Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques délivré par

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

présenté par :

Zahra MEHIDI

Méthodes Variationnelles et applications

soutenu publiquement le 05 Juin 2018 le jury composé de :

Président :	Mr. Lakhal BELARBI	MCA	U. MOSTAGANEM.
Examinateur :	Mme. Amina FERRAOUN	MCB	U. MOSTAGANEM.
Encadreur :	Mr. Sofiane MESSIRDI	MCB	U. MOSTAGANEM.

Année Universitaire : 2018 / 2019

MASTER

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A Allah le tout puissant et à son Prophète Mohamed (P.S.L).

A mes chers parents

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

A mes sœurs et mes frères.

A mes amies et mes camarades.

A toute ma promotion 2018 – 2019.

Sans oublier tous les enseignants de mon cursus.

Zahra

Remerciements

Tout d'abord je remercie « ALLAH » le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail. Je remercie mon encadreur Mr MESSIRDI Sofiane pour le sujet proposé qui ma permit de découvrir un vaste domaine, pour son encouragement et soutien dans les moments difficiles.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur BOUZIT, pour sa générosité et sa grande patience. J'exprime mes gratitude à tous qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse comme Madame ABLAOUI.

Mes remerciements vont particulièrement à Monsieur le chef de département de mathématiques et le doyen de la faculté des sciences, chacun à son nom.

Sans oublier mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.
Enfin, J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, ma famille et mes amis, qui m'ont soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Index des notations iv

Introduction 1

1 Généralités sur les espaces de Sobolev 2

1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle : 2
2 Espaces de Sobolev 3
3 Les injections de Sobolev : 4
4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ 5
5 Inégalité de Sobolev 5
6 Inégalité de Poincaré 6
7 Point critique 6

2 Méthodes Variationnelles 7

1 Problème elliptique 7
2 Principe d'Ekeland 9
3 La Suite de Palais-Smale 10
4 Théorème du Col 11
5 Le Lemme de Brézis-Lieb 11
6 Le cas sous-critique 13
7 Le cas critique 15

3 L'existence de solutions positives du problème traité par Brézis- Nirenberg [4] 17

1 Première étape : 17
2 Deuxième étape : 21

Conclusion 24

Bibliographie 25

Index des notations

$C(\Omega)$	:	L'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C_c^\infty(\Omega)$	:	l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact contenu dans Ω.
$H^{-1}(\Omega)$	:	le dual de $H_0^1(\Omega)$.
J	:	la fonctionnelle d'énergie.
$\mathbb{K}$	:	un espace vectoriel réel.
$p^{'}$	:	exposant conjugué de p, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{'}}=1$.
p^*	:	l'exposant critique de Sobolev, défini par $\frac{1}{p*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{N}$.
$\mathbb{R}^N$	:	un espace Euclidien de dimension N.
X	:	un espace de Banach réel.
$X^{'}$	:	le dual de X.
$X^{''}$	:	le bidual de X.
∇u	:	$=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^t = grad\ u$ est le gradiant de la fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$.
$\frac{\partial u}{\partial n}$	:	la dérivée normale extérieure.
Δu	:	$=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$ est le laplacien de la fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$.

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'introduire la notion des méthodes variationnelles appliquées à des problèmes elliptiques non-linéaires notamment au problème posé par Brézis et Nirenberg en 1983 [4] et qui à fait l'objet d'une publication. Il fait la base de nombreux travaux dans ce domaine et il est présenté comme suit :

$$(\mathscr{P})\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda u, & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème $(\mathscr{P})$ devient assez délicat à résoudre lorsque $p+1$ est l'exposant critique de Sobolev à partir de laquelle l'injection de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$ n'est plus compacte. Lorsque l'équation ne comporte pas de terme d'ordre inférieur $(\lambda = 0)$, Pohozaev à démontré que le problème ne possède pas de solution positive. Brézis et Nirenberg ont démontré que sous certaines conditions sur λ, la présence de cette perturbation d'ordre inférieur conduit à l'existence d'une solution positive. Ils adoptent une approche variationnelle, utilisant un processus de minimisation et le théorème des multiplicateurs de Lagrange. Le cas où $p+1$ est un exposant sous critique, une application directe des outils variationnelles fournit l'existence d'une solution positive.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre nous présentons quelques rappels sur les espaces de Sobolev, on se base dans cette partie principalement sur le livre de H-Brézis, puis nous citons quelques outils de base essentiels pour l'étude des problèmes non linéaires via les méthodes variationnelles.

Dans le second chapitre, on introduit la notion des méthodes variationnelles appliquées à des problèmes non linéaires du type elliptique. Le but du chapitre est de démontrer l'existence d'une solution positive du problème $(\mathscr{P})$ avec $\lambda = 0$. On distingue deux cas qu'on traitera explicitement.

Dans le dernier chapitre on applique notre étude théorique pour traiter en détail la preuve de Brézis-Nirenberg [4] plus précisément le cas ou $\mathrm{N} \geq 4$.
Enfin on termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions élémentaires de mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce mémoire.

1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle :

Soit Ω $un\ ouvert\ de$ $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1 [8] ***(Norme vectorielle)***
Une application $\|.\| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *est dite une norme vectorielle si elle respecte les propriétés suivantes :*

1. $\|u\| \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{K}\ et\ \|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|;\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{K}.$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|;\ \forall u, v \in \mathbb{K}.$

Définition 1.2 [2]
Soit X *un espace de Banach réel.*
X *est réflexif si* $I(X) = X$, *ou* $I : X \to (X')'$ *est l'injection canonique définie comme suit : pour* $u \in X$, $I(u) : X' \to \mathbb{R} :\ y' \longmapsto y'(x)$.

Théorème 1.1 [2] ***(Eberlein-Shmulyan)***
Un espace de Banach X *est réflexif si et seulement si toute suite bornée* (u_n) *de* X *contient une sous-suite* $(u_n)_k$ *convergeant faiblement dans* X.

Définition 1.3 [2]
Soit X *un espace de Banach réel.*
X *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $D \subset X$ *dénombrable et dense.*

Définition 1.4 [1]
Soit u une fonction définie sur Ω.

1. *On dit que u est intégrable sur* Ω *si* $\int_\Omega |u(x)|\, dx$ *est finie.*
2. *On dit que u est localement intégrable sur* Ω *si elle est intégrable sur tout compact* $K \subset \Omega$.
3. *Le support de u est défini par :* $supp\ u = \overline{\{x \in \Omega,\ u(x) \neq 0\}}$.
4. *Si u est indéfiniment dérivable sur* Ω *et* $supp\, u \subset K \subset \Omega$ *avec* K *compact. On note* $u \in D(\Omega)$.

1.1 L'espace $L^p(\Omega)$:

Définition 1.5 [1]
L'espace $L^p(\Omega)$ *est défini par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u\ est\ mesurable;\ \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*
De plus, si $1 < p < \infty$*, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est réflexif.*

On définit la dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

1.2 Dérivée au sens faible :

Définition 1.6 [1]
Soit u *une fonction localement intégrable sur* Ω, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. *On appelle dérivée au sens faible de* u *d'ordre* α *et on note* $D^\alpha u$ *:*

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^n \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^n \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

avec

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_{x_1}^{\alpha_1}, \partial x_{x_2}^{\alpha_2}, \ldots, \partial x_{x_n}^{\alpha_n}}$$

et φ *est de classe* $C^{|\alpha|}(\Omega)$ *et a support compact dans* Ω.

