{\alpha_i} \left[ \cos \left( \alpha_i \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_i) \right) \right) + j \sin \alpha_i \left( \frac{\pi}{2} + \arg(\omega_i) \right) \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, d., \omega_i \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Par conséquent, le rayon de stabilité obtenu à partir de l'équation (3.10) peut être exprimé sous la forme :

$$r_C(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D) := \left[ \sup_{\omega_i \in \mathbb{R} - \{0\}} \left\| G \begin{pmatrix} |\omega_1| \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1)\right) \\ +j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1)\right) \end{bmatrix} \\ \dots \\ |\omega_d| \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_d)\right) \\ +j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_d)\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\|_2 \right]^{-1},$$

$i = 1, 2, \dots, d.$

Et pour le cas des systèmes à temps discret,

$$\partial\Gamma_i = e^{|\omega_i|^{\alpha_i} [\cos(\alpha_i(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_i))) + j \sin \alpha_i(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_i))]}, \quad i = 1, 2, \dots, d., \quad \omega_i \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ainsi,

$$r_C(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D) := \left[ \sup_{\omega_i \in \mathbb{R} - \{0\}} \left\| G \begin{pmatrix} e^{|\omega_1|^{\alpha_1}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1)\right) \\ +j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_1)\right) \end{bmatrix} \\ \dots \\ e^{|\omega_d|^{\alpha_d}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_d)\right) \\ +j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \arg(\omega_d)\right) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \right\|_2 \right]^{-1},$$

$i = 1, 2, \dots, d.$

Pour les deux cas,

$$\arg(\omega_i) = \begin{cases} 2k\pi & \text{si } \omega_i > 0 \\ \pi + 2k\pi & \text{si } \omega_i < 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

En utilisant comme base les résultats principaux énoncés dans [12], on élargit l'application du théorème au contexte de la création d'un espace d'états fractionnaires multidimensionnels  $(K_d^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d, A_d, B, C, D)$ . Ceci vise à faciliter une exploration plus approfondie des propriétés des marges de stabilité.

**Théorème 4.1.** *Supposons que le système dD fractionnaire en boucle ouverte (3.3) soit strictement stable. Alors le système dD fractionnaire en boucle fermée (3.4) est strictement stable si et seulement si  $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$  vérifie,*

$$\|\Delta\|_2 < \gamma_\star^{-1}, \quad (3.11)$$

où,

$$\begin{aligned} \gamma_\star &= \|G\|_\infty \\ &= \sup_{\lambda_i^{\alpha_i} \in \partial\Gamma_i} \|G(\lambda_1, \dots, \lambda_d)\|_2. \end{aligned}$$

$\partial\Gamma_i = j^{\alpha_i}\mathbb{R}$  en temps continu et  $\partial\Gamma_i = e^{j^{\alpha_i}\mathbb{R}}$  en temps discret,  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Ce théorème affirme que la stabilité est assurée pour toute valeur de  $\Delta$  (qu'elle soit réelle ou complexe). La clé pour satisfaire la condition (3.11) réside dans la construction de conditions commutables permettant de définir une borne supérieure  $\gamma$  pour  $\gamma_\star$ . Il est crucial que  $\gamma > \gamma_\star$  doit être respectée.

$$\gamma^2 - G(\lambda_1, \dots, \lambda_d)G_\star(\lambda_1, \dots, \lambda_d)I_m \succ 0, \quad \lambda_i \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, d. \quad (3.12)$$

Dans ce théorème, on va explorer des conditions innovantes qui étendent le Lemme Borné Réel aux systèmes dD fractionnaires en temps continu et discret. Cette démarche offre de nouvelles perspectives pour analyser la marge de stabilité du système considéré.

#### 4.1 Lemme Borné Réel pour les Systèmes dD Fractionnaire à temps continu

**Théorème 4.2.** *Soit  $\{E_d, A_d, B, C, D\}$  une représentation dans l'espace d'états d'un système linéaire en temps continu avec sa fonction de transfert  $G(s_1, \dots, s_d) = C(K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)^{-1} B + D$ . Alors,  $\|G(s_1, \dots, s_d)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique  $Y = Y^\top$ , satisfaisant,*

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}\{H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y E_d\} & -E_d^\top Y B & H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \\ & -B^\top Y E_d & \gamma I_m & D^\top \\ & C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.13)$$

où,

$$H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} = \begin{bmatrix} e^{\Theta_1} I_{n_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\Theta_2} I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & e^{\Theta_d} I_{n_d} \end{bmatrix} \succ 0, Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & Y_d \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.14)$$

et

$$\Theta_i = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha_i), i = 1, 2, \dots, d.$$

*Démonstration.* À partir du lemme 2.1, en prenant  $X = E_d^\top Y E_d$  et

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= E_d^{-1} A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} + \frac{1}{\gamma} E_d^{-1} B R D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d}, \\ \tilde{R} &= E_d^{-1} B R B^\top (E_d^{-1})^\top, \\ \tilde{Q} &= \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top (I_m + \frac{1}{\gamma} D R D^\top)^{-1} C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comme  $E_d$  est supposé inversible, la réalisation dans l'espace d'états sera  $\{K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d^{-1} A_d, E_d^{-1} B, C, D\}$ . Substituant alors  $X$  dans l'LMJ (3.1) par  $E_d^\top Y E_d$ .

