Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Guendouz Yamina

le 13 Juin 2018

Observabilité idéale pour une classe de systèmes linéaires

Encadeur : **Professeur BOUAGADA Djillali (Université de Mostaganem, Algérie)**

Jury

Dr. M. A. Ghezzar. ,	Maître de Conférences B	Président (Université de Mostaganem, Algérie)
Dr. Z. Kaisserli. ,	Maître de Conférences B	Examinateur (Université de Mostaganem, Algérie)

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Remerciements

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aider pour réaliser ce travail. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur le Professeur BOUAGADA Djillali, de m'avoir proposer le sujet de ce mémoire et de ces précieux conseils.

Je voudrais remercier également les membres du jury d'avoir accepté de porter un jugement sur mon travail et de faire partie du jury de soutenance de ce mémoire, Merci aux Dr. M. A. GHEZZAR et Dr. Z. KAISSERLI, ainsi qu'à tous mes professeurs et mes enseignants qui m'ont soutenu jusqu'au bout.

Je remercie infiniment mes parents pour leur amour, leurs confiances et leurs soutiens pendant toutes ces années.

Mes remerciements vont aussi a ma sœur Ines et son marie Aziz et leur petite Rimas, aussi à mes amis et amies : Amina, Nadjib et Noureddine, ainsi tout mes camarades.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont enseignées et toutes les personnes qui m'ont aidées durant mon travail.

Dédicaes

Je dédie ce travail à mes très chers parents dont le rêve a toujours était de me voir réusir, qu'ils sachent que leur places dans mon cœur, restent et demeurent immense.

A toute ma grande famille, et spécialement à mon cher père et ma chère mère.

A mon encadreur : Professeur BOUAGADA Djillali pour son aide et compréhension.

A tous mes amis pour les merveilleux moments que nous avons passés ensemble et qui restent des souvenirs inoubliables.

Table des matières

L'observabilité idéale pour une classe de systèmes linéaires

Résumé : L'étude du problème de l'observabilité est une notion importante pour l'analyse des systèmes. Nous considérons dans ce contexte la classe de systèmes singuliers ou non pour dériver des conditions et des tests d'observabilité.

D'autre part, il est bien connu qu'un système est idéalement observable si connaissant le contrôle et les mesures du système, les matrices d'évolution et d'observation, la détermination de l'état du système est donc possible. Dans ce cas, nous cherchons à établir des tests pour l'observabilité idéale pour la classe considérée. Des algorithmes de calcul et des exemples réels seront cependant introduits.

The ideal observability for a class of linear systems

Abstract : The study of the problem of observability is an important notion for systems analysis. We consider in this context the class of singular systems or not to derive conditions and tests of observability.

On the other hand, it is well known that a system is ideally observable if knowing the control and the measurements of the system, the matrices of evolution and observation, the determination of the state of the system is possible. In this case, we seek to establish tests for the ideal observability for the considered class. Calculation algorithms and real examples will however be introduced.

Introduction

La représentation d'état des systèmes est un outil puisant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps discret ou continu et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes [21].

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'observabilité idéale pour une classe de systèmes linéaires. Ce problème est fortement lié à différentes notions de l'observabilité. Cette dernière est une notion fondamentale et importante dans l'analyse et le contrôle des systèmes. Elle est introduite par Kalman dans les années 60 [16].

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire d'une représentation d'état ' système à déterminer l'historique d'un état à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurée.

L'observabilité qui nous intéresse est l'étude des systèmes dynamiques sur lesquels on agit à l'aide d'un contrôle.

Ce mémoire est rédigé comme suit :

Dans le premier chapitre, Nous présentons un rappel sur des notions de bases dont nous aurons besoin dans notre travail. Nous étudierons la classe de systèmes linéaires à temps invariants dans les deux cas : continu et discret.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons l'observabilité où de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes seront dérivées. L'observabilité idéale de ces systèmes fait également objet de tests et caractérisations.

Une nouvelle classe de systèmes linéaires singuliers discret-discret à deux dimensions est introduite par Fornasini and Marchesini [5], J.Kurek [12], , J.Klamka [13], T.Kaczorek [20], ainsi que d'autres scientifiques. Dans les systèmes à deux dimensions discret-discret, l'une des variables indépendante est discrète, la seconde l'est aussi. Ces systèmes trouvent leurs applications en biomathématiques, en économie et en électronique. Il s'agit de la propagation de l'information dans deux directions différentes.

Le troisième chapitre traitera donc l'observabilité et l'observabilité idéale pour le cas bidimensionnel 2D. Nous insistons sur le fait que très peut de travaux traitent le problème d'analyse d'observabilité idéale des systèmes singuliers bidimensionnels.

Les méthodes les plus populaires de systèmes 2D bidimensionnels sont les modèles étudiés dans [8] et introduit par Roesser, Attasi et Fornasini-Marchesini [18] [19]. Dans ce mémoire, nous considérons le modèle discret 2D de Fornasini-Marchesini. Dans ce chapitre nous adapterons les tests et les algorithmes par les invariants.

Nous terminerons par le chapitre quatre qui consiste à étudier l'observabilité dans l'espace de dimension infinie avec des opérateurs bornés et où l'opérateur d'évolution est générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe.

Ce chapitre donne les définitions et les caractérisations des deux concepts, contrôlabilité et observabilité qui sont duaux entre eux.

Notations

I_n	:	Matrice identité de dimension n.
A^T	:	Transposé de A.
A^*	:	Opérateur adjoint de A.
$A^\perp$	:	Orthogonale de A.
e^A	:	Matrice exponentielle de A.
$D(A)$	:	Domaine de A.
$det(A)$	:	Déterminant de A.
$rg(A)$	:	Rang de A.
$KerA$	:	Noyau de A.
ImA	:	Image de A.
$p_\lambda(A)$	:	Le polynôme caractéristique de A.
$\langle .,. \rangle$	:	Le produit scalaire.
$\|.\|$	:	La norme euclidienne.
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	:	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	:	Ensemble des entiers naturels positifs.
$\mathbb{Z}_+$	:	Ensemble des entiers relatifs positifs.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes.
$\ell(.)$	:	Ensemble des opérateurs linéaires et continus.
R^n	:	Espace des valeurs à n entiers réelles.
$R^{n\times n}$	:	Espace des matrices carrées de dimension n.
$R^{m\times n}$	:	Espace des matrices carrées de dimension $m \times n$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous proposons quelques notions préliminaires et les notions de bases qui représentent des outils d'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail. Nous présentons aussi la notion de description de systèmes qui est basé sur un système d' équations différentielles linéaires du premier ordre.

Pour ce faire nous nous sommes basés sur les références suivantes : [3] [4] [6] [15] [18] [21]

1 Notions de bases

1.1 Outils d'algèbre linéaire

Théorème 1.1 *(Cayley-Hamilton) Toute matrice non constante* A *satisfait son équation caractéristique*

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

et

$$p_A(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0.$$

où : $\lambda \in \mathbb{K}(\mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$.

Exemple 1.1 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

et donc, il est facile de vérifier que

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.1 *Le déterminant d'une matrice carrée* $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ *d'ordre* n *est alors le nombre*

$$detA = |A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$$

pour j fixé, ou

$$detA = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

pour i fixé.

Théorème 1.2 *Le rang d'une matrice* A *est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.*

Définition 1.2 *Le produit scalaire sur* E *est une application noté* $\langle .,. \rangle$, *défini de* $E \times E$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :*

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *(commutative).*
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ *(linéarité).*
3. $\langle x, x \rangle > 0$ *si* $x \neq 0$ *(positivité).*

pou tout $x, y, z \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Proposition 1.1 *La norme d'un vecteur x est définie par,*

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Proposition 1.2 *On dit que des vecteurs x et y sont orthogonaux si*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Proposition 1.3 *La matrice* A *est symétrique semi définie positive si et seulement si*

$$A^T = A$$

$$< Ax, x > \geq 0$$

respectivement.

Définition 1.3 *Soit A une matrice de dimension* $m \times n$. *Son noyau et son image sont les sous espaces définis respectivement par,*

$$KerA = \{ X = (x_1 .....x_n)^T \in \mathbb{K}^n : AX = 0 \}$$

$$ImA = \{ Y = (y_1 .....y_m)^T \in \mathbb{K}^m ; \exists X = (x_1 .....x_n)^T \in \mathbb{K}^n : Y = AX \}$$

Définition 1.4 *Soit* $\mathbb{H}$ *un espace de Hilbert,* $\langle .,. \rangle_{\mathbb{H}}$ *son produit scalaire et* $\|.\|_{\mathbb{H}}$ *la norme correspondante.*

On note par $L_2([0,T], \mathbb{H})$ *l'espace de Hilbert muni du produit scalaire* $\langle .,. \rangle_{L_2([0,T],\mathbb{H})}$ *défini par :*

$$\langle f, g \rangle_{L^2([0,T],\mathbb{H})} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt$$

Théorème 1.3 *Soient* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *deux espaces de Hilbert et* $P : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *une application linéaire et bornée.* P *est surjective si et seulement si :*

$$\exists \delta > 0 \ t.q : \ \|Py^*\|_{\mathbb{Y}} \geq \delta \|y^*\|, \forall y^* \in \mathbb{X}$$

Définition 1.5 *On appelle* C_0 *semi-groupe d'opérateurs linéaires et continu une famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *si et seulement si* $S(t) \in \ell(\mathbb{X})$ *,* $t \geq 0$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $S(0) = I$.
2. $S(t+z) = S(t).S(z)$.
3. $\underset{t\geq 0}{lim}\, S(t)x = x$.

