REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité: Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

Sur des Tests de Stabilité d'une Certaine Classe de Systèmes Linéaires Singuliers

Présenté par :

M^{elle} BENAOUAD Nour Imane

Soutenu le 21/05/2017

Devant le jury

Présidente	BECHAOUI	Khadidja	MAA	**U. MOSTAGANEM.**
Examinatrice	LADJEL	Noria	MAA	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	BOUAGADA	Djillali	Pr	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Remerciments

Avant tout et en premier lieu je remercie « Allah » car toute chose est accomplie grâce à sa volonté. «Elhamdou li Allah» pour l'achèvement et la réussite de ce projet.

Je remercie chaleureusement Monsieur BOUAGADA DJILLALI, Professeur à l'université de Mostaganem pour ses idications, de sa disponibilité et de son soutien scientifique et humain. Ce travail n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

Je tiens à remercier Mme BECHAOUI Khadidja Maître Assistante à l'université de Mostaganem pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

J'éxprime également mes remerciements à Mme LADJEL Noria Maître Assistante à l'Ecole Normale Supérieure de Mostaganem, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant d'examiner mon manuscrit de mémoire.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues, mes amies et les membres de ma famille en particulier mes parents qui m'ont remonter le moral quand c'était nécessaire.

Notaions :

$\otimes$: Produit de Kronecker.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}^{n\times m}$: L'éspace des matrices de n lignes et m colonnes à entrée dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^{n\times n}$: L'éspace des matrices carrées de dimension n à entrées dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+^{n\times m}$: L'éspace des matrices de n lignes et m colonnes à entrée dans $\mathbb{R}_+$.

$\mathbb{R}_+^n$: Espace des vecteurs à entrées réelles non-négatives.

Re z: Partie réelle du nombre complexe z.

$\|.\|$: Une norme sur $\mathbb{R}^n$.

I_n: Matrice identité d'ordre n.

A^T: Transposée d'une matrice A.

A^{-1}: La matrice inverse de A.

$\exp(A)$: L'exponnentielle d'une matrice A.

$\det(A)$: Le déterminant d'une matrice A.

λ: Valeur propre d'une matrice carrée.

$P_A(\lambda)$: Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A.

$\sigma(A)$: Le spèctre de la matrice carrée A.

D^α: Opérateur de dérivation d'ordre non entier α.

I^α: Opérateur d'intégration d'ordre non entier α.

$\mathcal{L}$: Opérateur de Laplace.

$\Gamma(.)$: Fonction Gamma d'Euler.

IML: Inégalité matricielle linéaire.

LTI: Système linéaire à temps invariant.

INTRODUCTION

L'analyse des systèmes linéaires positifs forment un domaine de recherche attrayant dans la théorie de systèmes linéaires. En général, un système positif est caractérisé par sa propriété d'entrée-tout particulière, c'est-à-dire sa sortie et son état, correspondant à toute entrée non négative et état initial non négatif, sont toujours non négatifs. Cette propriété peut être vue naturellement dans les domaines de la biologie, des réseaux de communication, de l'économie et des systèmes probabilistes et dans des modèles de population structurés par l'âge en démographie. Concernant ces systèmes, on se contente de citer les systèmes singuliers positifs.

Les systèmes singuliers positifs ont suscité de l'intérêt ces dernières années en raison de leurs caractéristiques spéciales qui ne se retrouvent pas dans les systèmes classiques. ils sont des modèles plus précis pour la réalisation de différentes pratiques tels que la robotique, les systèmes mécaniques ou les circuits électriques.

Les outils fractionnaires apparaissent aussi en automatique, notamment dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le régulateur sont régit par des équations différentielles fractionnaires. il est donc légitime de s'intéresser à ces systèmes en vue de leurs synthétiser des commandes adéquates pour rendre compte de leur comportement.

Dans ce mémoire, nous allons nous intéressés à établir des conditions nécessaires et suffisantes sur la positivité des systèmes linéaires à temps invariant et aussi de la stabilité des systèmes singuliers positifs.

Ce mémoire se compose d'une introduction, cinq chapitre et une conclusion. Le premier chapitre comporte des notions de base.