L'inégalité (3.1) implique

$$\begin{aligned} & - \left( H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top (E_d^{-1})^\top + \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top D R B^\top (E_d^{-1})^\top \right) E_d^\top Y E_d \\ & - E_d^\top Y E_d \left( E_d^{-1} A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} + \frac{1}{\gamma} E_d^{-1} B R D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \right) \\ & - E_d^\top Y E_d \left( E_d^{-1} B R B^\top (E_d^{-1})^\top \right) E_d^\top Y E_d \\ & - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \left( I_m + \frac{1}{\gamma} D R D^\top \right) C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \succ 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où,  $R = (\gamma I_m - \frac{1}{\gamma} D^\top D)^{-1}$ . Ainsi, l'LMJ (3.16) implique,

$$\begin{aligned} & - \text{sym} \left\{ H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y E_d \right\} - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ & - \left( E_d^\top Y B + \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top D \right) \left( \gamma I - \frac{1}{\gamma} D^\top D \right)^{-1} \left( B^\top Y E_d + \frac{1}{\gamma} D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \right) \succ 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$



qui représente le complément de Schur de

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}\{H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y E_d\} - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ -B^\top Y E_d - \frac{1}{\gamma} D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ -E_d^\top Y B - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top D \\ \gamma I_m - \frac{1}{\gamma} D^\top D \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3.18)$$

L'LMJ (3.18) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}\{H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y E_d\} & -E_d^\top Y B \\ -B^\top Y E_d & \gamma I_p \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & D \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.19)$$

qui est le complément de Schur de l'LMJ

$$\begin{bmatrix} -\text{sym}\{H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y E_d\} & -E_d^\top Y B & H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \\ -B^\top Y E_d & \gamma I_m & D^\top \\ C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.20)$$

cela ce qui devait être démontré.  $\square$

## 4.2 Lemme borné réel pour les systèmes dD fractionnaires à temps discret

**Théorème 4.3.** *En considérant le système dD fractionnaire en boucle fermée (3.4) avec sa fonction de transfert associée  $G(z_1, \dots, z_d) = C(K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)^{-1} B + D$ . Alors,  $\|G(z_1, \dots, z_d)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe une matrice symétrique  $Y = Y^\top$ , satisfaisant,*

$$\begin{bmatrix} E_d^\top Y E_d - H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & -H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y B & H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \\ -B^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & \gamma I_m - B^\top Y B & D^\top \\ C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.21)$$

avec,

$$H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} = \begin{bmatrix} e^{\Theta_1} I_{n_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\Theta_2} I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & e^{\Theta_d} I_{n_d} \end{bmatrix} \succ 0, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & Y_d \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.22)$$

et

$$\Theta_i = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

*Démonstration.* En appliquant le Lemme 2.2, avec  $X = E_d^\top Y E_d$  et

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= E_d^{-1} A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ \tilde{Q} &= -\frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ \tilde{M} &= -\frac{1}{\gamma} D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ \tilde{R} &= -\gamma I_m + \frac{1}{\gamma} D^\top D \end{aligned} \quad (3.23)$$

on obtient,

$$\begin{aligned} &E_d^\top Y E_d - H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \\ &+ \left( H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y B - \frac{1}{\gamma} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top D \right) \left( -\gamma I_m + B^\top Y B + \frac{1}{\gamma} D^\top D \right)^{-1} \\ &\left( B^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} - \frac{1}{\gamma} D^\top C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \right) \succ 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

L'LMJ (3.24) est le complément de Schur de

$$\begin{bmatrix} E_d^\top Y E_d - H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & -H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} A_d^\top Y B \\ -B^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & \gamma I_m - B^\top Y B \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$-\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} & D \end{bmatrix} \succ 0,$$

qui peut être réécrit comme

$$\begin{bmatrix} E_d^\top Y E_d - H^{-\theta_1, \dots, -\theta_d} A_d^\top Y A_d H^{\theta_1, \dots, \theta_d} & -H^{-\theta_1, \dots, -\theta_d} A_d^\top Y B & H^{-\theta_1, \dots, -\theta_d} C^\top \\ -B^\top Y A_d H^{\theta_1, \dots, \theta_d} & \gamma I_m - B^\top Y B & D^\top \\ CH^{\theta_1, \dots, \theta_d} & D & \gamma I_p \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.26)$$

Ceci achève la démonstration.  $\square$

### 4.3 Évaluation de la Marge de Stabilité

Le diagramme séquentiel ci-dessous résume les étapes essentielles de ce processus