Définition 1.6 *On appelle générateur* $A : D(A) \subset \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ *infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *l'opérateur,*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

défini pour tout x dans son domaine :

$$D(A) = \{x \in \mathbb{X} / \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

Remarque 1.1 *Il est clair que le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe est un opérateur linéaire.*

Définition 1.7 *Soit* $\mathbb{X}$ *un espace de Banach.*

On dit qu'un opérateur N*, défini de* $\mathbb{X}$ *dans* $\mathbb{X}$ *est :*

1. *défini positif s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que :*

$$\langle Ny, y\rangle \geq \alpha \|y\|^2,\ \forall y \in \mathbb{X}$$

2. N *est dit positif si :*

$$\langle Ny, y\rangle \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{X} \text{ et } \langle Ny, y\rangle \geq 0 \Rightarrow y = 0$$

1.2 Rappels sur les exponentielles de matrices :

Définition 1.8 *Soit* M *une matrice carrée de dimensions n. L'exponentielle de la matrice* M *se défini par son développement en série entière :*

$$exp(M) = e^M = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} M^i = I_n + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \ldots\ldots.. \tag{1.1}$$

Définition 1.9 *Soit* $A \neq 0$ *une matrice carrée de dimension* n*.* A *est dite nilpotente s'il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *l'ordre de nilpotence de* A *tel que* $A^m = 0$*, alors* $A^k = 0$ *pour tout* $k \geq m$*.*

Exemple 1.2 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$A^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,\ \forall m \geq 2$$

On a donc

$$e^A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots\ldots. = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si on revient à la formule (1.1), on s'aperçoit alors que cette dernière ne contient qu'un nombre fini de termes, et on a donc

$$e^{A} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} A^{i} = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1}.$$

Par l'utilisation du théorème (1.1), On peut réecrire e^{A} par :

$$e^{A} = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_{n-1} A^{n-1}.$$

O*ù* : $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ sont des scalaires.

2 Notion de systèmes

Définition 1.10 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalise une opération spécifique, il y a donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extérieure.*

Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

Remarque 1.2 *Un système mono-variable SISO (Single Input-Single Output) est un système à une seule entrée et une seule sortie.*

2.1 Systèmes et représentations d'état :

Tout système dynamique peut être représenté par ses équations d'état définies comme un ensemble d'équations différentielles du premier ordre appelées équations dynamique et un ensemble d'équations algébriques appelées équations de sorties ou de mesures.

$$\begin{cases} \acute{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{équation dynamique} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) & \text{équation de mesures} \end{cases}$$

Remarque 1.3 *f et h sont susceptible de prendre n'importe quelle forme.*

Dans notre cas, on intéresse au cas de systèmes qui peut être d'écrit par une équation linéaire à coefficient constant qui veut dire des systèmes L.T.I (linéaire à temps invariant).

2.2 Description d'un système L.T.I à temps continu :

Définition 1.11 *La représentation d'état d'un système L.T.I à temps continu est représentée par,*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \acute{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$	:	*le vecteur d'état.*
$y(t) \in \mathbb{R}^m$	:	*le vecteur de sortie.*
$u(t) \in \mathbb{R}^m$:	:	*le vecteur de commande.*
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	:	*la matrice d'état.*
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$	:	*la matrice d'entrée.*
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$	:	*la matrice de sortie.*
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$	:	*la matrice de transmission et t désigne le temps.*

L'état du système est :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

La sortie, sera donc :

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{1.3}$$

2.3 Description d'un système L.T.I à temps discret :

Définition 1.12 *La représentation d'état d'un système L.T.I à temps discret est représentée par,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1}(t) & = & Ax_k(t)+Bu_k(t) \\ y_k(t) & = & Cx_k(t)+Du_k(t) \\ x_k(0) & = & x_0,\ \forall k \in \mathbb{R}^+,\ k \geq 0 \end{array}\right. \tag{1.4}$$

où :

$x_k(t) \in \mathbb{R}^n$	:	*le vecteur d'état.*
$y_k(t) \in \mathbb{R}^m$	:	*le vecteur de sortie.*
$u_k(t) \in \mathbb{R}^m$	:	*le vecteur de commande.*
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	:	*la matrice d'état.*
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$	:	*la matrice d'entrée.*
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$	:	*la matrice de sortie.*
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$	:	*la matrice de transmission et t désigne le temps.*

L'état du système est :

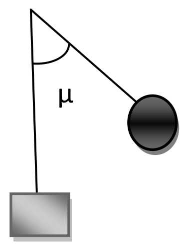
$$x_k(t) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)}Bu_i + Du_k, k > 0$$

La sortie, sera donc :

$$y_k(t) = CA^k x(0) + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)}Bu_i + Du_i,\ k > 0 \tag{1.5}$$

Remarque 1.4 *Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent la matrice* D *qui est nulle.*

Exemple 1.3 *Soit le pendule donné par la figure ci-dessous.*



L'application de la relation fondamentale de la dynamique est représentée par l'équation linéaire suivante :

$$m\,l^2\mu'' + k\mu' + m\,g\,sin\mu = 0 \tag{1.6}$$

où : g est la constante gravitionnelle, l est la longueur du pendule, m sa masse et k sa constante de raideur.

Si on suppose que : $\sin\,\mu \simeq \mu$. *l'équation (1.6) devient une équation linéaire qui peut être d'écrit par,*

$$m\,l^2\mu'' + k\mu' + m\,g\,\mu = 0 \tag{1.7}$$

On déduire l'équation (1.7) sous un système différentiel d'ordre 1 de type

$$X' = AX + B$$

Soit

$$X_1 = \mu$$

et

$$X_2 = \mu'$$

alors

$$X_1' = \mu' = X_2 \tag{1.8}$$

et

$$X_2' = \mu'' = -\frac{k}{m\,l^2}X_2' - \frac{g}{l}X_1 \tag{1.9}$$

Les équations (1.8) et (1.9) donnent le système suivant :

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tels que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

et

$$X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Chapitre 2

Observabilité et L'observabilité idéale

Dans ce chapitre, Nous commencerons notre étude par rappeler puis établir les tests, ceci après avoir définir la notion d'observabilité et d'observabilité idéale, l'objectif est de déterminer x_0 de manière unique à partir de la connaissance de u, A et C. Une détermination de $x(t)$ avec contrôle inconnue défini l'observabilité idéale, et a part on détermine le lien entre la notion de contrôlabilité et d'observabilité.

1 Observabilité

Remarque 2.1

1. *Dans la suite, on peut parler de la paire* (C,A) *au lieu du système (1.3) (1.5).*
2. *Si toutes les variables d'état sont observables, alors le système est dit complètement observable.*

Nous proposons dans ce chapitre des testes pour l'observabilité tout en s'apuit sur les références suivante [4] [7] [11] [16] [21] .

Dans toute la suite, on étudier l'observabilité dans deux cas, le cas discret puis le cas continu.

Le concept d'observabilité à été introduit par l'ingénieur Hongro-Américain Rudolf E.Kalman en 1960 [16].

1.1 Cas discret :

Le critère de Kalman existe seulement pour la notion d'observabilité et fait intervenir La matrice dynamique A et la matrice de sortie C. Il est formulé par la matrice d'observabilité ci-dessous

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2 *Si on note par :*

$$\overline{y_k} = CA^k x_0 \tag{2.1}$$

L'équation de sortie (1.5) devient :

$$\left(\overline{y_k} = y_k - \left(\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} Bu_i + Du_k\right)\right) \tag{2.2}$$

La détermination de x_0 vient à partir de (2.1) pour $k = 0, 1, ..., n-1$ qui s'écrit par :

$$\overline{y_k} = Ox_0$$

avec :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \ \overline{y_k} = \begin{pmatrix} \overline{y_0} \\ \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \overline{y_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Par construction, cette dernière équation possède toujours une solution x_0 et donc l'équation (2.2) possède une solution si la condition de Kalman est vérifiée soit du le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Le système (1.4) est observable si et seulement si les vecteurs colonnes*

$$C^T, A^T C^T, ..., (A^T)^{n-1} C^T$$

sont linéairement indépendants.

