MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

MÉMOIRE

Master Académique

pour obtenir le diplôme de Master délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté et soutenu publiquement par

Kheira BENCHEHIDA

le 10 Juin 2018

Méthode de compacité pour l'étude de l'équation de Navier-Stokes

Encadreur : **Hamid BOUZIT (MCA, UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM)**

Jury

Mohand OULD ALI,	MCA	Président (Université de Mostaganem)
Sofiane MESSIRDI,	MCB	Examinateur (Université de Mostaganem)

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

MASTER

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents pour leurs dévouements, leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements. A mes chers frères « Mohamed, Eldjilali et Hadj» et mes chères soeurs « Fozia, Hoda ».

Mes cousines, cousins, je n'oublie pas tout la famille.

A mes amies «rekia, Nora», et tous mes camarades qui étudient à la promotion 2 année master mathématique branche MCO 2017/2018.

Pour sincère amitié, votre soutien permanent me remonte le moral et vos conseils M'incitent à relever les défis.

Remerciment

Nous remercions en premier lieu ALLAH de nous avoir donné le courage, la volonté, et la patience pour réaliser cette besogne.
Nous exprimons nos remerciements aux encadreur « Ms Bouzit» pour leur assistent , leur disponibilité, leurs orientations et leurs nombreux conseils sans lesquels ce travail ne verra pas le jour. Nous remercions tout les enseignants qui ont contribué à notre formation.
Enfin, Nous remercions aussi tous nos amis et collègues qui nous ont soutenu et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des équations aux dérivées partielles en particulier les équations des ondes. Elle décrit bien des phénomènes physiques et peut également être considérée comme une version simplifiée du système dynamique.
Les concepts et techniques mathématiques utilisées dans ce mémoire essentiellement de l'analyse fonctionnelles comme les espaces de Sobolev, les distributions, les opérateurs non bornés et les semi-groupes.
En mathématique, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commende permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maitriser.
La théorie des opérateurs surjectives et les adjoints des opérateurs non bornés permettent de réduire l'étude de la contrôlabilité du système à une "simple" inégalité entre les données initiales du système adjoint et l'adjoint de l'opérateur de contôlabilité L_T.
Détaillons maintenant les chapitres:
Dans le chapitre 1 : Nous donnons quelques rappels et abordons des notions fondamentales sur les espaces de Sobolev et les semi-groupes.
Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'équation des ondes. Dans ce chapitre nous donnons trois démonstrations du théorème d'existence et d'unicité de la solution, qui sont: la méthode des semi-groupes, la méthode du Fourier et la méthode variationnelle.
Dans le chapitre 3, nous donnons des résultats la contrôlabilité de l'équation des ondes; le contrôle interne où le contrôle est défini sur une patrie de Ω et le contrôle par le bord où le contrôle est défini sur une partie de bord de Ω.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1 Généralités sur les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions élémentaires de mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

- Pour tout la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 Soit u une fonction définie sur Ω.

1. On dit que u est intégrable sur Ω si $\int_\Omega |u(x)|dx$ est finie.
2. On dit que u est localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact $K \subset \Omega$.
3. Le support de u est défini par: $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$.
4. Si u est indéfiniment dérivable sur Ω et $\operatorname{supp} u \subset K \subset \Omega$ avec K compact. On note $u \in D(\Omega)$.
5. On note par: $D(\overline{\Omega}) = \{\varphi = \psi|_\Omega;\ \psi \in D(\mathbb{R}^n)\}$.

L'espace $L^p(\Omega)$:

$$L^p(\Omega) = \left\{u;\ \text{mesurable } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.
De plus, si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\,dx.$$

On définit la dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

Définition 1.2 (Dérivée au sens faible) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in L^2(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. On appelle dérivée au sens faible de u d'ordre α et on note $D^\alpha u$:

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\, D^\alpha\, \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

avec

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_{x_1}^{\alpha_1}, \partial x_{x_2}^{\alpha_2}, \ldots, \partial x_{x_n}^{\alpha_n}}$$

et φ est de classe $C^{|\alpha|}(\Omega)$ et a support compact dans $\mathbb{R}^n$.

1.1 L'espace $H^m(\Omega)$:

Définition 1.3 Pour $m \in \mathbb{N}$, l'espace

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ \forall \alpha \in H^m, |\alpha| \leq m\right\}$$

est appelé espace de Sobolev d'ordre m.

Proposition 1.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le muni du produit scalaire*

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Si Ω est lipschitien, alors
L'application:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\to C(\Gamma) \\ u &\to u|_\Gamma \end{aligned}$$

Se prolonge en une application linéaire, continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.
• Pour la définition et l'étude de $H^{1/2}(\Gamma)$ on peut voir [4].

• On note $H^{-1/2}(\Gamma)$ le dual topologique de $H^{1/2}(\Gamma)$.
Soit Ω un ouvert de classe C^1 et ν est un vecteur normale à Γ extérieur à Ω. On note:

$$H(\Delta, \Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

Remarque 1.5 $H(\Delta, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u, v)) = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 1.6 *L'application :*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\to C^\infty(\Gamma) \\ u &\to \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma := \nabla u.\nu|_\Gamma \end{aligned}$$

Se prolonge en une application linéaire et continue de $H^1(\Delta, \Omega)$ *dans* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *et on a la formule de Green suivante:*

$$\int_\Omega (\Delta u.v + \nabla u.\nabla v) dx = \langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, \gamma_0\, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{1.1}$$

On note par:

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{ \overrightarrow{u} \in (L^2(\Omega))^n;\ \mathrm{div} \overrightarrow{u} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|\overrightarrow{u}\|_H = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\mathrm{div} \overrightarrow{u}\|^2 \right)^{1/2}$$

Théorème 1.7 *L'application :*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\to C^\infty(\Gamma) \\ \overrightarrow{u} &\to \overrightarrow{u}.\nu|_\Gamma \end{aligned}$$

Se prolonge en une application linéaire et continue de $H(div, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. *De plus on a la formule de Green suivante:*

$$\int_\Omega (\mathrm{div} \overrightarrow{u}.v + \overrightarrow{u}.\nabla v) dx = \langle \overrightarrow{u}.\nu, \gamma_0\, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \forall\ v \in H^1(\Omega) \tag{1.2}$$

1.2 L'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$:

Si $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, (espace de distribution tempérées), on définit sa transformée de Fourier $Fu = \widehat{u}$ par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-ix.\xi} u(x)dx.$$

Définition 1.8 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est défini comme suit:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposition 1.9 *Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire*

$$< u, v >_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \,\widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

et de la norme:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Soit X un espace de Banach et $]a, b[\subset \mathbb{R}$ on note par

$$L^p(a; b; X) = \left\{ u : t \to u(t) \in X \text{ mesurable et } \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.10 *Muni de la norme :*

$$\|u(t)\| = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

l'espace $L^p(a; b; X)$ est un espace de Banach. De plus

i) Si $1 < p < \infty$ et X est reflexif alors, $L^p(a; b; X)$ est reflexif.

ii) Si $X = H$ est un espace de Hilbert et $p = 2$, l'espace $L^2(a; b; H)$ est un espace de Hilbert.

2 Rappels sur les semi groupes:

Définition 1.11 Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné. On dit que A est férmé si son graphe:

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$$

est fermé dans $E \times F$.

Les opérateurs maximaux et dissipatifs:

Soit $(H, | \,.\, |)$ un espace de Hilbert réel.

Définition 1.12 Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans H.

1. On dit que A est dissipatif si

$$(Ax, x) \leq 0, \ \forall x \in D(A). \tag{1.3}$$

2. On dit que A est maximal si $R(I - A) = H$, où $R(I - A)$ désigne l'image de $(I - A)$

Lorsque A vérifie (1.3), on dit souvent que -A est monotone ou accrétif .

Théorème 1.13 *Si $(A, D(A))$ est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert H alors:*

1. *A est fermé.*
2. *Pour tout $\lambda > 0, (\lambda I - A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H et $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(H)$ avec*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3. *D(A) est dense dans H.*

Remarque 1.14 *Si A est un opérateur dissipatif alors $\forall \, \lambda > 0$ l'opérateur $(\lambda I - A)$ est injectif car*

$$\begin{aligned}\|(\lambda x - Ax)\|^2 &= \lambda^2\|x\| - 2\lambda\langle x, Ax\rangle + \|Ax\|^2 \\ &\geq \lambda^2\|x\|.\end{aligned}$$

3 Semi-groupes

Définition 1.15 *Soit S une application définie par:*

$$\mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(H)$$

$$t \to S(t)$$

On dit que S est un semi-groupe fortement continu dans H s'il satisfait les propriétés suivantes:

- $S(0) = I_d$,
- $S(t + s) = S(t)S(s); \ \forall t, s \in \mathbb{R}$,
- *pour tout $x \in H$, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0, \infty[$.*

Dans la suite, les semi-groupes fortement continus serout notés C_0-semi-goupes.

Proposition 1.16 *Si $(S(t))_{t>0}$ est un C_0-semi groupe dans H, alors l'opérateur adjoint$(S^*(t))_{t>0}$ est aussi un C_0-semi groupe dans H.*

Définition 1.17 Un C_0-semi groupe $(S(t))_{t>0}$ sur H est appelé semi-groupe de contraction si

$$\forall \ t \geq 0; \ \|S(t)\|_{L(H)} \leq 1$$

3.1 Le générateur infinitésimal:

Définition 1.18 On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $S(t)$ l'opérateur linéaire A non borné défini par :

$$D(A) = \left(x \in H, \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{h} \text{ existe} \right)$$

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[S(t)x - x]$$

Le générateur infinitésimal de $(S^*(t))_{t>0}$ est $(A^*, D(A^*))$.

Théorème 1.19 *Soit S un C_0-semi-groupe sur H de générateur infinitésimal A. Alors*

- *$D(A)$ est dense dans H.*
- *A est fermé.*
- *$\forall x \in D(A), \ S(.)x \in C^1([0, \infty[\,; H) \cap C([0, \infty[\,; D(A))$ et on a*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \ \forall t \geq 0.$$

3.2 Le théorème de Hille-Yosida:

Théorème 1.20 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur sur H. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

* *$D(A)$ est dense dans H et il existe $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \omega$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ est inversible*

$$\| R_\lambda^m(A) \| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m}, \ \forall m \in \mathbb{N}, \forall \lambda > \omega.$$

* $(A, D(A))$ *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *vérifiant*

$$\exists\, \omega \in \mathbb{R},\ \exists\ M \geq 1,\ \| S(t) \|_{L(H)} \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.21 ***[Théoreme de Lumer-Phillips]*** *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire. Les propositions suivants sont équivalentes:*

1. $(A, D(A))$ *est générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction sur* X
2. A *est maximal dissipatif*
3. A^* *est maximal dissipatif*

4 Problèmes d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitisimal d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t>0}$ sur un espace Hilbert H et on considère le système non homogène suivant

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t),\ t \in (0,t) \\ y(0) = x,\ x \in H \end{cases} \tag{1.4}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Définition 1.22 *Soit* $f \in L^1(0, T; H)$ *et* $x \in H$*. On appelle solution faible de* (1.4) *la fonction* $y \in C([0, T]; H)$ *donnée par*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,\ t \in [0, T]. \tag{1.5}$$

- *On appelle solution classique de* (1.4) *toute fonction* $y \in C([0, T]; H) \cap C^1((0, T); H)$ *telle que* $y(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \in (0, T)$ *et vérifiant* (1.4) *dans* $[0, T]$.