Le deuxième chapitre présente la repésentation d'état, la positivité et la singularité des systèmes linéaires à temps continu.

Le troisième chapitre est l'originalité de ce travail, il est consacré à l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes singuliers positifs. À travers le chapitre quatre nous décrivons les systèmes singuliers fractionnaires ainsi que leurs positivité et stabilité. Dans le cinquième chapitre, on procède à l'étude de la stabilité des systèmes singuliers bidimentionnels par les inégalités matricielles linéaires.

Une conclusion générale fera le point de ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires et notions de bases

Dans ce chapitre on introduit quelques notions et résultats utilisés dans notre travail, on se base sur les références suivantes [4], [6], [7], [9] et [16].

1.1 Outils d'algèbre linéaire

1.1.1 Polynôme caractéristique

Définition 1.1.1 *Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors le polynôme caractéristique de A est :*

$$P_A(\lambda) \; : \; = \det(A - \lambda I_n)$$

1.1.2 Les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice

Définition 1.1.2 *λ est une valeur propre de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si et seulement s'il existe un vecteur x non nul tel que :*

$$Ax = \lambda x$$

On dit que x est le vecteur propre de A associe à la valeur propre λ.

1.1.3 Le spèctre

Définition 1.1.3 *Le spèctre d'une matrice A noté $\sigma(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A.*

Définition 1.1.4 *L'ensemble des valeurs propres de la matrice paire (E, A) est donné par :*

$$\sigma(E, A) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \prec \infty : \ \det(\lambda E - A) = 0\}.$$

Remarque 1.1.1 *Par convention $\sigma(I, A)$ est simplement $\sigma(A)$.*

1.1.4 Mineur principal d'une matrice carrée

Définition 1.1.5 *Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice, les mineurs principaux d'ordre k de cette matrice sont les déterminants des matrices tronquées $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ pour k allant de 1 à n.*

1.1.5 Rang d'une matrice

Définition 1.1.6 *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes.*

1.2 Matrices particulières

1.2.1 Matrices symétriques, matrices nilpotentes

Définition 1.2.1 *Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite symétrique si*

$$A^T = A$$

Définition 1.2.2 *Une matrice carrée A est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$A^p = 0$$

L'indice de nilpotence est alors le plus petit p qui vérifie l'équation $A^p = 0$.

Exemple 1.2.1 *La matrice*
$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *est nilpotente d'indice 2, ie que $A^2 = 0_{R^{2\times 2}}$*

1.2.2 Matrices monomiales

Définition 1.2.3 *Une matrice carrée A est appelée matrice monomiale (ou matrice de permitation généralisée) si les entrées de A sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.*

Exemple 1.2.2 *La matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{est une matrice monomiale}$$

Lemme 1.2.1 *La matrice inverse d'une matrice monomiale est aussi une matrice monomiale.*

1.2.3 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.2.4 *L'exponencielle d'une matrice carrée M de dimension n se définit par son développement en série entière:*

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} M^i;$$

Lemme 1.2.2 *1. Si A et B sont deux matrices de dimensions $n \times n$, alors*

$$\exp(A). \exp(B) = \exp(A + B)$$

si les matrices A et B commutent.

2. $\frac{d}{dt}\exp(Mt) = M\exp(Mt)$.

1.2.4 Matrices définies positives, définies négatives

Définition 1.2.5 *Soit A une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A est définie positive (réspectivement semi-définie positive) si et seulement si*

$$x^T Ax > 0 \quad \textit{(respectivement } \geq 0), \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Définition 1.2.6 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A est dite une matrice définie négative (réspectivement semi-définie négative) si et seulement si*

$$x^T Ax < 0 \quad \textit{(respectivement } \leq 0), \forall x \in \mathbb{R}^n, x \textit{ non nul.}$$

1.2.5 Matrices non négatives, positives et de Metzler

Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ deux matrices à coefficients réels.

Définition 1.2.7 *A est une matrice non-négative si ses entrées sont non-négatives, ie:* $a_{ij} \geqslant 0$, *pour tout* $i, j = 1, 2, ..., n$. *Nous noterons une telle matrice par* $A \geqslant 0$ *ou encore,* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Définition 1.2.8 *Une matrice non-négative* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *est appelée positive si au moins une de ses entrées est positive. Nous noterons une telle matrice par* $A > 0$.

