UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :AF
Thème :
Propriétés des Solutions Méromorphes de Certains Type d'Équations aux Différences.

Présenté par :

M[elle] LASSAL Hakima
Soutenu le

14-06-2018
Les membres de jury

Président	ANDASMAS Maamar	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	LATREUCH Zinelâabidine	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	BELAIDI Benharrat	Pr	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Mes premières dédiés à mon Dieu de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'à atteindre au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire "Ya Allah".

Je dédie ce travail à mes chers parents qui m'ont soutenu pendant toute la période de mes études, pour leurs encouragements continus à surmonter les problèmes et les difficultés que j'ai rencontrées, et de leurs conseils pour clairs mon chemin, ils ont été un exemple parfait pour ma réussite, sans oublier toute ma famille, mes amis et mes collègues, qui étaient une source de bonheur pour moi.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements pour mon directeur du thème monsieur BELAÏDI Benharrat, professeur à l'université de Mostaganem pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de diriger ce travail, pour ses multiples conseils, sa disponibilité et ses encouragements, vraiment il était la source de mon espoir dans les moments durs.

J'adresse toute ma gratitude aux membres de mon jury pour avoir accepté de participer à la soutenance de ce thème en commençant par Monsieur ANDASMAS Maamar pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie vivement Monsieur LATREUCH Zinelâabidine pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant qu'examinateur de ce travail.

Le mot merci reste insuffisant devant deux êtres à qui je dois mon existence mon père allah yarhamo et ma mère, qui prié pour me voir réussir, et leurs conseils judicieux. Et ma famille pour son soutien tout le long de mes études notamment dans les moments les plus difficiles.

Je tiens à remercier toute personne qui a participé de loin ou de près à la réalisation de ce mémoire. En particulier l'ensemble des professeurs pour leurs enseignements, le département de mathématiques et les étudiants de la promotion 2018.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par R. Nevanlinna est un outil très important pour étudier l'oscillation et la croissance des solutions des équations aux différences linéaires homogènes et non homogènes de la forme

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_0(z)f(z)=0$$

et

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_0(z)f(z)=F(z),$$

telles que $A_j(z)$ sont des fonctions entières et C_j sont des constantes avec $j=0,...,n$.
Récemment, beaucoup des mathématiciens se sont intéressés à ces équations. Chen a étudié les problèmes de l'oscillation complexe pour l'ensemble des solutions des équations et a obtenu certaines relation entre l'ordre de croissance et l'exposant de convergence. Puis, Chiang et Feng ont étudié la croissance des solutions méromorphes dans le cas où il n'existe qu'un seul coefficient dominant avec l'ordre maximal, après Laine et Yang dans le cas où il existe plusieurs coefficients ayant un ordre maximal parmi lesquels il existe un coefficient ayant un type maximal.
Ce mémoire est composé d'une introduction et deux chapitres. Dans la premier chapitre, on va donner des notions fondamentales de la théorie de R. Nevanlinna, et on présentera les définitions et les théorèmes auxiliaires qui nous aident à démontrer les résultats du deuxième chapitre. Dans le deuxième chapitre on va donner les résultats principaux avec les démonstrations et des exemples sur les proprietés des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires.

Chapitre 1

Quelques notions de base de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer quelques définitions, notations de base et les résultats principaux de la théorie de R.Nevanlinna sur les fonctions méromorphes qu'on aura besoin par la suite, voir [12] , [14].

1.1 Éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.1 [14] *(Formule De Jensen)*

Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$; a_1, a_2, ... ses zéros (respectivement b_1, b_2, ... ses pôles), chacun des zéros étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\exp i\varphi)|\,d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve : On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)} \ . \tag{1.1.1}$$

On a $g \neq 0, \infty$, dans le disque $|z| \leq r$. Donc $\ln g(z)$ est analytique dans le disque $|z| \leq r$ et par suite la partie réelle $\mathrm{Re}(\ln g(z)) = \ln|g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne des fonctions harmoniques, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(r\exp i\varphi)|\,d\varphi. \tag{1.1.2}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|g(0)| &= |f(0)|\left|\prod_{|a_j|<r}\frac{r}{-a_j}\right| / \left|\prod_{|b_j|<r}\frac{r}{-b_j}\right| \\ &= \frac{|f(0)|\prod_{|a_j|<r}\frac{r}{|a_j|}}{\prod_{|b_j|<r}\frac{r}{|b_j|}}\end{aligned}$$

D'où

$$\ln|g(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{|a_j|<r}\ln\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r}\ln\frac{r}{|b_j|}. \tag{1.1.3}$$

Soit $z = r\exp\{i\varphi\}$. Pour tout a_j et tout b_j, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{r^2-\overline{a_j}z}{r(z-a_j)}\right| &= \left|\frac{r^2-\overline{a_j}r\exp\{i\varphi\}}{r(r\exp i\varphi - a_j)}\right| = \left|\frac{r-\overline{a_j}\exp\{i\varphi\}}{r\exp\{i\varphi\}-a_j}\right| \\ &= |\exp\{i\varphi\}|\left|\frac{r\exp\{-i\varphi\}-\overline{a_j}}{r\exp\{i\varphi\}-a_j}\right| = 1\end{aligned}$$

et

$$\left|\frac{r^2-\overline{b_j}z}{r(z-b_j)}\right| = \left|\frac{r^2-\overline{b_j}r\exp\{i\varphi\}}{r(r\exp\{i\varphi\}-b_j)}\right| = 1.$$

Donc pour $|z| = r \quad (z = r\exp\{i\varphi\})$

$$\begin{aligned}|g(r\exp\{i\varphi\})| &= |f(r\exp\{i\varphi\})|\left|\prod_{|a_j|<r}\frac{r^2-\overline{a_j}r\exp\{i\varphi\}}{r(r\exp\{i\varphi\}-a_j)}\right| / \left|\prod_{|b_j|<r}\frac{r^2-\overline{b_j}r\exp\{i\varphi\}}{r(r\exp\{i\varphi\}-b_j)}\right| \\ &= |f(r\exp\{i\varphi\})| \qquad (1.1.4)\end{aligned}$$

En remplaçant (1.1.3) et (1.1.4) dans (1.1.1) , on aura

$$\ln|f(0)| + \sum_{|a_j|<r}\ln\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r}\ln\frac{r}{|b_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(r\exp\{i\varphi\})|\,d\varphi$$

D'où

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(r\exp\{i\varphi\})|\,d\varphi + \sum_{|b_j|<r}\ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r}\ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Définition 1.1.1 [14]

Pour tout réel $x \geq 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases}\ln x\,; \text{ si } & x > 1\\ 0\,; \text{ si } 0 \leq x \leq 1.\end{cases}$$

Lemme 1.1.1 ([1] , [14]) *On a les propriétés suivantes*

$$a/ \quad \ln x \leq \ln^+ x.$$

$$b/ \ \ln^+ x \leq \ln^+ y \ (0 \leq x \leq y).$$

$$c/ \ \ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}.$$

$$d/ \ |\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}.$$

$$e/ \ \ln^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j.$$

$$f/ \ \ln^+ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j + \ln n.$$

Preuve
$a/$ et $b/$ sont évidentes on montre $c/$, $d/$, $e/$, et $f/$.
$c/ \ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) - \max(\ln \frac{1}{x}, 0) \\ &= \max(\ln x,\ 0) + \min(-\ln \frac{1}{x}, 0) \\ &= \max(\ln x, 0) + \min(\ln x, 0) = \ln x. \end{aligned}$$

$d/ \ |\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned} \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} &= \max(\ln x, 0) + \max(\ln \frac{1}{x}, 0) \\ &= \max(\ln x, 0) + \max(-\ln x, 0) \\ &= \max(\ln x, 0) - \min(\ln x, 0) = |\ln x| \,. \end{aligned}$$

$e/ \ \ln^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j$. Si $\prod_{j=1}^{n} x_j \leq 1$,l'inégalité est triviale. Si $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$,on a

$$\ln^+ \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) = \ln \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \ln^+ x_j.$$

$f/$ $\ln^+ \sum_{j=1}^n x_j \le \sum_{j=1}^n \ln^+ x_j + \ln n$. D'après $b/$ et $e/$, on a

$$\begin{aligned}\ln^+ \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) &\le \ln^+ \left(n \max_{1\le j\le n} x_j\right) \le \ln^+ \max_{1\le j\le n} x_j + \ln n \\ &\le \sum_{j=1}^n \ln^+ x_j + \ln n.\end{aligned}$$

Définition 1.1.2 [14] *(Fonction a-points) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre*

complexe a, on désigne par $n(t, a, f\ )$ le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \le t$ (chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité), et par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \le t$, (chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité). On définit la fonction $a-$points de f par

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, f \not\equiv a \in \mathbb{C},$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \le r$. De

méme on définit la fonction $a-$points distincts par

$$\overline{N}(r, a, f) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a, f) - \overline{n}(0, a, f)}{t} dt + \overline{n}(0, a, f) \ln r,\ \ f \not\equiv a \in \mathbb{C},$$

et

$$\overline{N}(r, \infty, f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \infty, f) - \overline{n}(0, \infty, f)}{t} dt + \overline{n}(0, \infty, f) \ln r,$$

où $\overline{n}(t, a, f)$, désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ et $\overline{n}(t, \infty, f)$ des pôles distincts de la fonction f dans le disque $|z| \le t$.