Remarque 1.23 *Par définition, le problème* (1.4) *admet toujours une unique solution faible.*

Remarque 1.24 *La différence entre ces deux notions de solutions est que la première ne vérifie pas (forcément) l'équation* (1.4) *ponctuellement alors que la régularité en temps imposée à la solution classique est précisément celle qu'il faut pour pouvoir écrire l'équation* (1.4) *au sens classique. On peut cependant dire que toute solution classique (s'il en existe) est une solution faible et qu'il ne peut pas existe plus d'une solution classique si* x *et* f *sont donnée respectivement dans* H *et* $L^1(0, T, H)$*. C'est l'objet du prochain résultat.*

Théorème 1.25 *Soit* $f \in L^1(0, T, H)$ *et* $x \in H$*. Le problème* (1.4) *admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule* (1.5).

Preuve : Il suffit de démonter que toute solution classique est donnée par la formule (1.5). Soit y une solution classique. Pour tout $t \in [0,T]$, on considère la fonction $z : (0,t) \to H$ définie par

$$z(s) = S(t-s)y(s), \; s \in (0,t).$$

Puisque $y(s) \in D(A)$, la fonction $\tau \to S(\tau)y(s)$ est dérivable pour tout $\tau > 0$. Par conséquent, z est dérivable sur (0,t) et on a

$$\begin{aligned} z'(s) &= -S(t-s)Ay(s) + S(t-s)y'(s) \\ &= -S(t-s)Ay(s) + S(t-s)Ay(s) + S(t-s)f(s) \\ &= S(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Comme $f \in L^1(0,T;H)$, on en déduit que $z' \in L^1((0,t);H)$ et en l'intégrant entre 0 et t, on obtient

$$z(t) = z(0) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

c'est-à-dire

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

D'où le résultat. □

Théorème 1.26 *Si $f \in C^1([0,T];H)$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème* (1.4) *admet une solution classique.*

Preuve : La solution faible s'écrit

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \; t \in [0,T]$$

On sait déjà que la fonction $t \to S(t)x$ est dans $C^1([0,T];H)$ des que $x \in D(A)$. Posons

$$z(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \; t \in [0,T]$$

Comme $f \in C^1([0,T];H)$, il est clair que $z \in C^1([0,T];H)$ et que sa dérivée est donnée par (puisque $\int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t S(s)f(t-s)ds$)

$$z'(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)ds, \; t \in [0,T]$$

5 Exemple de semi groupes:

Semi groupe de l'équation des ondes On considère l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et l'opérateur suivant:

$$\begin{cases} D(A) & = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \\ A(y,z) = (z, \Delta y) \end{cases} \tag{1.6}$$

On a le résultat suivant

Proposition 1.27 *L'opérateur A est maximal dissipatif et anti-symétrique au sens:*

$$\langle A(y,z),(f,g)\rangle = -\langle (y,z), A(f,g)\rangle, \ \forall \ (y,z) \ (f,g) \in D(A).$$

et donc $A^* = -A$.

Preuve : Pour tout $(y,z) \in D(A)$; on a d'aprés la formule de Green (1.1):

$$\begin{aligned} \langle A(y,z),(y,z)\rangle &= \int_\Omega \nabla z.\nabla y \, dx + \int_\Omega \Delta y.z \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc A est dissipatif.
L'équation $(y,z) - A(y,z) = (f,g) \in H$ s'écrit

$$\begin{cases} y - z = f \\ z - \Delta y = g \end{cases}$$

ou bien de façon équivalente :

$$\begin{cases} z = y - f \\ y - \Delta y = f + g \end{cases}$$

On sait qu'il existe $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution de la deuxième équation puisque $f + g \in L^2(\Omega)$ et donc $z \in H_0^1(\Omega)$. On déduit que l'opérateur est maximal. $\square$

- De plus A est anti-symétrique. En effet:

$$\begin{aligned} ((y,z), A^*(f,g)) &= (A(y,z),(f,g)) \\ ((z,\Delta y),(f,g)) &= \int_\Omega \nabla z.\nabla f + \int_\Omega \Delta y.g \\ -\int_\Omega z.\Delta f - \int_\Omega \nabla y.\nabla g &= ((y,z),(g,\Delta f)). \end{aligned}$$

  et donc, $A^*(f,g) = -(g, \Delta f) = -A(f,g)$

On considère le problème non homogène:

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + f, \quad \text{dans } Q_T \\ y = 0, \quad \text{sur } \Sigma_T \\ y(0,.) = y_0, y_t(0,.) = y_1, \quad \Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

Comme conséquence des propiétés de la solution faible d'un problème non homogène

Théorème 1.28 *Soit $T > 0$. Pour tout $f \in L^1((0,T); L^2(\Omega))$ et tout $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ il existe une unique solution faible $(y, y_t) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$ de (1.7). De plus, cette solution dépend continûment des données initiales et du second membre. Plus précisément*

$$\max_{T\in[0,T]} |y_t(t)| + \max_{T\in[0,T]} \|y(t)\|_{H_0^1} \leq |y_1| + \|y_0\|_{H_0^1} + \|f\|_{L^1((0,T);L^2(\Omega))}$$

6 Opérateurs surjectifs

Théorème 1.29 *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ un opérateur linéaire continu et soit T^* son adjoint.*
Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. *T est surjectif.*

2. *$\exists c > 0;\ \|T^*z\|_{E^*} \geq c.\|z\|_{F^*},\ \forall z \in F^*$.*

Preuve :1. (1) $\Rightarrow$ (2)
D'après le théorème de l'application ouverte [2,théorème II.5], il existe une constante $c > 0$ telle que

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Soit $z \in F^*$ On a :

$$\begin{aligned} \|T^*z\|_{E'} &= \sup_{x\in B_E(0,1)} \langle T^*z, x\rangle_{E'\times E} = \sup_{x\in B_E(0,1)} \langle z, Tx\rangle_{F'\times F} \\ &= \sup_{y\in TB_E(0,1)} \langle z, y\rangle_{F'\times F} \\ &\geq \sup_{y\in B_F(0,c)} \langle z, y\rangle_{F'\times F} \geq c. \sup_{\|u\|_F\leq 1} \langle z, u\rangle_{F'\times F} \\ &\geq \|z\|_{F'} \end{aligned}$$

Donc, $\exists c > 0;\ \|T^*z\|_{E'} \geq c\|z\|_{F'},\ \forall z \in F^*$.
2. (2) $\Rightarrow$ (1) On note $B_E(0,c)$ la boule fermée de E de centre 0, et de rayon c
i) Montrons que $TB_E(0,c)$ est fermé.

Soit (y_n) une suite de $TB_E(0,c)$ tel que $y_n \to y$ dans F.
Alors, $\exists\, x_n \in B_E(0,c) : y_n = Tx_n$;
Mais $B_E(0,c)$ est faiblement compact (si E est un espace Hilbert ou espace Banach reflexif)
Alors, (x_n) admet une sous suite $(x_n) \to x$ dans E faible.
De plus, $B_E(0,c)$ est un convexe fermé donc $B_E(0,c)$ est faiblement fermé.
Alors, $x \in B_E(0,c)$.
Comme T est continue alors, $Tx_n \to Tx \in TB_E(0,c) \Rightarrow y \in TB_E(0,c)$.
ii) Montrous que

$$\|T^*z\|_{E'} \geq c\|z\|_{F'},\ \forall\, z \in F' \Rightarrow B_F(0,1) \subset TB_E(0,c).$$

Par l'absurde: supposons qu'il existe $y_0 \in B_F(0,1)$ et $y_0 \notin TB_E(0,c)$.
Comme $\{y_0\}$ est compact et $TB_E(0,c)$ est un convexe fermé alors, d'après le théorème de séparation stricte de Hahn-Banach,

$$\exists\, z_0 \in F' \text{ tel que } \langle z_0, Tx\rangle_{F'\times F} < 1 < \langle z_0, y_0\rangle_{F'\times F} \quad \forall\, x \in B_E(0,c)$$

On a donc:

$$\begin{aligned} 1 > \langle z_0, Tx\rangle_{F'\times F} &= \langle T^*z_0, x\rangle_{E'\times E}, \quad x \in B_E(0,c) \\ \Rightarrow 1 &\geq \sup_{\|x\|\leq c} \langle T^*z_0, x\rangle_{E'\times E} \\ &= \frac{1}{c}\sup_{\|x\|\leq 1} \langle T^*z_0, x\rangle_{E'\times E} \\ &= \frac{1}{c}\|T^*z_0\|_{F'} \end{aligned}$$

Donc: $\|T^*z_0\|_{F'} \leq \frac{1}{c}$.
la deuxiéme inégalité donne

$$1 < \langle z_0, y_0\rangle_{F'\times F} \leq \sup_{\|y\|_F\leq 1} \langle z_0, y\rangle = \|z_0\|_{F'}.$$

On déduit alors que

$$\|T^*z_0\|_{F'} \leq \frac{1}{c} \text{ et } \|z_0\| > 1 \tag{1.8}$$

absurde car $\|T^*z\|_{F'} \geq c\|z\|_{F'},\ \ \exists z \in F'$
iii) Montrons que $B_F(0,1) \subset TB_E(0,c) \Rightarrow T$ est surjectif
Soit $y \in F$; alors $z = \frac{y}{\|y\|} \in B_F(0,1) \Rightarrow \exists\, x \in B_E(0,c)$
tel que $z = Tx \Rightarrow y = \|y\|\, Tx = T(\|y\|x)$.
i.e. $\forall\, y \in F,\ \exists\, z = \|y\|.x \in E,\ Tz = y$. On déduit alors que
$(2) \Rightarrow B_F(0,1) \subset TB_E(0,c) \Rightarrow$ T surjectif. $\square$

Chapitre 2

L'équation des ondes

Dans ce chapitre on va étudier la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + f(t) \text{ dans } Q_T = (0,T) \times \Omega \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_T = (0,T) \times \partial\Omega \\ y(0,.) = y_0, \; y_t(0,.) = y_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

où y_0, y_1 et f sont donnés.

- La première équation est appelée équation des ondes.
- la deuxième équation est appelée condition aux limites de Dirichlet sur le bord latéral Σ_T de Q_T.
- la troisième équation est appelée condition initiale.

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.1

(a) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Pour tout $f \in L^2(0,T;L^1(\Omega))$, $y^0 \in H_0^1(\Omega)$ et $y^1 \in L^2(\Omega)$ il existe une solution unique y vérifiant*

$$y \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \langle y_{tt}, \varphi \rangle + \displaystyle\int_\Omega \nabla y(t).\nabla\varphi \, dx = 0, \; \forall t \in [0,T], \, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ y(0,x) = y^0(x), \, y_t(x) = y^1(x), \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left\{ |\nabla y^0| + |y^1| + \|f\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega))} \right\} \tag{2.4}$$

où $|.|$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$.

(b) *Si de plus Ω est de classe C^2, $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $(y^0,y^1) \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ il existe une solution unique y telle que*

$$y \in C\left([0,T];H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.5}$$

vérifiant le système (2.1) au sens $L^2(Q_T)$, avec l'estimation

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;H^2\cap H_0^1)} + \|y'\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \leq C\left\{\|y^0\|_{H^2\cap H_0^1} + \|y^1\|_{H_0^1} + \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1)}\right\} \tag{2.6}$$

Nous allons donner trois méthodes de résolution de ce système.