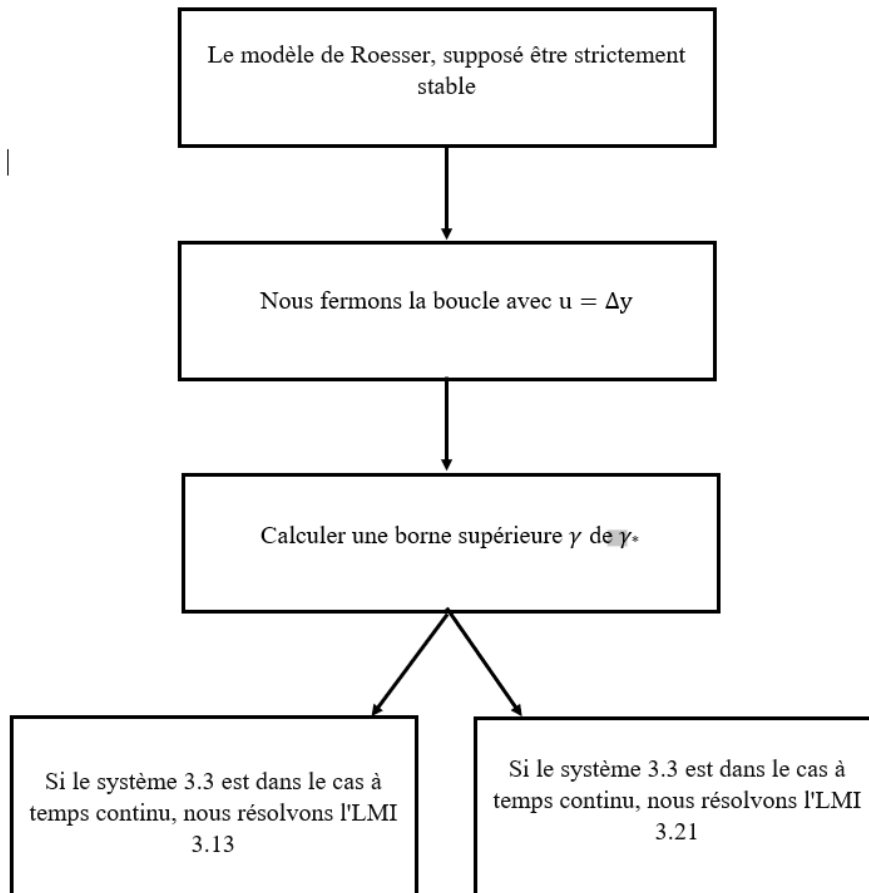


FIGURE 3.1 – Diagramme séquentiel proposé pour notre premier résultat.

## 5 Région $\mathcal{LMJ}$ et $\mathcal{D}_d$ stabilité des systèmes multidimensionnels fractionnaires

En nous appuyant sur les travaux cités par [12, 15, 16], cette section élargit les perspectives de la région de stabilité  $\mathcal{D}_d$  pour les systèmes multidimensionnels d'ordre fractionnaire. Notre approche commence par définir une nouvelle caractérisation de la région  $\mathcal{LMJ}$  dans l'espace complexe  $\mathbb{C}^n$ , suivie de l'exploration de conditions innovantes. Ces efforts convergent vers la préservation de la stabilité dans la région  $\mathcal{D}_d$  du système, même en présence d'influences perturbatrices.

**Définition 5.1.** *Un sous-ensemble  $\mathcal{D}_d$  de l'espace complexe associé aux systèmes multidimensionnels est appelé région  $\mathcal{LMJ}$  s'il existe des matrices symétriques  $L_i \in \mathbb{R}^{k \times k}$  et  $M_i \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  tels que,*

$$\mathcal{D}_d := \left\{ (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : \sum_{i=1}^d L_i + z_i M_i + z_i^* M_i^\top \prec 0 \right\}. \quad (3.27)$$

**Définition 5.2.** *Le système multidimensionnel d'ordre fractionnaire en boucle ouverte (3.3) est  $\mathcal{D}_d$ -stable si et seulement si tous ses pôles se trouvent dans la région  $\mathcal{D}_d$ .*

Le résultat qui suit énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour assurer que le système dD fractionnaire en boucle ouverte, donné par l'équation (3.3) est strictement stable dans la région  $\mathcal{D}_d$  de l'espace complexe.

**Théorème 5.1.** *Le problème des valeurs propres  $(K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A_d)$ , avec le rang de la matrice  $E$  étant plein, est  $\mathcal{D}_d$  stable s'il existe une matrice symétrique définie positive  $Y$  telle que*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}_d}(Y) := \text{diag}_{i=1}^d L_i \otimes E_d^\top Y E_d + \text{sym} \left\{ \text{diag}_{i=1}^d M_i \otimes E_d^\top Y A_d H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d} \right\} \prec 0. \quad (3.28)$$

où,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & Y_d \end{bmatrix}.$$

Maintenant, on suppose que le système dD fractionnaire en boucle ouverte défini par l'équation (3.3) est strictement stable dans la région  $\mathcal{D}_d$ , et on cherche à établir des conditions suffisantes pour garantir que le système dD fractionnaire en boucle fermée (3.4) demeure également strictement stable dans cette même région.