Théorème 1.2.1 *La matrice inverse* A^{-1} *d'une matrice positive* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *est une matrice positive si et seulement si A est une matrice monomiale.*

Preuve. **Nécessairement,** nous supposons que la matrice inverse $A^{-1} = [b_{ij}]$ de la matrice positive $A = [a_{ij}]$ est une matrice non-négative.
De l'équation $AA^{-1} = I$, on a:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \tag{1.2.1}$$

òu $i, j = 1, 2, ...n$. Si le $i$ème ligne de la matrice A a p entrées positives a_{ij} pour et $i \neq j$, alors de l'équation (1.2.1) il s'ensuit que $b_{kj} = 0$ pour $k = j$.
Dans ce cas la matrice A^{-1}contient $p \times (n-1)$ sous matrices nulles.
Si $p \succ 1$ alors $\det A^{-1} = 0$. Par conséquent $k = 1$ car par hypothèse $\det A \neq 0$.
Donc la matrice A n'a qu'une seule entrée positive dans chaque ligne et chaque colonne.
La suffisance résulte du fait que la matrice inverse d'une matrice monomiale est aussi une matrice monomiale qui est positive. □

Matrices de Metzler

Définition 1.2.9 *A est une matrice de Metzler si toutes ses entrées hors diagonales sont (positives) non-négatives,ie:*

$$a_{ij} \geqslant 0 \text{ pour } i \neq j \ ,i, j = 1, 2, ...n.$$

Exemple 1.2.3 *La matrice A suivante est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 9 & 10 \\ 11 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

Parmi les résultats sur les matrices de Metzler, on donne le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 *A est une matrice de Metzler si et seulement si $\forall t \geqslant 0$,*

$$\exp(At) > 0;$$

Preuve. **Nécessité**:

Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda \succ 0$ tel que $(A+\lambda I_n) \succ 0$, et sachant que :

$$(A + \lambda I_n) + (-\lambda I_n) = (-\lambda I_n) + (A + \lambda I_n)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \exp((A + \lambda I_n)t + (-\lambda I_n)t) \\ &= \exp(A + \lambda I_n)t.\exp(-\lambda I_n)t \\ &\succ 0 \end{aligned}$$

Du fait que

$$\exp(A + \lambda I_n)t \succ 0 \;\text{ et }\; \exp(-\lambda I_n)t \;\succ 0$$

Suffisance:

Supposons que $\forall t \geqslant 0, \exp(At) \succ 0$

Ainsi puisque

$$A = \frac{d}{dt}\exp(At)\mid_{t=0} = \lim_{t \longrightarrow 0_+} \frac{\exp(At) - I_n}{t},$$

prenons comme e_j le $j^{ème}$ vecteur de la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{t \longrightarrow 0_+} \frac{\langle \exp(At)\exp(j) - \exp(j), \exp(i)\rangle}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0_+} \frac{\langle \exp(At)\exp(j), \exp(i)\rangle}{t} - \frac{\langle \exp(j), \exp(i)\rangle}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0_+} \frac{\langle \exp(At)\exp(j), \exp(i)\rangle}{t} \text{ car } \langle \exp(j), \exp(i)\rangle = 0 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Alors $a_{ij} \geqslant 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler. □

1.2.6 Faisceau de matrices

Définition 1.2.10 *Un faisceau de matrices est une matrice dont les coéfficients sont des polynômes de degré 1.*

1.3 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker des matrices joue un rôle important dans les mathématiques et dans les applications trouvées en la physique théorique. Il s'agit d'une autre manière de définir la notion de produit de matrices.