1 La méthode des semi- groupes:

On pose: $Y = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$, $Y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ et A l'opérateur défini en (1.12). Le système (1.6) est équivallent au système

$$\begin{cases} Y_t = AY + F \\ Y(0) = Y^0 \in H \end{cases} \tag{2.7}$$

Remarque 2.2 *Comme $H = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ et $D(A) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. On a:*

$$\begin{aligned} Y^0 \in H &\Leftrightarrow (y_0,y_1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega). \\ Y^0 \in D(A) &\Leftrightarrow (y_0,y_1) \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega). \\ F \in L^1(0,T;H) &\Leftrightarrow f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)). \\ Y \in C([0,T];H) &\Leftrightarrow y \in C([0,T];H_0^1(\Omega)),\ y_t \in C([0,T];L^2(\Omega)). \\ &\Leftrightarrow y \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

On a vu dans la proposition (1.27) que l'opérateur $(A,D(A))$ est maximal dissipatif. Donc, d'après le théorème de (1.21) que $(A,D(A))$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de la remarque (1.23) et du théorème (1.26) on obtient les résultats du théorème (2.1).

$\square$

2 La méthode de Fourier:

On choisit une base Hilbertienne $\{w_i\}_{i\geq 1}$ de l'espace $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $(-\Delta)$ avec la condition de Dirichlet homogène, [2, théorème $IX.31$] c'est-à-dire

$$\begin{cases} w_i \in H_0^1 \cap C^\infty(\overline{\Omega}) \\ -\Delta w_i = \lambda_i w_i \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

avec, $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, $\lambda_i > 0$ et $\lambda_i \to +\infty$.
On cherche la solution y de la forme :

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(t) w_i(x). \tag{2.9}$$

2.1 L'équation homogène

utilisant la premiére équation (2.1) et (2.8) on obtient

$$a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = 0, \quad \forall\ i = 1, ... \tag{2.10}$$

y^0 , y^1 s'écrivent dans la base (w_i) sous la forme

$$\begin{cases} y^0(x) = \sum_{i\geq 1} a_i^0\, w_i(x) \\ y^1(x) = \sum_{i\geq 1} a_i^1\, w_i(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

avec $y(0) = y^0, y'(0) = y^1$.
Les suites (a_i^0) et (a_i^1) sont appelées respectivement les coefficients de Fourier des données initiales y^0 et y^1.
En résolvant les équations (2.10) on obtient

$$a_i(t) = C_i^0 \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + C_i^1 \sin(t\sqrt{\lambda_i}).$$

La fonction y est donnée par

$$y(x,t) = \sum_{i\geq 1} \left\{ C_i^0 \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + C_i^1 \sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right\} w_i(x). \tag{2.12}$$

Sa dérivée est donnée par:

$$y_t(x,t) = \sum_{i\geq 1} \left(-\sqrt{\lambda_i}\, C_i^0\, sin(t\sqrt{\lambda_i}) + \sqrt{\lambda_i}\, C_i^1 cos(t\sqrt{\lambda_i}) \right) w_i(x) \tag{2.13}$$

Comme :

$$y(x,0) = \sum_{i\geq 1} C_i^0\ w_i(x) \text{ et } y_t(x,0) = \sum_{i\geq 1} \sqrt{\lambda_i}\ C_i^1 w_i(x).$$

En utilisant les conditions initiales de (2.1) et (2.11) on obtient

$$C_i^0 = a_i^0 \text{ et } C_i^1 = \frac{a_i^1}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

En remplaçant dans (2.13) ou obtient

$$y(x,t) = \sum_{i\geq 1} \left\{ a_i^0 cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{a_i^1}{\sqrt{\lambda_i}} sin(t\sqrt{\lambda_i}) \right\} w_i(x). \tag{2.14}$$

On rappelle que

$$y^0 \in H_0^1(\Omega) \Longleftrightarrow \sum_{i=1} \lambda_i |a_i^0|^2 < +\infty \tag{2.15}$$

et

$$y^1 \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \sum_{i=1} |a_i^1|^2 < +\infty \tag{2.16}$$

La conclusion de **(a)** est maintenant immédiate à partir de la formule de représentation (2.14) . En effet,

$$\begin{aligned} \sum \lambda_i \left| a_i^0 \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{a_i^1}{\sqrt{\lambda_i}} \right|^2 &\leq \sum 2\lambda_i \left[|a_i^0|^2 + \frac{|a_i^1|^2}{\sqrt{\lambda_i}} \right] \\ &\leq \sum \left(2.\lambda_i |a_i^0| + |a_i^1|^2 \right) < +\infty \end{aligned}$$

et donc $y \in H_0^1(\Omega)$. En ce qui concerne **(b)**, on remarque que si Ω a une frontière Γ de classe C^2 l'opérateur

$$-\Delta : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

est un isomorphisme et par conséquent

$$y^0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \Longleftrightarrow \sum_{i\geq 1} \lambda_i^2 |a_i^0|^2 < +\infty$$

la conclusion de **(b)** est à nouveau une conséquence de la formule (2.14)

2.2 Equation non homogène

Remarque 2.3 *En écrivant* $f(t,x) = \sum_{i\geq 1} f_i(t)\, w_i(x)$ *l'équation* (2.10) *devient:*

$$a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = f_i(t),\ \forall\, i = 1, ... \tag{2.17}$$

La solution du système (2.1) est donnée par :

$$y(x,t) = \sum_{i\geq 1} \left\{ a_i^0 cos(t\sqrt{\lambda_i}) + a_i^1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} sin(t\sqrt{\lambda_i}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t sin((t-s)\sqrt{\lambda_i})) f_i(s) ds \right\} w_i(x)$$

3 La méthode Variationnelle

Théorème 2.4 *Soient V et H deux espaces de Hilbert tel que $V \subset H \subset V'$ avec injection continues et denses. Pour chaque $t \in [0,T]$ on se donne une forme bilinéaire continue symétrique $a(t;.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que :*

(i) la fonction $t \to a(t;y,\xi)$ et de classe $C^1, \forall y, \xi \in V$.

(ii) $\exists \alpha > 0,\ a(t;y,y) \geq \alpha \|y\|^2,\ \forall t \in [0,T],\ \forall y \in V$.

où $\|.\|$ désigne la norme de l'espace V. Alors, étant données $f \in L^2(0,T;H)$, $y_0 \in V$, $y_1 \in H$ il existe une fonction unique y telle que

$$\begin{cases} y \in C(0,T;V) \cap C^1(0,T;H) \cap H^2(0,T,V') \text{ vérifiant} \\ \langle y''(t), v\rangle + a(t, y(t); v) = \langle f(t), v\rangle \,,\ p.p.\ t \in [0,T], \forall v \in V \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1 \end{cases} \tag{2.18}$$

où $\langle .,. \rangle$ on désigne le produit de dualité entre les espaces $V et V'$.

On peut trouver la démonstration de ce théorème dans [4]

Remarque 2.5 Dans le cas général d'un ouvert Ω à frontière lipschitzienne on voit que si $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta y_0 \in L^2(\Omega)$ et $y_1 \in H_0^1(\Omega)$ alors $y \in C^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $\Delta y \in C(0,T;L^2(\Omega))$.

Si on suppose en outre que Ω est convexes on a

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

et donc le résultat **(b)** reste valable.

Cette remarque sera importante pour l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans un ouverts convexe.
On considère maintenant l'énergie naturelle associée l'équation des ondes

$$E(t) = \frac{1}{2}|y_t(t)|^2 + |\nabla y(t)|^2, \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.19}$$

avec les notations

$$|y_t(t)|^2 = \|y_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |y'(t,x)|^2 dx$$

et

$$|\nabla y(t)|^2 = \|\nabla y(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial y}{\partial x_k}(x,t) \right|^2 dx$$

Le lemme suivant établit une loi de conservation de l'énergie qui exprime l'invariance de l'énergie le long d'une trajectoire. Il est aussi valable dans le cas général d'un domaine Ω de frontière lipschitzienne.

Lemme 2.6 *Soit Ω un domaine borné sur $\mathbb{R}^n$ a frontière Γ lipschitzienne .*
Soit $y = y(x,t)$ une solution faible de l'équation des ondes homogène ($f = 0$). Alors l'énèrgie $E(t)$ est constante et ona :

$$E(t) = E_0 = \frac{1}{2}|y_1|^2 + |\nabla y_0|^2\,, \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.20}$$

Démonstration :
On considère d'abord une solution régulière y correspondant à des données $y_0, y_1 \in (H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.
On multiplie l'équation (2.1) par la fonction $y_t(x,t)$ et en intègrant sur Ω, on fait que $y \in C^1(0,T; H_0^1(\Omega))), \Delta y \in C(0,T; L^2(\Omega))$
En effet,
Comme

$$\int_\Omega y_{tt}.y_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |y_t|^2\, dx$$

En utilisant la formule de Green on a

$$-\int_\Omega \Delta y.y_t\, dx = \int_\Omega \nabla y.\nabla y_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_t|^2$$

On aura alors

$$0 = \frac{d}{dt}\int_\Omega |y_t|^2\, dx - \int_\Omega \Delta y.y_t\, dx = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |y_t|^2\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^2\, dx\right)$$

On obtient

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0 \text{ dans } [0,T] \tag{2.21}$$

et donc (2.20).
Dans le cas général

$$E(t) = E(0),\ \forall\ t \in (0,t),\ (y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

En effet, soit $(y_i^0, y_i^1) \subset (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, une suite de fonctions vérifiant

$$y_i^0, y_i^1 \to y_0, y_1 \ \text{ dans } \ (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \ \text{ lorsque } i \to +\infty \tag{2.22}$$

D'après la dépendance continue des solutions de l'équation des ondes par rapport aux données initiales on en déduit que

$$y_i \to y \text{ dans } C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega)) \text{ lorsque } i \to +\infty \tag{2.23}$$

où $y_i = y_i(x,t)$ désigne la solution de (2.1) de données initiales y_i^0, y_i^1.
Par conséquent

$$E_i(t) \to E(t) \text{ dans } C[0,T],\ i \to +\infty \tag{2.24}$$

où $E_i(t)$ est l'énergie associée à la solution $y_i,\ i = 1, ..., \infty$.
Par un passage à la limite lorsque $i \to +\infty$ on obtient le résultat (2.20) pour la solution faible y. $\square$

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte

Soit H et U deux espaces Hilbert munis respectivement des produits scalaires (.,.), ((.,.)) et de normes $|.|, \|.\|$. A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe, $B \in \mathcal{L}(H, U)$. On considère le système suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rc} y_t = & Ay + Bu \\ y(0) = & a \end{array} \right. \tag{3.1}$$

On note $y(T, a; u)$ la valeur de la solution y au temps T avec un second membre u et une condition initiale a.

Définition 3.1 On dira que le système (3.1) est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a, b \in H$ il existe $u \in L^2([0, T]; U)$ tel que

$$y(T; a, u) = b,$$

où, de manière équivalente, si un état arbitraire $b \in H$ peut être atteint au temps T, à partir de n'importe quel état $a \in H$.

Notation:
On pose:

$$R_T(a) = \left\{ y(T, a, u),\ u \in L^2(0, T; U) \right\}.$$

Remarque 3.2 le système (3.1) est exactement contrôlable si et seulement si

$$R_T(a) = H\,.$$

On sait d'aprés (1.25) que la solution de (3.1) est donnée par

$$y(t, a, u) = S(t)a + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds.$$

- **L'opérateur de contrôlabilité** L_T.

Définition 3.3 L'opérateur :

$$\begin{aligned} L_t : L^2((0,T),U) \to & H \\ u \to & \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds \end{aligned}$$

est appelé opérateur de contrôlabilité.