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dont les dérivées au sens faible sont intégrables, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

2 Espaces de Sobolev

2.1 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$:

Définition 1.7 [1]
Soit $p \in [1, +\infty[$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N},\ |\alpha| \le m \right\}.$$

Proposition 1.1 [1]
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme suivante :*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & si\ 1 \leqslant p < +\infty; \\ \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si\ p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

De plus, si $1 < p < +\infty$*, alors l'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Remarque 1.1 *Dans le cas particulier ou $p = 2$, traditionnellement les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ sont notés $H^m(\Omega)$ et on les appelle parfois "espaces d'énergie".*

Définition 1.8 [1]
Pour $m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega);\ D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m\right\}$ est appelé espace de Sobolev d'ordre m.

Proposition 1.2 [1]
L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} < D^\alpha u, D^\alpha v >_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$:

Définition 1.9 [2]
L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega);\ \exists \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ tels\ que \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right\}.$$

Remarque 1.2 *On note $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.*

3 Les injections de Sobolev :

3.1 Les injections continues

Théorème 1.2 [2] ***(Immersions de Sobolev, continuité)***
Soit Ω un domaine borné de classe C^1, on a

1. *Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{P*} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}$.*
2. *Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,*
   où $C(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega})\ et\ supp\ u\ est\ borné\ dans\ \Omega\right\}$
   avec injections continues.

3.2 Théorème de Rellich

Théorème 1.3 [6] *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$. (On dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).*

Remarque 1.3 *Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, il n'est pas vrai que de toute suite bornée on puisse extraire une sous-suite convergente (par contre ceci est vrai en dimension finie).*

Remarque 1.4 *Le théorème peut être faux si l'ouvert Ω n'est pas borné.*
Par exemple : si $\Omega := \mathbb{R}^N$, l'injection canonique de $H^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte.

Exemple 1.1 *Considérons la suite $u_n(x) = u(x + ne)$ où e est une vecteur non nul et u est une fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ (on translate u dans la direction e) Il est clair qu'aucune sous-suite de u_n ne converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.5 *Si on remplace $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$ alors non seulement le Théorème de Rellich reste vrai, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert est régulier.*

3.3 Les injections compactes

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dite compacte si pour toute suite $u_n \in X$ bornée il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ telle que $Au_{\varphi(n)}$ converge dans Y.

Théorème 1.4 [2] ***(Immersions de Sobolev, compacité)***
Soit Ω un ouvert de classe C^1 borné, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*[\text{ ou } \frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad p < N, \\ L^q(\Omega) & \forall q \in [p, \infty[\quad p = N, \\ C(\overline{\Omega}) & p > N, \end{cases}$$

où $C(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) \text{ et supp } u \text{ est borné dans } \Omega\right\}$
avec injections compactes.

4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10 [2]
Soit $1 \le p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1.11 ***(L'espace dual de** $W_0^{1,p}(\Omega)$**)***
On désigne par $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Remarque 1.6 *Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut identifier $L^2(\Omega)$ et son dual. Par conséquent, on a les inclusions*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega), \text{ avec injections continues.}$$

5 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.5 [2]
Soit $1 \le p < \infty$. Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^N)$, et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p*}} \le C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

6 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.6 [2]
Soit Ω un ouvert borné, Alors il existe une constante c telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.7 *L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné dans une seule direction.*

Corollaire 1.1 [6] ***(formule de Green)***
Soient Ω un ouvert de classe C^1 et u, φ deux fonctions de classe $C_c^2(\Omega)$. Alors on a :

$$-\int_\Omega \varphi(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla\varphi(x).\nabla u(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma.$$

7 Point critique

Soient X un espace de Banach, ω un ouvert de X et $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$.

Définition 1.12 [6]
On dit que $u \in \omega$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.
On dit que $c \in \mathbb{R}$ est une valeur critique de J, s'il existe un $u \in \omega$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$.

Remarque 1.8 *Si u n'est pas un point critique de J, on dit que u est un point régulier de J.*

Pour plus de détails, on peut consulter R-Adams [1], ou H-Brézis (chapitres 8 *et* 9) [2], et des références générales pour toutes les questions concernant les espaces de Sobolev.

Chapitre 2

Méthodes Variationnelles

Le but de ce chapitre est de présenter quelques méthodes variationnelles utilisées en analyse non-linéaire et leur application pour résoudre des équations aux dérivées partielles elliptiques.

1 Problème elliptique

Considérons l'équation

$$(\mathscr{P})\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u, & x \in \Omega; \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où $1 \leq p < \infty$, $\mathrm{N} \geqslant 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est un ouvert borné régulier de frontière $\partial\Omega$ et $p > 0$ un paramètre donné.
La condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle la condition de Dirichlet (homogène).
On s'intéresse aux solutions faibles non triviales (ou non-banales), i.e. des solutions différentes de la solution nulle. $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ de $(\mathscr{P})$.

Définition 2.1 *Une fonction u est dite solution faible de $(\mathscr{P})$ si $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et si $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ au sens des distributions.*

Lemme 2.1 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1.*
Une fonction u est solution faible du problème $(\mathscr{P})$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ si et seulement si

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-1} u\, \varphi\, dx,\ \forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega).$$

Remarque 2.1 *Toute solution classique est une solution faible.*

Utiliser une méthode variationnelle en analyse non-linéaire signifie que l'on va chercher une solution sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle associée. Ici, la fonctionnelle associée à $(\mathscr{P})$ est : $\mathrm{J} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{J}(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|\nabla u\|_{p+1}^{p+1}.$$

où $\|\,.\,\|_{p+1}$ pour $p+1 \in [1, \infty[$ désigne la norme usuelle sur l'espace de Lebesgue $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$.

Théorème 2.1 [5] *Soit $u_n \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 + o(1).$$

Théorème 2.2 [6] ***(des multiplicateurs de Lagrange)***
Soient X *un espace de Banach,* J *et* $F \in C^1(X, \mathbb{R}^N)$ *et un ensemble :*

$$S = \{v \in X; F(v) = 0\} \qquad telque \qquad \forall u \in S, \qquad F'(u) \neq 0.$$

Si on suppose que $u_0 \in S$ *satisfait* $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$, *alors il existe un* $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$J'(u_0) = \beta F'(u_0).$$

Preuve. Comme $F'(u_0) = 0$, $il\ existe\ w \in X$ tel que

$$< F'(u_0), w >= 1.$$

Si $X_0 := kerF'(u_0)$, $on\ a\ X = X_0 \bigoplus \mathbb{R}w$.
Soit alors la fonction Φ de $X_0 * \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\Phi(v, t) := F(u_0 + v + tw).$$