Exemple 1.1.1 *Soit la fonction $f(z) = \frac{\exp\{az\}}{z}$, $a \in \mathbb{C}^*$, on calcule la fonction $a-$points. On a $z = 0$ un pôle simple. Alors*

$$\begin{aligned}N(r, f) &= \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r \\ &= \int_0^r \frac{1-1}{t} dt + \ln r = \ln r.\end{aligned}$$

Lemme 1.1.2 ([1], [14]) *Soit f une fonction méromorphe avec $a-$points α_1, α_2,...,α_m tels que :* $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq ... \leq |\alpha_m| \leq r$. *Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(t,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve : On pose : $|\alpha_j| = r_j (j = 1, ..., m)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{0<|\alpha_j|\leq r} \ln \frac{r}{|\alpha_j|} &= \sum_{j=1}^{m} \ln \frac{r}{r_j} \\
&= \ln \left(\frac{r^m}{r_1 r_2 ... r_m} \right) \\
&= \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 \left(\frac{r_4}{r_3} \right)^3 ... \left(\frac{r_m}{r_{m-1}} \right)^{m-1} \left(\frac{r}{r_m} \right)^m \right) \\
&= \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + 2 \ln \left(\frac{r_3}{r_2} \right) + 3 \ln \left(\frac{r_4}{r_3} \right) + ... + (m-1) \ln \left(\frac{r_m}{r_{m-1}} \right) + m \ln \left(\frac{r}{r_m} \right) \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} + \int_{r_2}^{r_3} 2 \frac{dt}{t} + ... + \int_{r_{m-1}}^{r_m} (m-1) \frac{dt}{t} + \int_{r_m}^{r} m \frac{dt}{t} = \int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 [14] *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent autour de l'origine*

$$f(z) = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j \ , (c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, c_m \in \mathbb{C}^*).$$

Alors

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(r \exp i\varphi)| \, d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Définition 1.1.3 [14] *(Fonction de Proximité) Soit f une fonction méromorphe. On définit la fonction de proximité de f par*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(r \exp i\varphi) - a|} d\varphi \ ,$$

si $f \not\equiv a \in \mathbb{C}$ et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r \exp i\varphi)| \, d\varphi.$$

Exemple 1.1.2 *D'après L'exemple 1.1.1, on calcule la fonction de Proximité de Nevanlinna. Alors*

$$\begin{aligned}
m(r,f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{e^{are^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}} \right| d\varphi \\
&= \frac{|a| \, r}{\pi} - \frac{\ln r}{2}.
\end{aligned}$$

Définition 1.1.4 [14] *(Fonction caractéristique) Soit f une fonction méromorphe. Alors la fonction caractéristique de R.*

Nevanlinna de f définie par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.3 *Soit $f(z) = \exp(-z)$. On a $n(r,f) = 0$, car f n'admet pas des pôles, donc*

$$N(r,f) \equiv 0.$$

et

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r\exp i\varphi)|\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |\exp(-r\exp i\varphi)|\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ (\exp(-r\cos\varphi)) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \ln (\exp(-r\cos\varphi)) d\varphi \\ &= -\frac{r}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

Lemme 1.1.3 [14] *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |a - \exp i\varphi|\, d\varphi = \ln^+ |a|.$$

De plus, on a l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln |a - \exp\{i\varphi\}||\, d\varphi \leq \ln^+ |a| + 2\ln 2.$$

Proposition 1.1.2 ([1], [14]) *Soient f_1, f_2, ..., f_n des fonctions méromorphes. Alors on a les propriétés suivantes*

$$1/\ T(r, \prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j).$$

$$2/\ T(r, \sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \ln n.$$

$$3/\ T(r, f^n) = nT(r, f) \quad (n \in N).$$

$$4/\ T(r, af) = T(r, f) + O(1), \ \ (a \in \mathbb{C}^*) \, .$$

$$5/\ T(r, f + a) = T(r, f) + O(1), \ \ (a \in \mathbb{C}^*) \, .$$

$$6/\ T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1), \ \ \left(ad - cb \neq 0, \ f \not\equiv \frac{d}{c}\right).$$

Preuve :

$1/\ T(r, \prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j)$, on a

$$\begin{aligned} m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \prod_{j=1}^{n} f_j(r \exp\{i\varphi\}) \right| d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \ln^+ |f_j(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f_j(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi = \sum_{j=1}^{n} m(r, f_j). \end{aligned}$$

Si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j, alors il est un pôle d'ordre égal au plus $\sum_{j=1}^n \lambda_j$ pour la fonction $\prod_{j=1}^{n} f_j$. Donc

$$N\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} N(r, f_j)$$

ainsi

$$\begin{aligned} T\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} m(r, f_j) + \sum_{j=1}^{n} N(r, f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(m(r, f_j) + N(r, f_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j). \end{aligned}$$

2/ $T(r,\sum_{j=1}^{n} f_j) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r,f_j) + \ln n$. D'après le Lemme 1.2.1 on a

$$\begin{aligned}
m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\sum_{j=1}^{n} f_j\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| d\varphi \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\ln^+\left|f_j\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| + \ln n\right) d\varphi \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f_j\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| d\varphi + \ln n \\
&= \sum_{j=1}^{n} m\left(r,f_j\right) + \ln n.
\end{aligned}$$

Si z_0 est un pôle d'ordre $\lambda_j \geq 0$ pour la fonction f_j, alors il est un pôle d'ordre égal au plus $\max_{1\leq j\leq n}\lambda_j \leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$ pour la fonction $\sum_{j=1}^{n} f_j$, donc

$$N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} N\left(r,f_j\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
T\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) &= m\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) + N\left(r,\sum_{j=1}^{n} f_j\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} m\left(r,f_j\right) + \ln n + \sum_{j=1}^{n} N\left(r,f_j\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\left(m\left(r,f_j\right) + N\left(r,f_j\right) + \ln n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} T\left(r,f_j\right) + \ln n.
\end{aligned}$$

3/ $T(r,f^n) = nT(r,f) \quad (n\in\mathbb{N})$. Si $|f^n| > 1$, alors

$$|f^n| > 1 \Leftrightarrow |f| > 1$$

$$\begin{aligned}
T\left(r,f^n\right) &= m\left(r,f^n\right) + N\left(r,f^n\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f^n\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| d\varphi + nN(r,f) \\
&= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| d\varphi + nN(r,f) \\
&= n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(r\exp\{i\varphi\}\right)\right| d\varphi + N\left(r,f\right)\right) \\
&= n\left(m\left(r,f\right) + N\left(r,f\right)\right) = nT\left(r,f\right).
\end{aligned}$$

Si $|f| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, f^{n}\right) &= m\left(r, f^{n}\right)+N\left(r, f^{n}\right) \\ &= \frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi} \ln^{+}|f(r \exp i \varphi)| \, d \varphi+n N(r, f) \\ &= 0+n N(r, f)=n(m(r, f)+N(r, f))=n T(r, f). \end{aligned}$$

4/ $T(r, a f)=T(r, f)+O(1)$

$$m(r, a f)-m(r, f)=\frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left(\ln^{+}|a f(r \exp i \varphi)|-\ln^{+}|f(r \exp i \varphi)|\right) d \varphi$$

D'après le Lemme 1.2.1 on a

$$\begin{aligned} |m(r, a f)-m(r, f)| &= \left|\frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left(\ln^{+}|a f(r \exp \{i \varphi\})|-\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})|\right) d \varphi\right| \\ &\leq \frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left|\ln^{+}|a f(r \exp \{i \varphi\})|-\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})|\right| d \varphi \\ &\leq \frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi} \ln \left|\frac{a f(r \exp \{i \varphi\})}{|f(r \exp \{i \varphi\})|}\right| d \varphi=|\ln |a||. \end{aligned}$$

Donc

$$m(r, a f)=m(r, f)+O(1).$$

Il est clair que

$$N(r, a f)=N(r, f).$$

Alors

$$T(r, a f)=T(r, f)+O(1).$$

5/ $T(r, f+a)=T(r, f)+O(1)$. De la même méthode on a

$$\begin{aligned} |m(r, f+a)-m(r, f)| &= \left|\frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left[\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})+a|-\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})|\right] d \varphi\right| \\ &\leq \frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left|\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})+a|-\ln^{+}|f(r \exp \{i \varphi\})|\right| d \varphi \\ &\leq \frac{1}{2 \pi} \int_{0}^{2 \pi}\left(\ln^{+}|a|+\ln 2\right) d \varphi \leq \ln^{+}|a|+\ln 2. \end{aligned}$$

Donc

$$m(r, f+a)=m(r, f)+O(1).$$

Il est évident que

$$N(r, f+a)=N(r, f).$$

D'où

$$T(r, f+a)=T(r, f)+O(1).$$

6/ $T(r,g) = T(r,f) + O(1)$. On a

$$\begin{aligned} g &= \frac{af+b}{cf+d} \\ &\iff cgf + dg = af + b \\ &\iff f(cg-a) = -dg + b \\ &\iff f = \frac{-dg+b}{cg-a}. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer que

$$T(r,g) \leq T(r,f) + O(1).$$

Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) \\ &\leq T\left(r, \frac{a}{d}\right) + T(r,f) + T\left(r, \frac{b}{d}\right) + \ln 2 \\ &\leq \ln^+ \left|\frac{a}{d}\right| + T(r,f) + \ln^+ \left|\frac{b}{d}\right| + \ln 2 \\ &= T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} g &= \frac{af+b}{cf+d} \\ &= \frac{af+b}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} \\ &= \frac{a\left(f+\frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{c(f+\frac{d}{c})} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \times \frac{1}{f+\frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \times \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &\leq T\left(r, \frac{a}{c}\right) + T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\right) + T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \ln 2 \\ &= T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1) \\ &\leq T(r,f) + \ln^+ \left|\frac{d}{c}\right| + \ln 2 + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.4 *Soit* $f(z) = \frac{2\exp\{z\}+3}{5\exp\{z\}+7}$. *Alors*

$$\begin{aligned} T(r,f) &= T\left(r, \frac{2\exp\{z\}+3}{5\exp\{z\}+7}\right) \\ &= T(r, \exp z) + O(1) \\ &= \frac{r}{\pi} + O(1). \end{aligned}$$