**Théorème 5.2.** *Le problème des valeurs propres ( $K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d} E_d - A(\Delta)$ ) avec,*

$$\|\Delta\|_2 < \gamma^{-1}, \Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$$

*est  $\mathcal{D}_d$  stable s'il existe  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$  tel que,*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{D}_d}(Y) & Q_1^\top \otimes (E_d^\top Y B) & (Q_2^\top P) \otimes (H^{-\Theta_1, \dots, -\Theta_d} C^\top) \\ Q_1 \otimes (B^\top Y E_d) & -\gamma P \otimes I & P \otimes D^\top \\ (P Q_2) \otimes (C H^{\Theta_1, \dots, \Theta_d}) & P \otimes D & -\gamma P \otimes I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.29)$$

*avec,*

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & Y_d \end{bmatrix} \succ 0, Y = Y^\top, P \succ 0, P = P^\top. \quad (3.30)$$

*diag* $_{i=1}^d M_i = Q_1^\top Q_2$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux matrices de rang plein égale à  $r$  et sont facilement obtenus par la décomposition SVD de la matrice  $\text{diag}_{i=1}^d M_i$ .

*Démonstration.* La preuve du théorème 5.1 et du théorème 5.2 repose sur l'application du résultat obtenu dans [15, 16] pour la représentation standard multidimensionnelle fractionnaire à espace d'état  $\{K^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}, E_d^{-1} A_d, E_d^{-1} B, C, D\}$  et en introduisant ensuite la substitution  $X = E_d^\top Y E_d$ .  $\square$

## 5.1 Processus pour Assurer la Stabilité Stricte des Systèmes Multidimensionnels dans certaine région

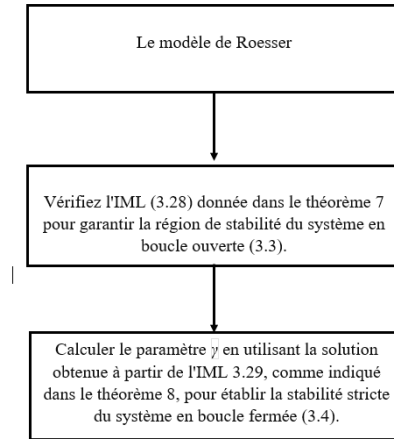


FIGURE 3.2 – Diagramme séquentiel proposé pour notre deuxième résultat.

## 6 Exemples

Dans cette section, on concrétise notre cadre théorique à travers une simulation numérique, en présentant deux exemples qui illustrent de manière vivante les résultats théoriques de chaque section, mettant ainsi en évidence les implications pratiques de nos principaux résultats.

**Exemple 6.1.** *Considérons le système multidimensionnel à temps discret avec  $d = 2$  la réalisation suivante*

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0 & 0.5 \\ 1 & -1.3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & -1 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.6$$

*Si la condition donnée dans le lemme 2.3 est vérifiée, alors le système considéré est strictement stable.*

*D'après le théorème 4.1 et en appliquant les LMJs définies dans (3.21) et (3.22), on obtient ainsi une solution réalisable donnée par*

$$Y_1 = 10^{-14} \times \begin{bmatrix} 0.0115 & 0.0354 \\ 0.03543 & 1.1330 \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$Y_2 = 10^{-18} \times \begin{bmatrix} 0.1084 & 0 \\ 0 & 0.0542 \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\gamma = 3.7283.$$

**Exemple 6.2.** *Considérons le système fractionnaire multidimensionnel à temps continu pour  $d = 2$  avec les matrices du système d'espace d'état suivantes*

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ -0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & -1.3 & -0.2 \\ 1 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & -1 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = 1.00000000000001, \quad \alpha_2 = 1.00000000000001.$$

*Considérons la région  $\mathcal{LMJ}$  (3.27) avec les matrices  $L_i$  et  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$  comme suit,*

$$L_1 = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 2 \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ -\sin \frac{\pi}{6} & 2 \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix},$$

*En utilisant notre méthode, on constate que le système en boucle ouverte (3.3) avec la réalisation proposé est strictement stable dans la région  $\mathcal{D}_d$ . Ainsi, une solution réalisable de  $L'\mathcal{LMJ}$  (3.28) est la suivante*

$$Y_1 = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 9.3109 & 10.0484 \\ 10.0484 & 11.2629 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 15.2742 & -9.5544 \\ -9.5544 & 20.0063 \end{bmatrix}.$$

*En appliquant le théorème 5.2, on a établi que toutes les conditions nécessaires pour garantir la stricte stabilité du système en boucle fermée (3.4) étaient satisfaites. De plus, la solution réalisable fournie par les  $\mathcal{LMJ}$ s, (3.29), (3.30) est la suivante :*

$$Y_1 = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.1735 & -0.0943 \\ -0.0943 & 0.4958 \end{bmatrix}, Y_2 = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.7660 & -0.0231 \\ -0.0231 & 0.5432 \end{bmatrix}, \gamma = 367.1048 \times 10^3.$$

on peut prendre  $P = I_{4 \times 4}$ .