Autrement dit il est est observable si et seulement si

$$rg(O) = n$$

Exemple 2.1 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k \\ Y_k &= cX_k \end{cases}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme

$$det(O) = -1 \neq 0$$

et le rang de O *égale à 2, donc le système est donc observable.*

Exemple 2.2 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} X_{k+1} & = & AX_k \\ Y_k & = & cX_k \end{cases}$$

tel que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme

$$det(O) = 0$$

et le rang de O *n'est pas plein, donc le système est non observable.*

Exemple 2.3 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_3(k) + u(k) \\ x_3(k+1) & = & ax_1(k) + 2x_2(k) + u(k) \\ y(k) & = & x_2(k) + x_3(k) \end{cases}$$

L'écriture matricielle de ce système est :

$$\begin{cases} X(k+1) & = & AX(k) + BU(k) \\ y(k) & = & CX(k) \end{cases}$$

tels que :

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix}, X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ a & 2+a & 2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$det(O) = a^2 - a = a(a-1) = 0$$

alors :

$$a = 0 \text{ ou } a = 1$$

Donc le système est observable si $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Pour cette classe de système, on propose d'autres tests tout en se basant sur [4] [7] [11] [21]

Proposition 2.1 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} ker CA^i = \{0\}$$

Proposition 2.2 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{i \geq 0} ker CA^i = \{0\}$$

Théorème 2.2 *La paire (C, A) est observable si et seulement si*

$$ker O = \{0\}$$

Preuve. On démontre ce résultat par l'absurde.

Supposons que la paire (C, A) est observable, selon la proposition (2.2) on a :

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} ker CA^i = \{0\}$$

Supposons aussi que

$$ker(O) \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } Ox = 0$$

implique que :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0$$

donc

$$\begin{cases} Cx & = & 0 \\ CAx & = & 0 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ CA^{n-1}x & = & 0 \end{cases}$$

alors

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} ker CA^i = 0 \Longrightarrow x = 0$$

C'est une contradiction.

Inversement, supposons que

$$ker(O) = \{0\}$$

implique

$$ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

alors

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} ker CA^i = \{0\}$$

et donc la paire (C, A) est observable, d'où le résultat. ■

Proposition 2.3 *la paire* (C, A) *est observable si et seulement si* W_O *est inversible.*

où : W_O *est défini par la proposition suivante :*

Proposition 2.4 *Le Gramien d'observabilité d'un systéme (1.4) est la matrice symétrique semi définie positive noté* $W_O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et définie par :*

$$W_O = \sum_{i=0}^{n-1} CA^i A^{i^T} C^T.$$

Preuve. On montre d'abord que W_O est symétrique.

$$\begin{aligned}
W_O^T &= \Big(\sum_{i=0}^{n-1} CA^i A^{i^T} C^T\Big)^T \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \big(CA^i A^{i^T} C^T\big)^T \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (A^{i^T} C^T)^T (CA^i)^T \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (C^T)^T (A^{i^T})^T A^{i^T} C^T \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} CA^i A^{i^T} C^T
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$W_O^T = W_O$$

et donc W_O est symétrique.

En suite, pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
< W_O x, x > &=< \sum_{i=0}^{n-1} CA^i A^{i^T} C^T x, x > \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} < CA^i A^{i^T} C^T x, x > \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} < CA^i x, (A^{i^T} C^T)^T x > \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} < CA^i x, CA^i x > \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \|CA^i x\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

donc W_O est semi définie positive.

■

Définition 2.1 *Le système est observable si et seulement si*

$$rg \begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

où : z est la valeur propre de A.

Remarque 2.3 *Cette définition existe pour les deux cas : discret et continu.*

1.2 Cas continu :

Les résultats de la section précédente s'adapte bien pour le cas discret.

La matrice d'observabilité est définie par la matrice formée de n valeurs lignes $C, ..., C(A)^{n-1}$ ci-dessous,

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ C(A)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Remarque 2.4 *Si on note par,*

$$\overline{y(t)} = Ce^{At}x_0 \tag{2.3}$$

L'équation d'état (1.3) devient :

$$\left(\overline{y(t)} = y(t) - \left(\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\right)\right) \tag{2.4}$$

La détermination de x_0 vient à partir de (2.3).

pour $t = 0$, l'équation (2.3) devient :

$$Cx_0 = 0$$

On dérive l'équation (2.3), on trouve :

$$CAe^{At}x_0 = 0 \tag{2.5}$$

Pour $t = 0$, l'équation (2.5) devient :

$$CAx_0 = 0$$

et ainsi de suite jusqu'à n-1. On obtient alors la nouvelle équation qui s'écrit par,

$$\overline{y(t)} = Ox_0$$

avec :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}, \ \overline{y(t)} = \begin{pmatrix} \overline{y_0} \\ \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \overline{y_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Par construction, cette dernière équation possède toujours une solution x_0, soit l'équation (2.4) possède une solution si la condition de Kalman est vérifiée. Nous caractérisons ceci par les résultats suivants,

Théorème 2.3 *Le systéme (1.2) est observable si et seulement si les vecteurs lignes*

$$C, CA, CA^2, ..., CA^{n-1}$$

de O *sont linéairement indépendants.*

Autrement dit il est observable si et seulement si

$$rang(O) = n$$

Exemple 2.4 *Soit le système d'écrit par,*

$$\begin{cases} \acute{x}(t) &= \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t) \\ y(t) &= \mathrm{C}x(t)+\mathrm{D}u(t) \end{cases}$$

avec :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix};\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix};\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et n égale à 2.

La matrice d'observabilité est :

$$\mathrm{O}=\begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme

$$det(\mathrm{O})=1\neq 0$$

alors,

$$rg(\mathrm{O})=2$$

qui égale à n, donc le système est observable.

Exemple 2.5 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \acute{x}(t) &= \mathrm{A}x(t)+\mathrm{B}u(t) \\ y(t) &= \mathrm{C}x(t)+\mathrm{D}u(t) \end{cases}$$

tel que :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix};\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix};\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1 & \delta \end{bmatrix}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\mathrm{O}=\begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \alpha\delta-1 & \delta \end{bmatrix}$$

d'où

$$det(\mathrm{O})=\begin{vmatrix} 1 & \delta \\ \alpha\delta-1 & \delta \end{vmatrix}=2\delta-\alpha\delta^2$$

donc le système est observable si $det(\mathrm{O})\neq 0$ i.e si $\delta\neq 0$ ou $\alpha\delta\neq 2$.

Pour cette classe de systèmes, on propose d'autres tests :

Proposition 2.5 *La paire* (C,A) *est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{t\in[0,\tau]} \mathrm{Ker}\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}=\{0\}$$

Proposition 2.6 *La paire* (C,A) *est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{t\geq 0} ker\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}=\{0\}$$

Théorème 2.4 *La paire* (C, A) *est observable si et seulement si*

$$kerO = \{0\}.$$

Preuve. On démontre ce résultat par l'absurde.

Supposons que (C, A) est observable, selon la proposition (2.6) on a :

$$\bigcap_{t\geq 0} kerCe^{At} = \{0\}$$

Supposons aussi que

$$ker(O) \neq 0$$

i.e

$$\exists x \neq 0 \ / \ Ox = 0 \tag{2.6}$$

On sait que

$$Ce^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} CA^i \frac{t^i}{i!}$$

Soit $x \in \bigcap_{t\geq 0} kerCe^{At}$
alors

$$x \in kerCA^i \frac{t^i}{i!} = 0, \ \forall t \geq 0, \ \forall i = 0, ..., n-1$$

D'après la proposition (2.1) on a :

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} kerCA^i = \{0\}$$

Soit $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} kerCA^i$, alors $x = 0$, et donc

$$x \in \bigcap_{t\geq 0} kerCe^{At} = \{0\}$$

implique $x = 0$, soit donc la contradiction avec l'équation (2.6).

Inversement, supposons que

$$KerO = \{0\}$$

d'où

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} kerCA^i = \{0\}$$

alors :

$$\bigcap_{t\geq 0} kerCe^{At} = \{0\}$$

donc la paire (C, A) est observable. ■

Proposition 2.7 *la paire* (C, A) *est observable si et seulement si*

$$W_O = \int_0^t Ce^{A\tau} e^{A^T\tau} C^T d\tau$$

est inversible.
Où : W_O *est le Gramien d'observabilité symétrique semi définie positive.*

Preuve. Supposons que le système est observable, d'après la proposition (2.5), on a :

$$\bigcap_{t\in[0,\tau]} KerCe^{At} = \{0\}$$

Supposons aussi que W_O n'est pas inversible, i.e :

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } W_O x = 0$$

Soit $x \in kerW_O$, cela veut dire que :

$$\begin{aligned} W_O x &= x^T W_O x \\ &= \langle W_O x, x\rangle \\ &= \int_0^t \langle Ce^{A\tau} e^{A^T\tau} C^T x, x\rangle d\tau \\ &= \int_0^t \langle Ce^{A\tau} x, Ce^{A\tau} x\rangle d\tau \\ &= \int_0^t \|Ce^{A\tau} x\|^2 d\tau \end{aligned}$$

qui est égale à 0, implique que :

$$\|Ce^{A\tau} x\| = 0$$

la fonction $Ce^{A\tau} x$ est continue, donc

$$Ce^{A\tau} x = 0 \text{ presque partout } t \in [0,\tau]$$

alors,

$$x \in \bigcap_{t\in[0,\tau]} KerCe^{At} \Rightarrow x = 0$$

on a une contradiction.

Inversement, supposons que W_O est inversible, i.e :

$$\forall x,\ W_O x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

et supposons aussi que le système n'est pas observable, selon la proposition (2.5), on a

$$\bigcap_{t\in[0,\tau]} KerCe^{At} \neq \{0\}$$

i.e

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } x \in kerCe^{A\tau}, text \forall t \in [0,\tau]$$

contradiction. ■

les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité sont très étroitement liées par une forme particulière de dualité.