On pose

$$R(L_T) = \{y(T,0,u),\ u \in L^2(0,T,U)\}$$

- L'adjoint de L_T

Pour $u \in L^2(0,T,U)$ et $x \in H$ on a:

$$\begin{aligned} \langle u, L_T^* \rangle_{L^2(0,T,U)} =& \langle L_T u, x\rangle_H = \langle \int_\Omega S(T-s)Bu(s)ds, x\rangle \\ =& \int_\Omega \langle u(s), B^*S^*(T-s)x\rangle ds \\ =& \langle u, B^*S^*(T-s)x\rangle_{L^2(0,T,U)} \end{aligned}$$

donc

$$L_T^* x = B^*S^*(T-s)x,\ \forall\, x \in H.$$

Comme $S(t)a$ est fixé (indépandent de u) alors

$$R_T(a) = R(L_T).$$

On déduit que le système (3.1) est contrôlable si et seulement si l'opérateur de contrôlabilité L_T est surjectif i.e.

$$R(L_T) = H.$$

on a donc le résultat suivant:

Théorème 3.4 *Les condition suivantes sont équivalentes*

1. *Le système* (3.1) *est exactement contrôlable au temps* $T > 0$.

2. *Il existe* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in H$.

$$\int_0^T \|B^*S^*(t)x\|^2 dt \geq c\,|x|^2.$$

Preuve : le système (3.1) est contrôlable si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif, et d'aprés le théorème (1.29) L_T est surjectif si et seulement si

$$\exists\, c > 0,\ \ \|L_T^* x\|^2_{L^2(0,T,U)} \geq c.|x|^2_H.$$

1 Contrôlabilité de l'équation des ondes

1.1 Contrôle interne

Soit Ω un ouvert borné et régulier (de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne), de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \subset \Omega$ un deuxième ouvert. On considère le problème de contrôle suivant:

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y + \mathbf{1}_\omega u, \ \ \text{dans} \ \ (0,T)\times\Omega = Q_T \\ y = 0 \ \ \text{sur} \ \ (0,T)\times\partial\Omega = \Sigma_T \\ y(0,.) = y_0, y_t(0,.) = y_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système (3.2). Soit $T > 0$ on cherche $u \in L^2(Q_T)$ tel que pour toute donnée initiale $(y_0, y_1) \in H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$ la solution y de (3.2) vérifie $y(T,u) = y_t(T,u) = 0$ dans Ω.
Dans toute cette section on fait l'identification $H' = H$ (par le théorème de Riesz)
Pour se ramener au cadre abstrait, on considère sur H l'opérateur $(A, D(A))$ défini en (1.12), on note $U = L^2(\Omega)$ et on considére l'opérateur

$$u \longmapsto Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_\omega \end{pmatrix} u.$$

- On a bien $B \in \mathscr{L}(U,H)$. En effet, B et linéaire et:

$$\begin{aligned} \|Bu\|^2_H = \|1_\omega u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\omega |u(t,x)|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx \\ &= \|u\|^2_{L^2(\Omega).} \end{aligned}$$

On pose
$Y = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \Delta f \end{pmatrix}$ avec : $Y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
Le système (3.2) s'écrit alors dans H:

$$\begin{cases} Y_t = AY + Bu \\ Y(0) = Y^0 \in H \end{cases}$$

On sait que A est générateur d'un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H. D'après le théorème (3.4) ce système admet une unique solution $y \in C([0,T];H)$ sous la forme

$$Y(t) = S(t).Y^0 + \int_0^t S(t-\sigma)Bu(\sigma)d(\sigma).$$

Il faut trouver des conditions sur T et ω pour qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $Z^0 \in H$

$$\int_0^T |B^*S^*(t)Z^0|^2 dt \geq c|Z^0|^2. \tag{3.3}$$

Mais $Z(t) = S^*(t)Z^0$ est la solution du problème

$$\begin{cases} Z_t = A^*Z \\ Z(0) = Z^0 \in H \end{cases} \tag{3.4}$$

Or, on a déjà vu dans la proposition(1.27) que l'opérateur A est anti-adjoint: $A^* = -A$.
Déterminons B^*

i) On a :

$$\langle u, B^*(f,g)\rangle_U = (Bu,(f,g))_H = ((0,1_\omega u),(f,g))_H = \int_\Omega 1_\omega ug\,dx = \int_\Omega u(1_\omega g)\,dx$$

donc:

$$B^*(f,g) = 1_\omega g$$

Il est alors clair que si $Z = (z_1, z_2)$ est solution de (3.4) avec $Z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, l'inégalité (3.3) s'écrit

$$\int_0^T \int_\omega |z_2|^2 dx\,dt \geq c\left(\int_\Omega |\nabla z_1^0|^2 dx + |z_2^0|^2\right).$$

Mais comme $z_2 = z_t$, il s'agit alors de montrer que

$$\int_0^T \int_\omega |z_t|^2 dx\,dt \geq c\left(\int_\Omega |\nabla z_1^0|^2 dx + |z_2^0|^2\right), \tag{3.5}$$

pour z solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} z_{tt} = \Delta z, \text{ dans } Q_T \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma_T \\ z(0,.) = z_1^0,\ z_t(0,.) = z_2^0 \end{cases} \tag{3.6}$$

- **Le cas** $\omega = \Omega$

On a le résultat suivant qui assure la contrôlabilité.

Théorème 3.5 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Pour tout $T > 0$ et pour toute donnée initiale $(z_1^0, z_2^0) \in H$, on a*

$$\int_0^T \int_\Omega |z_t|^2 dx\, dt \geq c\left(\int_\Omega |\nabla z_1^0|^2 dx + |z_2^0|^2\right). \tag{3.7}$$

pour toute solution z de (3.6)*.*

Remarque 3.6 *Ce théorème implique bien entendu, d'après les développement précédents, la contrôlabilité exacte du système* (3.2) *pour tout $T > 0$.*

Preuve : Posons tout $t \in (0, T)$

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla z(t)|^2 + |z_t(t)|^2\right) dx$$

où z est solution de (3.6). On a déjà vu lemme (2.6) que

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right) dx,\ \forall\, t \in (0, T).$$

Soit à présent $k(t) = t^2(T-t)^2$. Multiplions l'équation dans (3.6) par kz et intégrons sur Q_T. On obtient :

$$\int_{Q_T} kz_t^2 dx\, dt + \int_{Q_T} k' z z_t dx\, dt = \int_{Q_T} k|\nabla z(t)|^2 dx\, dt \tag{3.8}$$

En effet,
De fait que $k(T) = k(0) = 0$ on a, aprés intégration par parties sur $(0, T)$,

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} k.z_{tt}.z dx\, dt &= \int_\Omega \left(\int_0^T k.z_{tt} z\right) dt\, dx = \int_\Omega [k.z.z_t]_0^T\, dx - \int_\Omega \int_0^T (kz)' z_t dt\, dx \\ &= -\int_{Q_T} kz_t^2 dx\, dt - \int_{Q_T} k'.z.z_t dx\, dt\end{aligned}$$

D'autre part, du fait que $z = 0$ sur Σ_T alors

$$\int_\Omega \Delta z.z dx = -\int_\Omega |\nabla z|^2 dx,$$

et donc

$$\int_{Q_T} k.\Delta z.z dx\, dt = -\int_{Q_T} k.|\nabla z|^2 dx\, dt.$$

on obtient alors (3.8).
D'abord, puisque

$$\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx = 2E(0) - \int_{\Omega} |z_t|^2 dx,$$

on en déduit que

$$\int_{Q_T} k|\nabla z(t)|^2 dx\, dt = 2\int_0^T k(t)\, dt\, E(0) - \int_{Q_T} k z_t^2 dx\, dt \tag{3.9}$$

L'équation (3.8) s'écrit alors

$$2\int_{Q_T} k\, z_t^2\, dx\, dt + \int_{Q_T} k' z\, z_t\, dx\, dt = 2E(0). \int_0^T k(t) dt. \tag{3.10}$$

Soit (λ_k, φ_k) les valeurs et fonctions propres de $(-\Delta)$, définit en (2.8) et $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de $(-\Delta)$.
On a,

$$z = \sum_{k\geq 1} (z, \varphi_k)\varphi_k \ \text{ et } \ \int_{\Omega} |z|^2 dx = \sum_{k\geq 1} |(z, \varphi_k)|^2$$

$$\begin{aligned} -\Delta z &= \sum_{k\geq 1} (-\Delta z, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k\geq 1} (z, -\Delta\varphi_k)\varphi_k \\ &= \sum_{k\geq 1} \lambda_k (z, \varphi_k)\varphi_k. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta z.z\, dx &= \sum_{j,\,k\geq 1} \lambda_k (z, \varphi_k)(z, \varphi_j) \int_{\Omega} \varphi_k \varphi_j\, dx \\ &= \sum_{k\geq 1} \lambda_k |(z, \varphi_k)|^2 \\ &\geq \lambda_1 \sum_{k\geq 1} |(z, \varphi_k)|^2 (\text{car } \lambda_k > 0 \quad \text{et croissante}) \\ &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} z^2\, dx \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} z^2\, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} -\Delta z.z\, dx.$$

Du fait que $z = 0$ sur Σ_T, la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} -\Delta z.z\, dx = \int_{\Omega} |\nabla z|^2\, dx,$$

donc,

$$\int_\Omega z^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla z|^2 \, dx. \tag{3.11}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.11) on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{Q_T} k' z z_t \, dx \, dt \right| &= \int_{Q_T} \left(k^{1/2} z\right) \left(\frac{k'}{k^{1/2}} z_t \right) dx \, dt \\
(\mathrm{Cauchy-Schwarz}) \quad &\leq \varepsilon \int_{Q_T} k z^2 dx \, dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{Q_T} \frac{k'^2}{k} z_t^2 dx \, dt \\
\text{d'après (3.11)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \int_{Q_T} k |\nabla z(t)|^2 dx \, dt + C_\varepsilon \int_{Q_T} z_t^2 dx \, dt \\
\text{d'après (3.9)} &\leq \frac{2\varepsilon}{\lambda_1} \int_0^T k(t) dt \, E(0) + C_\varepsilon \int_{Q_T} z_t^2 dx \, dt - \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \int_{Q_T} k \, z_t^2 dx \, dt.
\end{aligned}$$

où $C_\varepsilon = \frac{\|k'^2/k\|_\infty}{4\varepsilon}$, car $k'^2/k \in L^\infty(0,T)$. En tenant compte de ces inégalités, on déduit de (3.10) que

$$\int_{Q_T} \left(2k(t) + C_\varepsilon - \frac{\varepsilon \, k(t)}{\lambda_1} \right) z_t^2 \, dx \, dt \geq (2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}) \int_0^T k(t) dt \, E(0).$$

Sachant que $\sup\limits_{[0,T]} k(t) = \frac{T^4}{16}$, cette inégalité donne ona $C > 0$, pour ε suffisament petit, déduit alors que

$$\left((2 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}) \frac{T^4}{16} + C_\varepsilon \right) \int_{Q_T} z_t^2 \, dx \, dt \geq (2 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}) \int_0^T k(t) dt \, E(0).$$

$$\int_{Q_T} z_t^2 \, dx \, dt \geq C.E(0)$$

Pour $\varepsilon = \varepsilon_0$ fxé petit de sorte que $c_1 = (2 - \frac{\varepsilon_0}{\lambda_1}) \frac{T^4}{16} + C_{\varepsilon_0} > 0$ et $c_2 = 2 - \frac{\varepsilon_0}{\lambda_1} > 0$

$$c_1. \int_{Q_T} z_t^2 dx \, dt \geq c_2 \int_0^T k(t) dt . E(0)$$

En posant

$$C = \frac{c_2}{c_1} \int_0^T k(t) dt > 0.$$

on déduit l'inégalité (3.7).