On a $\Phi(0,0) = 0$ et $\qquad \partial_t \Phi(0,0) =< F'(u_0), w >= 1, \qquad \partial_v \Phi(0,0) = F'(u_0)_{|}X0 = 0.$
Dans un voisinage w de $0 \in X_0$, il existe $T : w \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi(v, T(v)) = 0$ pour tout $v \in w$ et on a : $T(0) = 0, T'(0) = 0$.
Donc il existe un voisinage $\Omega \subset X\ de\ u_0$, tel que

$$u \in \Omega\ et\ F(u) = 0 \Longleftrightarrow u = u_0 + v + T(v)w \qquad avec\ v \in w.$$

Si $\widehat{J} : w \longrightarrow \mathbb{R}$, est définie par $\widehat{J}(v) = J(u_0 + v + T(v)w)$, on voit que $\widehat{J}$ atteint son minimum en $0 \in w$.
Par conséquent $<\widehat{J}'(0), v >= 0$ pour tout $v \in X_0$. Or d'après la définition de $\widehat{J}$ et la propriété de T, on sait que si $v \in X_0$ on a $<\widehat{J}'(0), v >=<\widehat{J}'(u_0), v >$.
On en conclut que $<\widehat{J}'(u_0), v >= 0$ pour tout $v \in X_0$ et que $kerJ'(u_0) \supset kerF'(u_0)$: par conséquent il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $J'(u_0) = \beta F'(u_0)$. $\blacksquare$

Théorème 2.3 [5] ***(Principe du maximum fort)*** *Soit* Ω *un domaine borné. Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *vérifie* $-\Delta u \leq 0$ *et si u atteint un maximum supérieur ou égale à* 0 *à l'intérieur de* Ω, *alors u est constante sur* Ω.

Définition 2.2 ***(semi-continue inférieurement)****(s.c.i)*
Soit J *une fonction définie sur un espace de Banach* X *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Elle est dite*

- ***semi-continue inférieurement :*** *lorsque pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *les ensembles* $\{x \in X,\ J(x) \leq \lambda\}$ *sont fermés.*
- ***faiblement semi-continue inférieurement*** *en* x, *si pour toute suites* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergeant faiblement vers* x, *nous avons :*

$$J(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf J(x_n).$$

Définition 2.3 *Soit* X *un espace de Banach réel.*
Une suite $(u_n) \in X$ *converge faiblement vers u si* $\forall J \in X'$, $J(u_n) \to J(u)$. *On note alors* $u_n \rightharpoonup u$.

Théorème 2.4 [2]
Si $u_n \rightharpoonup u$, *alors* $\|u_n\|$ *est bornée et* $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.

Théorème 2.5 [8]
Toute suite bornée de mesures finies sur Ω *contient une sous-suite convergeant faiblement.*

2 Principe d'Ekeland

En général, il n'est pas clair qu'une fonction J bornée et semi-continue inférieure atteigne réellement son infimum. La fonction analytique $f(x) = arctanx$, par exemple, qui n'atteint ni son infimum ni son supremum sur la droite réelle. Une variante due à Ekeland permet cependant de construire des suites de minimisation pour de telles fonctionnelles J dont les éléments u_n minimisent chacun une fonctionnelle J_n. Les fonctionnelles J_n convergent localement uniformément vers J ; autrement dit le principe montre qu'il existe des points presque des minima.

Théorème 2.6 [6] ***(Principe d'Ekeland)***
Soient (X, d) *un espace métrique complet et* J *une fonction s.c.i de* X *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* J *est bornée inférieurement, et on pose* $c := \inf\limits_{x\in X} J(x)$.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* u_ε *telle que*

$$\begin{cases} c \leqslant J(u_\varepsilon) \leqslant c + \varepsilon. \\ \forall u \in X, J(u) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(u, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Preuve : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère épigraphe de J :

$$A := \{(x, a) \in (X \times \mathbb{R});\ J(x) \leq a\}$$

Puisque J est semi-continue inférieurement, A est fermé Sur $X \times \mathbb{R}$. On définit une relation d'ordre par :

$$(x, a) \leq (y, b) \Leftrightarrow a - b + \varepsilon d(x, y) \leq 0$$

On va construire une suite d'ensembles A_n comme suit :

- Pour $x_1 \in X$ fixé tel que $c \leq J(x1) \leq c + \varepsilon$, on pose $A_1 := \{(x, a) \in A;\ (x, a) \leq (x_1, a_1)\}$ avec $a_1 := J(x_1)$.
- En supposant que $(x_i; a_i)$ est déterminé et $A_i := \{(x, a) \in A;\ (x, a) \leq (x_i, a_i)\}$.
  Pour $i \leq n$, on pose
- $\overline{A_n} := \left\{x \in X;\ \exists\, a \in \mathbb{R}\ telque\ (x, a) \in A_n\right\}$.
- $c_n := \inf\limits_{x\in \overline{A_n}} J(u)$.

Supposons un instant que $a_i > c_i$ pour $i \leq n$; il est clair qu'on peut fixé $(x_{n+1}, a_{n+1}) \in A_n$ tel que :

$$0 \leq J(x_{n+1}) - c_n \leq \frac{1}{2}(a_n - c_n);\ a_{n+1} := J(x_{n+1}). \tag{2.1}$$

On pose ensuite $A_{n+1} := \{(x, a) \in A;\ (x, a) \leq (x_{n+1}, a_{n+1})\}$ et on vérifie que

$$A_{n+1} \subset A_n\ et\ que\ c \leq c_n \leq c_{n+1} := \inf_{\overline{A_{n+1}}} J(u).$$

D'où, en utilisant les relations (2.1) :

$$0 \leqslant a_{n+1} - c_{n+1} \leqslant a_{n+1} - c_n \leqslant \frac{1}{2}(a_n - c_n) \leqslant 2^{-n}(a_1 - c_1).$$

Par ailleurs, dire que $(x, a) \in A_{n+1}$ signifie que : $a - a_{n+1} + \varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq 0$, on en conclut que :

$$\varepsilon d(x, x_{n+1}) \leq a_{n+1} - a \leq a_{n+1} - J(x) \leq a_{n+1} - c_{n+1}.$$

Et par conséquent :

$$d(x, x_{n+1}) + |a - a_{n+1}| \leqslant \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) 2^{-n} (a_1 - c_1).$$

Ce qui implique que le diamètre de A_{n+1} tend vers zéro.
Comme A est complet, il existe un unique $(u, b) \in A$ tel que :

$$\{(u, b)\} = \cap_{n \geq 1} A_n.$$

Soit $(x, a) \in A$ tel que $(x, a) \leq (u, b)$; alors on a pour tout $n \geq 1$, $(x, a) \leq (x_n, a_n)$, ce qui implique que $(x, a) \in \cap_{n \geq 1} A_n$ c'est-à-dire $(x, a) = (u, b)$.
Cela signifie que (u, b) est minimal dans A :

$$(x, a) \in A \; et \; (x, a) \leq (u, b)) \Rightarrow (x, a) = (u, b).$$

D'autre part on a $(u, J(u)) \leq (u, b)$ et compte tenu du fait que (u, b) est minimal dans A, on conclut que $b = J(u)$.
Ainsi on voit que $(u, J(u))$ est minimal dans A, c'est-à-dire que :

$$(x, a) \in A, \; (x, a) \neq (u, J(u)) \Rightarrow a - J(u) + \varepsilon d(x, u) > 0.$$

En particulier, en prenant $a = J(u) \; et \; x \neq u$, et remarquant que $J(u) \leq J(x_1) \leq c + \varepsilon$.
On conclut la démonstration du lemme.
S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $c_n = a_n = J(x_n)$, alors $A_n = \{(x_n, a_n)\}$. En effet, $(x, a) \in A \; et \; (x, a) \leq (x_n, a_n)$ signifie, par la définition de la relation $(\leq)$:

$$a - a_n + \varepsilon d(x, x_n) \leq 0, \; c_n = a_n = J(x_n) \leq J(x) \leq a.$$

On en déduit que $a = a_n \; et \; x = x_n$. On pose alors $(u, b) = (x_n, a_n)$ et on vérifie que (u, b) est minimal dans A.