1.1.2 Premier théoreme fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.1.2 [14] *Soient* $a \in \mathbb{C}$ *et* f *une fonction méromorphe avec le développement de Laurent de* $f - a$ *autour de l'origine*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} C_j z^j, \;\; C_m \neq 0, \;\; m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|C_m| + \varphi(r,a).$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

Preuve :
1/ Si $a = 0$, alors d'après la Proposition 1.1.1 et le Lemme 1.1.1, (c) on a

$$\begin{aligned} \ln|C_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\exp\{i\varphi\})|\,d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(r\exp\{i\varphi\})|\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(r\exp\{i\varphi\})|} d\varphi + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= m(r,f) - m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r,f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) \\ &= T(r,f) - T\left(r, \frac{1}{f}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r, \frac{1}{f}\right) = T(r,f) - \ln|C_m|, \quad \varphi(r,0) \equiv 0. \tag{1.1.5}$$

2/On montre le cas général $a \neq 0$, posons $h = f - a$. Alors

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{h}\right) &= N\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \\ N(r,h) &= N(r,f) \end{aligned}$$

et

$$m\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

De plus

$$\ln^+ |h| = \ln^+ |f - a| \leq \ln^+ |f| + \ln^+ |a| + \ln 2$$

$$\ln^+ |f| = \ln^+ |f - a + a| = \ln^+ |h + a| \leq \ln^+ |f| + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

En intégrant ces deux inégalités par rapport à φ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |h(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi + \ln^+ |a| + \ln 2,$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |h(r \exp\{i\varphi\})| \, d\varphi + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

On trouve que

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \ln^+ |a| + \ln 2,$$

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \ln^+ |a| + \ln 2.$$

On pose

$$\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f).$$

Alors

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2.$$

En appliquant la formule (1.1.5) pour h, on aura

$$\begin{aligned}
T\left(r, \frac{1}{h}\right) &= T(r, h) - \ln |C_m| \\
&= m(r, h) + N(r, h) - \ln |C_m| \\
&= m(r, f) + N(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |C_m| \\
&= T(r, f) + \varphi(r, a) - \ln |C_m| .
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.3 [14] *Soit f une fonction méromorphe. Alors Pour tout $a \in \mathbb{C}$*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1), \;\; r \longrightarrow +\infty.$$

Théorème 1.1.4 [14] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe et*

$$R(z) = \frac{a_n f^n(z) + a_{n-1} f^{n-1}(z) + ... + a_0}{b_m f^m(z) + b_{m-1} f^{m-1}(z) + ... + b_0}, \quad \{a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m\} \in \mathbb{C} \text{ et } a_n, b_m \neq 0.$$

Alors

$$T(r, R(z)) = \max\{n, m\} T(r, f(z)) + O(1).$$

Exemple 1.1.5 *On calcule la fonction caractéristique de $f(z) = \tan z$. On a*

$$\begin{aligned} f(z) &= \tan z \\ &= \frac{\exp\{iz\} - \exp\{-iz\}}{2i} / \frac{\exp\{iz\} + \exp\{iz\}}{2} \\ &= -i \frac{\exp\{2iz\} - 1}{\exp\{2iz\} + 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, f) &= T(r, \exp\{2iz\}) + O(1) \\ &= \frac{2r}{\pi} + O(1). \end{aligned}$$

1.2 L'ordre et le type des fonctions entières et méromorphes

Définition 1.2.1 [14] *Soit f une fonction entière. On définit l'ordre et le type de f respectivement par*

$$\sigma(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r},$$

et

$$\tau_M(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\ln M(r, f)}{r^{\sigma(f)}}, \quad (0 < \sigma(f) < +\infty).$$

où

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Exemple 1.2.1 [1] *On calcule l'ordre et le type de $f(z) = \sinh z$. On a*

$$\begin{aligned} M(r, f) &= \max_{|z|=r} \left| \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sinh r. \end{aligned}$$

Pour $z_0 = r$ on a

$$|f(z_0)| = |\sinh r| = \sinh r$$

Donc

$$\begin{aligned} M(r, \sinh r) &= \sinh r \\ &= \frac{\exp r - \exp(-r)}{2} \\ &\sim \frac{\exp r}{2}, \ r \to +\infty. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln M(r,\sinh r)}{\ln r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln\left(\frac{\exp r}{2}\right)}{\ln r} = 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_M(f) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln M(r,f)}{r^{\sigma(f)}} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln M(r,\sinh r)}{r^{\sigma(f)}} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\left(\frac{\exp r}{2}\right)}{r} = 1. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 [14] *Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre et le type de f respectivement par*

$$\sigma(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln T(r,f)}{\ln r},$$

et

$$\tau(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{T(r,f)}{r^{\sigma(f)}}, \ 0 < \sigma(f) < +\infty).$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéridtque de R. Nevanlinna.

Exemple 1.2.2 *Soit la fonction $f(z) = \tan z$. D'après L'exemple 1.2.3 on a$T(r, f) = \frac{2r}{\pi} + O(1)$.*

On calcule l'ordre et le type de f

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln T(r,f)}{\ln r} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\left(\frac{2r}{\pi} + O(1)\right)}{\ln r} = 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{T(r,f)}{r^{\sigma(f)}}\\ &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\left(\frac{2r}{\pi}+O(1)\right)}{r}=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 [14] *Soient f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

$$1/\ \sigma(f+g)\leq\max\{\sigma(f),\sigma(g)\}.$$

$$2/\ \ \sigma(fg)\leq\max\{\sigma(f),\sigma(g)\}.$$

De plus, si $\sigma(g)<\sigma(f)$, alors

$$\sigma(f+g)=\sigma(fg)=\sigma(f).$$

1.3 L'exposant de convergence des zéros

Définition 1.3.1 [14] *Soit f une fonction méromorphe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes non nuls avec*

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=+\infty.$$

L'exposant de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini par

$$\lambda(f)=\inf\left\{\alpha>0:\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^{-\alpha}<+\infty\right\}.$$

Exemple 1.3.1 *Soit $f(z)=\exp z-1$. On a*

$$\begin{aligned}f(z) &= 0\Longleftrightarrow\exp z-1=0\\ &\Longleftrightarrow\ z_k=2k\pi i,\ \ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to+\infty}|z_k|=\lim_{k\to+\infty}|2k\pi i|=+\infty$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{\alpha}}<+\infty,\text{ si et seulement si }\alpha>1,$$

alors

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \inf\left\{\alpha>0:\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_k|^{\alpha}}<+\infty\right\}\\ &= \inf\left\{\alpha>0:\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{|2k\pi i|^{\alpha}}<+\infty\right\}\\ &= \inf(]1,+\infty[)=1.\end{aligned}$$

On a une définition équivalente

Définition 1.3.2 [14] *Soit f une fonction méromorphe. Alors on définit l'exposant de convergence des zéros de f par*

$$\lambda(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln N(r, \frac{1}{f})}{\ln r},$$

où

$$N(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n(0, \frac{1}{f}) \ln r \ .$$

et $n\left(t, \frac{1}{f}\right)$ est le nombre des zéros de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$. De même, l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f est défini par

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \log r,$$

$\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 1.3.2 *Soit la fonction $f(z) = e^z$. Alors f n'admet pas de zéros, donc $N(r, \frac{1}{f}) \equiv 0$. Alors*

$$\lambda(e^z) = \overline{\lambda}(e^z) = 0.$$

Proposition 1.3.1 [14] *Pour toute fonction méromorphe f, on a*

$$\lambda(f) \leq \sigma(f).$$

1.4 Le produit canonique

On définit les facteurs primaires de weiestrass par

$$\begin{aligned} E_0(z) &= (1-z), \\ E_m(z) &= (1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}\right\},\ m\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.1 [14]*(Produit canonique) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres complexes non nuls d'exposant de convergence λ*

fini et soit k un entier positif $k>\lambda-1$. Donc le produit canonique

$$\prod_{n=1}^{+\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

définit une fonction entière ayant des zéros exactement aux points a_n (avec l'ordre de multiplicités).

Théorème 1.4.2 [14]*(Weiestrass factorisation) Soit f une fonction entière avec un zéro de multiplicité $m\geq 0$ en $z=0$. Soit*

$a_1, a_2, ...$, les autres zéros de f, chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors f a la représentation suivante

$$f(z)=\exp\{g(z)\}\, z^m \prod_{n=1}^{+\infty} E_{mn}\left(\frac{z}{a_n}\right), \tag{1.4.1}$$

où g est une fonction entière.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une exposant de convergence fini λ, alors mn peut être pris comme $k=[\lambda]>\lambda-1$ dans (1.4.1)

Remarque 1.4.1 [14]

1/ Si f est une fonction entière ayant un exposant de convergence $\lambda(f)$ fini pour la suite des zéros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on peut écrire (1.4.1) sous forme

$$f(z)=Q(z)\exp\{g(z)\},$$

où $Q(z)$ est le produit canonique ou polynômial. En appliquant le Théorème 1.4.2 on a

$$\lambda(Q)=\sigma(Q)=\lambda(f).$$

2/Si f est une fonction entière d'ordre fini σ, alors g dans (1.4.1) est un polynôme de degré $\leq\sigma$.

Exemple 1.4.1 *Les facteurs primaires de Weiestrass*

Pour $k = 0$, on a

$$E_0\left(\frac{z}{a_n}\right) = 1 - \frac{z}{a_n}.$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}$

$$E_{mn}\left(\frac{z}{a_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2\left(a_n\right)^2} + ... + \frac{z^m}{m\left(a_n\right)^m}\right\}.$$

1.5 La mesure linéaire et la mesure logaithmique

Définition 1.5.1 [16] *La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt.$$

où $X_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.
De plus, on dit que la mesure linéaire de E est finie si $m(E) < +\infty$.