Définition 1.3.1 *Le produit de Kronecker de deux matrices $A = [a_{ij}] \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = [b_{ij}] \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ est noté par $A \otimes B$ et est définie par :*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & .. & .. & a_{1n}B \\ . & . & . & . \\ . & . & . & \\ a_{m1}B & & & a_{mn}B \end{pmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{R})$$

Exemple 1.3.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ *alors,*

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & -2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & -2 & -1 \\ -12 & -6 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quelques propriétés du produit de Kronecker

Parmi les propriétés du produit de Kronecker on cite:

1. Le produit de Kronecker est Associatif: Pour tout triplet de matrices A, B et C, on obtient:

$$A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

2. Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition: pour tout quadruplet A, B, C et D tel que $(A + B)$ et $(C + D)$ existent, on obtient:

$$(A + B) \otimes (C + D) = (A \otimes C) + (A \otimes D) + (B \otimes C) + (B \otimes D)$$

3. Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard: Pour tout quadruplet A, B, C et D tel que AC et BD existent, on obtient

$$(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B)(C \otimes D)$$

4. L'opérateur de transposition se distribue par rapport au produit de Kronecker,

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

5. Le produit de Kronecker n'est pas commutatif,

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

L'une des nombreuses utilisations du produit de Kronecker consiste à résoudre ou à déterminer les propriétés de solutions aux équations matricielles linéaires. Ces équations matricielles peuvent être converties en un système équivalent où la matrice de coefficients implique le produit de Kronecker. Dans cette transition, les matrices sont également converties en vecteurs. La fonction qui implémente cette conversion est appelée Vectorisation.

1.3.1 Vectorisation des matrices

Définition 1.3.2 *Soit A=(a_{ij}) une matrice de dimension $m \times n$.On définit l'opérateur vec d'empilement des colonnes par :*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Pour les besoins de l'étude de la stabilité des systèmes singuliers par les inégalités matricielles linéaires, nous citons quelques propriétés utiles pour notre contributions :

1. La linéairité: soit A, B et C telles que $A + B$ existe, alors

$$vec(\alpha A + \beta B) = \alpha vec(A) + \beta vec(B)$$

2. Soit A, B et C telles que ABC existe, alors,

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B)$$

En particulier :

$$vec(AB) = (I_p \otimes A)vec(B) = vec(ABC) = (B^T \otimes I_m)vec(A),$$

avec $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

1.4 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil très puissant qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire algèbrique où disparaissent les formes dérivées. Une telle pratique permet de transposer le problème de l'espace de temps vers un espace des phases, de le résoudre dans cet espace puis trasposer de nouveau la solution vers le monde réel par la transformée inverse de Laplace.

1.4.1 Fonctions causales

Définition 1.4.1 *Une fonction f de la variable réelle t est dite causale si elle est nulle pour tout t strictement négatif ie :*

$$f(t) \ = 0 \quad si \ t < 0$$

Définition 1.4.2 *La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction $F = Lf$ de la variable réelle complexe s définie par :*

$$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

pour que F existe, il faut que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad \text{soit convergente}$$

Propriétés de la transformation de Laplace

Soit f et g deux fonctions causales admettant des transformées de Laplace.

1. Linéarité : Pour tout k appartenant à $\mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ admet une transformée de Laplace et
$$L\left[(\alpha f + \beta g)(t)\right] = \alpha L\left[f(t)\right] + \beta L\left[g(t)\right],$$
2. Transformée d'une dérivée :
$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0),$$
3. Convolution :
$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)]L[g(t)] = F(s)G(s),$$

avec

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

1.4.2 Transformation inverse de Laplace

Définition 1.4.3 *Si $F(s) = L[f(t)]$, on dit que $f$est l'original de F, et on note aussi*

$$f(t) = L^{-1}[F(s)].$$

Chapitre 2

Systèmes linéaires invariants à temps continu

Dans ce chapitre, nous allons nous intéressé à la classe des systèmes invariants dans le temps à temps continu. Nous introduisons par suite une nouvelle classe de systèmes qui est la classe des systèmes positifs. Nous nous basons sur les différentes références [4],[5],[11] et [16] pour donner des définitions et caractérisations des systèmes positifs en temps continu.

2.1 Description des systèmes L.T.I en temps continu

2.1.1 Représentation d'état d'un système

Définition 2.1.1 *Soit un système multi-entrées (m entrées), multi-sorties (p sorties), dont le modèle est décrit par une ou plusieurs équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce modèle peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations matricielles différentielles du premier ordre :*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) & \text{(\textit{équation d'état})} \\ y(t) = Cx(t) & \text{(\textit{équation de sorties})} \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$est le vecteur de commande.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice dynamique ou parfois d'évolution.