Corollaire 2.1 *Soient* X *un espace de Banach et* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. *On suppose que* J *est bornée inférieurement, alors il existe une suite de minimisante* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* J *dans* X *telle que :*

$$J(u_n) \to \inf_X J \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \; dans \, X', \; lorsque \; n \to +\infty$$

3 La Suite de Palais-Smale

Définition 2.4 ***(La Suite de Palais-Smale)***
Une suite $(u_n)_n \subset X$ *telle que :*

$$J(u_n) \to c \; dans \, \mathbb{R} \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \; dans \, X',$$

*est appelée une suite de **Palais-Smale** au niveau c.*

Définition 2.5 ***(La condition de Palais-Smale)***
Soient X *un espace de Banach et* $J : X \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle de classe* C^1. *Si* $c \in \mathbb{R}$, *on dit que* J *vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite* $(u_n)_n \subset X$ *telle que :*

$$J(u_n) \to c \; dans \, \mathbb{R} \qquad et \qquad J'(u_n) \to 0 \; dans \, X'$$

contient une sous-suite $(u_{n_k})_k$ *convergente.*

4 Théorème du Col

Pour une fonctionnelle J qui n'est pas bornée, chercher ses points critiques revient à chercher des points selles. Ces points sont déterminées par un argument de type min-max, ce qui nous ramène à l'utilisation du théorème du col de la montagne.

Théorème 2.7 [7] ***(Théorème de Ambrosetti-Rabinowitz)***
Soient X *un espace de Banach et* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *vérifiant la condition de Palais -Smale.*
On suppose que $J(0) = 0$ *et que :*

- *Il existe* $R > 0$ *et* $a > 0$ *tels que si* $\|u\| = R$, *alors* $J(u) \geq a$;
- *Il existe* $u_0 \in X$ *tel que* $\|u_0\| > R$ *et* $J(u_0) < a$. *Alors* J *possède une valeur critique* c *telle que* $c \geq a$. *De façon plus précise, si on pose*

♦ $P := \{p([0,1]);\ p \in C([0,1], X),\ p(0) = 0,\ p(1) = u_0\}$,

♦ $c := \inf\limits_{A \in P} \max\limits_{t \in [0;1]} J(p(t))$,

alors c *est une valeur critique de* J *et* $c \geq a$.

Preuve :
Soient P (qui est évidemment non vide) et c définis comme dans le théorème. Tout d'abord notons que par connexité, pour tout $A \in P$, l'intersection $A \bigcap \{u \in X;\ \|u\| = R\}$ est non vide et par conséquent $\max\limits_{t \in [0;1]} J(p(t)) \geqslant a$ et finalement $c \geqslant a$. Si c n'est pas une valeur critique de J, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver $A \in P$ tel que

$$A := p([0,1]), \qquad c \leqslant \max_{t \in [0;1]} J(p(t)) \leqslant c + \varepsilon.$$

En posant $\psi(\tau) := \eta(1, \varphi(\tau))$ *et* $B := \psi([0,1])$, on a $B \in P$. Par définition de c, on a $\max\limits_{t \in [0;1]} J(p(t)) \geqslant c$.
On en conclut que c est une valeur critique de J (et nous avons vu que $c \geqslant a$).

5 Le Lemme de Brézis-Lieb

Définition 2.6 [8] ***(Fonction convexe)***
Soit J *une fonction définie sur un espace de Banach* X *à valeur dans* $\mathbb{R}$. *Elle est dite convexe si*

$$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1],\ J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y).$$

Lemme 2.2 [3]
Soient Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $u_n \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
Si u_n *est bornée dans* $L^p(\Omega)$ *et* $u_n \longrightarrow u$ *presque partout dans* Ω, *alors*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} \right) = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme de Fatou
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives.
Alors :

$$\int_\Omega \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf f_n(x) dx \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \int_\Omega f_n(x) dx.$$

Preuve :
On sait par le lemme de Fatou,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n \to \infty} inf \|u_n\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Pour $\varepsilon \in]01[$, $\exists c_\varepsilon$ telle que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{||a+b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + c_\varepsilon |b|^p}. \tag{2.2}$$

Si $p=1$, le résultat est direct en utilisant l'inégalité triangulaire.
Si $p>1$:

1. Posons : $\alpha = 1-k\eta,\ \beta = \eta\ et\ \gamma = k\eta - \eta,\ pour\ k>1\ et\ 0<\eta<\frac{1}{k}$.
   On remarque que

$$\alpha+\beta+\gamma = 1\ et\ a+b = \alpha a + \beta k a + \gamma \frac{b}{\eta(k-1)}. \tag{2.3}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
|a+b|^p &= |\alpha a + \beta k a + \gamma(\tfrac{b}{\eta(k-1)})|^p \\
&= |(\alpha+\beta)\left[\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} a + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(ka)\right] + \gamma(\tfrac{b}{\eta(k-1)})|^p \\
&\leq (\alpha+\beta)|\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} a + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(ka)|^p + |\gamma \tfrac{b}{\eta(k-1)}|^p \\
&\leq (\alpha+\beta)(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}|a|^p + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}|ka|^p) + \gamma |\tfrac{b}{\eta(k-1)}|^p,
\end{aligned}$$

   ou l'on a utilisé deux fois la convexité de la fonction $|.|^p$.
   En se rappelant les définitions de α, $\beta\ et\ \gamma$, on obtient

$$|a+b|^p - |a|^p \leq \eta(|ka|^p - k|a|^p) + |\frac{b}{\eta(k-1)}|^p \tag{2.4}$$

   puisque $\gamma < 1$.
2. Définissons cette fois

$$\alpha = \frac{1}{1+k\eta},\ \beta = \frac{\eta}{1+k\eta}\ et\ \gamma = \frac{\eta(k-1)}{1+k\eta}.$$

   On voit que

$$\alpha+\beta+\gamma = 1\ et\ a = \alpha(a+b) + \beta(ka) + \gamma \frac{-b}{\eta(k-1)}. \tag{2.5}$$

   Dés lors

$$\begin{aligned}
|a|^p &= |\alpha(a+b) + \beta(ka) + \gamma(\tfrac{-b}{\eta(k-1)})|^p \\
&= |(\alpha+\beta)\left[\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(a+b) + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(ka)\right] + \gamma(\tfrac{-b}{\eta(k-1)})|^p \\
&\leq (\alpha+\beta)|\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(a+b) + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(ka)|^p + |\gamma \tfrac{b}{\eta(k-1)}|^p \\
&\leq (\alpha+\beta)(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}|a+b|^p + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}|ka|^p) + \gamma |\tfrac{b}{\eta(k-1)}|^p
\end{aligned}$$

   à nouveau par la convexité.
   Il vient

$$|a|^p - |a+b|^p \leq \eta(|ka|^p - k|a|^p) + |\frac{b}{\eta(k-1)}|^p \tag{2.6}$$

   car $\gamma < 1$.
   En rassemblant (2.4) et (2.6) et en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{k^{p+1}-k}$ on obtient bien (2.2).