Exemple 1.5.1 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [a, b] \subset [0, +\infty[$ tel que $a, b \in \mathbb{R}$ est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt = \int_a^b dt = b - a.$$

Définition 1.5.2 [16] *La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt.$$

De plus, on dit que la mesure logarithmique de F est finie si $m_l(F) < +\infty$.

Exemple 1.5.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e^4, e^6] \subset [1, +\infty[$ est*

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt = \int_{e^4}^{e^6} \frac{dt}{t} = 2.$$

Chapitre 2

Sur la Croissance des Solutions Méromorphes des Équations aux Différences

Dans ce chapitre, on va étudier les propriétés des solutions méromorphes de certains type d'equations aux différences linéaires homogènes et non homogènes de la forme

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_1(z)f(z+C_1)+A_0(z)f(z)=0 \tag{2.0.1}$$

et

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_1(z)f(z+C_1)+A_0(z)f(z)=F(z). \tag{2.0.2}$$

où $A_j(z)$ sont des fonctions entières et $f(z+C_j)$ sont des fonctions méromorphes avec C_j des constantes distinctes, $j=1,...,n$.

2.1 Les résultats principaux

Dans [9], Chiang et Feng ont étudié la croissance des solutions méromorphes le cas où il existe un seul coefficient dominant d'ordre maximal, et ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 [9] *Soient $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier $l, 0 \leq l \leq n$*

vérifiant

$$\max_{\substack{0\leq j\leq n\\ j\neq l}} \sigma(A_j) < \sigma(A_l).$$

Si $f(z)$ est une solution méromophe de l'équation (2.0.1) alors

$$\sigma(f) \geq \sigma(A_l)+1.$$

Théorème 2.1.2 [9] *Soient* C_j, $j = 1, ..., n$ *des contantes distinctes et* $A_0(z), A_1(z), ..., A_n(z)$ des fonctions entières d'ordre fini, tel qu'il existe un coefficient d'ordre maximal

$$\sigma = \max_{0 \leq j \leq n} \{\sigma(A_j)\}$$

et ayant un type supérieur au type des autres coefficients. Alors pour toute solution méromorphe $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation (2.0.1), on a

$$\sigma(f) \geq \sigma + 1.$$

Théorème 2.1.3 [6] *Soit* C_j *des constantes distinctes et soit*

$$A_j(z) = P_j(z) \exp\{h_j(z)\} + Q_j(z),\ j = 1, ..., n.$$

où $h_j(z)$ sont des polynômes de degré $k \geq 1$, et $P_j(z) \not\equiv 0, Q_j(z)$ sont des fonctions entières dont l'ordre est inférieur à k. Parmi les coefficients $a_j$de $h_j(z)$, avec le plus grand module il existe un terme différent des autres termes. Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation suivante

$$A_n(z) f(z + C_n) + A_{n-1}(z) f(z + C_{n-1}) + ... + A_1(z) f(z + C_1) = 0, \tag{2.1.1}$$

alors

$$\sigma(f) \geq k + 1.$$

Corollaire 2.1.1 [6] *Supposons que* k *et* $A_j(z), j = 1, ..., n$ *vérifient les assertions du*

Théorème 2.1.3, soit $B_i(z), i = 1, ..., m$, des fonctions entières d'ordre inférieur à k, et soit $C_j, j = 1, ..., n + m$, des constantes distinctes. Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation suivante

$$B_m(z) f(z + C_{n+m}) + ... + B_1(z) f(z + C_{n+1}) + A_n(z) f(z + C_n)$$

$$+ A_{n-1}(z) f(z + C_{n-1}) + ... + A_1(z) f(z + C_1) = 0, \tag{2.1.2}$$

alors

$$\sigma(f) \geq k + 1.$$

Corollaire 2.1.2 [6]*Soient* $C_j, j = 1, 2$ *des constantes distinctes non nulles, soit* $h_j(z)$, $j = 1, 2$, des polynômes, et soit $A_j(z) \not\equiv 0,\ j = 0, 1, 2$ des fonctions entières telles que

$$\max\{\sigma(A_j), 0 \leq j \leq 2\} < \max\{\deg h_1, \deg h_2\}.$$

Si $f(z) \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de l'équation suivante

$$A_2(z) \exp\{h_2(z)\} f(z + C_2) + A_1(z) \exp\{h_1(z)\} f(z + C_1) + A_0(z) f(z) = 0, \tag{2.1.3}$$

alors

$$\sigma(f) \geq \max\{\deg h_1, \deg h_2\} + 1.$$

Pour démontrer le Théorème 2.1.3 et le Corolaire 2.1.1 on a besoin des lemmes suivants

Lemme 2.1.1 [3]*Supposons que $f(z)$ est une fonction méromorphe avec $\sigma(f) = \sigma < +\infty$.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble $E \subset [1, +\infty[$ de mesure linéaire finie ou de mesure logarithmique finie tel que Pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, $r \to +\infty$, on a

$$|f(z)| \leq \exp r^{\sigma+\varepsilon}.$$

Lemme 2.1.2 [9] *Soient η_1 et η_2 deux nombres complexes arbitraires et soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini σ.*

1/ Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right) = O(r^{\sigma-1+\varepsilon}).$$

2/ Il existe un sous-ensemble $E \subset [0, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, $r \to +\infty$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\exp\left\{-r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\} \leq \left|\frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\}.$$

Preuve de Thorème 2.1.3 : [9]
On suppose que $\sigma(f) < k+1$. Posons

$$h_j(z) = a_{jk} z^k + h_j^*(z), \tag{2.1.4}$$

où $a_{jk} \neq 0$ sont des constantes et $h_j^*(z)$ sont des polynômes de $\deg h_j^* \leq k-1, j = 1, ..., n$. Fixons

$$I = \left\{ i : |a_{ik}| = \max_{1\leq j\leq n} |a_{jk}| \right\}, \ \theta_j = \arg a_{jk} \in [0, 2\pi), \ j \in I.$$

Il existe $l \in I$ tel que $a_{lk} \neq a_{jk}$, $j \in I \diagdown \setminus \{l\}$. De cette assertion et les définitions de I et θ_j, on conclut que

$$|a_{jk}| = |a_{lk}|, \ \theta_j \neq \theta_l, \ j \in I \diagdown \{l\}.$$

On choisit maintenant θ tel que

$$\cos(k\theta + \theta_l) = 1. \tag{2.1.5}$$

Ainsi, pour $\theta_j \neq \theta_l$, $j \in I \diagdown \{l\}$, on trouve

$$\cos(k\theta + \theta_j) < 1, \ j \in I \diagdown \{l\}. \tag{2.1.6}$$

On note

$$\begin{aligned} a &= \max_{1\leq j\leq n} \{|a_{jk}|\}, \\ b &= \max_{j\notin I} \{|a_{jk}|\}, \\ c &= \max\{b, a\cos(k\theta + \theta_j), j \in I \diagdown \{l\}\} < a, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

et

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(f) < k+1, \\ \beta &= \max_{1\leq j\leq n} \{\sigma(P_j), \sigma(Q_j)\} < k. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{P_j}{P_l}\right) &\leq \max\{\sigma(P_j), \sigma(P_l)\} \leq \beta,\ 1\leq j\leq n,\ j\neq l, \\ \sigma\left(\frac{Q_j}{P_l}\right) &\leq \max\{\sigma(Q_j), \sigma(Q_l)\} \leq \beta,\ 1\leq j\leq n. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.1.1, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 < 2\varepsilon < \min\{1, k+1-\sigma, k-\beta, a-c\},$$

il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\right| &\leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\},\ 1\leq j\leq n, j\neq l, \\ \left|\frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right| &\leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\},\ 1\leq j\leq n. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Il est clair que $\exp\{-h_l^*(z)\}$ est d'ordre régulier $\deg h_l^*$ et $\exp\left\{h_j^*(z)\right\}$, $1\leq j\leq n$, $j\neq l$, est d'ordre régulier $\deg h_j^*$. On note que $\deg h_j^* \leq k-1$, $1\leq j\leq n$. Puis, pour tout z, $|z| = r$, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\exp\left(-h_l^*(z)\right)\right| &\leq \exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}\right\}, \\ \left|\exp\left\{h_j^*(z)\right\}\right| &\leq \exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}\right\},\ 1\leq j\leq n,\ j\neq l. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

En appliquant le Lemme 2.1.2 à $f(z)$, on conclut qu'il existe un ensemble $E_2 \subset [1, +\infty[$ avec une mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_2 \cup [0,1]$, on peut écrire

$$\left|\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\},\ 1\leq j\leq n,\ j\neq l. \tag{2.1.11}$$

En utilisant les équations (2.1.1) et (2.1.4), on obtient

$$A_n f(z+C_n) + A_{n-1} f(z+C_{n-1}) + ... + A_l f(z+C_l) + ... + A_1 f(z+C_1) = 0,$$

d'où

$$-A_l(z) = \sum_{j\in I\setminus\{l\}} A_j(z)\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)} + \sum_{j\notin I} A_j(z)\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}$$

où

$$-A_l(z) = P_l(z)\exp\left\{a_{lk}z^k + h_l^*(z)\right\} + Q_l(z).$$

Donc

$$-\left(P_l(z)\exp\left\{a_{lk}z^k+h_l^*(z)\right\}+Q_l(z)\right)=\sum_{j\in I\setminus\{l\}}A_j(z)\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}+\sum_{j\notin I}A_j(z)\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}$$

d'où

$$\begin{aligned}-\exp\left\{a_{lk}z^k\right\} &= \sum_{j\in I\setminus\{l\}}\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\}+\frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right)\\ &+\sum_{j\notin I}\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\}+\frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right)\\ &+\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{Q_l(z)}{P_l(z)}. \qquad (2.1.12)\end{aligned}$$