Par conséquent, on peut conclure que le système en boucle fermée (3.4) est également strictement  $\mathcal{D}_d$  stable.

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau modèle généralisé multidimensionnel fractionnaire, fournissant des résultats approfondis sur les conditions de marge de stabilité pour le système perturbé. Nous avons établi une extension inédite du lemme borné réel, adaptée aux cas continus et discrets, afin de démontrer la stabilité robuste du système considéré en termes d'inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMIs}$ ).

Nous avons exploré la définition d'une région  $\mathcal{D}_d$  dans l'espace complexe  $\mathbb{C}^n$  associée au système considéré. Ainsi, nous avons établi de nouvelles conditions pour assurer la stabilité stricte du problème étudié dans le sous-espace  $\mathcal{D}_d$  en utilisant le produit de Kronecker et les Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMIs}$ ). Enfin, nous avons démontré l'efficacité de notre approche à travers des exemples numériques.



## Conclusion générale

Cette thèse concentre sur deux résultats principaux. Le premier résultat constitue une généralisation des travaux introduits dans [12] au cas des systèmes bidimensionnels généralisés avec un ordre fractionnaire. Le deuxième résultat représente une généralisation des travaux obtenus dans [62] pour le cas multidimensionnel généralisé avec un ordre non entier. Cette extension offre une compréhension approfondie des propriétés et des comportements de ces systèmes, démontrant la robustesse et l'applicabilité des concepts développés dans des contextes plus étendus. Dans le premier chapitre, nous avons établi les bases nécessaires en rappelant des définitions et des concepts fondamentaux en théorie des matrices et en calcul fractionnaire. Le deuxième chapitre a marqué une avancée significative avec la description d'un modèle d'espace d'états bidimensionnel généralisé, caractérisé par un ordre fractionnaire. Les résultats étendus ont porté sur les conditions de marge de stabilité et l'exploration de la  $\mathcal{D}$ -région de stabilité dans le plan complexe. Notre approche s'est appuyée sur les inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMIs}$ ) et le produit de Kronecker pour analyser la stabilité du système, offrant ainsi une méthodologie solide et rigoureuse. Le troisième chapitre a étendu les conclusions du deuxième chapitre en explorant le cas d'une classe de modèles multidimensionnels de Roesser intégrant des dérivées fractionnaires. Cette généralisation a élargi notre compréhension des systèmes dynamiques complexes et démontré la robustesse de notre approche dans des situations encore plus diversifiées. Ces résultats élargissent le champ de recherche, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives stimulantes pour les futures études et explorations.

# Contribution à l'Analyse des Modèles Fractionnaires Bidimensionnels

**Résumé :** Cette recherche explore deux classes distinctes de systèmes dynamiques. Tout d'abord, elle aborde les systèmes linéaires fractionnaires bidimensionnels, en examinant le rayon de stabilité du système perturbé selon la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Le travail établit des conditions suffisantes pour garantir la marge de stabilité dans le système en boucle fermée, en utilisant des inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ). De plus, il explore le concept de région de stabilité  $\mathcal{D}$  pour ces systèmes. Également, l'étude traite une nouvelle classe de systèmes d'espace d'états multidimensionnels linéaires fractionnaires généralisés décrits par le modèle de Roesser. L'accent est mis ici sur une nouvelle technique d'analyse de la stabilité robuste, examinant spécifiquement la stabilité du système en boucle fermée à travers les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . La recherche couvre à la fois les cas à temps discret et continu à travers diverses régions du plan complexe. Une extension du lemme borné réel est introduite, prenant en compte les contextes continus et discrets. Ce lemme étendu établit des conditions suffisantes, formulées sous la forme d'inégalités matricielles linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ), pour garantir la marge de stabilité du système perturbé.

**Mots-Clés.** Systèmes fractionnaires Bidimensionnels, Modèle de Roesser Multidimensionnels Fractionnaires, Rayon de stabilité, Région de stabilité, Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMJs}$ ).

---

# Contribution to the Analysis of Two-Dimensional Fractional Models

**Abstract :** This research explores two distinct classes of dynamic systems. First, it addresses two-dimensional fractional linear systems, looking closely at the stability radius of the perturbed system according to the  $\mathcal{H}_\infty$  norm. The work establishes sufficient conditions to guarantee stability margins in the closed-loop system, using linear matrix inequalities ( $\mathcal{LMIs}$ ). Furthermore, it explores the concept of stability region  $\mathcal{D}$  for these systems.

Also, the study addresses a new class of generalized fractional linear multidimensional state space systems described by the Roesser model. The focus here is on a new robust stability analysis technique, specifically investigating closed-loop system stability through the  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ . The research covers both discrete and continuous time cases in various regions of the complex plane. An extension of the bounded real lemma is introduced, adapting to both continuous and discrete contexts. This extended lemma establishes sufficient conditions, formulated in the form of linear matrix inequalities ( $\mathcal{LMIs}$ ), to guarantee stability margins for the perturbed system.