Remarque 2.2 *Cette preuve de l'inégalité (2.2) est facilement généralisable à toute fonction convexe.*
Si $\mathrm{J} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est convexe, on peut ainsi obtenir : Pour* $k>1\ et\ 0<\varepsilon<\frac{1}{k}$*, il existe une constante* $c(\varepsilon)$ *telle que, pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|\mathrm{J}(a+b) - \mathrm{J}(a)| \leq \varepsilon[\mathrm{J}(ka) - k\mathrm{J}(a)] + |\mathrm{J}(c(\varepsilon)b)| + |\mathrm{J}(-c(\varepsilon)b)|$$

On pose ensuite

$$f_n^\varepsilon = (||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon|u_n - u|^p)^+.$$

Or on a

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon|u_n - u|^p \leq ||u_n|^p - |u_n - u|^p| + |u|^p - \varepsilon|u_n - u|^p.$$

En appliquant (2.2) avec $a = u_n - u$ et $b = u$, on obtient

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon|u_n - u|^p \leq \varepsilon|u_n - u|^p + c(\varepsilon)|u|^p + |u|^p - \varepsilon|u_n - u|^p,$$

et donc

$$f_n^\varepsilon \leq (1 + c(\varepsilon))|u|^p \qquad \in \mathrm{L}^1(\Omega).$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on voit que $\int_\Omega f_n^\varepsilon \to 0$. *Puisque, par définition de f_n^ε,*

$$||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leq f_n^\varepsilon + \varepsilon|u_n - u|^p,$$

en intégrant et en prenant la $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *on parvient à*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega ||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| \leq m\varepsilon,$$

où $m = \sup\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$.
On parvient alors au résultat du lemme en faisant tendre ε *vers* 0.

6 Le cas sous-critique

Pour bien cerner les difficultés que représente le manque de compacité dans le cas d'un exposant critique, commençons par étudier le problème sous critique. Dans tout ce chapitre, $\mathrm{N} \geqslant 3, \Omega \subset \mathbb{R}^\mathrm{N}$ est un domaine borné de classe C^2 et p est un exposant sous-critique, c'est à dire $0 < p < 2^* - 1$.

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} -\Delta u = u^p & dans\ \Omega, \\ u > 0 & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Le comportement de J est différent selon la valeur de $p > 0$.

1) $p \in]0,1[$: puisque $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$ continument, alors par définition il existe $\mathrm{C} = \mathrm{C}(p+1) > 0$ tel que $\|u\|_{p+1} \leq \mathrm{C}\|u\|$ pour tout $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.
Par suite

$$\mathrm{J}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mathrm{C}}{p+1}\|u\|_{p+1} \tag{2.7}$$

et donc $\mathrm{J}(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2$ pour $\|u\|$ suffisamment grand. Ceci prouve que J est coércive.
Montrons maintenant que

$$-\infty < m := \inf_{u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)} \mathrm{J}(u) < 0. \tag{2.8}$$

Clairement la coercivité et la régularité de J impliquent que $-\infty < m$. Pour prouver que $m < 0$, on choisit un $u \in \mathrm{H}_0^1 \setminus \{0\}$ quelconque et l'on teste J sur les fonctions

$tu,\ t \geq 0$.
Il vient
$$\mathrm{J}(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}. \tag{2.9}$$
Comme $p < 1$, le terme négatif donne la contribution principale lorsque $t \longrightarrow 0$, d'où (2.8).
Par suite, si J a un minimum global, il correspond à une solution non triviale de $(\mathscr{P})$. Pour prouver que l'infimum m est atteint considérons une suite minimisante $\{u_n\} \subset \mathrm{H}_0^1$, c'est à dire telle que $\mathrm{J}(u_n) \to m$ lorsque $n \to \infty$. Puisque J est coercive, $\{u_n\}$ est bornée et on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ pour un $u \in \mathrm{H}_0^1$.
On a alors $\|u\| \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf \|u_n\|$ et comme l'inclusion $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$, est compacte, $u_n \to u$ dans $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$. Par suite
$$m \leqslant \mathrm{J}(u) \leqslant \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1}\|u_n\|_{p+1}^{p+1}\right) = m.$$
Donc, on conclut que l'infimum est bien atteint.

2) $p \in \left]1, \frac{2\mathrm{N}}{\mathrm{N}-2}\right[$: Dans ce cas J n'est plus bornée inférieurement. En effet, par (2.9), et puisque $p > 1$, $\mathrm{J}(tu) \longrightarrow -\infty$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$ et on peut aussi montrer que J est non bornée supérieurement. Par suite J n'a pas d'extremum global et nous devons chercher un point critique qui a une caractérisation variationnelle plus complexe. On choisit un $v \in \mathrm{H}_0^1$ satisfaisant $\mathrm{J}(v) < 0$ et on considère l'ensemble Γ des chemins joignant 0 à v,
$$\Gamma := \left\{\gamma \in \mathrm{C}([0,1], \mathrm{H}_0^1), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\right\}. \tag{2.10}$$
On définit la valeur minimax
$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} \mathrm{J}(\gamma(t)). \tag{2.11}$$
Montrons tout d'abord que
$$c > \max\{\mathrm{J}(0), \mathrm{J}(v)\}. \tag{2.12}$$
En utilisant (2.7) il vient que $\mathrm{J}(u) \geqslant \frac{1}{4}\|u\|^2$ pour $\|u\|$ suffisamment petit. En particulier, il existe un $\rho > 0$ tel que $\rho < \|v\|$ et $\mathrm{J}(u) \geqslant \frac{1}{4}\rho^2$ si $\|u\| = \rho$. Comme chaque chemin de Γ doit traverser la sphère $\|.\| = \rho$, cela prouve (2.12).
Calculons la différentielle de J :
$$\begin{aligned}
\mathrm{J}'(u)\rho &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\rho|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2}{t}\\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{2t\int_\Omega \nabla u.\nabla\rho + t^2\int_\Omega|\nabla\rho|^2}{t}\\
&= 2\int_\Omega \nabla u.\nabla\rho
\end{aligned}$$
On dit qu'une fonctionnelle qui satisfait (2.12) pour un $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et un c défini comme dans (2.11) a une géométrie de col. La valeur c est appelée le niveau du col. L'intuition suggère de chercher un point critique $u \in \mathrm{H}_0^1$ tel que $\mathrm{J}(u) = c$. Comme nous allons le voir un tel point critique peut ne pas exister, cependant une conséquence de la géométrie de J est l'existence d'une suite $\{u_n\} \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, telle que,
$$\mathrm{J}(u_n) \to c \ et\ \mathrm{J}'(u_n) \to 0\ dans\ \mathrm{H}^{-1}(\Omega).$$