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$est la matrice de commande.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$est la sortie (vecteur de sortie ou de mesures).

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la matrice de sortie.

Le modèle sous cette forme est appelé représentation d'état du système.

Remarque 2.1.1 *Cette représentation d'état n'est pas unique.*

2.1.2 Trajectoire d'états et sortie du système

La solution du système $x'(t) = Ax(t) + Bx(t)$ souvent appelée trajectoire d'état sous la condition initiale $x(0) = x_0$ est donnée par :

$$x(t) = \exp(At)\,x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\,Bu(\tau)\,d\tau.$$

L'équation de sortie est cependant,

$$y(t) = C\exp(At)x_0 + C\int_0^t \exp(A(t-\tau))\,Bu(\tau)\,d\tau.$$

en effet,

$$y(t) = Cx(t) = C\exp(At)x_0 + C\int_0^t \exp(A(t-\tau))\,Bu(\tau)\,d\tau.$$

2.1.3 Positivité des systèmes linéaires standards à temps continu

Rappelons dans ce qui suit, la classe de systèmes standards positifs ainsi que quelques de leurs propriétés.

On considère le système linéaire à temp-invariant

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) & \\ y = Cx(t) \quad , & x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Rappelons dans ce qui suit, la classe de systèmes positifs ainsi que quelques de leurs propriétés.

Définition 2.1.2 [15] *Le système linéaire à temps continu décrit par (2.1.1) est dit positif (où internemet positif) si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ et tout contrôle $u(t) \in \mathbb{R}^m_+$ pour $t \geq 0$, on a $x(t) \in \mathbb{R}^n_+$ et $y \in \mathbb{R}^p_+$ pour $t \geq 0$.*

Un deuxième résultat est donné par :

Théorème 2.1.1 *Le système continu linéaire* (2.1.1) *est positif si et seulement si* A *est une matrice de Metzler et* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$.

Preuve. **Sens direct**, supposons que le système (2.1.1) est positif.

Si $u(t) = 0$ pour $t \geq 0$ et $x_0 = e_i$, où e_i est la $i^{ème}$colonne de la matrice d'identité I_n.

La trajectoire est positif par hypothèse alors $x(0) = Ae_i \geq 0$ ce qui implique que $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$.

Par suite A est une matrice de Metzler.

Si on pose que la condition initiale $x_0 = 0$, on a $x(0) = Bu(0) \geq 0$

alors $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ pour $u(0) \in \mathbb{R}_+^m$. Et si on remplace dans l'équation de la sortie, pour $u(0) = 0$ on a :

$$y(0) = Cx_0 \quad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n$$

alors $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$.

Inverssement, supposons que A est une matrice de Metzler, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $t \geq 0$.

Alors le théorème (1.2.2) assure la positivité de la martice $\exp(At)$, et puisque la trajectoire du système (2.1.1) est sous forme :

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))\, Bu(\tau)\, d\tau.$$

on conclut que $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \geq 0$ et on a $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}_+^p$ car $C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$par hypothèse et $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ $\square$

Exemple 2.1.1 *Considérons le circuit électrique représenté par la* $(figure1)$ *avec les résistances* R_1, R_2, R_3 *et capacités* C_1, C_2 *et une source de tension* $e = e(t)$.*En choisissant les tensions* $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$ *comme variables d'état et la sortie* $y = y(t)$,