**Key Words.** Two-Dimensional Fractional Systems, Fractional Multidimensional Roesser Model, Stability Radius, Stability Region, Linear Matrix Inequalities ( $\mathcal{LMIs}$ ).

---

## تحليل النماذج الكسرية ثنائية الأبعاد

ملخص يهدف هذا البحث إلى استكشاف فئتين مختلفتين من الأنظمة الديناميكية الخطية. أولاً، سنركز على نوع جديد من الأنظمة الخطية ذات بعدين و بمشتقات كسرية. سنقوم بتحليل نصف قطر الاستقرار للنظام المضطرب وفقاً للمعيار  $H_\infty$ . يهدف البحث إلى تحديد الشروط الكافية التي تضمن هامش الاستقرار في نظام الحلقة المغلقة باستخدام المتباينات في المصفوفة الخطية. كما سنتناول مفهوم منطقة الاستقرار  $D$  لهذه الأنظمة. بالإضافة إلى ذلك، سنتناول فئة جديدة من الأنظمة الخطية الكسرية متعددة الأبعاد في الفضاء الحالة المعممة والتي يتم وصفها بنموذج روزر. تتمحور دراسة هذه الأنظمة حول تقنية جديدة لتحليل قوة استقرار النظام من خلال دراسة استقرار نظام الحلقة المغلقة وفقاً للمعيارين  $H_2$  و  $H_\infty$ . يشمل البحث الحالتين المستمرة والمتقطعة عبر مختلف مناطق السطح المعقد. وقد تم تقديم إمتداد لمبرهنة المحدودية الحقيقية في الحالتين المستمرة والمتقطعة باستخدام المتباينات في المصفوفة الخطية، وقد ساهمت هذه الإمتدادات بشروط كافية لضمان هامش الاستقرار للنظام المضطرب.

### الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الكسرية ثنائية الأبعاد، الأنظمة الكسرية متعددة الأبعاد بنموذج روزر، منطقة الإستقرار، المتباينات المصفوفية الخطية.

# Bibliographie

- [1] D. H. Anthony, J. Pritchard, Mathematical : Systems Theory I Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. Springer Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [2] O. Bachelier, T. Cluzeau, D. Mehdi, A. Rigaud and N. Yeganefar : New tests for the stability of 3D Roesser models. Mathematics of Control, Signals and Systems **35**, 2023, 619–639.
- [3] S. Basu : Multidimensional causal, stable, perfect reconstruction filter banks. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Fundamental Theory and Applications **49 (6)**, 2002, 832–842. 10.1109/TCSI.2002.1010038
- [4] K. Benyettou, D. Bouagada : Admissibility tests for multidimensional singular fractional continuous-time models. Archives of Control Sciences, **32 (3)**, 2022, 607–625. DOI : 10.24425/acs.2022.142851.
- [5] A. Benzaouia, A. Hmamed and F. Tadeo : Two Dimensional Systems From Introduction to State of the Art. Springer Cham Heidelberg New York, Dordrecht London 2015.
- [6] K. Bettou and A. Charef : Fractional order  $PI\lambda D\mu A$  controller design based on Bode’s ideal function. Archives of Control Sciences, **33 (2)**, 2023, 425–458. 10.24425/acs.2023.146428
- [7] A. Blumen, J. Klafter, R. Hilfer and R. Metzler : Strange kinetics. Chemical Physics, **284 (1)**, 2002, 104–301.
- [8] G. D. Boreman : Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems. The Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2001. <https://doi.org/10.1117/3.419857>
- [9] N. K. Bose : Applied Multidimensional System Theory. Van Nostrand Reinhold Comp, New York, 2017.
- [10] N. K. Bose, B. Bucherger and P. J. Guiver : Multidimensional Systems Theory and Application. Kluwer Academic Publishers, 1995.