Une telle suite est appelée une suite de Palais-Smale, niveau du col. Son existence peut être prouvée en utilisant le principe variationnel d'Ekeland, ce résultat est connu sous le nom de lemme du col. Il aurait été possible de choisir une suite minimisante ayant la propriété additionnelle que $J^{'}(u_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Pour suivre la preuve, on doit montrer que $\{u_n\}$ est bornée.
Par définition de J et puisque $J(u_n) \to c$ nous avons

$$\|u_n\|^2 - \frac{2}{p+1}\|u_n\|_{p+1}^{p+1} \to 2c. \tag{2.13}$$

Aussi $J^{'}(u_n) \to 0$ s'écrit

$$-\Delta u_n - |u_n|^{p-1}u_n \to 0 \; dans \; H^{-1}. \tag{2.14}$$

En multipliant (2.14) par u_n et en intégrant sur Ω on obtient

$$|\|u_n\|^2 - \|u_n\|_{p+1}^{p+1}| \leq \varepsilon_n \|u_n\| \tag{2.15}$$

avec $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Maintenant, puisque $p > 1$, la différence homogénéité entre (2.13) et (2.15) implique que $\{\|u_n\|\}$ est bornée. Donc, comme précédemment, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et que

$$u_n \to u \; dans \; L^q(\Omega) \; pour tout \; q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right[. \tag{2.16}$$

L'étape suivante consiste à montrer que $u_n \to u$ dans H_0^1. Puisque $u_n \to u$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ nous savons, en utilisant (2.15), que $\|u_n\|^2 \to \|u\|_{p+1}^{p+1}$. De plus, par (2.14), il vient que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n u \to 0. \tag{2.17}$$

Par définition de la convergence faible

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \to \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2$$

et, grâce à (2.16), à la convergence faible et à l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n u \int_\Omega |u|^{p+1} = \|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

On conclut maintenant, grâce à (2.17), que $\|u\|^2 = \|u\|_{p+1}^{p+1}$. Puisque $\|u_n\|^2 \to \|u\|_{p+1}^{p+1}$. Cela prouve que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et comme J et $J^{'}$ sont continues, u est un point critique de J au niveau du col c. Puisque $c > 0 = J(0)$, u est non trivial.

7 Le cas critique

Lorsque $p = \frac{N+2}{N-2}$: dans ce cas la fonctionnelle J possède encore une géométrie de col. De plus toutes les suites Palais-Smale sont bornées. En particulier, il existe $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $J(u_n) \to c$, $J^{'}(u_n) \to 0 \; et \; u_n \rightharpoonup u \; dans \; H_0^1$. La différence avec le cas sous-critique est que $u_n \rightharpoonup u$ n'implique plus que $u_n \longrightarrow u$ in $L^{p+1}(\Omega)$. L'inclusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega$-) n'est pas compacte. Ce n'est pas seulement une difficulté technique ; une conséquence de l'identité de Pohozaev est que J n'a pas de point critique au niveau c (sur un domaine Ω étoilé).

7.1 L'identité de Pohozaev

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de $(\mathscr{P})$. Posons $G(u) = \int_0^u |u(s)|^p ds$. Alors

$$2N\int_{\Omega} G(u) - (N-2)\int_{\Omega} |u|^p.u = \int_{\partial\Omega} (x.\nu)|\nabla u|^2,$$

où $\nu = \nu(x)$ est le vecteur normal extérieur unitaire à $\partial\Omega$ *en* x.
D'une part on a

$$\begin{aligned}
div(xG(u)) - NG(u) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(xG(u))_j - NG(u) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_j}G(u) + \frac{\partial G}{\partial x_j}x_j\right) - NG(u) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j}x_j \\
&= |u|^p\, x.\nabla u. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
div\left(\nabla u\, x.\nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) + \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2 &= div\,(\nabla u\, x.\nabla u) - |\nabla u|^2 - x.\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \\
&= \Delta u\, x.\nabla u. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Comme u est solution du problème $(\mathscr{P})$, on a

$$\Delta u\, x.\nabla u = -|u|^p\, x.\nabla u,$$

c'est à dire, en utilisant (2.18) et (2.19) :

$$\int_{\Omega} div\left(\nabla u\, x.\nabla u - x\frac{|\nabla u|^2}{2} + xG(u)\right)dx = \int_{\Omega}\left(NG(u) - \frac{N-2}{2}|\nabla u|^2\right)dx.$$

Puis par le théorème de la divergence,

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\nabla u.\nu)(x.\nabla u) - (x.\nu)\frac{|}{|}\nabla u|^2 2 + (x.\nu)G(u)\right]dx = \int_{\Omega} NG(u) - \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx.$$

Or $u \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $G(u)$ aussi :

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\nabla u.\nu)(x.\nabla u) - (x.\nu)\frac{|\nabla u|^2}{2}\right]dx = \int_{\Omega} NG(u) - \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx.$$

Observant que $(\nabla u.\nu)\nu = \nabla u\ sur\ \partial\Omega$, on obtient enfin

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x.\nu)|\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} NG(u) - \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx,$$

ce qui conclut la preuve de l'identité de Pohozaev.

Chapitre 3

L'existence de solutions positives du problème traité par Brézis- Nirenberg [4]

Ce chapitre est consacré à l'application du problème elliptique pour illustrer les méthodes étudiées dans ce mémoire.
Dans cette partie, on démontre un résultat d'existence d'une solution positive pour le problème $\mathscr{P}$ plus un terme d'ordre inférieur dans l'équation, on obtient :

$$(\mathscr{P}_\lambda)\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & dans\ \Omega, \\ u > 0 & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

à présent $p = 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$. On définit Ω, un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2. On s'intéresse au cas ou $N \geq 4$.

Théorème 3.1 *Pour* $N \geq 4$ *le problème* $(\mathscr{P}_\lambda)$ *possède une solution* $u \in C^\infty(\Omega)$, *si et seulement si* $\lambda \in]0, \lambda_1(\Omega)[$, *où* $\lambda_1(\Omega)$ *est la première valeur propre du Laplacien sur* Ω.

On pose

$$J(u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$$S_\lambda = \inf_{u \in H^1_0(\Omega),\ \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1} \left\{ \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

Ainsi,

$$S_0 = S = \inf_{u \in H^1_0(\Omega),\ \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1} \left\{ \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

La preuve de l'existence de la solution du problème $(\mathscr{P}_\lambda)$ est réalisée en deux étapes que nous formulerons sous forme de lemmes :

1 Première étape :

Lemme 3.1 *On a*

$$S_\lambda < S \qquad \forall \lambda > 0.$$

Preuve :
Supposons sans perte de généralité que $0 \in \Omega$. Soit $\Phi \in C_c^\infty(\Omega)$ une fonction positive telle que $\Phi(x) \equiv 1$ dans un voisinage de 0. Nous allons estimer le quotient

$$Q_\lambda(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}}$$

avec

$$u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\Phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

où $\varepsilon > 0$ tend vers 0, pour obtenir

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \begin{cases} S + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \lambda \frac{K_3}{K_2}\varepsilon & si\ N \geq 5, \\ \\ S + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \lambda \frac{\omega}{2K_2}\varepsilon |\ln(\varepsilon)| & si\ N = 4, \end{cases}$$

où ω, K_2 *et* K_3 sont des constantes positives indépendantes de ε.