2 Lien entre l'observabilité et la contrôlabilité

On considère deux systèmes au cas continu (S) et (S*) et qui sont donnés par :

$$(S):\begin{cases} \acute{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{cases}$$

et

$$(S^*):\begin{cases} \acute{x^*}(t) &= A^T x^*(t)+C^T u^*(t)\\ y^*(t) &= B^T x^*(t)\end{cases}$$

tel que : (S^*) est appelé le système dual ou l'adjoint du système (S).

Proposition 2.8 *Le système* (S) *est contrôlable si et seulement si*

$$[B, AB, A^2B, \ldots.., A^{n-1}B]^T$$

est de rang plein.

La relation entre les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité est donnée par le théorème suivant,

Théorème 2.5 *Le système* (S^*) *est observable si et seulement si la paire Le système* (S) *est contrôlable.*

Preuve. En effet,le système (S^*) est observable, selon la proposition (2.4)

$$[B^T, B^TA^T, B^T(A^T)^2, \ldots.., B^T(A^T)^{n-1}]^T$$

est de rang plein. alors

$$[B, AB, A^2B, \ldots.., A^{n-1}B]^T$$

est de rang n. D'où le système (S) est contrôlable.

Inversement, soit le système (S) est contrôlable, selon la proposition (2.4)

$$\text{rg } [B, AB, A^2B, \ldots.., A^{n-1}B]^T = n$$

implique que :

$$\text{rg } [B^T, B^TA^T, B^T(A^T)^2, \ldots.., B^T(A^T)^{n-1}]^T = n$$

d'où le système (S^*) est observable.

■

3 Observabilité idéale

On considère le système au cas suivant :

$$\begin{cases} \acute{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\\ x(0) &= x_0\end{cases}$$

avec : $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Définition 2.2 *Le système est dit idéalement observable s'il n'existe pas*

$$(x_0, u(.)) \neq 0 \text{ tel que } y(t, x_0, u(.)) = 0$$

i.e, si le système est dit idéalement observable et si

$$y(t, x_0, u(.)) = 0$$

alors

$$x(t, x_0, u(.)) = 0$$

Les définitions suivantes fournirent les caractérisations fondamentales des sous espaces A, (A, B) et (A, C) invariants.

Définition 2.3 *Le sous espace* V *est dit* A*-invariant si*

$$A(V) \subset V$$

i.e

$$\forall x \in V \Longrightarrow Ax \in V$$

Exemple 2.6 *kerO est un sous espace vectoriel A-invariant, car :*
Soit $x \in ker$O alors,

$$Ox = 0 \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) implique que :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors,

$$\begin{pmatrix} Cx \\ CAX \\ cA^2x \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$Cx = CAx = CA^2x = . = . = . = CA^{n-1}x = O \tag{2.8}$$

Pour vérifiée que $Ax \in ker$O, *il reste à montrer que* $CA^n x = 0$, *et en vertu du théorème de Cayley Hamilton on aura :*

$$p(A) = 0$$

i.e

$$a_0 + a_1A + a_2A^2 + . + . + . + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0$$

on trouve alors que :

$$\mathrm{CA}^n x = a_0 \mathrm{C}x + a_1 \mathrm{CA}x + a_2 \mathrm{CA}^2 x + . + . + . + a_{n-1} \mathrm{CA}^{n-1} x = 0$$

d'où le résultat.

Définition 2.4 *Le sous espace v est dit* (A, B)*-invariant si*

$$\mathrm{A}(v) \subset (v + \mathrm{I}m\mathrm{B})$$

Définition 2.5 *Le sous espace w est dit* (C, A)*-invariant si*

$$\mathrm{A}(w \cap ker\mathrm{C}) \subset w$$

Définition 2.6 *Si v est* (A, B)*-invariant alors, il existe* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \longrightarrow v$ *tel que : v est* $(\mathrm{A} + \mathrm{BF})$*-invariant.*

Proposition 2.9 *Si v un* A*-invariant alors il est* (A, B)*-invariant.* $\forall \mathrm{B}$

Preuve. Soit v est A-invariant, d'après la définition (2.4) on a

$$\mathrm{A}(v) \subset v$$

or

$$v \subset v + \mathrm{I}m\mathrm{B}$$

par suite,

$$\mathrm{A}(v) \subset v + \mathrm{I}m\mathrm{B}$$

donc v est (A, B)-invariant. ∎

Proposition 2.10 *Si v_1 et v_2 sont* (A, B)*-invariants alors,* $(v_1 + v_2)$ *l'est aussi.*

Preuve. Soit v_1 et v_2 sont (A, B)-invariants, selon la définition (2.5) on a

$$\mathrm{A}(v_1) \subset v_1 + \mathrm{I}m\mathrm{B}$$

$$\mathrm{A}(v_2) \subset v_2 + \mathrm{I}m\mathrm{B}$$

D'après les deux dernières équations, on trouve,

$$\mathrm{A}(v_1 + v_2) \subset (v_1 + v_2) + \mathrm{I}m\mathrm{B}$$

d'où le résultat. ∎

Proposition 2.11 *Si w_1 et w_2 sont* (C, A)*-invariants alors $w_1 \cap w_2$ l'est aussi.*

Preuve. Supposons que w_1 et w_2 sont (C, A) invariant, d'après la définition (2.6), on a :

$$\mathrm{A}(w_1 \cap ker\mathrm{C}) \subset w_1$$

et

$$\mathrm{A}(w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset w_2$$

On sait que :

$$(w_1 \cap w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset (w1 \cap ker\mathrm{C})$$

et
$$(w_1 \cap w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset (w_2 \cap ker\mathrm{C})$$
alors
$$\mathrm{A}(w_1 \cap w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset (w1 \cap ker\mathrm{C}) \subset w_1$$
De même :
$$\mathrm{A}(w_1 \cap w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset (w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset w_2$$
donc :
$$\mathrm{A}(w_1 \cap w_2 \cap ker\mathrm{C}) \subset (w_1 \cap w_2).$$
d'où le résultat. ■

Théorème 2.6 *w est (C,A)-invariant si et seulement si $w^{\perp}$ est $(\mathrm{A}^*,\mathrm{C}^*)$-invariant.*

Preuve. On note $w^{\perp} = v$.

Soit w est (C,A)-invariant, selon la définition (2.6) on a
$$\mathrm{A}(w \cap ker\mathrm{C}) \subset w$$
Ceci est équivalent à
$$w^{\perp} \subset \big(\mathrm{A}(w \cap ker\mathrm{C})\big)^{\perp}$$
donc
$$v \subset \mathrm{A}^{*^{-1}}(v + (ker\mathrm{C})^{\perp})$$
alors
$$\mathrm{A}^*(v) \subset (v + \mathrm{I}m\mathrm{C}^*)$$
d'où le résultat. ■

On considère le problème de contrôlabilité et puis le problème d'observabilité par dualité. C'est la dualité contrôlabilité/observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

Définition 2.7 *Le sous espace contrôlable $\mathrm{L_T}$ tel que*
$$\mathrm{L_T} =< \mathrm{A}/\beta >= \{x : x = \int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau\}$$
vérifie les trois propriétés suivantes :

1. *$\mathrm{L_T}$ est A-invariant.*
2. *$\beta \subset \mathrm{L_T} =< \mathrm{A}/\beta >$.*
3. *$\mathrm{L_T}$ est minimal i.e si :*
   — *Λ est A-invariant.*
   — *$\beta \subset \Lambda$.*

alors $\mathrm{L_T} \subset \Lambda$.
où : $\beta = \mathrm{I}m\mathrm{B}$ et $< \mathrm{A}/\beta >= \beta + \mathrm{A}\beta + \mathrm{A}^2\beta + \ldots + \mathrm{A}^{n-1}\beta$.

Définition 2.8 *Le sous espace non observable N tel que*
$$\mathrm{N} = \bigcap_{i\geq 0} ker\mathrm{CA}^i = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker\mathrm{CA}^i$$
vérifie les trois propriétés suivante :

1. N *est* A^**-invariant.*
2. $N \subset kerC$.
3. N *est maximal i.e si :*
   - Λ *est* A^**-invariant.*
   - $\Lambda \subset kerC$.

alors $\Lambda \subset N$.

Remarque 2.5 *Le système est observable si* $N = \{0\}$.

Dans cette section, nous donnerons des algorithmes pour chercher les sous espaces V_* et W_* et donner le test pour vérifier si le système est idéalement observable.

le sous espace de observabilité (contrôlabilité) idéale est décrit comme l'interaction d'une collection spéciale des sous espaces observables (contrôlable) respectivement.

Théorème 2.7 *Il existe un sous espace* (A, B)*-invariant maximal contenu dans* K *noté* V_* *et qu'on obtient par l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} V_0 &= K \\ V_k &= K \cap A^{-1}(V_{k-1} + ImB), \ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Où : $K = KerC$.
Quand : $V_k = V_{k-1} = V_*$.

Preuve.