- **Le cas** $\omega \subsetneq \Omega$.

L'inégalité d'observabilité (3.5) n'est en général pas vraie pour un ouvert ω quelconque comme nous le verrons ultérieurement sur un exemple, a cause du caractère hyperbolique de l'équation des ondes. Il faudra, d'une part un temps minimal de contrôle, et d'autre part, des conditions géométriques sur ω. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $q(x) = x - x_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note ν la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ que l'on suppose de classe C^2. On définit:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \partial\Omega \ ; q(x).\nu(x) > 0\} \, ; \, \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0 \\ \Sigma_i &= \Gamma_i \times (0,T), \ i = 0, 1. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, on considère O_ε voisinage ouvert d'ordre ε dans $\mathbb{R}^n$ de Γ_0, et on prend $\omega = \Omega \cap O_\varepsilon$.

Le résultat qui sera démontré dans ce paragraphe est le suivant:

Théorème 3.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et $\omega \subset \Omega$ l'ouvert défini dans les lignes précédentes. Il existe $T_0 > 0$ tel que vérifiant*

$$\forall\, T > T_0, \, \exists\, c = c_T > 0, \ \left(\int_\Omega |\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2 \right) \leq c \int_0^T \int_\omega |z_t|^2 dx\, dt, \tag{3.12}$$

pour toute solution z de (3.6) correspondant à des données initiale $(z_1^0, z_2^0) \in H$.

Remarque 3.8 *Par rapport au cas précédent ($\omega = \Omega$), on constate que la contrôlabilité exacte nécessite un temps minimal.*
C'est en fait dû au caractère hyperbolique: la vitesse de propagation le long des bicaractéristiques est finie, il faut donc un temps pour atteindre ω.
La démonstration de ce théorème nécessite quelques résultats intermédiaires. Dans la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et ω est l'ouvert défini précédemment.

Lemme 3.9 *Soit $h \in \left(C^1(\overline{Q_T})\right)^n$. Pour toute solution (faible) z de (3.6), on a l'identité:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_T} h.\nu \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T = \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z \right]_0^T &+ \int_{Q_T} \frac{1}{2} (\nabla.h) \left(z_t^2 - |\nabla z|^2 \right) dx\, dt \\ &+ \int_{Q_T} \{ -(h_t.\nabla z)\, z_t + (D_x h \ \nabla z).\nabla z \} \ dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $D_x h$ désigne la différentielle de h.

Preuve : On multiplie l'équation (3.6) par $h.\nabla z$ et on intègre sur Q_T. On a d'abord, en intégrant par parties et en tenant compte de la condition au bord sur z :

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} z_{tt}\, h.\nabla z\, dx\, dt &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T - \int_{Q_T} z_t\,(h.\nabla z_t + h_t.\nabla z)\, dx\, dt \\ &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T - \int_{Q_T} \left(\frac{1}{2}\, h.\nabla(z_t^2) + z_t\, h_t.\nabla z\right) dx\, dt \\ &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T + \int_{Q_T} \left\{\frac{1}{2}(\nabla.h) z_t^2 - z_t\, h_t.\nabla z\right\} dx\, dt\end{aligned}$$

En suite, en désignant par $D^2 z$ la différentielle seconde par rapport à x de z:

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} \Delta z\, h.\nabla z &= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z\, \frac{\partial z}{\partial \nu}\, d\Sigma_T - \int_{Q_T} \nabla z.\nabla(h.\nabla z) dx\, dt \\ &= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z\, \frac{\partial z}{\partial \nu}\, d\Sigma_T - \int_{Q_T} \nabla z.(D_x h.\nabla z + h.D_x^2\, z) dx\, dt \\ &= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z\, \frac{\partial z}{\partial \nu} d\Sigma_T - \int_{Q_T} (D_x h.\nabla z).\nabla z + \frac{1}{2}\, h.\nabla(|\nabla z|^2) dx\, dt \\ &= \int_{\Sigma_T} \left(h.\nabla z\, \frac{\partial z}{\partial \nu} - \frac{1}{2} h.\nu\, |\nabla z|^2\right) d\Sigma_T - \int_{Q_T} \left\{(D_x h.\nabla z).\nabla z - \frac{1}{2}\,(\nabla.h)|\nabla z|^2\right\} dx\, dt\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}0 = &\left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_{Q_T} \left\{(\nabla.h)(z_t^2 - |\nabla z|^2) - (h_t.\nabla z) z_t\right\}\, dx\, dt \\ &+ \int_{Q_T} (D_x h.\nabla z).\nabla z\, dx\, dt - \int_{\Sigma_T} \left(h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\, h.\nu |\nabla z|^2\right) d\Sigma_T\end{aligned}$$

Comme $z = 0$ sur Σ_T, on déduit que $\nabla z = (\nabla z.\nu)\nu$, et la formule (3.13) en découle. □

Lemme 3.10 *Soit $T_0 = 2\max_{x \in \overline{\Omega}} |x - x_0|$. Pour tout $T > T_0$ et toute solution (faible) z de* (3.6)*, on a:*

$$\int_\Omega \left(|\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right) dx \leq \frac{T_0}{2(T - T_0)} \int_{\Sigma_T} \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T. \tag{3.14}$$

Preuve : On applique le lemme (3.9) avec $h(t,x) = q(x) = (x - x_0)$, pour tout $(t,x) \in \overline{Q_T}$.

Du fait que

$$\nabla.q = n, \quad D_x q = Id_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{et} \quad q_t = 0,$$

l'identité (3.13) s'écrit (en tenant compte, de la conservation de l'énergie):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Sigma_T} q.\nu \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T &= \left[\int_\Omega z_t\ q.\nabla z\, dx\right]_0^T + \frac{n}{2}\int_{Q_T}\left(z_t^2 - |\nabla z|^2\right) dx\, dt + \int_{Q_T} |\nabla z|^2 dx\, dt \\
&= \left[\int_\Omega z_t\, q.\nabla z\, dx\right]_0^T + \frac{n-1}{2}\int_{Q_T}\left(z_t^2 - |\nabla z|^2\right) dx\, dt + \frac{1}{2}\int_{Q_T}\left(z_t^2 + |\nabla z|^2\right) dx\, dt \\
&= \left[\int_\Omega z_t\, q.\nabla z\, dx\right]_0^T + \frac{n-1}{2}\int_{Q_T}\left(z_t^2 - |\nabla z|^2\right) dx\, dt + T\, E(0).
\end{aligned}$$

- On a d'abord, par définition de $\Sigma_i (i = 0; 1)$ et T_0,

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_T} q.\nu \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T &\leq \int_{\Sigma_0} q.\nu \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T \\
&\leq \frac{T_0}{2}\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T
\end{aligned} \tag{3.15}$$

- Par ailleurs, en multipliant (3.6) par z et intégrant sur Q_T,on a :

$$0 = \int_{Q_T} (z_{tt} - \Delta z).z\, dx\, dt = \left[\int_\Omega z_t.z\right]_0^T - \int_{Q_T} z_t^2 + \int_{Q_T} |\nabla z|^2 dx\, dt$$

on obtient:

$$\int_{Q_T}\left(z_t^2 - |\nabla z|^2\right) dx\, dt = \left[\int_\Omega z_t.z\, dx\right]_0^T. \tag{3.16}$$

Il découle donc de (3.15) et (3.16) l'inégalité suivante :

$$\left[\int_\Omega z_t \left\{q.\nabla z + \frac{n-1}{2}\, z\right\} dx\right]_0^T + T\, E(0) \leq \frac{T_0}{4}\int_{\Sigma_0}\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T \tag{3.17}$$

- Il reste à estimer $[I(t)]_0^T = \left[\int_\Omega \left\{z_t\, q.\nabla z + \frac{n-1}{2}\, z_t\, z\right\} dx\right]_0^T$ en fonction de l'énergie $E(0)$.

On a :

$$|I(t)| \leq \frac{T_0}{4}\int_\Omega z_t^2 dx + \frac{1}{T_0}\int_\Omega \left\{q.\nabla z + \frac{n-1}{2}\, z\right\}^2 dx \tag{3.18}$$

Poson $J =: \int_\Omega \left\{q.\nabla z + \frac{n-1}{2}\, z\right\}^2 dx$.
En utilisaut la formule $(H(div, \Omega))$ pour le terme $\frac{1}{2}\int_\Omega q.\nabla z^2$:

$$\begin{aligned}
J &= \int_\Omega \left(|\, q.\nabla z|^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\, z^2\right) dx + \frac{(n-1)}{2}\int_\Omega q.\nabla z.z dx \\
&= \int_\Omega \left(|\, q.\nabla z|^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\, z^2\right) dx + \frac{(n-1)}{2}\int_\Omega \nabla q.(z^2) dx
\end{aligned}$$

Sachant que $\int_\Omega q.\nabla z.zdx = \int_\Omega \frac{1}{2} q.\nabla(z)^2 dx$, en utilisant (1.2), et comme $\nabla.q = n$ et $z \in H_0^1(\Omega)$ on aura

$$J = \int_\Omega \left(|\, q.\nabla z|^2 + \frac{(n-1)^2}{4} z^2 \right) dx - \frac{n(n-1)}{2} \int_\Omega z^2 dx$$

comme $\max\limits_\Omega |q| = \frac{T_0}{2}$ on a:

$$\begin{aligned} J &\leq \int_\Omega |\, q.\nabla z|^2 dx - \frac{(n+1)(n-1)}{4} \int_\Omega z^2 dx \\ &\leq \frac{T_0^2}{4} \int_\Omega |\nabla z|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les relations (3.18) et (3.19) mènent à l'inégalité :

$$\left| \int_\Omega z_t \left\{ q.\nabla z + \frac{n-1}{2} z \right\} dx \right| \leq \frac{T_0}{4} \int_\Omega \left(z_t^2 + |\nabla z|^2 \right) dx$$

d'après la conservation de l'énergie on aura:

$$\left| \int_\Omega z_t \left\{ q.\nabla z + \frac{n-1}{2} z \right\} dx \right| \leq \frac{T_0}{2} E(0)$$

D'où

$$\left| \left[\int_\Omega z_t \left\{ q.\nabla z + \frac{n-1}{2} z \right\} dx \right]_0^T \right| \leq T_0\, E(0) \tag{3.20}$$

Revenant à (3.17) et utilisant (3.20) on arrive à

$$(T - T_0) E(0) \leq \frac{T_0}{4} \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T,$$

puis à (3.12). □

Pour la dernière étape de la démonstration du théorème, qui va consister à estimer $\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_0$ par $\int_0^T \int_\Omega |z_t|^2 dx\, dt$, nous aurons besoin du résultat suivant dont on trouve la démonstration dans [1] ou[3];

Proposition 3.11 *Il existe* $m \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$ *tel que*

$$m.\nu = 1 \text{ sur } \Gamma_0\,; \;\; m.\nu \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega\,; \;\; \mathrm{supp}(m) \subset \omega. \tag{3.21}$$

Lemme 3.12 *Pour tout* $T > 0$*, pour tout* $\sigma \in (0, \dfrac{T}{2})$ *et toute solution (faible)* z *de* (3.6)*, on a :*

$$\int_\sigma^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T \leq C \int_0^T \int_\omega \left\{ z_t^2 + z^2 \right\} dx\, dt. \tag{3.22}$$