On prend $z=r\exp i\theta$, où $r\notin E_1\cup E_2\cup[0,1]$. En utilisant de (2.1.5) à (2.1.7) et de (2.1.9) à (2.1.11) dans (2.1.12) , on trouve

$$\begin{aligned}&\left|-\exp\left\{a_{lk}r^k\exp(ik\theta)\right\}\right|\\ =&\left|\sum_{j\in I\setminus\{l\}}\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}r^k\exp(ik\theta)\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\}+\frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right)\right.\\ &+\sum_{j\notin I}\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}r^k\exp(ik\theta)\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\}+\frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right)\\ &\left.+\exp\left\{-h_l^*(z)\right\}\frac{Q_l}{P_l}\right|,\end{aligned}$$

d'où

$$\exp|a_{lk}|\,r^k\le\sum_{j\in I\setminus\{l\}}\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\left(\exp\left\{a\cos(k\theta+\theta_j)\,r^k+r^{k-1+\varepsilon}\right\}+1\right)$$

$$+\sum_{j\notin I}\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\left(\exp\left\{(b+\varepsilon)r^k+2r^{k-1+\varepsilon}\right\}+1\right)+\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}$$

donc

$$\exp ar^k\le n\exp\left\{(c+\varepsilon)\,r^k+2r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\le n\exp\left\{(c+2\varepsilon)\,r^k\right\}. \qquad (2.1.13)$$

On divise les deux côtés de (2.1.13) par $\exp\left\{ar^k\right\}$ et par passage à la limite quand $r\to+\infty$, on obtient $1\le 0$.C'est une contradiction, par conséquent $\sigma(f)\ge k+1$.

Preuve du Corollaire 2.1.1 : [9]

On suppose que $\sigma(f)<k+1$. En utilisant la même méthode dans la preuve du Théorème 2.1.3, on obtient les relations de (2.1.4) à (2.1.10). D'après le Lemme 2.1.1, il existe un ensemble

$E_3 \subset [1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_3 \cup [0,1]$, on a

$$|B_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\beta_1+\varepsilon}\right\},\ 1 \leq j \leq m,$$

où $\beta_1 = \max\{\sigma(B_j), 1 \leq j \leq m\} < k$. On pose

$$\gamma = \max\{\sigma(B_j), \sigma(P_l)\} < k,$$

et

$$\sigma\left(\frac{B_j(z)}{P_l(z)}\right) \leq \max\{\sigma(B_j), \sigma(P_l)\} \leq \gamma,\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq l.$$

En appliquant le Lemme 2.1.1, pout tout $\varepsilon > 0$,

$$0 < 2\varepsilon < \min\{1, k+1-\sigma, k-\gamma, a-c\},$$

et le Lemme 2.1.2 à $f(z)$, on conclut qu'il existe un ensemble $E_4 \subset [1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_4 \cup [0,1]$, nous avons

$$\left|\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma-1+\varepsilon}\right\},\ 1 \leq j \leq n+m,\ j \neq l, \tag{2.1.14}$$

et

$$\left|\frac{B_j(z)}{P_l(z)}\right| \leq \exp\left\{r^{\gamma+\varepsilon}\right\}. \tag{2.1.15}$$

En vertu de (2.1.2) et (2.1.4), on trouve

$$\begin{aligned} -\exp\left\{a_{lk}z^k\right\} &= \sum_{j\in I\setminus\{l\}} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\} + \frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right) \\ &+ \sum_{j\notin I} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\} + \frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right) \\ &+ \sum_{j=n+1}^{n+m} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\frac{B_j(z)}{P_l(z)} + \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{Q_l(z)}{P_l(z)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|-\exp\left\{a_{lk}z^k\right\}\right| = \Bigg| &\sum_{j\in I\setminus\{l\}} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\} + \frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right) \\ &+ \sum_{j\notin I} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\left(\frac{P_j(z)}{P_l(z)}\exp\left\{a_{jk}z^k\right\}\exp\left\{h_j^*(z)\right\} + \frac{Q_j(z)}{P_l(z)}\right) \\ &+ \sum_{j=n+1}^{n+m} \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{f(z+C_j)}{f(z+C_l)}\frac{B_j(z)}{P_l(z)} + \exp\{-h_l^*(z)\}\frac{Q_l(z)}{P_l(z)}\Bigg|. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Soit $z = r\exp\{i\theta\}$, où $r \notin E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup [0,1]$. En remplaçant de (2.1.5) à (2.1.10), (2.1.14) et (2.1.15) dans (2.1.16) on obtient

$$
\begin{aligned}
\exp|a_{lk}|\, r^k &\leq \sum_{j\in I\setminus\{l\}} \exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\left(\exp\left\{a\cos(k\theta+\theta_j)\, r^k+r^{k-1+\varepsilon}\right\}+1\right)\\
&+\sum_{j\notin I}\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\left(\exp\left\{(b+\varepsilon)r^k+2r^{k-1+\varepsilon}\right\}+1\right)\\
&+\sum_{j=n+1}^{n+m}\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\gamma+\varepsilon}\right\}+\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\beta+\varepsilon}\right\}\\
\exp\left\{ar^k\right\} &\leq n\exp\left\{(c+2\varepsilon)\, r^k+2r^{k-1+\epsilon}+r^{\sigma-1+\epsilon}+r^{\beta+\epsilon}\right\}+m\exp\left\{r^{\gamma+\epsilon}+r^{\sigma-1+\epsilon}+r^{k-1+\varepsilon}\right\}\\
&\leq n\exp\left\{(c+2\varepsilon)\, r^k\right\}+m\exp\left\{r^{k-1+\varepsilon}+r^{\sigma-1+\varepsilon}+r^{\gamma+\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}
$$

On divise les deux côtés par $\exp\left\{ar^k\right\}$ et par passage à la limite pour $r\to+\infty$, on trouve $1\leq 0$, c'est une contradiction. Par conséquant, $\sigma(f)\geq k+1$ est vrai.

Exemple 2.1.1 *Soit la fonction entière $f(z)=\exp\{z^2\}$ solution de l'équation aux différence*

$$\exp\{-2iz\}\, f(z+i)+\exp\{2iz\}\, f(z-i)-2\exp\{-1\}\, f(z)=0.$$

On a $\sigma(\exp\{-2iz\})=\sigma(\exp\{2iz\})=\deg\{-2iz\}=\deg\{2iz\}=1$ et

$$\sigma(f)=\sigma\left(\exp\left\{z^2\right\}\right)=\deg\left\{z^2\right\}=2.$$

D'après le Théorème 2.1.3, on a

$$\sigma(f)\geq\max\{\sigma(A_j):j=2,3\}+1.$$

donc

$$\sigma(f)=\deg\{-2iz\}+1=\deg\{2iz\}+1=2.$$

Théorème 2.1.4 [5]*Soient $A_j(z), j=1,...,n$ des fonctions entières telles qu'il existe*

au moins un coefficient A_j fonction transcendante et $C_j, j=1,...,n$, des constantes distinctes. Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante d'ordre fini de l'équation au différence linéaire homogène (2.1.1) vérifiant

$$\sigma(f)>\max\{\sigma(A_j), 1\leq j\leq n\}+1,$$

alors

$$\lambda(f)\geq\sigma(f)-1.$$

De plus, si $n=2$, alors

$$\lambda(f)=\sigma(f).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1.3 [15] *Supposons que* $f_1, f_2, ..., f_n$ $(n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes vérifiant les conditions suivantes :*

$i/ \sum_{j=1}^{n} C_j f_j(z) \equiv 0$, avec C_j sont des constantes.
$ii/\ f_j(z) \not\equiv 0$ et $\frac{f_j}{f_k} \neq cst$ pour $1 \leq j \leq k \leq n$.
$iii/ \sum_{j=1}^{n} \left[N(r, f_j) + N\left(r, \frac{1}{f_j}\right)\right] = o\left\{\min_{1\leq j\leq k\leq n} T\left(r, \frac{f_j}{f_k}\right)\right\}$, $r \to +\infty$, $r \notin E$,
où $E \subset [1, +\infty[$ de mesure linéaire finie ou de mesure logarithmique finie.
Alors

$$C_j = 0, \ j = 1, ..., n.$$

Lemme 2.1.4 [15] *Supposons que* $f_1, f_2, ..., f_n, (n \geq 2)$ *sont des fonctions méromorphes et* $g_1, g_2, ..., g_n$ *sont des fonctions entières vérifiant les conditions suivants*

$i/ \sum_{j=1}^{n} f_j(z) \exp\{g_j(z)\} \equiv 0$.
$ii/ g_j(z) - g_k(z)$ n'est pas constante pour : $1 \leq j \leq k \leq n$.
$iii/$Pour $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h \leq k \leq n$,

$$T(r, f_j) = o\{T(r, \exp\{g_h - g_k\})\}, (r \to +\infty, r \notin E),$$

où $E \subset [1, \infty[$est de mesure linéaire finie ou de mesure logarithmique finie.
Alors

$$f_j(z) \equiv 0, (j = 1, ..., n).$$

Preuve : [15] La condition (i) se traduit par

$$f_1(z) \exp\{g_1(z)\} + f_2(z) \exp\{g_2(z)\} \equiv 0.$$

Si $f_j(z) \not\equiv 0, j = 1, 2$, on prend $f_1(z) \not\equiv 0$, alors

$$\exp\{g_1(z) - g_2(z)\} = -\frac{f_2(z)}{f_1(z)}.$$

D'après la condition (iii), on obtient

$$\begin{aligned} T(r, \exp\{g_1(z) - g_2(z)\}) &= T\left(r, \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right) \\ &\leq T(r, f_2) + T(r, f_1) + O(1) \\ &= o\{T(r, \exp\{g_1(z) - g_2(z)\})\}, \end{aligned}$$

alors $f_j(z) \equiv 0, j = 1, 2$. Contradiction avec $f_1(z) \not\equiv 0$. Donc le lemme est vérifié pour $n = 2$. Maintenant on suppose que le lemme est vrai pour $n \geq 2$. Dans la suite, on démontre pour $(n + 1)$, on suppose que $f_j(z), g_j(z), j = 1, ..., n + 1$ vérifient les conditions du Lemme 2.1.4 et que un $f_j(z) \not\equiv 0, j = 1, ..., n + 1$. Si $f_j(z) \equiv 0, j = 1, ..., n + 1$, on prend $f_{n+1}(z) \equiv 0$, alors d'après l'identité

$$\sum_{j=1}^{n+1} f_j(z) \exp\{g_j(z)\} \equiv 0, \tag{2.1.17}$$

on trouve

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) \exp\{g_j(z)\} \equiv 0.$$