1. Il est clair que $V_k \subset kerC$ car :

$$V_k = K \cap A^{-1}(V_{k-1} + ImB)$$

   qui est inclus dans K.

2. V_k est (A, B)-invariant car :

$$V_k = V_{k+1} = K \cap A^{-1}(V_k + ImB)$$

   qui est contenu dans $A^{-1}(V_k + ImB)$, donc

$$A(V_k) \subset V_k + \beta.$$

3. V_k est maximal car on trouve que $\Lambda \subset V_k$ d'après ce qui suit.

   Supposons que

$$\Lambda \subset V_{k-1}$$

   implique que :

$$\Lambda + \beta \subset V_{k-1} + ImB$$

   alors

$$A(\Lambda) \subset \Lambda + ImB \subset V_{k-1} + ImB$$

   donc

$$\Lambda \subset A^{-1}(V_{i-1} + ImB).$$

   cela implique que

$$\Lambda \subset V_k$$

■

Par dualité et changement de variable, on obtient :

Théorème 2.8 *Il existe un sous espace* (A^*, C^*) *-invariant maximal contenu dans* K *noté* V_* *et qu'obtient par l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} V_0 & = & K \\ V_k & = & K \cap {A^*}^{-1}(V_{k-1} + ImC^*) \end{cases}$$

Où : $K = N^{\perp}$
Quand : $V_* = V_k = V_{k-1}$

Théorème 2.9 *Le sous espace* V_* *est déterminé par l'expression :*

$$V_* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} ker CA^i = \left(L(C^*) + \ldots + L({A^*}^i C^*)\right)^{\perp} = \left(L(C^*, \ldots, {A^*}^i C^*)\right)^{\perp}$$

Où $L(.)$ *représentera l'enveloppe linéaire de* $(.)$.

Preuve. On veut chercher V_* d'après l'exemple suivant :

Soient

$$X = \mathbb{R}^n, U = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, A, B, C.$$

O*ù* :

$$Cx = < C^*, x > \text{ avec} C^* = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Soit $V_0 = K$

$$V_0 = k = \{x / < C^*, x >= 0\} = \left(L(C^*)\right)^{\perp}$$

Pour avoir V_1 :

$$V_1 = K \cap A^{-1}(V_1 + \beta) = K \cap A^{-1}(K + \beta)$$

O*ù*

$$\beta = L(B) = \{Bu / u \in \mathbb{R}\}$$

On sais que :

$$K + \beta = \begin{cases} K & si & CB = 0 \\ X & si & CB \neq 0 \end{cases}$$

Cela implique que :

$$A^{-1}(K + \beta) = \begin{cases} A^{-1}(K) & si & CB = 0 \\ X & sinon & CB \neq 0 \end{cases}$$

alors

$$V_1 = K \cap A^{-1}(K + \beta) = \begin{cases} K \cap A^{-1}(K) & si & CB = 0 \\ K & sinon & CB \neq 0 \end{cases}$$

et on a

$$Cx = < C^*, x >$$

alors

$$CAx = < C^*, Ax > = < A^*C^*, x >$$

i.e

$$A^{-1}(KerC) = A^{-1}(K) = \left(L(A^*C^*)\right)^{\perp} = kerCA$$

et donc

$$V_1 = \begin{cases} KerC \cap kerCA & \text{si} \quad CB = 0 \\ KerC & \text{si} \quad CB \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(L(C^*)\right)^{\perp} \cap \left(L(A^*C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CB = 0 \\ \left(L(C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CB \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(L(C^*) + L(A^*C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CB = 0 \\ \left(L(C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CB \neq 0 \end{cases}$$

Pour la même pratique, on calcule V_2.

$$V_2 = \begin{cases} KerC \cap KerCA \cap KerCA^2 & \text{si} \quad CAB = 0 \\ KerC \cap KerCA & \text{si} \quad CAB \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(L(C^*) + L(A^*C^*) + L(A^{*^2}C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CAB = 0 \\ \left(L(C^*) + L(A^*C^*)\right)^{\perp} & \text{si} \quad CAB \neq 0 \end{cases}$$

et ainsi de suite, on note cependant

$$V_* = V_2 = V_1 = \ldots$$

■

En résumé : soit i l'entier minimal tel que : $CA^iB \neq 0$ alors

$$V_* = \left(L(C^*, \ldots, A^{*^i}C^*)\right)^{\perp}$$

Théorème 2.10 *Le système est dit idéalement observable si et seulement si*

$$V_* = \{0\}.$$

Théorème 2.11 *Soit* N *un sous espace de* X. *Il existe un sous espace* (C, A) *invariant minimal contenant le sous espace* N *et qu'on obtient par l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} W_0 &= N \\ W_i &= N + A(W_{i-1} \cap kerC) \end{cases}$$

Quand $W_k = W_{k+1} = W_*$

Preuve. Soit V_* le sous espace (A^*, C^*)-invariant, selon le théorème (2.8), on a

1. $V_* \subset K$.
2. V_* est (A^*, C^*)-invariant.
3. V_* est maximal.

On note $W_* = V_*^{\perp}$ et $K = N^{\perp}$.

On applique l'orthogonale et le dual sur les trois hypothèses 1,2 et 3, on trouve :

1. $N \subset W_*$.
2. W_* est (C, A)-invariant.
3. W_* est minimal, car :

   Si on a V_* est tel que
   $$\exists V \subset K / V \subset V_*$$
   et on a alors,
   $$\exists N \subset W / W_* \subset W$$

■

Par dualité, on a :

Théorème 2.12 *Il existe un sous espace* (B^*, A^*)*-invariant minimal contenant le sous espace* ImC^* *et qu'on obtient par l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} W_0 &= ImC^* \\ W_i &= W_0 + A^*(W_{i-1} \cap kerB^*), \ \textit{pour tout}\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Quand $W_k = W_{k+1} = W_*$

Définition 2.9 *Le sous espace* W_* *est déterminé par l'expression :*

$$W_* = L\big(ImC^*, ImA^*C^*, \ldots\ldots, ImA^{*^i}C^*\big) = L\big(ImA^{*^i}C^*, i \in \mathbb{N}\big) \tag{2.10}$$

Preuve. Soit $B = 0$, nous obtenons donc d'après l'algorithme (2.10) l'expression suivante :

$$W_i = W_0 + A^* w_{i-1} = ImC^* + ImA^*C^* + \ldots + ImA^{*^{i+1}}C^*.$$

avec

$$W_0 = ImC^*$$

d'où l'expression (2.9). ■

Théorème 2.13 *Le système est idéalement observable si et seulement si*

$$W_* = \mathbb{X}$$

Chapitre 3

Observabilité et Observabilité idéale : cas 2D

L'objectif principal de cette section est l'étude d'une certaine classe de systèmes bidimensionnels. Nous optons à tester l'observabilité et l'observabilité idéale comme extension des résultats unidimensionnels développés dans les deux chapitres 1 et 2.

Dans ce cadre , on considère une classe de systèmes dynamiques dans deux variables indépendantes.

Soit le modèle 2-D de Fornasini-Marchesini, introduit en 1978 [14] et défini par le système suivant :

$$\begin{cases} x_{i+1,j+1} & = & A_1 x_{i,j+1} + A_2 x_{i+1,j} + B_2 u_{i+1,j} + B_1 u_{i,j+1} \\ y_{i,j} & = & C x_{i,j} + D u_{i,j} \end{cases}$$

$O\grave{u}$:
$i, j \in \mathbb{Z}^+$ sont les cordonnées verticales et horizontales entières respectivement.
$A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^{\times m}$, $C_{i,j} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ sont des matrices réelles pour $k = 1, 2$.
$X_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état au point (i,j).
$u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée.
$y_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

La condition aux limite est définie par :

$$X(0) = [x_{0,j}^T, x_{i,0}^T]^T, \ , i, j \in \mathbb{Z}_+$$

Définition 3.1 *La matrice de transition* $T_{i,j}$ *est défini par :*

$$T_{i,j} = \begin{cases} I_n & pour & i = j = 0 \\ A_1 T_{i-1,j} + A_2 T_{i,j-1} & pour & (i,j) > (0,0) \\ 0 & pour & i < 0 \ ou/et j < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

La trajectoire d'état est :

$$x_{i,j} = x_{bc}(i,j) + \sum_{k_1}^{i} \sum_{k_2}^{j} M_{i-k_1, j-k_2} u_{k_1,k_2}$$

et la solution de système est :

$$y_{i,j} = C x_{bc}(i,j) + \sum_{k_1}^{i} \sum_{k_2}^{j} CM_{i-k_1, j-k_2} u_{k_1,k_2} + D u_{i,j}$$

O$\dot{u}$:

$$x_{bc}(i,j) = \sum_{k_1=0}^{i} T_{i-k_1,j-1}\left[A_2 x_{k_1,0} + B_1 u_{k_1,0}\right] + \sum_{k_2=0}^{j} T_{i-1,j-k_2}\left[A_1 x_{0,k_2} + B_2 u_{0,k_2}\right]$$

$$M_{i-k_1,j-k_2} = T_{i-k_1-1,j-k_2} B_1 + T_{i-k_1,j-k_2-1} B_2$$

Remarque 3.1 *Pour la preuve nous invitons le lecteur à consulter la référence suivante [14].*

Nous proposerons dans ce chapitre des tests pour l'observabilité et l'observabilité idéale, tout en s'appuiant sur les références suivantes : [8][9][10] [14] [19]

1 Observabilité

Définition 3.2 *Le modèle est dit observable si* $y_{i,j} = 0$, $i, j \in \mathbb{Z}+$ *implique* $x_{00} = 0$ *pour* $u_{i,j} = 0$.