Preuve : On applique le théorème (2.1) avec $h(t,x)=t(T-t)m(x)$ pour tout $(t,x)\in\overline{Q_T}$, m vérifiant (3.21). Reécrivons l'identité (3.12)

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_T} h.\nu\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T=\left[\int_\Omega z_t\,h.\nabla z\,dx\right]_0^T+\int_{Q_T}\frac{1}{2}(\nabla.h)\left(z_t^2-|\nabla z|^2\right)dx\,dt$$
$$+\int_{Q_T}\left\{-(h_t.\nabla z)z_t+(D_x\,h\,\nabla z).\nabla z\right\}\,dx\,dt$$

Mais,

$$\left[\int_\Omega z_t h.\nabla z\,dx\right]_0^T=\left[t(T-t).\int_\Omega z_t\,m\,\nu.\nabla z\,dx\right]_0^T=0$$

$$\int_{Q_T}\frac{1}{2}(\nabla.h)\,\left(z_t^2-|\nabla z|^2\right)dx\,dt\le c_1\int_0^T\int_\omega\left(z_t^2+|\nabla z|^2\right)dx\,dt$$

avec $c_1=\frac{1}{2}\max_{Q_T}(\nabla.h)<\infty$

$$\int_{Q_T}-\left(h_t.\nabla z\right).z_t dx\,dt\le\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega(h_t)^2|\nabla z|^2dx\,dt+\frac{1}{2}\int_{Q_T}z_t^2dx\,dt$$
$$\le c_2\int_0^T\int_\omega\left(z_t^2+|\nabla z|^2\right)dx\,dt.$$

avec $c_2=\frac{1}{2}\max\left\{\sup_{Q_T}|h_t|^2,1\right\}$

$$\int_{Q_T}|(D_x h.\nabla z).\nabla z|\,dx\,dt\le c_3\int_{Q_T}|\nabla z|^2dx\,dt.\quad(c_3=\max|D_x h|)$$

on déduit alors :

$$\int_{\Sigma_T}h.\nu\left|\frac{\partial z}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma_T\le C\int_0^T\int_\omega\left(|z_t|^2+|\nabla z|^2\right)dx\,dt.\tag{3.23}$$

où $C=C_{\omega,T}$.
On voudrait à présent se débarasser du terme $\int_0^T\int_\omega|\nabla z|^2dx\,dt$ qui figure dans le membre de droite de l'inégalité précédente. Pour cela, introduisons deux ouvert ω_1 et ω_2 tel que $\overline{\omega_1}\subset\omega_2\subset\Omega$ et

$$\varphi\in D(\omega_2)\ \text{ telle que }\varphi=1\ \text{ dans }\ \omega_1,\ 0\le\varphi\le1\ \text{ ailleurs}$$

Notons que l'on peut toujours choisir φ telle que

$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\in D(\omega_2)$$

en effet, si φ ne vérifie pas cette propriété, il suffit de la remplacer par φ^p pour $p \geq 2$. En multipliant l'équation (3.6) par $\delta(x,t) = t(T-t)\varphi(x)z(x,t) = \gamma(t)\varphi(x)z(x,t)$ et en intégrant sur Q_T, on obtient :

$$\int_{Q_T} \left\{\gamma\,\varphi\, z_t^2 + \gamma'\,\varphi z_t z\right\}\, dx\, dt = \int_{Q_T} \left\{\gamma\,\varphi|\nabla z|^2 + \gamma z \nabla\varphi\nabla z\right\}\, dx\, dt.$$

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_T} \gamma z\nabla\varphi\,\nabla z\, dx\, dt\right| &= \left|\int_{Q_T} (\gamma^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}.|\nabla z|)(\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{\nabla\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}.z)\, dx\, dt\right| \\ &= \left|\int_{Q_T} \gamma^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}.z.\frac{\nabla\varphi}{\varphi^{\frac{1}{2}}}.\nabla z.z\, dx\, dt\right| \\ &\leq \varepsilon \int_{Q_T} \gamma\varphi|\nabla z|^2 dx\, dt + C_\varepsilon \int_{Q_T} \gamma.\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} z^2\, dx\, dt\end{aligned}$$

donc:

$$\int_{Q_T} \gamma z\nabla\varphi.\nabla z dx\, dt \geq -\varepsilon \int_{Q_T} \gamma\varphi|\nabla z|^2 dx\, dt - C_\varepsilon \int_{Q_T} \gamma.\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\, z^2 dx\, dt$$

alors,

$$\int_{Q_T} \left(\gamma\,\varphi z_t^2 + \gamma'\,\varphi z_t\, z\right) dx\, dt \geq (1-\varepsilon)\int_{Q_T} \gamma\,\varphi.|\nabla z|^2\, dx\, dt - C_\varepsilon \int_{Q_T} \gamma\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}.z^2 dx\, dt$$

ce qui donne:

$$(1-\varepsilon).\int_{Q_T} \gamma\,\varphi|\nabla z|^2 dx\, dt \leq \int_{Q_T} \left(\gamma\,\varphi z_t^2 + \gamma'\,\varphi z_t\, z\right) dx\, dt + C_\varepsilon \int_{Q_T} \gamma.\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}.z^2 dx\, dt.$$

Alors, pour ε petit on aura :

$$\int_{Q_T} \gamma\,\varphi.|\nabla z|^2 dx\, dt \leq C.\int_{Q_T} \left(\gamma\,\varphi.z_t^2 + \gamma.\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\, z^2 + \gamma'\varphi.z_t\, z\right) dx\, dt$$

De plus

$$\left|\int_{Q_T} \gamma'\,\varphi.z_t\, z dx\, dt\right| \leq \frac{1}{2}\int_{Q_T} (\gamma')^2.z_t^2 dx\, dt + \frac{1}{2}\int_{Q_T} \varphi^2.z^2 dx\, dt$$

Du fait que $(\gamma')^2 = T^2$, $\sup\gamma < \infty$; $\sup\varphi \subset \omega_2$; $\sup\limits_{x\in\Omega_2}|\varphi| < \infty$ et $\sup\limits_{x\in\Omega_2}\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} < \infty$ alors,

$$\int_{Q_T} \gamma\,\varphi.z_t^2 dx\, dt \leq C_1 \int_0^T\int_{\omega_2} z_t^2 dx\, dt; \quad \int_{Q_T} \gamma.\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\, z^2 dx\, dt \leq C_2 \int_0^T\int_{\omega_2} z^2 dx\, dt$$

$$\int_{Q_T} (\gamma')^2 z^2 dx\, dt \leq C_3 \int_0^T\int_{\omega_2} z^2 dx\, dt \;\text{ et }\; \int_{Q_T} \varphi^2 z^2 dx\, dt \leq C_4 \int_0^T\int_{\omega_2} z^2 dx\, dt,$$

alors, pour tout $\sigma \in (0,T)$, en posant $C_5 = \max(C_1, C_2, C_3, C_4)$ et $C_6 = \min\limits_{(\sigma,T-\sigma)} \gamma(t) > 0$

$$C_6 \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\omega_1} |\nabla z|^2 dx\, dt \leq C_5 \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\omega_2} \left\{ z_t^2 + z^2 \right\} dx\, dt.$$

On déduit alors:

$$\int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\omega_1} |\nabla z|^2 dx\, dt \leq C \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\omega_2} \left\{ z_t^2 + z^2 \right\} dx\, dt. \tag{3.24}$$

Montrons à présent (3.22). utilisant les inégalité (3.23) et (3.24) on a:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} h.\nu \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T &\leq C. \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\omega_1} \left(z_t^2 + |\nabla z|^2 \right) dx\, dt \\ &\leq C. \int_{0}^{T} \int_{\omega} \left\{ z_t^2 + z^2 \right\} dx\, dt \end{aligned}$$

Comme $m.\nu = 1$ sur Γ_0 et $\gamma(t) \geq C_1$ sur $(\sigma, T-\sigma)$ alors,

$$\int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T \leq C. \int_{\sigma}^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} h.\nu. \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T$$

On déduit inégalité (3.22) .

Lemme 3.13 *Soit $T > T_0$. $Z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in H$* et *$Z$ la solution de* (3.6) *associée à la donnée initiale Z^0. Alors,*

1. *L 'application $L : H \to L^2(Q_T)$ définie par $LZ^0 = 1_\omega z_t$ une application linéaire, continue et injective.*
2. *L 'application $K : H \to L^2(Q_T)$ définie par $KZ^0 = z$ une application linéaire, continue et compacte.*

Preuve :

1. En effet, si $LZ^0 = 0$ alors z est constante en temps sur ω. L'équation dans (3.6) implique alors que

$$\Delta z = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } z = 0 \text{ sur } \partial\omega \cap \Gamma_0. \tag{3.25}$$

- De l'unicité de la solution du problème (3.25) dans l'espace

$$V = \left\{ z \in H^1(\Omega);\ z = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \right\}$$

On déduit que $z = 0$ dans ω et par le théorème de Holmgren, $z = 0$ dans Q_T.

2. La linéairité de K est évidente, sa continuité vient de l'inégalité (2.4) .
   Soit Z_n^0 une suite bornée dans H alors, d'aprés l'inégalité (2.4) $Z = KZ_n^0$ est bornée dans $C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Donc, pour tout $t \in [0,1]$; $(z_n(t))$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$).
   Comme l'injection $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est compacte (Ω etant borné)
   alors, $(z_n(t))$ contient une sous suite notée encore $z_n(t)$ convergente dans $L^2(\Omega)$ vers $z(t)$.
   On déduit alors que: $z_n \to Z$ dans $L^2(Q_T)$
   i.e (KZ_n^0) admet une sous suite convergente dans $L^2(Q_T)$. □

Le dernier résultat intermédiaire dont on a besoin pour la démonstration du théorème (3.7) est:

Lemme 3.14 *Soit X, Y, Z trois espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ une application injective et $K : X \to Z$ une application linéaire compacte. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|x\|_X \leq C(\|Lx\|_X + \|Kx\|_Z), \ \forall\, x \in X.$$

Alors, il existe une constante encore notée $C > 0$ telle que

$$\|x\|_X \leq C\|Lx\|_X, \ \forall x \in X. \tag{3.26}$$

Preuve : Si (3.26) est fausse, alors il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle que

$$\|x_n\|_X = 1 \text{ pour tout } n \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} Lx_n = 0.$$

Comme K est compact et (x_n) est bornée, il existe une sous-suite encore notée (x_n) telle que (Kx_n) soit convergente dans Z.
On en déduit (3.26) que la suite (x_n) est de Cauchy dans X. En effet, par hypothèse :

$$\|x_n - x_m\|_X \leq C(\|L(x_n - x_m)\|_Y + \|K(x_n - x_m)\|_Z) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Soit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Alors

$$\|x\|_X = 1 \ \text{ et } \ Lx = \lim Lx_n = 0$$

. Ce qui est impossible car L est injective. Ceci achève la démonstration du lemme.
Preuve : du théorème (3.7)
Si $T > T_0$, on se donne $\sigma > 0$ tel que $T - 2\sigma > T_0$. D'après le lemme (3.10) on a :

$$\int_\Omega \left(|\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right) dx \leq \frac{T_0}{2(T - 2\sigma - T_0)} \int_\sigma^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_T$$

et, grâce au lemme (3.12), on arrive à l'estimation :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(|\nabla z_1^0|^2 + |z_2^0|^2\right) dx &\leq C \int_0^T \int_\omega \left\{ z_t^2 + z^2 \right\} dx\, dt \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_\omega z_t^2 dx\, dt + \int_{Q_T} z^2 dx\, dt \right)\end{aligned}$$

Par le lemme (3.14) appliqué à L et K définies dans le lemme (3.13) avec $X = H$, $Y = Z = L^2(Q_T)$, on obtient (3.12) et ceci achève la démonstration du théorème (3.7).