Par conséquent $f_j(z)(j = 1, ..., n)$ vérifient les conditions du lemme. D'après la supposition du lemme est vrai pour n, donc $f_j(z) \equiv 0,\ j = 1, ..., n$ et $f_j(z) \equiv 0,\ j = 1, ..., n+1$ est une contradiction avec la supposition au dessus. Donc $f_j(z) \not\equiv 0, j = 1, ..., n+1$ par suite $f_j(z) \equiv 0, j = 1, ..., n+1$. Soit $F_j(z) = f_j(z)\exp\{g_j(z)\}$ et $C_j = 1, j = 1, ..., n+1$. D'après (2.1.17) on obtient

$$\sum_{j=1}^{n+1} C_j F_j(z) \equiv 0$$

Évidement $F_j(z) \not\equiv 0, j = 1, ..., n+1$, et il est simple de voir que

$$\frac{F_j(z)}{F_k(z)} \neq const, \text{ pour } 1 \leq j \leq k \leq n+1.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} N(r, F_j) + N\left(r, \frac{1}{F_j}\right) &\leq N(r, f_j) + N\left(r, \frac{1}{f_j}\right) \\ &\leq 2T(r, f_j) + O(1) \\ &= o\{T(r, \exp\{g_h - g_k\}\},\ r \to +\infty,\ r \notin E. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Pour $j = 1, ..., n+1$, $1 \leq h \leq k \leq n+1$

$$\frac{F_h}{F_k} = \frac{f_h}{f_k} \exp\{g_h - g_k\}$$

on obtient

$$\begin{aligned} T(r, \exp\{g_h - g_k\}) &= T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\frac{f_k}{f_h}\right) \\ &\leq T(r, f_k) + T(r, f_h) + T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right) + O(1) \\ &= o\{T(r, \exp\{g_h - g_k\})\} + T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right) + O(1) \\ &= o\{T(r, \exp\{g_h - g_k\})\} + T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right), r \to +\infty, r \notin E. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r, \exp\{g_h - g_k\}) = O\left\{T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right)\right\},\ r \notin E. \tag{2.1.19}$$

D'après (2.1.18) et (2.1.19), on aura

$$N(r, F_j) + N\left(r, \frac{1}{F_j}\right) = o\left\{T\left(r, \frac{F_h}{F_k}\right)\right\}, r \to +\infty, r \notin E.$$

Pour $j = 1, ..., n+1, 1 \leq h \leq k \leq n+1$, $F_j(z), (j = 1, ..., n+1)$ vérifient les conditions du Lemme 2.1.3. Si $C_j = 0$ $(j = 1, ..., n+1)$ c'est une contradiction avec $C_j = 1$.

Peuve du Théorème 2.1.4 : [5]

On suppose le contraire $\lambda(f) < \sigma(f) - 1$. Alors on peut réprésenter f par

$$f(z) = H(z) \exp\{h(z)\}, \tag{2.1.20}$$

où $H(z) \not\equiv 0$ est le produit canonique (ou polynômial) formé des zéros de f et

$$\lambda(H) = \sigma(H) = \lambda(f) < \sigma(f) - 1,$$

et

$$h(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + ... + a_0, \tag{2.1.21}$$

est un polynôme, $a_k \neq 0$, $a_{k-1}, ..., a_0$ sont des constantes. En remplaçant (2.1.20) dans (2.1.1) on obtient

$$A_n(z)H(z+C_n)\exp\{h(z+C_n)\} + ... + A_1(z)H(z+C_1)\exp\{h(z+C_1)\} = 0 \tag{2.1.22}$$

où

$$\lambda(f) < \sigma(f) - 1$$

d'où

$$\sigma(f) > \lambda(f) + 1,$$

donc $\sigma(f) = k \geq 2$. Comme $\deg h(z) = k \geq 2$, en remplaçant (2.1.21) dans (2.1.22) on conclut que

$$A_n H(z+C_n)\exp\left\{k a_k C_n z^{k-1} + ...\right\} + ... + A_1 H(z+C_1)\exp\left\{k a_k C_1 z^{k-1} + ...\right\} = 0. \tag{2.1.23}$$

Comme $\sigma(f) > \max\{\sigma(A_j) : 1 \leq j \leq n\} + 1$ et C_j, $j = 1, ..., n$ sont distincts, on sait que pour $j \neq s, 1 \leq j < s \leq n$. On divise l'équation (2.1.22) par $\exp\{h(z+C_s)\}$, on obtient

$$A_n(z) H(z+C_n)\exp\{h(z+C_n) - h(z+C_s)\} + ...$$

$$+A_1(z) H(z+C_1)\exp\{h(z+C_1) - h(z+C_s)\} = 0,$$

et d'après la formule (2.1.21), on trouve

$$A_n(z) H(z+C_n)\exp\left\{k a_k (C_n - C_s) z^{k-1} + ...\right\} + ...$$

$$+A_1(z) H(z+C_1)\exp\left\{k a_k (C_n - C_1) z^{k-1} + ...\right\} = 0.$$

Alors

$$\sigma\left(\exp\left\{k a_k (C_j - C_s) z^{k-1} + ... + a_0\right\}\right) = k - 1,$$

est d'ordre régulier

$$\sigma(A_j) < k - 1, (j = 1, ..., n),$$

et

$$\sigma(H) < k-1,$$

on obtient pour $1 \leq j \leq n, 1 \leq s < d \leq n$.

$$T(r, A_j(z)\, H(z+C_j)) = o\left\{T(r, \exp\left\{ka_k(C_d - C_s)z^{k-1} + ... + a_0\right\}\right\}. \tag{2.1.24}$$

D'après le Lemme 2.1.4 et (2.1.23), (2.1.24) on trouve

$$A_j(z)\, H(z+C_j) \equiv 0, j = 1, ..., n.$$

Contradiction avec la supposition qu'il existe un A_j fonction transcendante, donc

$$\lambda(f) \geq \sigma(f) - 1.$$

Pour $n = 2$. On suppose que $\lambda(f) < \sigma(f)$. En utilisant une méthode similaire à ci-dessus on obtient

$$A_2(z)H(z+C_2)\exp\{h(z+C_2)\} + A_1(z)H(z+C_1)\exp\{h(z+C_1)\} = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} -A_1(z) &= A_2(z)\frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}\exp\{h(z+C_2) - h(z+C_1)\} \\ &= A_2(z)\frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}\exp\left\{ka_k(C_2 - C_1)z^{k-1} + ...\right\}. \end{aligned} \tag{2.1.25}$$

Par $A_j(z) \not\equiv 0$, $j = 1, 2$, et (2.1.25) on a $A_1 \not\equiv 0$ on obtient

$$-A_1(z)\exp - \left\{ka_k(C_2 - C_1)z^{k-1} + ...\right\} = A_2(z)\frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}. \tag{2.1.26}$$

D'après le Lemme 2.1.2 la propriétés (1) et (2.1.26) pour tout $\varepsilon > 0$ vérifient $0 < 2\varepsilon < \sigma(f)$ $-\lambda(f)$ on trouve

$$T\left(r, -A_1(z)\exp - \left\{ka_k(C_2 - C_1)z^{k-1} + ...\right\}\right) = T\left(r, A_2(z)\frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} m\left(r, -A_1(z)\exp - \left\{ka_k(C_2 - C_1)z^{k-1} + ...\right\}\right) &= m\left(r, A_2(z)\frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}\right) \\ &\leq m(r, A_2(z)) + m\left(r, \frac{H(z+C_2)}{H(z+C_1)}\right) \\ &\leq m(r, A_2(z)) + O\left(r^{\sigma(H)-1+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

et $\max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2)\} < k-1$, $k = \sigma(f) > \sigma(H) + \varepsilon$. C'est une contradiction. Donc $\lambda(f) = \sigma(f)$ pour $n = 2$.