- [11] D. Bouagada : Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs, 2007, <https://perso.uclouvain.be/paul.vandooren/ThesisBouagada.pdf>
- [12] D. Bouagada, P. Van Dooren : Stability margins for generalized state space systems. Applied Mathematics Letters, **19 (5)**, 2006, 451–457. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.06.015>
- [13] D. Bouagada and V. Dooren : LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models. Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2010, 1379–1382.
- [14] Y. Chen, H. S. Ahn and I. Podlubny : Robust stability of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. IEEE International Conference Mechatronics and Automation, **86**, 2005, 2611–2618. 10.1109/ICMA.2005.1626549
- [15] M. Chillali, P. Gahinet :  $\mathcal{H}_\infty$  Design with pole placement constraints : An LMI approach. IEEE transactions on automatic control, **41 (3)**, 1996, 358–367.
- [16] M. Chilali, P. Gahinet and P. Apkarian : Robust Pole Placement in LMI Regions. IEEE Transactions on Automatic Control, **44 (12)**, 1999, 2257–2269. DOI : 10.1109/9.811208
- [17] T. Chiranjeevi, R. Devarapalli, N.R. Babu, K.B. Vakkapatla, R.G.S. Rao and F.P. Garcia Marquez : Fixed terminal time fractional optimal control problem for discrete time singular system. Archives of Control Sciences, **32 (3)**, 2022, 489–506. DOI : 10.24425/acs.2022.142846
- [18] L. Debnath, D. Bhatta : Integral Transforms and their Applications. Chapman and Hall/CRC (2016).
- [19] G. Doetsch : Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Springer-Verlage Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [20] L. El Ghaoui, S. Niculescu : Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. The Society for Industrial and applied Mathematics, 2000.
- [21] O. A. Elosmani, D. Bouagada, P. Van Dooren and K. Benyettou : LMI Stability Test for Multidimensional Linear State-Space Models. Journal of Computational and Applied Mathematics **390**, 2021, 1–9, <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113363>
- [22] E. Fornasini and G. Marchesini : State-space realization theory of two dimensional filter. IEEE Transactions on Automatic Control, **21**, 1976, 484–491.
- [23] K. Galkowski : State-Space Realizations of Linear 2-D Systems with Extensions to the General nD case. Springer-Verlag, London, 2001.
- [24] K. Galkowski : The Fornasini-Marchesini and the Roesser Model : Algebraic Methods for Recasting. IEEE Transactions on Automatic Control, **41 (1)**, 1996, 107–112.

- [25] M. Ghamgui, D.Mehdi , O. Bachelier and M. Chaabane : On the Robust state feedback stabilization of nD hybrid Roesser models with implicit LFR uncertainty. *International Journal of Control*, **91 (12)**, 2018, 1–20.
- [26] S., L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1999.
- [27] D.D. Givone, R.P. Roesser : Multidimensional linear iterative circuits-General properties. *IEEE Transactions on Computers*, **21 (10)**, 1972, 1067–1073.
- [28] A. Graham : *Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Howood Limited. P019. 1EB. E. 1981.
- [29] R. Hilfer : *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing Company, Singapore,87–130, 2000. <https://doi.org/10.1142/3779>
- [30] D. Hinrichsen A.J. Pritchard : *Mathematical Systems Theory I Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. SpringerLink, **48**, 2005.
- [31] Y. Ji, J. Qiu : Stabilization of fractional-order singular uncertain systems, *ISA Transactions*,**56**, 53–64, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2014.11.016>
- [32] T. Kaczorek : *Two Dimensional Linear Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1985. DOI : <https://doi.org/10.1007/BFb0005617>.
- [33] T. Kaczorek : *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **411**, 2011.
- [34] T. Kaczorek : *Theory of Control Systems*. PWN, Warszawa, 1999.
- [35] T. Kaczorek : Positivity and stabilization of fractional 2D Roesser model by state-feedbacks, LMI approach. *Archives of Control Sciences*, **19 (2)**, 165–177, 2009.
- [36] T. Kaczorek : Singular Fractional Linear Systems and Electrical Circuits. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, **21 (2)**, 379–384, 2011. <https://doi.org/10.2478/v10006-011-0028-8>
- [37] T. Kaczorek : Fractional 2D linear systems. *J. Automation, Mobile Robotics Intelligent Systems*, **2 (2)**, 5–9, 2008.
- [38] T. Kaczorek, K. Rogowski : *Fractional Linear Systems and Electrical Circuits*. 1st Edition, Springer International Publishing Switzerland, 2015.
- [39] A. Kanellakis, A. Tawfik and P. Agathoklis : *Stability analysis of 2-D discrete and continuous state-space systems*. Institution of Engineering and Technology, 2021.
- [40] N.A. Khan, M.A. Qureshi, S. Akbar and A. Ara : Probing 3D chaotic Thomas’ cyclically attractor with multimedia encryption and electronic circuitry. *Archives of Control Sciences*, **33 (1)**, 2023, 239–271. DOI : [10.24425/acs.2023145120](https://doi.org/10.24425/acs.2023145120)

- [41] H. Khan, R. Shah, Poom Kumam, and M. Arif, Analytical Solutions of Fractional-Order Heat and Wave Equations by the Natural Transform Decomposition Method, *Entropy*, **21** (597), 2019. <https://doi.org/10.3390/e21060597>
- [42] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, North-Holland.
- [43] A. Klafter, S. C. Lim and R. Metzler : Fractional Dynamics. Recent Advances, World Scientific, Singapore, 2011.
- [44] YH. Lan, Y. Zhou : LMI-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**(3), 1460–1471, 2011.
- [45] X. Li, C. E. De Souza : Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : A linear matrix Inequality approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42** (8), 869-879, 1997. [10.1109/9.618244](https://doi.org/10.1109/9.618244)
- [46] L. Li, L. Xu and Z. Lin : Stability and stabilization of linear multidimensional discrete system in the frequency domain. *International Journal of Control*, 86 (11), 2013, 1969–1989. <https://doi.org/10.1080/00207179.2013.823671>
- [47] JG. Lu, YQ. Chen : Robust stability and stabilization of fractional order interval systems with the fractional order : the case  $0 < \alpha < 1$ . *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55** (1), 152–158, 2010.
- [48] U. Mackenroth : Robust Control Systems : Theory and Case Studies. Springer-Verlag, Berlin, **10**, 281–305, 2017.
- [49] F. Mainardi : Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Springer-Verlag Wien, New York, **378**, 1997.
- [50] T. Malakorn : Multidimensional Linear Systems and Robust Control, Doctorat of Philosophy in Electrical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and state University, April 2003.
- [51] W. Marszalek : Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, **8** (1), 11–14, 1984. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(84\)90170-7](https://doi.org/10.1016/0307-904X(84)90170-7)
- [52] K. S Miller and B. Ross : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons Inc, New York. **1**, 1993.
- [53] C.A. Monje, Y. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu-Batlle : Fractional-order systems and controls, Fundamentals and applications. Springer, London, 2010.