1.2 Contrôle par le bord

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2. Soit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 \neq \varnothing$, et soit $T > 0$.

On veut déterminer, quand cela est possible, $u \in L^2((0,T) \times \Gamma_0) = L^2(\Sigma_0)$ tel que pour toute donnée initiale (y_0, y_1) dans un espace H à déterminer, il existe une unique "solution" y de

$$\begin{cases} y_{tt} = \Delta y \text{ dans } Q_T \\ y = 0 \text{ sur } (0,T) \times \Gamma_1 \\ y = u \text{ sur } \Sigma_0 \\ y(0,.) = y_0, y_t(0,.) = y_1 \end{cases} \tag{3.27}$$

telle que

$$y(T,.) = y_t(T,.) = 0.$$

Il s'agit bien d'un problème de contrôlabilité exacte mais qui ne s'insère pas directement dans le cadre abstait car les données au bord ne sont pas homogènes. L'opérateur de " contrôle" est l'opérateur "trace sur Γ_0 " et il est non borné de $L^2(\Omega)$, dans $L^2(\partial\Omega)$. La théorie précédente a donc besoin d'être généralisée.

Dans un premier temps, on va définir l'espace H et l'opérateur de contrôle L_T.

Définition 3.15 *on dit que y est solution au sens de la transposition du système* (3.27) *si y vérifie sur Q_T:*

$$\int_{Q_T} y f dx\, dt = -\int_\Omega y_0\, \theta_t(0) dx + < y_1, \theta(0) >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} u\, d\Sigma_T \tag{3.28}$$

pour tout $f \in \mathcal{D}(Q_T)$, où $\theta := \theta(f)$ est solution de

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \Delta\theta = f, \text{ dans } Q_T \\ \theta = 0 \text{ sur } \Sigma_T \\ \theta(T,.) = \theta_t(T,.) = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Théorème 3.16 *Soit $T > 0$. Pour toutes données initiales $(y_0, y_1) \in H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et tout $u \in L^2(\Sigma_0)$, il existe une solution unique y (au sens de la transposition) du système (3.27) telle que*

$$y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$$

De plus, il existe $c_T > 0$ tel que y vérifie pour tout $t \in [0,T]$

$$\| y(t,.) \|_{L^2(\Omega)} + \| y_t(t,.) \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_T(\| y_0 \|_{L^2(\Omega)} + \| y_1 \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Sigma_0)}). \quad (3.30)$$

Remarque 3.17 *Pour $u = 0$, on définit une application S_1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(H)$ par :*

$$S_1(t)(y_0, y_1) = (y(t), y_t(t)), \ \forall (y_0, y_1) \in H.$$

Cette application définit un groupe fortement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$:

$$\begin{aligned}
&S_1(t+s)x = S_1(t)S_1(s)x, \ \forall \ t, s \in R, \ \forall \ x \in H \\
&\lim_{t \to 0} S_1(t)x = x, \forall \ x \in H.
\end{aligned}$$

Et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_1(t)H = H$. □

Preuve du théorème

Montrous qu'il existe $y \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$ solution de (3.28). Pour cela, on va montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}(Q_T)$, pour tout $(y_0, y_1) \in H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $u \in L^2(\Sigma_0)$, l'application L

$$f \in \mathcal{D}(Q_T) \xrightarrow{L} -\int_\Omega y_0 \, \theta_t(0) dx + \langle y_1, \theta(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega),\, H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} u \, d\Sigma$$

définit une forme linéaire continue sur $L^1((0,T); L^2(\Omega))$. Le théorème de Riesz permettra de déduire l'existence de $y \in (L^1((0,T); L^2(\Omega)))' = L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$ tel que pour tout $f \in L^1((0,T); L^2(\Omega))$ on ait

$$\int_{Q_T} y(t,x) f(t,x) dx \, dt = -\int_\Omega y_0 \, \theta_t(0) dx + \langle y_1, \theta(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} u d\sigma.$$

On a:

$$\left| \int_\Omega y_0 \theta_t(0) dx \right| \leq | \, y_0 \, | \, . \, | \, \theta_t(0) \, | \quad (3.31)$$

$$| \, \langle y_1, \theta(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \, | \leq \| \, y_1 \, \|_{H^{-1}(\Omega)} \| \, \theta(0) \, \|_{H_0^1(\Omega)} \, . \quad (3.32)$$

Il reste à estimer le terme $\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} u \, d\sigma$. Pour cela, nous allons démontrer un "résultat de régulirité cachée": la solution θ qui n'appartient qu'à $C((0,T); H_0^1(\Omega))$ admet une trace normale dans $L^2(\Sigma)$ et que l'application qui à f associe cette dérivée normal est continue.

Lemme 3.18 ***(Inégalité directe)*** *Pour tout $T > 0$, il existe $c > 0$, tel que pour tout $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et tout $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ la solution ϕ de*

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = f, \text{ dans } Q_T \\ \phi = 0, \text{ sur } \Sigma_T \\ \phi(0,.) = \phi_0,\, \phi_t(0,.) = \phi_1, \end{cases} \tag{3.33}$$

vérifie

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right| d\sigma \leq C(T+1)\left[\| \phi_0 \|^2_{H_0^1(\Omega)} + | \phi_1 |^2 + \| f \|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right].$$

Pour la preuve de ce lemme, on a besoin du résultat suivant dont on peut trouver la preuve dans [1] et dans [3]

Lemme 3.19 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^2. Alors il existe un champ de vecteurs $h = (h_k) \in C^1(\overline{\Omega})^n$ qui vérifie $h(x) = \nu(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$*

Preuve : Soit $h \in C^1(\overline{\Omega})^n$. Exactement comme pour la formule (3.13), on obtient, pour toute solution (faible) ϕ de (3.33)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma_T = &\left[\int_{Q_T}\phi_t.h.\nabla\phi dx\, dt\right]_0^T + \int_{Q_T}\frac{1}{2}(\nabla.h)\left(\phi_t^2 - |\nabla\phi|^2\right)dxdt \\ &+ \int_{Q_T} -(h_t.\nabla\phi)\,\phi_t dx\, dt + (D_x h\,\nabla\phi).\nabla\phi\, dx\, dt \\ &+ \int_{Q_T} f.h.\nabla\phi\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Par ailleurs le choix de h donné par le lemme (3.19).
conduit à $h.\nu = 1$ sur Σ_T. Comme h est un champ de vecteurs régulier et comme

$$\max_{t\in(0,T)}|\phi_t(t)| + \max_{t\in(0,T)}\|\phi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq |\phi_1| + \|\phi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T}\frac{1}{2}(\nabla.h)\left(\phi_t^2 - |\nabla\varphi|^2\right)dx\, dt &\leq \frac{1}{2}\max_{x\in\Omega}|\nabla.h|\,T\left[\max_{t\in(0,T)}|\phi_t| + \max_{t\in(0,T)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\right] \\ &\leq C_1.T.\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\left[\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + |\varphi_1| + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right] \\ \left|\int_{Q_T} -(h_t.\nabla\phi)\,.\varphi_t dx\, dt\right| &\leq \|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,T.\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}.|\varphi_t| \\ &\leq \|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,T.\left(\|\phi\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\varphi_t|^2\right) \\ &\leq \|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}\,T.\left[\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + |\varphi_1| + \|f\|_{L^2(\Omega))}\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_T} f.h.\nabla\varphi dx\, dt\right| &\leq \|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}.\int_0^T \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.\|f\|_{L^2(\Omega)}dt \\ &\leq \|h\|_{C^1(\overline{\Omega})^n}.\int_0^T \max_{t\in(0,T)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega |f|^2\, dx.\end{aligned}$$

De même pour les autres termes, au déduit que:

$$\int_{\Sigma_T} \left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \leq c(\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})})(T+1)\left[\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\phi_1|^2 + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right].$$

qui est l'inégalité cherchée. □

Comme l'équation des ondes est réversible (en posant $s = T - t$ et en posant $\psi(0) = \theta(T)$)
en effet ou obtient

$$\begin{cases} \psi_{ss} - \Delta\psi = f \text{ dans } Q_T \\ \psi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \\ \psi(0) = 0,\ \psi_s(0) = 0 \end{cases}$$

alors, on peut considérer $t = T$ comme condition initiale pour θ. Dans ce cas,

$$|\theta_t(0)| \leq C.\|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega)}$$

et

$$\|\theta_t(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.\|f\|_{L^1(0,T,L^2(\Omega)}.$$

Donc, les solution θ de (3.29) vérifient

$$\int_{\Sigma_T} \left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma\, dt \leq c(T+1)\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})}\, \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.35}$$

et il s'ensuit, grâce à (3.31), (3.32) et (3.35), que

$$\begin{aligned}|L(f)| &= \left|-\int_\Omega y_0\theta_t(0)dx + \langle y_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\theta}{\partial\nu} ud\sigma\right| \\ &\leq c\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\end{aligned}$$

Donc il existe $y \in L^1((0,T;L^2(\Omega) = L^\infty((0,T;L^2(\Omega))$ vérifiant (3.28) pour tout $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)$ et:

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^\infty((0,T;L^2(\Omega)} &= \sup \frac{\int_{Q_T} y\, f\, dx\, dt}{\|f\|_{L^1((0,T;L^2(\Omega)}} \\ \sup \frac{\int_{Q_T} y\, f\, dx\, dt}{\|f\|_{L^1((0,T;L^2(\Omega)}} &\leq c(|y_0| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Sigma_0)}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Il faut maintenant monter que y ainsi construite est plus réguliere,

$$y \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Pour démontrer que $y \in C([0,T];L^2(\Omega))$, on démontre que y est la limite dans $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$ d'une suite $(y_n) \subset C([0,T];L^2(\Omega))$, associée à des données (y_0, y_1, u) plus régulières et on utilise l'estimation (3.36). la seule "difficulté" est de montrer que $(y_n) \subset C([0,T];L^2(\Omega))$.
Soit $(y_0, y_1, u) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^2\left((0,T);H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)\right)$. Considérons un relévement $\widehat{u}$ de u dans $H_0^2((0,T;H^2(\Omega))$ vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta\widehat{u} = \ 0 \\ \widehat{u} = u \text{ sur } \Gamma_0, \\ \widehat{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

Posons $\upsilon = y - \widehat{u}$, on a:

$$\begin{cases} \upsilon_{tt} - \Delta\upsilon = -\widehat{u}_{tt} \in L^2(Q_T) \\ \upsilon = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_0 \\ \upsilon(0) = y_0 - \widehat{u}(0), \\ \upsilon_t = y_1 - \widehat{u}_t(0) \end{cases}$$

υ est donc solution d'une équation des ondes avec second membre dans $L^2(Q_T)$, conditions de dirichlet homogènes et données initiales dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Du théorème (1.28) sur les solutions fortes de l'équation des ondes, on déduit que

$$\upsilon \in \ C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Pour $(y^0, y^1, u) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma_0)$, on sait qu'il existe $(y_n^0, y_n^1, u_n) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Sigma_0)$
tel que: $(y_n^0, y_n^1, u_n) \to (y^0, y^1, u)$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma_0)$.
Soit $y_n \in C([0,T];L^2(\Omega))$ la solution obtenue avec les données (y_n^0, y_n^1, u_n).