Théorème 2.1.5 [5]*Soient* $F(z)$, $A_j(z)$, $j = 1, ..., n$ *des fonctions entières telles que*

$F(z)A_n(z) \not\equiv 0$, et soit C_k, $k = 1, ..., n$ des constantes distinctes. Supposons que $f(z)$ est une solution entière d'ordre fini de l'équation au différence linéaire non homogène

$$A_n(z)f(z+C_n) + A_{n-1}f(z+C_{n-1}) + ... + A_1(z)f(z+C_1) = F(z). \tag{2.1.27}$$

Si

$$\sigma(f) > \max\{\sigma(F), \sigma(A_j), \ 1 \le j \le n\},$$

alors

$$\lambda(f) = \sigma(f).$$

Preuve : [5] On suppose que $\lambda(f) < \sigma(f) = k$. On utilise la même méthode de la preuve du Théorème 2.1.4, on trouve (2.1.20) et (2.1.21) où $\lambda(H) = \sigma(H) = \lambda(f) < \sigma(f) = k$. En remplaçant (2.1.20) et (2.1.21) dans (2.1.27) on obtient

$$\begin{aligned} & A_n(z) H(z+C_n) \exp\left\{ka_k C_n z^{k-1} + ...\right\} + ... + A_1(z) H(z+C_1) \exp\left\{ka_k C_1 z^{k-1} + ...\right\} \\ = \quad & F(z) \exp - \left\{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1}\right\} \end{aligned}$$

Puisque $\max\{\sigma(F), \sigma(A_j) : j = 1, ..., n\} < \sigma(f) = k$ et $\sigma(H) < k$, on obtient

$$\sigma\left(A_n(z)H(z+C_n)\exp\left\{ka_kC_nz^{k-1} + ...\right\}\right.$$

$$\left. + ... + A_1(z)H(z+C_1)\exp\left\{ka_kC_1z^{k-1} + ...\right\}\right) < k$$

mais

$$\sigma\left(F(z)\exp - \left\{a_kz^k + a_{k-1}z^{k-1}\right\}\right) = k.$$

C'est une contradiction, donc

$$\lambda(f) = \sigma(f).$$

Exemple 2.1.2 *Soit la fonction entière* $f(z) = \exp\{z^2\} - z$ *solution de l'équation au différence*

$$f(z+1) - \exp\{2z+1\} f(z) = z\exp\{2z+1\} - (z+1).$$

On a $\sigma(f) = \deg\{z^2\} = 2$, $F(z) = z\exp\{2z+1\} - (z+1)$, alors $\sigma(F) = \deg\{2z+1\} = 1$, et $\sigma(A_1) = \sigma(1) = 0$, $\sigma(A_0) = \sigma(\exp\{2z+1\}) = 1$, donc

$$\sigma(f) > \max\{\sigma(F), \sigma(A_0), \sigma(A_1)\}$$

alors d'après le Théorème 2.1.5

$$\lambda(f) = \sigma(f) = 2.$$

Théorème 2.1.6 [6] *Soit C_j, $j = 1, ..., n$ des constantes distinctes et soit $A_j(z) \not\equiv 0$,*

$j = 1, ..., n$ des fonctions entières d'ordre fini. Supposons que $f(z)$ est une solution entière de l'équation (2.1.1) d'ordre fini telle que

$$\sigma(f) > \max\{\sigma(A_j), 1 \leq j \leq n\} + 1,$$

alors $f(z)$ prend toute valeur finie d infiniment de fois et

$$\lambda(f - d) = \sigma(f).$$

Preuve : [6] Considérons les deux cas suivants
Case1 : $d = 0$. On suppose que $\lambda(f) < \sigma(f)$. Alors $f(z)$ peut être répresenté par (2.1.20) on trouve

$$\lambda(H) = \sigma(H) = \lambda(f) < \sigma(f).$$

et (2.1.21) pour $k \in \mathbb{N}^+$ satisfait $k = \sigma(f) > \lambda(f)$. En remplaçent (2.1.20) dans (2.1.1), on obtient (2.1.22) et on divise par $\exp\{h(z + C_1)\}$, on aura

$$\begin{aligned} &A_n(z)H(z + C_n)\exp\{h(z + C_n) - h(z + C_1)\} \\ &\quad + ... + A_1(z)H(z + C_1) = 0. \end{aligned} \tag{2.1.28}$$

Puisque

$$\sigma(f) > \max\{\sigma(A_j) : 1 \leq j \leq n\} + 1,$$

on conclut que $\deg h(z) = k \geq 2$. En vertu de (2.1.21), on obtient

$$h(z + C_j) - h(z + C_1) = ka_k(C_j - C_1)z^{k-1} + h_j^*(z), \tag{2.1.29}$$

où h_j^*sont des polynômes avec $\deg h_j^* \leq k - 2$, $j = 2, ..., n$. Fixons

$$I = \left\{ i : |C_i - C_1| = \max_{2 \leq j \leq n} |C_j - C_1| \right\}.$$

Dans ce qui suit, on considère deux cas
Cas1.1 : I contient exactement un terme. Sans perte de généralité, supposons que $I = \{n\}$. D'après $\sigma(A_j) < \sigma(f) - 1 = k - 1$, $j = 1, ..., n$, et (2.1.29), on trouve

$$\sigma(A_j \exp\{h(z + C_j) - h(z + C_1)\}) = \deg(h(z + C_j) - h(z + C_1)) = k - 1, \;\; j = 2, ..., n.$$

D'après la définition de I et $I = \{n\}$, on conclut que dans l'équation (2.1.28),

$$\tau(A_n \exp\{h(z + C_n) - h(z + C_1)\}) > \tau(A_j \exp\{h(z + C_j) - h(z + C_1)\}), \;\; j = 2, ..., n$$

d'où

$$k|a_k(C_n - C_1)| > k|a_k(C_j - C_1)|, \;\; j = 2, ..., n - 1.$$

Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.1.2 à l'équation (2.1.28), on obtient

$$\sigma(H) \geq (k - 1) + 1 = \sigma(f).$$

Ainsi, on arrive à une contradiction. Donc $\lambda(f) = \sigma(f)$.
Cas1.2 : I contient plus d'un terme. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$I = \{s, s+1, ..., n\}, 2 \leq s \leq n.$$

Fixons

$$a_k = |a_k| \exp i\theta_0, \ \theta_j = \arg(C_j - C_1), \ j = s, ..., n.$$

Il découle de la définition de I que

$$\begin{aligned} |C_j - C_1| &< |C_n - C_1|, \ j = 1, ..., s-1, \\ |C_j - C_1| &= |C_n - C_1|, \ j = s, ..., n. \end{aligned}$$

Puisque C_j et θ_j sont des constantes distinctes, nous pouvons choisir $\theta \in [0, 2\pi)$ tel que

$$\cos((k-1)\theta + \theta_0 + \theta_n) = 1. \tag{2.1.30}$$

Pour $\theta_j \neq \theta_n$, $j = s, ..., n-1$, et (2.1.30) on conclut que

$$\cos((k-1)\theta + \theta_0 + \theta_j) < 1, \ j = s, ..., n-1. \tag{2.1.31}$$

On note

$$\begin{aligned} a &= |a_k(C_n - C_1)|, \ \beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{|a_k(C_j - C_1)|\}, \\ b &= \max_{s \leq j \leq n-1} \{a \cos((k-1)\theta + \theta_0 + \theta_j), \beta\}, \ \alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \{\sigma(A_j), \lambda(f), k-2\} \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

Évidement,

$$\beta < a, \ b < a, \ \alpha < k-1. \tag{2.1.33}$$

Par le Lemme 2.1.1 pour tout ε, $0 < \varepsilon < \min\{k-1-\alpha, 1\}$, il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on peut écrire

$$\left|\frac{A_j(z)}{A_n(z)}\right| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \ j = 1, ..., n-1. \tag{2.1.34}$$

On sait que les deux $\exp\left\{-h_j^*\right\}$ et $\exp\left\{h_j^* - h_n^*\right\}$ sont d'ordre régulier inférieur à $k-2 \leq \alpha$. Pour z assez grand $|z| = r$, on trouve

$$|\exp\{-h_n^*\}| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \ \left|\exp\left\{h_j^* - h_n^*\right\}\right| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \ j = 2, ..., n. \tag{2.1.35}$$

En appliquant le Lemme 2.1.2 à $H(z)$, on conclut qu'il existe un ensemble $E_2 \subset [1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$, on obtient

$$\left|\frac{H(z+C_j)}{H(z+C_n)}\right| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}, j = 1, ..., n-1. \tag{2.1.36}$$

D'après (2.1.28) , on aura

$$\begin{aligned}-\exp\left\{ka_k(C_n-C_1)z^{k-1}\right\} \;=\; & \sum_{j=s}^{n-1}\frac{A_j}{A_n}\frac{H(z+C_j)}{H(z+C_n)}\exp\left\{h_j^*-h_n^*\right\}\exp\left\{ka_k(C_j-C_1)z^{k-1}\right\}\\ & +\sum_{j=2}^{s-1}\frac{A_j}{A_n}\frac{H(z+C_j)}{H(z+C_n)}\exp\left\{h_j^*-h_n^*\right\}\exp\left\{ka_k(C_j-C_1)z^{k-1}\right\}\\ & +\frac{A_1}{A_n}\frac{H(z+C_1)}{H(z+C_n)}\exp\left\{-h_n^*\right\}. \qquad (2.1.37)\end{aligned}$$

On prend $z = r\exp i\theta$, où $r \notin [0,1]\cup E_1\cup E_2$. En remplaçant de (2.1.30) à (2.1.36) dans (2.1.37) , on trouve

$$\begin{aligned}\exp\left\{kar^{k-1}\right\} &\leq (n-2)\exp\left\{3r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\exp\left\{kbr^{k-1}\right\}+\exp\left\{3r^{\alpha+\varepsilon}\right\}\\ &\leq (n-1)\exp\left\{kbr^{k-1}+3r^{\alpha+\varepsilon}\right\}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$1\leq (n-1)\exp\left\{3r^{\alpha+\varepsilon}+kbr^{k-1}-kar^{k-1}\right\}.$$

Par passage à la limite quand $r\to+\infty$, et d'après (2.1.33), on trouve

$$1\leq 0.$$

C'est une contradiction. Donc

$$\lambda(f)=\sigma(f).$$

Cas 2 : $d\neq 0$. On définit

$$g(z)=f(z)-d.$$

d'où

$$f(z)=g(z)+d \qquad (2.1.38)$$

et

$$\sigma(g)=\sigma(f)>\max\left\{\sigma(A_j):1\leq j\leq n\right\}+1. \qquad (2.1.39)$$

En remplaçant (2.1.38) dans (2.1.1), on obtient

$$A_n(z)g(z+C_n)+...+A_1(z)g(z+C_1)=-d\left(A_n(z)+...+A_1(z)\right). \qquad (2.1.40)$$