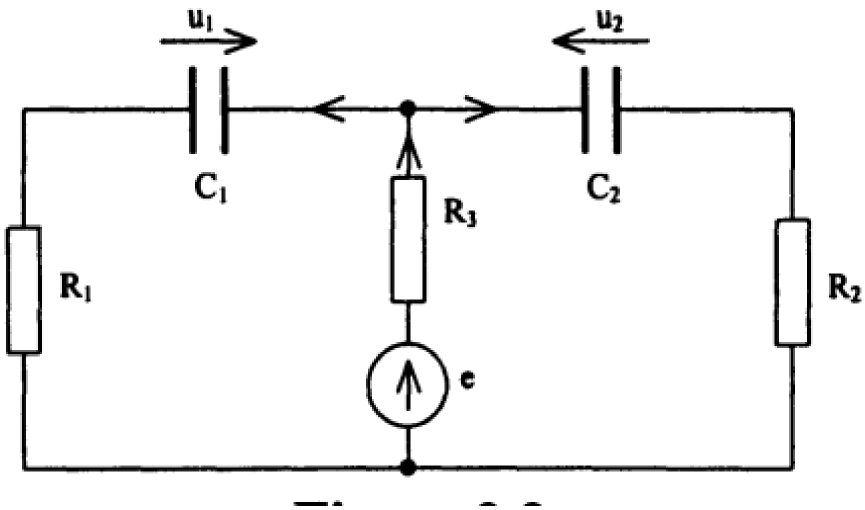

figure 1

Et en appliquant les lois de Kirchhoff, nous pouvons écrire les équations

$$\begin{aligned} R_1C_1u_1' + u_1 + R_3(C_1u_1' + C_2u_2') &= e \\ R_3(C_1u_1' + C_2u_2') + u_2 + R_2C_2u_2' &= e \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Et

$$y = u_1 + u_2 \tag{2.1.3}$$

Les équations (2.1.2) et (2.1.3) peut être réécrit sous forme d'équations :

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + Be \tag{2.1.4}$$

$$y = C \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2.1.5}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_2+R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} & \frac{R_3}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \\ \frac{R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} & -\frac{R_1+R_3}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{C_1[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \\ \frac{R_1}{C_2[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De l'équation (2.1.6), il s'ensuit que A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{2\times 1}, C \in \mathbb{R}_+^{1\times 2}$. Par conséquent, le circuit est un bon exemple de système positif à temps continu.

2.2 Description des systèmes linéaires singuliers à temps continus

2.2.1 Trajectoire d'états et sortie du système

D'autres systèmes généralisant le système standard peuvent être donné par :

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx\ (t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ qui est la matrice d'évolution, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, u(t) \in \mathbb{R}^m$,
$y(t) \in \mathbb{R}^p, C \in \mathbb{R}^{P\times n}$.

qui sont appelés systèmes linéaires singuliers (ou implicites), il s'agit ici de la classe de systèmes dynamiques représentant les systèmes interconnectés entre eux comme, dans de nombreux systèmes pratiques les circuits électriques, les systèmes d'alimentation, les réseaux etc...

2.2.2 Singularité

Définition 2.2.1 *On dit que le système* (2.2.1) *est singulier si la matrice d'évolution E est singulière.*

Dans le cas où la matrice E non singulière on dit que le système est standard ou explicite.

2.2.3 Régularité

Définition 2.2.2 *Le système* (2.2.1)*est dit régulier si et seulement si :*

$$\exists s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \det(Es - A) \neq 0.$$

Exemple 2.2.1 *On considère la paire* (E, A)

avec

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule le déteminant de la matrice $(sE - A)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\det(Es - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = s^2 \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}/\{0\}.$$

Alors (E, A) est régulier.

Un deuxième exemple à traiter est le suivant :

Exemple 2.2.2 *On prend la paire* (E, A)

où

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,56 & 0 & 0 \\ 1,23 & 0 & 0 & 1,98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,01 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

après calcul, le déterminant de la matrice $(sE - A)$,

$$\det(sE - A) = 0, \forall s \in \mathbb{C}.$$

alors le système étudié n'est pas régulier.

Définition 2.2.3 *Le système singulier est régulier où la paire* (E, A) *est régulière s'il existe une paire de scalaires* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *telle que :*

$$\det(\alpha E - \beta A) \neq 0.$$

2.2.4 Trajéctoire d'état et la sortie du système singulier

Pour résoudre ce système. On distingue deux cas :

1ère*cas* : **Cas standard :**

Si la matrice E est non singulière, donc le système (2.2.1) devient :

$$\begin{aligned} x'(t) &= E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

On retrouve alors, pour tout $t \geq 0$.