Le critère d'observabilité est formulé par la matrice d'observabilité suivante :

$$O_{h,k} = \begin{bmatrix} C \\ CT_{1,0} \\ CT_{0,1} \\ . \\ . \\ CT_{i,j} \\ . \\ . \\ . \\ CT_{h,k} \end{bmatrix}$$

Pour $i \in [0,h]$ et $j \in [0,k]$.

Preuve. Si $u_{i,j} = 0$ et $x_{0,j} = 0$, $j \in [1,k]$, $x_{i,0} = 0$, $i \in [1,h]$, on obtient :

$$y_{i,j} = Cx_{bc}(i,j) = C[T_{i,j-1} A_2 x_{0,0} + T_{i-1,j} A_1 x_{0,0}],\ \text{pour } i,j \geq 0$$

et d'aprés la matrice de transition (3.1), on trouve

$$y_{i,j} = CT_{i,j} x_{0,0}$$

qui peut être d'écrit par :

$$y_{i,j} = O_{h,k} x_{0,0},\ \text{pour } i,j \geq 0 \tag{3.2}$$

O$\dot{u}$:

$$O_{h,k} = \begin{bmatrix} C \\ CT_{1,0} \\ CT_{0,1} \\ . \\ . \\ CT_{i,j} \\ . \\ . \\ . \\ CT_{h,k} \end{bmatrix}$$

et donc l'équation (3.2) possède une solution qui est donnée par le théorème suivant : ■

Théorème 3.1 *Le modèle est observable au point* (h,k) *si et seulement si*

$$rg\mathrm{O}_{h,k} = n$$

Exemple 3.1 *On veut tester l'observabilité au point* $(1,1)$ *avec :*

$$\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Par utilisation de l'équation (3.1) , on a :

$$\mathrm{CT}_{1,0} = \mathrm{CA}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{CT}_{0,1} = \mathrm{CA}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{CT}_{1,1} = \mathrm{C}[\mathrm{A}_1\mathrm{T}_{0,1} + \mathrm{A}_2\mathrm{T}_{1,0}] = \mathrm{C}[\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors :

$$\mathrm{O}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{CT}_{1,0} \\ \mathrm{CT}_{0,1} \\ \mathrm{CT}_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$rg\mathrm{O}_{1,1} = 3$$

d'où, le modèle est observable.

Le théorème suivant est une autre caractérisation adaptée au cas 2-D.

Théorème 3.2 *Le modèle est observable si et seulement si*

$$\bigcap_{i,j} Ker\mathrm{O}_{h,k} = \{0\}, texti \in [0,h],\ j \in [0,k]$$

Définition 3.3 *Le modèle est observable en point* (h,k) *si et seulement si*

$$rg\begin{bmatrix} z\mathrm{I} - \mathrm{A}_k \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = n\ \forall z \in \mathbb{C}$$

Où : z *est la valeur propre de* A, *pour* $k = 1$ *ou* $k = 2$.

Théorème 3.3 *Le modèle est observable en point* (h,k) *si et seulement si*

$$V_{h,k} = O_{h,k}^{T} O_{h,k}$$

est symétrique semi définie positive.

Exemple 3.2 *On prend le même exemple(3.1).*

par conséquent, il est facile aussi de vérifier que :

$$v_{1,1} = O_{1,1}^{T} O_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est définie positive, d'où le résultat.

2 Observabilité idéale

Proposition 3.1 *Le sous espace* V *est dit* (A_i, B_i)*-invariant si*

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} V \subset V \times V + Im \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

pour $i = 1, 2$.

Proposition 3.2 *Si le sous espace* V *est* (A_i, B_i)*-invariant alors, il existe* $F : X \to V$ *tel que :*

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} F \right) V \subset (V \times V)$$

Afin d'introduire la notion d'invariance pour les systèmes 2-D, nous indiquons ce qui suit :

Théorème 3.4 *Il existe un sous espace* (A_i, B_i)*-invariant maximal contenu dans* $KerC$ *pour* $i = 1, 2$ *et noté* V_* *et qu'on obtient par l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} V_0 & = & K \\ V_{k+1} & = & k \cap \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^{-1} \left(V_k \times V_k + Im \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

Quand $V_k = V_{k+1} = V_*$.

Chapitre 4

L'observabilité et l'observabilité idéale en dimension infinie

Dans ce chapitre, nous rappelons les différentes notions de la contrôlabilité et l'observabilité et puis l'observabilité idéale.
Les notions de contrôlabilité sont toutes équivalentes en dimension finie mais qui sont distinctes en dimension infinie. Chaque de ces notions est équivalente à une notion duale que l'on appelle observabilité.

Cette section concerne les systèmes infini-dimensionnels d'écrits par :

$$\begin{cases} \acute{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

avec

$$u \in \mathbb{U},\ x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y}$$

O$\grave{u}$:

$\mathbb{U}$, $\mathbb{X}$, et $\mathbb{Y}$ sont des espaces de Banach muni des produits scalaires et des normes notés par :

$$< .,. >_{\mathbb{U}}, < .,. >_{\mathbb{X}}, < .,. >_{\mathbb{Y}}$$

et

$$\|.\|_{\mathbb{U}}, \|.\|_{\mathbb{X}}, \|.\|_{\mathbb{Y}}$$

respectivement.

$A : D(A) \subseteq \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, A est un opérateur non borné et c'est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{X}$.

$B : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{X}$, $C : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, B et C sont deux opérateurs linéaires bornés.

L'état du système est :

$$x(t) = S(t)x(0) + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

La sortie, sera donc :

$$y(t) = CS(t)x(0) + C\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Remarque 4.1

1. *Si* A *est un opérateur borné, alors* $S(t) = e^{At}$

2. *L'espace de travail est un Banach et peut être un espace de Hilbert.*

Nous présentons dans ce qui suit des caractérisations sur la contrôlabilité et l'observabilité, nous nous basons pour ce faire des références suivantes [2] [1] [10][17]

1 Définitions et caractérisations de quelques concepts de contrôlabilité :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \acute{x} &= Ax + Bu \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

On peut introduire l'opérateur :

$$\begin{aligned} L_T : L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) &\longrightarrow \mathbb{X} \\ u &\longrightarrow \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Notons par $L_T = ImC_T$, le sous espace vectoriel.
O$\grave{u}$: C_T, l'opérateur linéaire borné défini par :

$$\begin{aligned} C_T : L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) &\rightarrow \mathbb{X} \\ u &\rightarrow C_T u(.) = C_T(u) = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Notons par $C_T^* = B^*S^*(.)$, l'opérateur adjoint de C_T qui est défini par,

$$\begin{aligned} C_T^* : \mathbb{X}^* &\rightarrow L_2\big([0,T],\mathbb{U}^*\big) \\ x^* &\rightarrow C_T^* x^* = B^*S^*(.)x^* \end{aligned}$$

Différents type de contrôlabilité seront introduit dans ce qui suit,

— contrôlabilité exacte.

— contrôlabilité approximative (faible ou approchée).

— contrôlabilité nul.

1.1 Contrôlabilité exacte

Définition 4.1 *Le système est exactement contrôlable sur* $[0,\mathrm{T}]$ *si et seulement si :*

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ t.q\ x(t) = x\big(\mathrm{T}, x_0, u(.)\big) = x_1$$

La définition précédente est équivalente à la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Le système est exactement contrôlable sur* $[0,\mathrm{T}]$ *si et seulement si :*

$$\mathrm{I}m\mathrm{C}_\mathrm{T} = \mathbb{X}$$

Autrement dit :

$$\mathrm{L}_\mathrm{T} = \mathbb{X} \tag{4.2}$$

Preuve. Supposons que le système (4.1) est exactement contrôlable, alors selon la définition (4.1) on a :

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x\big(\mathrm{T}, x_0, u(.)\big) = x_1$$

i.e

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : \mathrm{S}(t)x_0 + \int_0^\mathrm{T} \mathrm{S}(t-\tau)\mathrm{B}u(\tau)d\tau = x_1$$

Pour $x_0 = 0$, on a :

$$\forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : \mathrm{C}_\mathrm{T}u(.) = x_1.$$

alors :

$$\mathrm{L}_\mathrm{T} \supset \mathbb{X}$$

et comme $\mathrm{L}_\mathrm{T} \subset \mathbb{X}$, nous avons $\mathrm{L}_\mathrm{T} = \mathbb{X}$.