Si $A_n(z)+...+A_1(z)\not\equiv 0$, en vertu de (2.1.39), (2.1.40) et le Théorème 2.1.5, on obtient

$$\lambda\left(g\right)=\sigma\left(g\right),$$

c'est-à-dire

$$\lambda\left(f-d\right)=\sigma\left(f\right).$$

Si $A_n(z)+...+A_1(z)\equiv 0$, alors $g(z)$ est une solution entière de l'équation au différence

$$A_n(z)g(z+C_n)+...+A_1(z)g(z+C_1)=0.$$

D'après (2.1.39) et le Cas 1 considéré ci-dessus, on conclut que

$$\lambda(g)=\sigma(g),$$

c'est à dire

$$\lambda(f-d)=\sigma(f).$$

L'analyse des Cas 1 et 2 démontre que $f(z)$ prend chaque valeur finie d infiniment de fois et

$$\lambda(f-d)=\sigma(f).$$

Exemple 2.1.3 *La fonction $f(z)=\exp\{z^2\}$ satisfait l'équation linéaire au différence*

$$f(z+1)-\exp\{2z+1\}f(z)=0.$$

Évidement, $A_1(z)\equiv-\exp\{2z+1\}$ et $A_2(z)\equiv 1$, on remarque que d'après l'exemple 2.1.1

$$\sigma(f)=2,$$

$\sigma(A_1(z))=\deg(2z+1)=1$ et $\sigma(A_2(z))=0$ et

$$\sigma(f)=\max\{\sigma(A_j):j=1,2\}+1=1+1=2.$$

mais $\lambda(f)=0<\sigma(f)$ car $(N(r,f)\equiv 0)$.
Cette exemple montre que la condition du Théorème 2.1.6, c'est-à-dire

$$\sigma(f)>\max\{\sigma(A_j):1\leq j\leq n\}+1,$$

ne peut pas être affaibli.

Corollaire 2.1.3 [6] *Sous les conditions du Théoème 2.1.6, pour toute fonction entière $\varphi(z)\not\equiv 0$ satisfaisant*

$$\sigma(\varphi)<\sigma(f),$$

nous avons

$$\lambda(f-\varphi)=\sigma(f).$$

Corollaire 2.1.4 [6] *Soit $h_1(z)$ et $h_2(z)$ des polynômes tels que*

$$h_1(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0$$

et

$$h_2(z)=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+...+b_0,$$

où $a_nb_n\neq 0$, soit $A_j(z)\not\equiv 0$, $j=0,1,2$ des fonctions entières d'ordre inférieur à $\max\{n,m\}$ et soit C_k, $k=1,2$ des constantes non nulles distinctes telles que $C_2a_n-C_1b_m\neq 0$, pour $n=m$. Si $f(z)\not\equiv 0$ est une solution entière d'ordre fini de l'équation 2.1.3, alors

$$\lambda(f)=\sigma(f)\geq\max\{n,m\}+1.$$

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que $n \geq m$. D'après le Corollaire 2.1.2, on sait que $\sigma(f) \geq n+1$.
Si $\sigma(f) > n+1$, alors par le Théorème 2.1.6, $\lambda(f) = \sigma(f)$. Donc, on peut supposer que $\sigma(f) = n+1$. Supppose que $\lambda(f) < \sigma(f)$, alors $f(z)$ peut être réprésenté par (2.1.20) où $H(z) \not\equiv 0$ est le produit canonique ou polynômial formé des zéros de f tel que

$$\sigma(H) = \lambda(H) = \lambda(f) < \sigma(f) = n+1.$$

et

$$h(z) = d_{n+1}z^{n+1} + d_n z^n + ... + d_0 \tag{2.1.41}$$

est un polynôme, $d_{n+1} \neq 0$, $d_n, ..., d_0$ sont des constantes. En remplaçant (2.1.20), (2.1.41) dans (2.1.2) et en divisant par $\exp\{h(z)\}$, on obtient

$$\begin{aligned} &A_2(z)\exp\{h(z+C_2) - h(z) + h_2(z)\} H(z+C_2) \\ &+ A_1(z)\exp\{h(z+C_1) - h(z) + h_1(z)\} H(z+C_1) + A_0(z) H(z) = 0. \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

En vertu de (2.1.41), on peut écrire

$$\begin{aligned} h(z+C_1) - h(z) + h_1(z) &= ((n+1) C_1 d_{n+1} + a_n) z^n + h_1^*(z), \\ h(z+C_2) - h(z) + h_2(z) &= (n+1) C_2 d_{n+1} z^n + b_m z^m + h_2^*(z), \end{aligned} \tag{2.1.43}$$

où $h_1^*(z)$ et $h_2^*(z)$ sont des polynômes de degré inférieur à $n-1$.
On considère les deux cas suivants
Cas1 : $n > m$. Si $(n+1) C_2 d_{n+1} \neq 0$, on peut écrire

$$\deg(h(z+C_2) - h(z) + h_2(z)) = n \geq \deg(h(z+C_1) - h(z) + h_1(z)).$$

En combinant cela avec (2.1.42) et le Corollaire 2.1.2, on obtient $\sigma(g) \geq n+1$. C'est une contradiction. Donc

$$\lambda(f) = \sigma(f) = n+1.$$

Cas2 : $n = m$. Si $(n+1) C_1 d_{n+1} + a_n \neq 0$, alors il résulte de (2.1.43) que

$$\deg h(z+C_1) - h(z) + h_1(z) = n \geq \deg(h(z+C_2) - h(z) + h_2(z)).$$

En combinant ceci avec (2.1.40) et le Corollaire 2.1.2, on conclut que

$$\sigma(H) \geq n+1 = \sigma(f).$$

C'est une contradiction. Donc

$$\lambda(f) = \sigma(f) = n+1.$$

Si $(n+1) C_1 d_{n+1} + a_n = 0$, alors pour $C_1 \neq 0$, on trouve

$$(n+1) C_2 d_{n+1} + b_m = -\frac{a_n}{C_1} C_2 + b_m = \frac{C_1 b_m - C_2 a_n}{C_1} \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\deg(h(z+C_2) - h(z) + h_2(z)) = n > \deg(h(z+C_1) - h(z) + h_1(z)),$$

avec (2.1.42) et le Corollaire 2.1.2, nous avons $\sigma(g) \geq n+1$, c'est une contradiction. Ainsi, $\lambda(f) = \sigma(f) = n+1$.
L'example 2.1.1 montre que la condition $2a_n - C_1 b_n \neq 0$ pour $n = m$ dans le Corollaire 2.1.4 ne peut pas être affaibli.

CONCLUSION

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance et l'oscillation des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires homogènes et non homogènes dont les coefficients sont des fonctions entières [2] , [9] , [10] , [13] .
Dans ce mémoire on a traité quelques résultats dus à Chen et Lan concernant les équations aux différences de la forme

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_1(z)f(z+C_1)=0$$

et

$$A_n(z)f(z+C_n)+A_{n-1}(z)f(z+C_{n-1})+...+A_1(z)f(z+C_1)=F(z),$$

où $A_j(j=1,...,n), F$ sont des fonctions entières, dans le cas où il n'existe aucun coefficient dominant, et on a donné une certaine relation entre l'ordre de croissance et l'exposant de convergence.
Finalement, la question qui se pose : est-ce qu'on peut généraliser les résultats des théorèmes précédents si on ajoute le coefficient A_0 dans les équations (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.27) ?

Bibliographie

[1] Belaïdi, B., Fonctions entières et théorie de Nevanlinna. Éditions Al Djazair, 2017.

[2] Chen, Z. X., Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations, J. Math. Anal. Appl., 373(2011), 235-241.

[3] Chen, Z. X., The growth of the solutions of second order differential equations with entire
coefficients, Chinese Ann. Math. Ser. A, 20(1999), 7-14.

[4] Chen, Z. X., The zeros, pole, and order of meromorphic solutions of differential equations with meromorphic coefficients, Kodai Math. J., 19, 341-354 (1996).

[5] Chen, Z. X., Zeros of entire solutions to complex linear difference equations, Acta. Math. Sci., 32, No. 3, 1083-1092 (2012).

[6] Chen, Z. X. and Lan, ST., On the Growth of Meromorphic Solutions of Difference Equations, Ukr Math J (2017) 68 : 1808. https ://doi.org/10.1007/s11253-017-1329-3.

[7] Chen, Z. X. and Shon, K. H., Estimates for zeros of diffrences of meromorphic functions, Sci. China Ser. A, 52, No. 11, 2447-2458 (2009).

[8] Chen, Z. X. and Shon, K. H., On the growth and fixed points of solutions of second order differential equation with meromorphic coefficients. Acta Math. Sin. Engl. Ser. 21(4), 753-764 (2005).

[9] Chiang, Y. M. and Feng, S. J., On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and diffrence equations in the complex plane, Ramanujan J., 16, 105-129 (2008).

[10] Goldberg, A. A. and Ostrovskii I. V., The distribution of values of meromorphic functions, Nauka, Moscow, 1970. (in Russian).

[11] Halburd, R. G, Korhonen, R. J., Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with application to difference equations. J Math Anal Appl. 314(2), 477–487 (2006). doi :10.1016/j.jmaa.2005.04.01019.

[12] Hayman, W. K., Meromorphic Functions Oxford, Clarendon Press, 1964.

[13] Huang, Z. B., Chen, Z. X. and Li, Q.,The properties of the meromorphic solutions of some difference equations, Complex Variables and Elliptic Equations, 2011, 1-14.

[14] Laine, I. Nevanlinna Theory Differential Equations, de Gruyter, Berlin (1993).

[15] Yang C.C, Yi H.X., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Mathematics and its Applications, Vol. 557, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[16] Yang, L., Value distribution theory, Springer-Verlag, Berlin , 1993.