Trajectoire d'état :

$$x(t) = \exp(E^{-1}At)x_0 + \int_0^t \exp\left(E^{-1}A\left(t-\tau\right)\right)Bu\left(\tau\right)d\tau.$$

Sortie du système :

$$y(t) = C\exp(E^{-1}At)x_0 + C\int_0^t \exp\left(E^{-1}A\left(t-\tau\right)\right)Bu\left(\tau\right)d\tau.$$

2$^{\grave{e}me}$*cas* : **Cas singulier,**

Dans toute la suite, pour cette classe de système nous supposons que (2.2.1) est régulier (i.e $\exists\ s \in \mathbb{C}$, $\det(sE - A) \neq 0$).

Définition 2.2.4 *Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurant au voisinage de l'infini*

$$(sE - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)}$$

où μ est l'indice de nilpotence du faisceau $(sE - A)$

et ϕ_i la matrice fondamentale de(2.2.2) , satisfaisant les équations suivantes,

$$\left\{\begin{array}{c} E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i}I_n \\ \phi_i E - \phi_{i-1}A = \delta_{0i}I_n \\ \phi_i = 0, \forall i \leq -\mu \end{array}\right.$$

où $\delta_{0i} = \left\{\begin{array}{cc} I & si\ i=0 \\ 0 & sinon \end{array}\right.$

Donc la solution du système (2.1.3) avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et le contrôle $u(t)$ est donnée par :

$$x(t) = \exp(\phi_0 At)\phi_0 Ex_0 + \int_0^t \exp\left(\phi_0 A\left(t-\tau\right)\right)\phi_0 u\left(\tau\right)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}\left[Bu^{(j-1)} + Ex_0 s^{(i-1)}\right]$$

où $u^{(j)} = \frac{d^j U}{dt^j}, j = 1, ..., \mu - 1$

et la sortie est donnée par :

$$y\left(t\right) = C\exp(\phi_0 At)\phi_0 Ex_0 + \int_0^t C\exp\left(\phi_0 A\left(t-\tau\right)\right)\phi_0 u\left(\tau\right)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu}C\phi_{-j}\left[Bu^{(j-1)} + Ex_0 s^{(i-1)}\right]$$

2.2.5 Positivité des systèmes linéaires singuliers

Considérons le système singulier :

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On rappelle la définition de la positivité de systèmes linéaires singuliers en temps continu citée dans [4]

Définition 2.2.5 *Le système singulier (2.2.3) est dit positif si pour tout état initial admissible $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et tout contrôle non-négatif $u(t) \geq 0$ avec $u^j(t) \geq 0,\ j = 0, ..., \mu - 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^n$, l'état $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et la sortie $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq 0$*

Définition 2.2.6 *Le système (2.2.3) est faiblement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler, $E \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$.*

Exemple 2.2.3 *Considérons le circuit à quatre mailles représenté par la figure 2,où R_i, $i = 1, ...8$ sont les résistances données, L_1, L_2 les inductances et e_1, e_2 les sources de voltages. On note par i_1, i_2, i_3, i_4 les intensités du courant dans les quatre mailles.*

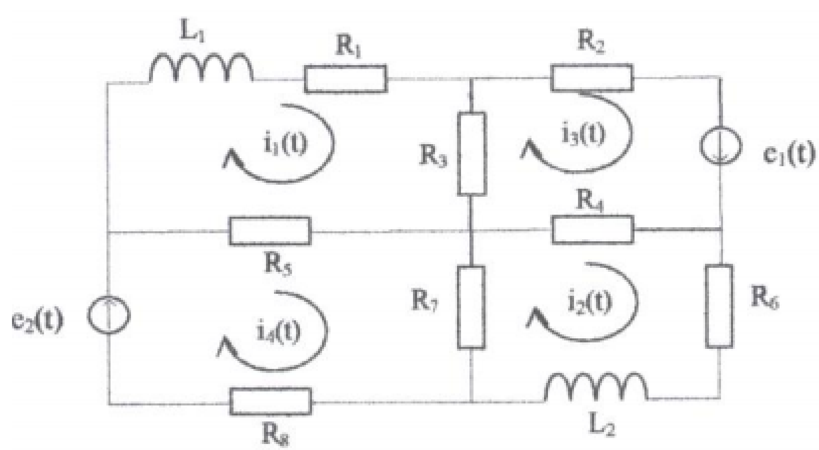

figure 2

En appliquant la loi des mailles, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
L_1\frac{di_1(t)}{dt} &= -(R_1+R_3+R_5)\,i_1(t)+R_3i_3(t)+R_5i_4(t),\\
L_2\frac{di_2(t)}{dt} &= -(R_4+R_6+R_7)\,i_2(t)+R_4i_3(t)+R_7i_4(t),\\
0 &= R_3i_1(t)+R_4i_2(t)-(R_2+R_3+R_4)\,i_3(t)+e_1,\\
0 &= R_5i_1(t)+R_7i_2(t)-(R_5+R_7+R_8)\,i_4(t)+e_2.
\end{aligned}$$