Réciproquement, supposons que (4.2) est vérifié, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x = \int_0^\mathrm{T} \mathrm{S}(\mathrm{T}-\tau)\mathrm{B}u(\tau)d\tau$$

et par hypothèse, on a :

$$\exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x = \mathrm{C}_\mathrm{T}u(.)$$

Soit x_0, x_1 quelconques dans $\mathbb{X}$, et si on pose $x = x_1 - \mathrm{S}(\mathrm{T})x_0$, on trouve :

$$\exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x_1 - \mathrm{S}(\mathrm{T})x_0 = \mathrm{C}_\mathrm{T}u(.)$$

i.e :

$$\exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x_1 = \mathrm{S}(\mathrm{T})x_0 + \mathrm{C}_\mathrm{T}u(.)$$

on déduit que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ \text{t.q} : x_1 = x\big(\mathrm{T}, x_0, u(.)\big)$$

d'où la contrôlabilité exacte du système. ∎

Définition 4.2 *Soit* $\mathrm{F} \subset \mathbb{X}$ *un sous espace de* $\mathbb{X}$, *le système est exactement contrôlable dans* F *si :*

$$\forall x_0 \in \mathrm{F}, \forall x_1 \in \mathrm{F}, \exists u \in \mathrm{L}_2\big([0,\mathrm{T}],\mathbb{U}\big)\ t.q : x\big(\mathrm{T}, x_0, u(.)\big) = x_1.$$

Remarque 4.2 *La définition précédente est équivalente à :*

$$F \subset L_T$$

Théorème 4.1 *Le système est exactement contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\exists\delta > 0 \; t.q : \|C_T^* x^*\|_{\mathbb{L}_2([0,T],\mathbb{U}^*)} \geq \delta\|x^*\|_{\mathbb{X}^*}, \quad \forall x^* \in \mathbb{X}^*$$

Preuve. D'après la proposition (4.1) le système est exactement contrôlable si et seulement si l'opérateur C_T est surjectif et par application du théorème (1.3) on obtient :

L'opérateur C_T est surjective si et seulement si :

$$\exists\delta > 0 \text{ t.q} : \|C_T^* x^*\|_{\mathbb{L}_2([0,T],\mathbb{U}^*)} \geq \delta\|x^*\|, \quad \forall x^* \in \mathbb{X}^*$$

■

Les éléments de $\mathbb{X}$ ne sons pas tous contrôlable, alors on est conduit à définir une autre notion de contrôlabilité.

1.2 Contrôlabilité approximative

Définition 4.3 *Le système est approximativement contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) \; t.q : \|x(T, x_0, u(.)) - x_1\| < \varepsilon.$$

Cette définition est équivalente à la proposition suivante :

Proposition 4.2 *Le système est dit approximativement contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\overline{ImC_T} = \mathbb{X}.$$

Autrement dit :

$$\overline{L_T} = \mathbb{X}$$

O*ù*,

$$\overline{L_T} = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{X}, \forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in L_T \text{ t.q} : \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Preuve. Supposons que le système est approximativement contrôlable, alors selon la définition (4.3) on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) \text{ t.q} : \|x\big(T, x_0, u(.)\big) - x_1\| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

(4.4) implique :

$$\|x_1 - \big(S(T)x_0 + \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau\big)\| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \tag{4.5}$$

Si on pose : $x_1 - S(T)x_0 = x$, on trouve :

$$\|x - \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau\| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$$

or :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \text{ t.q} : \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

avec

$$x_\varepsilon = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau \in L_T$$

donc, on déduit que :

$$\overline{L_T} = \mathbb{X}$$

Réciproquement, supposons que (4.3) est vérifiée.

Soient x_0, x_1 quelconques dans $\mathbb{X}$ et $\varepsilon > 0$ quelconque, et si on prend :

$$x = x_1 - S(T)x_0$$

or $x_\varepsilon \in L_T$, alors

$$x_\varepsilon = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

par suite,

$$\|x - x_\varepsilon\| = \|x_1 - S(T)x_0 - \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau\|$$

ceci implique que

$$\|x_1 - x\big(T, x_0, u(.)\big)\| < \varepsilon$$

donc, on déduit que le système est approximativement contrôlable. ∎

Définition 4.4 *Soit* F *un sous espace vectoriel de* $\mathbb{X}$*, le système est approximativement contrôlable dans* F *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{F}, \forall x_1 \in \mathbb{F}, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big)\ t.q : \|x(T, x_0, u(.)) - x_1\| < \varepsilon.$$

Théorème 4.2 *Le système est approximativement contrôlable en temps* T *si et seulement si :*

$$Ker C_T^* = \{0\} \tag{4.6}$$

Remarque 4.3 *Le théorème précédent est équivalent à :*

$$\bigcap_{0\le t\le T} Ker B^* S^*(t) = L_T^\perp$$

car :

$$\overline{L_T} = \mathbb{X} \Leftrightarrow L_T^\perp = \{0\}$$

où

$$L_T^\perp = \mathbb{X} \Leftrightarrow \forall y \in L_T, < y, x^* >= 0 \ pour\ x^* \neq 0.$$

Preuve. Supposons que le système est approximativement contrôlable, alors d'après la proposition (4.2) on a :

$$L_T^\perp = \mathbb{X}$$

Montrer (4.6) revient à monter que :

$$\bigcap_{0\le t\le T} Ker B^* S^*(t) = L_T^\perp$$

Soit $x^* \in L_T^\perp$, alors :

$$< x, x^* >= 0, \forall y \in L_T \tag{4.7}$$

(4.7) implique :

$$< \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau, x^* >= \int_0^t < u(\tau), B^*S^*(t)x^* > d\tau = 0, u \in \mathbb{L}_2([0,T],\mathbb{U}) \quad (4.8)$$

Si on pose : $u(t) = B^*S^*(t)x^*$, l'équation (4.8) devient

$$\|B^*S^*(t)x^*\|^2 = 0 \text{ presque partout } \tau \in [0,T]$$

Vu que $S(t)$ est continue, alors

$$B^*S^*(\tau)x^* = 0 \text{ sur } [0,T]$$

implique que :

$$x^* \in \bigcap_{0\le t\le T} KerB^*S^*(t).$$

par conséquent,

$$L_T^\perp = \bigcap_{0\le t\le T} KerB^*S^*(t).$$

Réciproquement, Supposons que

$$\bigcap_{0\le t\le T} KerB^*S^*(t) = \{0\}$$

Soit $y \in L_T$ alors :

$$y = \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned} < y, x^* > &= < \int_0^T S(T-\tau)Bu(\tau)d\tau, x^* > \\ &= \int_0^T < S(T-\tau)Bu(\tau), x^* > d\tau \\ &= \int_0^T < u(\tau), B^*S^*(T-\tau)x^* > d\tau = 0 \end{aligned}$$

alors $x^* \in L_T^\perp$. Donc,

$$L_T^\perp = \{0\}$$

revient à dire que :

$$\overline{L_T} = \mathbb{X}$$

d'où, le système est approximativement contrôlable. ■

1.3 Contrôlabilité nulle

Définition 4.5 *Le système est dit exactement nulle contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) \ \ t.q \ \ x(t) = x\big(T, x_0, u(.)\big) = 0 \quad (4.9)$$

Définition 4.6 *Le système est approximativement nulle contrôlable au temps libre si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall x_1 \in \mathbb{X}, \exists T, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) \ t.q : \|x(T, x_0, u(.))\| < \varepsilon.$$

Remarque 4.4 *La contrôlabilité nulle est un cas particulier de contrôlabilité approximative et exacte où* $x_1 = 0$.

Théorème 4.3 *Le système est exactement nulle contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\mathrm{Im}S(t) \subset \mathrm{Im}C_T \tag{4.10}$$

Preuve. Supposons que le système est exactement nulle contrôlable sur $[0,T]$, selon la définition (4.4) on a :

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \exists u \in L_2\big([0,T],\mathbb{U}\big) \text{ t.q : } x(t) = x\big(T, x_0, u(.)\big) = 0 \tag{4.11}$$

i.e

$$\forall x_0 \in \mathbb{X}, \exists u \in L_2([0,T],\mathbb{U}) \text{ t.q : } S(t)x_0 + C_T u = 0 \tag{4.12}$$

Soit $z \in \mathrm{Im}S(t)$ alors :

$$\exists z_1 \in \mathbb{Z} \text{ t.q } S(t)z_1 = z$$

On applique (4.11) pour $z_1 \in \mathbb{Z}$ on obtient :

$$\exists u_1 \in L_2([0,T],\mathbb{U}) \text{ t.q } S(t)z_1 + C_T u_1 = 0$$

alors :

$$\exists u_2 \in L_2([0,T],\mathbb{U}) \text{ t.q } S(t)z_1 = C_T u_2$$

donc :

$$\forall z \in \mathrm{Im}S(t), \exists u \in L_2([0,T],\mathbb{U}) \text{ t.q } z = C_T u$$

d'où, $z \in \mathrm{Im}C_T$.

maintenant supposons que (1) est vérifié et soit $x_0 \in \mathbb{X}$ alors $S(t)x_0 \in \mathrm{Im}S(t)$ et selon l'hypothèse on a : $S(t)x_0 \in \mathrm{Im}C_T$ alors :

$$\exists u \in L_2([0,T],\mathbb{U}) \text{ t.q } S(t)x_0 + C_T u = 0$$

et donc le système est exactement nulle contrôlable. ∎

Théorème 4.4 *Le système est approximativement contrôlable en zéro sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\overline{\mathrm{Im}S(t)} \subset \overline{\mathrm{Im}C_T}$$

Ainsi, les divers degrés de contrôlabilité et les divers degrés d'observabilité sont des concepts duaux.