- [54] M. Moze, J. Sabatier and A. Oustaloup : On bounded real lemma for fractional systems. Proceedings of the 17th word Congress the International Federation of Automatic Control, **4 (6)**, 15267–15272, 2008.
- [55] M. D. Ortigueira, J. A. T. Machado : Fractional calculus applications in signals and system. Signal Processing, Elsevier, Signal Processing, **86 (10)**, 2503–3094, 2006.
- [56] G. G. Parra, A. J. Arenas and B. M. Chen-Charpentier : A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1). Mathematical Methods in the Applied Sciences, **37** : 2218–2226, 2014. <https://doi.org/10.1002/mma.2968>
- [57] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, J. Bernussou : A new robust  $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty. Systems & Control Letters, **40 (1)**, 21–30, 2000. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00119-X](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00119-X)
- [58] I. Podlubny : Fractional Differential Equations. Mathematics in science and Engineering, **198**, 1998.
- [59] E. P. Popov : The Dynamics of Automatic Control Systems. pergamon Press oxford. London. New York. Paris. 1962.
- [60] R. Roesser : A discrete state-space model for linear image processing. IEEE Transactions on Automatic Control, **20 (1)**, 1–10, 1975.
- [61] J. Sabatier, O. P. Agrawal and J. A. Machado : Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering Springer, 2007. 10.1109/TAC.1975.1100844
- [62] S. Salmi and D. Bouagada : Stability Margins for Generalized Fractional Two-Dimensional State Space Models. Archives of Control Sciences, **34 (1)**, 23–37, 2024.
- [63] S. Samko, A. Kilbas, and O. Marichev : Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [64] H. H. Sherief, A. M. Abd El-Latief : Application of fractional order theory of thermoelasticity to 3D time-dependent thermal shock problem for a half-space. Mechanics of Advanced Materials and Structures, **24 (1)**, 27–35, 2017. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1091532>
- [65] C.E. de Souza, L. Xie : On the Discrete-time Bounded Real Lemma with application in the characterization of static state feedback controllers, Systems & Control Letter, **18**, 61–71, 1992.
- [66] A. Soukkou, Y. Soukkou, S. Haddad, M. Benghaem and A. Rabhi : Review, design, stabilization and synchronization of fractional-order energy resources demand-supply hyperchaotic systems using fractional-order PD-based feedback control scheme. Archives of Control Sciences, **33 (3)**, 2023, 539–563. DOI : 10.24425/acs.2023.146957

- [67] J. Spanier, K.B. Oldham : The Fractional Calculus. Mathematics in science and engineering, New York, **111**, 1974.
- [68] A. Taieb : Étude analytique des équations différentielles fractionnaires et applications, 2016, <http://hdl.handle.net/123456789/900>
- [69] M. S. Taravazoi, M. Haeri : A note of stability of fractional order systems and computer simulation. Mathematics and Computers in Simulation, **79 (5)**, 1566–1576, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.07.003>
- [70] S. Tofighi, M. Shafiee and S. M. Alavinia : Stability analysis of three-dimensional : 3D systems using a wave advanced model (WAM). Transactions of the Institute of Measurement and Control, **39 (6)**, 896–906, 2015. <https://doi.org/10.1177/01423312156211>
- [71] D. Valério and J. S. da Costa : An introduction to Fractional Control. The Institution of Engineering and Technology, 2012. [10.1049/PBCE091E](https://doi.org/10.1049/PBCE091E)
- [72] C. F. Van Loan, Generalizing the Singular Value Decomposition. SIAM Journal on Numerical Analysis, **13 (1)**, 76–83, 1976.
- [73] R. Vích : Z Transform Theory and Applications. Mathematics and its Applications, **16**, 1987.
- [74] L. Xu, L. Wu, Q. Lin and Y. Xiao, On realization of 2D discrete systems by Fornasini-Marchesini model, International Journal of Control, Automation, and Systems, **3 (4)**, 631–639, 2005.
- [75] Y. Zou, H. Xu and W. Wang : Stability for two-dimensional singular discrete systems described by general model. Multidimensional Systems and Signal Processing, **19**, 219–229, 2007. [10.1007/s11045-007-0027-y](https://doi.org/10.1007/s11045-007-0027-y)