1. On calcule

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{\nabla\Phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{(N-2)\Phi(x)x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_\Omega \frac{|\nabla\Phi(x)|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + (N-2)^2 \int_\Omega \frac{(\Phi(x))^2 |x|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} - 2(N-2)\int_\Omega \frac{|\nabla\Phi(x)|\Phi(x)|x| dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}}$$

Prés de 0, $\Phi \equiv 1$ et donc $\nabla\Phi \equiv 0$. On a donc

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \frac{|\nabla\Phi(x)|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} \leq C$$

et

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \frac{|\nabla\Phi(x)|\Phi(x)|x| dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}} \leq C'$$

pour des constantes positives C et C' indépendantes de ε. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2_\varepsilon &= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{(\Phi(x))^2|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + (N-2)^2 \int_\Omega \frac{(\Phi(x))^2|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= (N-2)^2 \int_\Omega \frac{|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \frac{|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon |y|^2 \varepsilon^{\frac{N}{2}} dy}{\varepsilon^N (1+|y|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \qquad en\ posant\ y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(1),
\end{aligned}$$

où $\qquad K_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^2 dy}{(1+|y|^2)^N} = \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad$ (U *est l'instanton*).

2. On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p+1} &= \int_\Omega \frac{(\Phi(x))^{p+1}dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} \qquad car\ \frac{(N-2)}{2}(p+1)=N \\
&= \int_\Omega \frac{(\Phi(x))^{p+1}-1)dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + \int_\Omega \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} \\
&= \int_\Omega \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}dy}{\varepsilon^N(1+|y|^2)^N} + O_\varepsilon(1) \qquad en\ posant\ y=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&= \frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\varepsilon(1),
\end{aligned}$$

où $\quad K_2' = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} = \|U\|^2_{L^{p+1}(\mathbb{R}^{p+1})}$.
Il vient ainsi

$$\left(\int_\Omega |u_\varepsilon|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}} = \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(\varepsilon). \tag{3.1}$$

En posant $K_2 = (K_2')^{\frac{2}{p+1}}$ et en calculant (par la formule des accroissements finis) que

$$\left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\varepsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}} = \left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\varepsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}} + O_\varepsilon(1)(b_\varepsilon)^{\frac{2}{p+1}-1},$$

où

$$\begin{aligned}
|b_\varepsilon|^{\frac{2}{p+1}-1} &\le \left(\frac{K_2'}{\varepsilon^{\frac{N}{2}}} + O_\varepsilon(1)\right)^{\frac{2}{p+1}-1} \\
&\le \left(O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{-N}{2}})\right)^{\frac{2}{p+1}-1} \\
&= O_\varepsilon(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Donc on a bien (3.1).

3. On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\varepsilon|^2 = &\underbrace{\int_\Omega \frac{\left((\Phi(x))^2-1\right)dx}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-2}}}_{O_\varepsilon(1)\text{ car }\Phi^2-1\equiv 0\text{ prés de }0} + \int_\Omega \frac{dx}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-2}} \\
= &\int_\Omega \frac{dx}{\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{N-2}} + O_\varepsilon(1).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

On doit ici traiter différemment les cas $N=4$ et $N\ge 5$. En effet, on remarque que l'intégrale $\int_\Omega \frac{r^{N-1}}{r^{2(N-2)}}$ existe si-seulement-si
$2(N-2)-(N-1)>1$, c'est-à-dire si-seulement-si $N>4$.

Quand $N \geq 5$, (3.2) devient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 = & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}}_{O_\varepsilon(1) \text{ car } 0\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega} + O_\varepsilon(1) \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon^{\frac{N}{2}}dy}{\varepsilon^{N-2}(1+|y|^2)^{N-2}} + O_\varepsilon(1) \quad \text{en posant } y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\
= & \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\varepsilon(1),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où

$$K_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{N-2}}.$$

Quand $N = 4$, (3.2) se récrit

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 = \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} + O_\varepsilon(1).$$

Puisque $0 \in \Omega$ et que Ω est un ouvert borné, il existe deux constantes $0 < R_1 < R_2$ telles que $B(0,R_1) \subset \Omega \subset B(0,R_2)$. Il vient que

$$\int_{B(0,R_1)} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \leq \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \leq \int_{B(0,R_2)} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} = & \ \omega \int_0^R \frac{r^3 dr}{(\varepsilon+|r|^2)^2} \quad \text{où } \omega \text{ est l'aire de la sphére } S^3 \\
= & \ \omega \left(\frac{1}{4} \int_0^R \frac{4r^3+4r\varepsilon}{r^4+2r^2\varepsilon+\varepsilon^2} dr - \omega \int_0^R \frac{r\varepsilon}{(\varepsilon+|r|^2)^2} dr \right) \\
= & \ \omega \left(\frac{1}{4} \left[\ln(r^4+2r^2\varepsilon+\varepsilon^2)\right]_0^R + \left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+r^2}\right]_0^R \right) \\
= & \ \omega \left(\underbrace{\frac{1}{4}\ln(R^4+2R^2\varepsilon+\varepsilon^2)}_{O_\varepsilon(1)} - \frac{1}{4}\ln(\varepsilon^2) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+R^2}}_{O_\varepsilon(1)} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{O_\varepsilon(1)} \right) \\
= & \ \frac{\varepsilon}{2}|\ln(\varepsilon)| + O_\varepsilon(1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Et par conséquent

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} = \frac{\varepsilon}{2}|\ln(\varepsilon)| + O_\varepsilon(1).$$

Pour résumer, nous avons montré qu'il existe des constantes K_1, K_2, K_3 et ω (qui ne dépendent que de N) telles que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(1), \\
\|u_\varepsilon\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} &= \frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(\varepsilon), \\
\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} &= \begin{cases} \frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\varepsilon(1) & si\ N \geq 5, \\ \frac{\omega}{2}|\ln(\varepsilon)| + O_\varepsilon(1) & si\ N = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut dés lors écrire

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) &= \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_\varepsilon\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\frac{K_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(1) - \lambda\left(\frac{K_3}{\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}} + O_\varepsilon(1)\right)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O_\varepsilon(\varepsilon)} & si\ N \geq 5 \\[2ex] \dfrac{\frac{K_1}{\varepsilon} + O_\varepsilon(1) - \lambda\left(\frac{\omega}{2}|\ln(\varepsilon)| + O_\varepsilon(1)\right)}{\frac{K_2}{\varepsilon} + O_\varepsilon(\varepsilon)} & si\ N = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{K_1 - \lambda K_3\varepsilon + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}})}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} & si\ N \geq 5 \\[2ex] \dfrac{K_1 - \lambda\frac{\omega}{2}|\ln(\varepsilon)|\varepsilon + O_\varepsilon(\varepsilon)}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} & si\ N = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} S + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \lambda\frac{K_3}{K_2}\varepsilon & si\ N \geq 5 \\ S + O_\varepsilon(\varepsilon) - \lambda\frac{\omega}{2K_2}\varepsilon|\ln(\varepsilon)| & si\ N = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

puisque $\frac{K_1}{K_2} = S$ et en utilisant $\frac{1}{K_2+x} = \frac{1}{K_2} + x(\cdots)$.
Il est à présent clair que $Q_\lambda(u_\varepsilon) < S$ si ε est suffisamment petit, ce qui montre bien que $S_\lambda < S$.