2 Définitions et caractérisations de quelques concepts d'observabilité

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \acute{x} &= Ax \\ y &= cx \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

La solution du système est :

$$x(t) = S(t)x_0 \ \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall t \in [0,T]$$

et la sortie est :

$$y(t) = CS(t)x_0 \ \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall t \in [0,T]$$

On note par $O_T = CS(t)$, l'opérateur linéaire borné définit par,

$$\begin{aligned} O_T : \mathbb{X} &\to L_2\big([0,T], \mathbb{Y}\big) \\ x_0 &\to O_T x_0 = CS(t)x_0 \end{aligned}$$

et O_T^* est l'opérateur l'adjoint de O_T qui défini par :

$$\begin{aligned} O_T^* : L_2\big([0,T], \mathbb{Y}^*\big) &\to \mathbb{X}^* \\ x &\to O_T^* x = \int_0^T S^* C^* x(t)\, dt \end{aligned}$$

On défini la notion de l'observabilité comme suit,

Définition 4.7 *Le système est observable si* $y(t) = 0$ *sur* $[0,T]$ *alors* $x_0 = 0$.

Comme l'état initiale n'est pas toujours observable et qu'on peut observer des états aussi proche de x_0 que l'on veut. On est ramener à définir une observabilité plus faible que l'exacte observabilité.

2.1 Observabilité exacte

Proposition 4.3 *Le système est exactement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\mathbb{X}^* \subset Im(O_T^*)$$

Remarque 4.5 *Soit* $X_1 \subset X$, *le système est exactement observable si :*

$$X_1^* \subset Im(O_T^*)$$

Ce nouveau théorème traduit l'injectivité de l'opérateur O_T.

Théorème 4.5 *Le système est exactement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\exists \delta > 0 \ t.q : \|O_T x_0\|_{L_2([0,T],\mathbb{Y})} \geq \delta \|x_0\|_{\mathbb{X}}, \ \forall x_0 \in \mathbb{X}$$

Proposition 4.4 *Le système est exactement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si l'opérateur*

$$N = O_T^* O_T$$

est défini positif

Preuve. Soit N défini positif, alors :

$$\exists \kappa > 0 \text{ t.q : } \langle Nx, x\rangle \geq \kappa \|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{X}$$

cela implique que :

$$\langle \int_0^T S^*(t)C^*CS(t)x dt, x\rangle \geq \kappa \|x\|^2$$

i.e

$$\int_0^T \langle CS(t)x, CS(t)x\rangle dt \geq \kappa \|x\|^2$$

alors

$$\int_0^T \|O_T(t)x\|^2 dt = \|O_T x\|^2_{L_2([0,T],\mathbb{Y})} \geq \kappa \|x\|^2$$

donc, le système est exactement observable d'après le théorème (4.5) ■

2.2 Observabilité approximative

Théorème 4.6 *Le système est dit approximativement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$ker(O_T) = \{0\}$$

Preuve. Soit $x \in ker O_T$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{X} / O_T x = 0$$

i.e

$$\forall x \in \mathbb{X} / CS(t)x = 0, \text{ pour } 0 \leq t \leq T$$

cela implique que :

$$\forall x^* \in \mathbb{X}^*, \langle x^*, CS(t)x\rangle = \langle S * (t)C^* x^*, x\rangle = 0$$

donc :

$$\forall t \in [0,T], S^*(t)C^* x^* \in Ker(O_T)^{\perp} \text{ et } S^*(t)C * x^* \in \mathbb{X}^*$$

cela veut dire que :

$$Ker(O_T)^{\perp} = \mathbb{X}^*$$

d'où, le système est approximativement observable. ■

Proposition 4.5 *Le système est approximativement observable sur* $[0,T]$ *si et seulement si l'opérateur* N *est positif.*

Preuve. Soit N est positif, alors :

$$\begin{aligned}
\langle Nx, x\rangle &= \langle \int_0^T S^*(t)C^*CS(t)x dt, x\rangle \\
&= \int_0^T \langle CS(t)x, CS(t)x\rangle dt \\
&= \int_0^T \|O_T(t)x\|^2 dt \\
&= \|O_T x\|^2_{L_2([0,T],\mathbb{Y}} \geq 0
\end{aligned}$$

Soit $\langle Nx(0), x(0)\rangle = 0$, alors on a :

$$\int_0^T \|O_T(t)x(0)\|^2 dt = \int_0^T \langle CS(t)x(0), CS(t)x(0)\rangle dt = 0$$

et donc $x(0) = 0$ Le système est exactement observable. ■

Conclusion

Dans notre mémoire, le but est de considérer une certaine classe de systèmes linéaires par toutes ces formes, la classe 1D, 2D et infini dimensionnelle, l'objectif est donc de tester l'observabilité et l'observabilité idéale respectivement.

Nous avons présenté la classe unidimensionnelle puis nous avons donné quelques caractérisations servant à tester si oui ou non notre modèle est observable, observable idéalement. Pour cela nous nous traiter la classe 1D où nous nous sommes basé sur quelques références de bases. Nous avons ensuite étendu les résultats au cas bidimensionnelle.

Des tests pour l'observabilité idéale ont cependant été dérivés. Quelques exemples illustratifs ont été introduit.

Bibliographie

[1] **A. El Jai and A. J. Pritchard.** : Cateurs et aconneurs dans l'analyse des systèmes distribués, Masson 1986. 37

[2] **A. El Jai and A. J. Pritchard** : Sensors and actuaros in distributed systems 1987, international Journal of Control, 46 :4, 1139-1153. 37

[3] **C. Chen and C. Desoer and C. Niederlinski and A. Kalman** : Simplified Conditions for controlability and observability of linear time-invariant Systems. IEEE Transactions On Automatic Control, 1966. 8

[4] **D. Bouagada** : Cours de théorie de contrôle, année 2016-2017. 8, 14, 17

[5] **E. Fornasini and G. Marchesini** : Doubly indexed dynamical systems ; state-space models and structural Properties, Math. Syst. Theory 12, 1978. (59-72). 5

[6] **F. R. Chang and H. C. Chen** : The generalized Cayley-Hamilton theorem for standard pencils. Systems and Control Letters 18 (1992) 179-182, North-Holland. 8

[7] **F. Bonnans et P. Rouchon** : Commande et optimisation de systèmes dynamiques. -juillet 2005, 91128 Palaiseau Cedex. 14, 17

[8] **G. Conte and A. M. Perdon** : A geometric approach to the theory of 2D-systems. IEEE Trans. Automat. Control AC-33 (1988), 10, 946-950. 5, 33

[9] **G. Conte and A. M. Perdon.** : AGeometry notion in the theory of 2D-systems. In : linear Circuits, Systems and Signal Processing : Theory and Application (C. Bynes and C. Martin, eds.), North-holland, Amsterdam 1988. 33

[10] **G. Qi Xu and C. Liu and S. Pang Yung** : Necessary conditions for the exact observability of systems on Hilbert spaces. Systems and Control Letters 57 (2008) 222-227. 33, 37

[11] **Hermès** : Larminat, Philippe (de) Automatique : Commande des systèmes linéaires. -2^e édition, -Paris : Hermès, 1996, -(Collection automatique, ISSN 0989-3571) 14, 17

[12] **J. Kurek** : The General state-space model for a two-dimensional linear digital systems, IEEE, Trans. Autom. Contr., Vol AC-30 N°6, pp. 600-601. 5

[13] **J. Klamka** : Controllability of dynamical systems, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1999. 5

[14] **K. Tadeusz** : Perfect observers for singular 2-D Fornasini-Marchesini models. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol 46, No, 10, October 2001. 32, 33

[15] **R. Cairoli** : Algèbre linéaire, 1987. ISBN 2-88074-187-4, 1991. CH-1005. 8

[16] **R. E Kalman and E. Evangelisti** : Controlability and Observability. 2011 5, 14

[17] **R. Timo** : Controllability and observability of Infinite-Dimensional Descriptor Systems. IEEE Transaction On Altomatic Control, Vol. 53, No. 4, May 2008. 37

[18] **T. Kaczorek** : Positive 1D and 2D systems. Verlag London, QA188. K33 2002, 512, 9'434–dc22. 5, 8

[19] **T. Kaczorek.** : Two-Dimensional. Linear systems, -Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985, 2061/3020-543210. 5, 33

[20] **T. Kaczorek..** : Relationship between the value of discretization step and positivity and stability of linear dynamic systems, Miedzynarodowa Konferencia "'Simulation, Designing and Control of Foundry Processes"', FOCOMP'99. Krakow, 25-26. 11.99, pp. 33-40. 5

[21] **Y. Granjon.** Automatique : Système linéaire, non linéaire, à temps continu, à temps discret, représentation d'étet. -2^{e} édition : Cours et exercices corrigés. -Paris, 2003 (ISBN 2 10 0071181). 5, 8, 14, 17