Alors, $z_n = y - y_n$ satisfait le sustème:

$$\begin{cases} \partial_{tt}.z_n - \Delta z_n = f - f_n \text{ dans } Q_T \\ z_n = u - u_n \text{ sur } \Sigma_T \\ z_n(0) = y^0 - y_n^0,\ z_n'(0) = y^1 - y_n^1. \end{cases}$$

Comme $(y^0 - y_n^0,\ y' - y_n',\ u - u_n) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma_0)$ et $f - f_n \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$. alors, d'aprés ce qui prècède et l'éstimation (3.36) on a:

$$\|y - y_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.\left(\|y^0 - y_n^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y^1 - y_n^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f - f_n\|_{L^2((0,T);\Omega)}\right)$$

et donc $y_n \to y$ dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, ce que preuve que $y \in C([0,T];L^2(\Omega))$.
Pour démonter que $y \in C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$, on procède ainsi: on considère de nouveau l'application

$$L(f) = -\int_\Omega y_0\,\theta_t(0)dx + \langle y_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\,u\,d\sigma.$$

Soit $f = \frac{df_1}{dt}$ avec $f_1 \in L^1(0,T);H_0^1(\Omega))$. On a donc $f \in W^{-1,1}((0,T);H_0^1(\Omega))$. Si on montre que :

$$|L(f)| \leq c\|f_1\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

alors $y \in (W^{-1,1}((0,T);H_0^1(\Omega)))' = W^{1,\infty}(0,T);H^{-1}(\Omega))$, donc $y_t \in L^\infty((0,T);H^{-1}(\Omega))$ et on aura aussi:

$$\|y_t\|_{L^\infty((0,T);H^{-1}(\Omega))} \leq c(|y_0| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Sigma_0)}.$$

Pour conclure, il suffira de procéder comme pour la démonstration de $y \in C([0,T];L^2(\Omega)$ partant de l'estimation satisfaite par y_t.
On va donc revenir sur le calcul précédent en remplaçant f par $\frac{df_1}{dt}$. Il sagit de montrer que

$$|\theta_t(0)| + \|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_T)} \leq c\|f_1\|_{L^1((0,T);H_0^1(\Omega))}.$$

pour θ solution de (3.29) avec $f = \frac{df_1}{dt}$. On approche f_1 par "$f_{1,n}$" dans $\mathcal{D}(]0,T[;H_0^1(\Omega))$ et on note de nouveau f_1 les termes de la suite. On pose $\theta = w_t$ et on déduit que

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = f_1 \text{ dans } Q_T \\ w = 0 \text{ sur } \Sigma_T \\ w(T,.) = w_t(T,.) = 0 \end{cases}$$

il s'agit de démontrer que

$$|w_{tt}(0)| + \|w_t(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq c\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Mais $f_1 \in \mathcal{D}(]0,T[;H_0^1(\Omega))$, donc $f_1(T) = 0$ et donc $w_{tt}(T) = \Delta w(T)$. Ainsi, il suffit de montrer

$$|\Delta w(0)| + \|w_t(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial n}\right\|_{L^2(\Sigma_T)} \leq c\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

On a déjà montré que :

$$|\Delta w(0)| + \|w_t(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

On montre alors (en utilisant les mêmes "multiplicateurs " que précédemment appliqués à l'équation en θ), que

$$\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_T)} \leq c\|f_1\|_{L^1((0,T);H_0^1(\Omega))}.$$

D'où le théorème.
On peut donc définir un opérateur L_T de $L^2(\Sigma_T)$ dans H, par

$$L_T u = (y(T), y_t(T)),$$

où y est solution au sens de la transposition de (3.27) avec $(y_0, y_1) = (0,0)$. De l'estimation (3.30) on peut déduit que:

$$\|L_T u\|_H \leq \|u\|_{L^2(\Sigma_T)}.$$

D'où le :

Théorème 3.20 *On a*

$$L_T u \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma_0); H).$$

Il reste à calculer son adjoint. Comme $H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$,alors, en identifiant $L^2(\Omega)$ à son dual on a $H' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Le calcul de l'adjoint de L_T se fait de la manière suivante. On a d'abord :

$$\langle L_T u, (z_0, z_1)\rangle_{H,H'} = \int_\Omega y(T) z_0 \, dx + \langle y_t(T), z_1\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

Soit ψ une solution quelconque de

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi = 0 \text{ dans } Q_T \\ \psi = 0 \text{ sur } \Sigma_T \end{cases} \tag{3.37}$$

Comme précédemment, du fait que $y(0,.) = y_t(0,.) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Q_T} y(\psi_{tt} - \Delta\psi) dxdt \\ &= \int_\Omega y(T)\psi(T)dx - \langle y_t(T), \psi_t(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, d\Sigma_T. \end{aligned}$$

En choisissant l'unique solution ψ de (3.37) qui vérifie

$$\psi(T) = -z_1 \,; \;\; \psi_t(T) = z_0$$

on obtient :

$$\int_\Omega y(T) z_1 dx + \langle y_t(T), z_0\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, d_{\Sigma_0}.$$

et donc

$$\langle L_T u, (z_0, z_1)\rangle_{H,H'} = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, d\Sigma_T$$

alors

$$\int_{\Sigma_0} L_T^*(z_0, z_1) u \, d\Sigma_T = \langle L_T u, (z_0, z_1)\rangle_{H\times H'} = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, d\Sigma_T$$

Et résumé, $L_T^* : L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to L^2(\Sigma_0)$ est défini par

$$L_T^*(z_0, z_1) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{\Sigma_0}.$$

où ψ est l'unique solution du problème:

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \Delta\psi = 0, \;\; \text{dans} \;\; Q_T \\ \psi = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Sigma_T \\ \psi(T) = -z_1; \; \psi_t(T) = z_0. \end{cases}$$

Remarque 3.21 *On a donc, en faisant le changement de variable* $z(t,x) = \psi(T-t,x)$

$$L_T^*(z_0, z_1) = -\frac{\partial}{\partial\nu} S(.)(z_1, z_0),$$

où $S(t)$ est le semi-groupe des ondes dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Nous avons déjà calculé L_T^* dans le cadre général de systèmes de la forme $y_t = Ay + Bu$ et nous avions un peu trouvé $L_T^* = B^* S^*(T - .)$. On poura montrer qu'on peut écrire notre problème de contrôle sous la forme $y_t = Ay + Bu$ où A est un opérateur non borné dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Le calcul de A^* dans cette dualité conduit à :

$$A^*(f, g) = (\Delta g, f).$$

Donc
$$A^* = -\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ I_d & 0 \end{pmatrix}.$$
On "retrouve" que $S^*(t)(z_1, z_0) = -S(t)(z_1, z_0)$, et on peut (au moins formellement) montrer que B est l'opérateur trace sur Γ_0, son adjoint est l'opétareur "trace normale" sur Γ_0.

On reprend les notations du paragraphe précédent: Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $q(x) = x - x_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note ν la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ que l'on suppose de classe C^2. On définit:
$$\Gamma_0 = \{\, x \in \partial\Omega;\ q(x).\nu > 0 \,\}\,;\ \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$$
$$\Sigma_i = \Gamma_i \times (0,T),\ i = 0; 1.$$
Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, on considère O_ε, voisinage ouvert d'ordre ε dans $\mathbb{R}^n$ de Γ_0, et on prend $\omega = \Omega \cap O_\varepsilon$. Le résultat qui sera démontré dans ce paragraphe est le suivant:

Théorème 3.22 *Pour tout $T > T_0 = 2\max_{x\in\overline{\Omega}} |x - x_0|$ et pour tout $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe $u \in L_2(0,T; L^2(\Sigma_0))$ pour lequel l'unique solution au sens de la transposition y de (3.27) vérifie $y(T,.) = y_t(T,.) = 0$.*

Preuve : On peut commencer par vérifier que $(y, y_t) = Y$, solution au sens de la transposition de (3.27) s'écrire
$$Y(t) = S_1(y_0, y_1) + L_t u,$$
où $S_1(y_0, y_1) = (z(t), z_t(t))$ est l'unique solution, au sens de la transposition de
$$\begin{cases} z_{tt} = \Delta z \ \text{ dans } \ Q_T \\ z = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_T \\ z(0,.) = y_0;\ z_t(0,.) = y_1 \end{cases}$$
La contrôlabilité au temps T revient à prouver que pour tout $(y_0, y_1), (b_0, b_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ il existe $u \in L^2(\Sigma_0)$ tel que
$$Y(t) = S_1(T)(y_0, y_1) + L_T u = (b_0, b_1).$$
Ceci revient à
$$R(L_T) = -S_1(T)H + H$$
Mais, $S_1(T)H = H$ et donc
$$R(L_T) = -S_1(T)H + H \Leftrightarrow R(L_T) = H \Leftrightarrow R(L_T) = S_1(T)H.$$

Ainsi la contrôlabilité au temps T revient à amener au temps T toute donnée initiale à $(0,0)$ ou de manière équivalente à amener $(0,0)$ à n'importe que étant $(b_0, b_1) \in H$. On montré que

$$R(L_T) = H \Leftrightarrow \exists c_T > 0; \|Z^0\|_{H'} \leq c_T \|L_T^* Z^0\|_{L^2((0,T);U)}, \ \forall \ Z^0 \in H'.$$

Ainsi, la contrôlabilité au temps T de ce système sera prouvée dès lors qu'on aura montré l'existence de $c_T > 0$ tel que, pour tout $(z_0, z_1) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, la solution $Z = (z, z_t)$ de (3.6) correspondant à la donnée initiale $Z^0 = (z_0, z_1)$ vérifie

$$\int_\Omega (|z_0|^2 + |\nabla z_1|^2) dx \leq c_T \int_{\Sigma(x_0} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma_T.$$

Or, cette inégalité est précisément la formule (3.14) du lemme (3.10). ce qui termine la démonstration du théorème .

Références bibliographiques

[1] Ammar Khodja, F. Benabdallah, A., *Introduction Ã la théorie du contrôle,* Polycopié Cours M2 Marseille, .

[2] Brezis, H., *Analyse fonctionelle. Theorie et application.* Masson, Paris 1983.

[3] Lions, J.L. *Contrôlabilité exacte Perturbation singulières et Stabilisation de systèmes distribués Tomme 1.* RMA 8, Masson 1988.

[4] Lions, J.L. et Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications Volume 1.* Dunod Paris 1968.

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la contrôlabilité exacte des équations des ondes dans le cas de contrôle interne et dans le cas de contrôle par le bord. La méthode utilisé est la méthode de semi-groupe.
Dans le contrôle interne, le cas où, de domaine du controle ω est strictement inclu dans Ω, la contôlabilité nécessite un temps minimal. Pour le cas de contrôle au bord on est conduit à exiger des restrictions géométriques à l'ouvert considèré pour obtenir le minimum de régularité à la solution.
Enfin on applique les résultats de surjectivité de l'opérateur de la contrôlabilité pour l'étude de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes avec condition de Dirichlet.

mots clé : Contrôlabilité, Équation des ondes, semi-groupes.

Abstract

The purpose of this thesis memory is to study the exact controllability of wave equations in the case of internal control and in the case of border control. The method used is the semi-group method.
In the internal control, the case where domain control ω is strictly included in Ω, the controllability requires a minimal time. For the case of control at the edge we are led to require geometric restrictions to the open considered to obtain the minimum of regularity to the solution.
Finally we apply the surjectivity results of the operator of the controllability for the study of exact controllability of the wave equation with Dirichlet condition.
Key words: Controllability, Wave equation, semi-groups