2 Deuxième étape :

Lemme 3.2 *Si* $S_\lambda < S$ *et* $\lambda < \lambda_1(\Omega)$, *l'infimum* S_λ *est atteint.*

Preuve :
Soit $u_j \in H^1_0(\Omega)$ une suite minimisante pour S_λ, c'est-à-dire

$$\|u_j\|_{L^{p+1}}(\Omega) = 1 \tag{3.5}$$

et

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla u_j\|_{L^2}(\Omega)^2 - \lambda \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{L^2}(\Omega)^2 = S_\lambda \tag{3.6}$$

On remarque grâce au théorème de Poincaré que la suite u_j est bornée dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Par conséquent, il existe une sous suite (renommée u_j) et un $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que

$$u_j \rightharpoonup u \quad dans\, \mathrm{H}_0^1(\Omega), \tag{3.7}$$

$$u_j \to u \quad dans\, \mathrm{L}^2(\Omega), \tag{3.8}$$

$$u_j \to u \quad presque\ partout\ dans\ \Omega. \tag{3.9}$$

On pose $v_j = u_j - u$, de telle sorte que

$$v_j \rightharpoonup 0 \quad dans\, \mathrm{H}_0^1(\Omega),$$

$$v_j \to 0 \quad presque\ partout\ dans\ \Omega.$$

L'équation (3.5) et la définition de l'infimum S impliquent que

$$\mathrm{S} \leq \|\nabla u_j\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Soustrayons à présent (3.6) à la limite de (3.10) :

$$\mathrm{S} - \mathrm{S}_\lambda \leq \lambda \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \lambda \|u\|^2_{\mathrm{L}2(\Omega)}$$

par (3.8). Par hypothèse, $\mathrm{S} - \mathrm{S}_\lambda > 0$, et nous pouvons donc conclure que $u \neq 0$. Ensuite, d'une part on a $v_j \rightharpoonup 0$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, donc par le théorème (2.1)

$$\lim_{j\to\infty} \|\nabla v_j\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \|\nabla u_j\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} - \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

On réinjecte ceci dans (3.6) :

$$\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} - \lambda \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \mathrm{S}_\lambda. \tag{3.11}$$

D'autre part, v_j est borné dans $\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)$ (car u_j l'est) et $v_j \to 0$ presque partout dans Ω; on peut donc appliquer le lemme de Brézis-Lieb (2.2) :

$$\lim_{j\to\infty} \|u + v_j\|^{p+1}_{\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)} = \|u\|^{p+1}_{\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)}.$$

Or $u + v_j = u_j$ et $\|u_j\|_{\mathrm{L}^{p+1}(\Omega)} = 1$, donc

$$1 = \underbrace{\|u\|^{p+1}_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)}}_{\in[0,1]} + \underbrace{\lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)}}_{\in[0,1]}.$$

D'où, puisque $2 < p+1$,

$$\|u\|^{p+1}_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)} \leq \|u\|^2_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)}$$

et

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j\|^{p+1}_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)} \leq \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)}.$$

Et ainsi

$$1 \leq \|u\|^2_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2_{\mathrm{L}_{p+1}(\Omega)}.$$

On utilise alors l'inégalité de Sobolev $\|v_j\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \le \frac{1}{S}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$ et on obtient

$$1 \le \|u\|^2_{L_{p+1}(\Omega)} + \frac{1}{S}\lim_{j\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.12}$$

On veut montrer que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le S_\lambda\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}, \tag{3.13}$$

ce qui conclura la preuve du lemme puisque $u \neq 0$.
Pour cela, on distingue deux cas :

- Soit $S_\lambda > 0$. On déduit alors de (3.12)

  $$S_\lambda \le S_\lambda\|u\|^2_{L_{p+1}(\Omega)} + \frac{S_\lambda}{S}\lim_{j\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

  Or $S_\lambda < S$, donc

  $$S_\lambda \le S_\lambda\|u\|^2_{L_{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

  En combinant ceci avec (3.11), on a

  $$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lim_{j\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \le S_\lambda\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} + \lim_{j\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)},$$

  qui donne bien (3.13).
- Soit $S_\lambda < 0$. On a alors

  $$S_\lambda \le S_\lambda\|u\|^2_{L_{p+1}(\Omega)}$$

  puisque $\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)} \le 1$ par (3.12). On injecte ceci dans (3.11) :

  $$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lim_{J\to\infty}\|\nabla v_j\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le S_\lambda\|u\|^2_{L^{p+1}(\Omega)}$$

  et on obtient (3.13).

La fin de la preuve du théorème (3).
Puisque $\lambda < \lambda_1(\Omega)$. On a une solution de l'équation aux dérivées partielles $-\Delta u = u^p + \lambda u$. Celle-ci est $C^\infty(\Omega)$ et en particulier $C^2(\Omega)$. Le principe du maximum fort (voir (2.3)) garantit alors que $u > 0$ sur Ω. .

Conclusion

L'approche variationnelle appliqué à des problèmes elliptiques non-linéaires est assez colossale puisque un simple changement sur l'équation étudier peut basculé vers l'existence ou la non existence de solutions positives, de plus la présence des exposants critiques du type Sobolev présentent beaucoup de difficultés vu qu'ils cause la perte de compacité. L'existence de solutions devient délicate à démontrer.

Bibliographie

[1] R. A. Adams ; *Sobolev Spaces*, Academic press, New York, 1975. 2, 3, 4, 6

[2] H. Brézis ; *Analyse fonctionnelle* - théorie et applications, Masson, 1983. 2, 4, 5, 6, 8

[3] H. Brézis and E. Lieb ; *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proceedings of the AMS, (3), 1983. 11

[4] H. Brézis and L. Nirenberg ; *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Communs pure. appl. Math, 1983. iii, 1, 17

[5] B. Hanouzet ; *Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 46, 227-272, 1971. 7, 8

[6] O. Kavian ; *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications (Springer-Verlag), 1989. 4, 6, 8, 9

[7] M. Struwe ; *variational Methods. Applications to nonlinear PDE and Hamiltonain Systems*, Edition Springer, 2000. 11

[8] M. Willem ; *Analyse harmonique réelle*, Hermann, 1995. 2, 8, 11

Les méthodes Variationnelles et applications

Résumé : Au long de ce mémoire, on s'intéresse à l'existence de solutions positives d'une certaine classe d'équation elliptique via les méthodes variationnelles.

Mots-Clés. Espaces de Sobolev, injections de Sobolev, méthodes variationnelles, problème elliptique, principe d'Ekeland, suite de Palais-Smale, théorème de Col, exposant critique.

Variational methods and applications

Abstract : This work deals with the existence of positives solutions for a class of elliptic differential equation by using variational methods.

Key Words. Sobolev spaces, Sobolev injections, variational methods, elliptical problem, Ekeland principale, Palais-Smale suite, collar theorem, critical exponent.