et si on pose $x_1=i_1(t)$, $x_2=i_2(t)$, $x_3=i_3(t)$, $x_4=i_4(t)$, on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante,

$$Ex'(t)=Ax(t)+Bu(t).$$

avec,

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},A=\begin{bmatrix}-\frac{R_{11}}{L_1}&0&\frac{R_{13}}{L_1}&\frac{R_{14}}{L_1}\\0&-\frac{R_{22}}{L_2}&\frac{R_{23}}{L_2}&\frac{R_{24}}{L_2}\\R_{31}&R_{32}&-R_{33}&0\\R_{41}&R_{42}&0&-R_{44}\end{bmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}i_1(t)\\i_2(t)\\i_3(t)\\i_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix},u(t)=\begin{bmatrix}e_1(t)\\e_2(t)\end{bmatrix}$$

.

où,

$$\begin{aligned}
R_{11} &= R_1+R_3+R_5\,,R_{22}=R_4+R_6+R_7,R_{24}=R_{42}=R_7.\\
R_{13} &= R_{31}=R_3,R_{14}=R_{41}=R_5,R_{23}=R_{32}=R_4\\
R_{33} &= R_2+R_3+R_4,R_{44}=R_5+R_7+R_8
\end{aligned}$$

Remarquons que A est une matrice de Metzler car toutes ses entrées hors diagonale ne sont pas négatives.

Nous choisissons comme sorties :

$$\begin{aligned}
y_1 &= L\frac{di_1(t)}{dt}+R_{11}i_1\\
y_2 &= R_6i_2.
\end{aligned}$$

alors l'équation de la sortie est de la forme :

$$y = Cx$$

où,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_3 & R_5 \\ 0 & R_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Stabilité des systèmes singuliers positifs

3.1 Stabilité des systèmes standars positifs

Notons que la classe de systèmes positifs est une classe aussi importante en pratique. Comme exemples, nous avons les systèmes à compartiments, les circuits RLC, les systèmes biologiques, etc....

La seul particularité de cette classe est que les variables sont par nature positives. Plus encore ces systèmes seront représenté sur des cônes et ne pas sur des espaces vectoriels comme leurs homologues les systèmes classiques.

Le but de ce chapitre est basé sur l'étude de problème de la stabilité d'un système L.T.I continu, des conditions nécéssaires et suffisantes de la stabilité seront donc établies.

3.1.1 Position du problème

On considère le système positif standard à temps invariant sans contrôle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \text{..........}(1.a), \ x(0) = x_0 \\ y(t) \ \ = Cx(t) \text{.......................}(1.b) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, A est une matrice de Metzler et le vecteur d'état $x(t)$ est positif.

Nous représentons la notion de stabilité avec toutes ces propriétés et caractérisations.

Nous considérons un système sans contrôle et à conditions initiale $x(0) = x_0$ positive, on définit la stabilité par,

Définition 3.1.1 *[16]On dit que le système positif* (1.a) *est stable si pour toute condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$*, il existe un vecteur* $\rho(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *qui satisfait la condition* $\lim_{t\to+\infty} \rho(t) = 0$ *tel que*

$$x(t) \leq \rho(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Où $x(t)$ la solution du système avec la condition initiale x_0.

3.1.2 Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité

Parmi les caractérisations on cite,

Test par les valeurs propres

Théorème 3.1.1 *[16]Le système positif* (3.1.1) *est asymptotiquement stable si et seulement si toute les valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *de la matrice de Metzler* A *ont des parties réelles négatives.*

Exemple 3.1.1 *Soit le système linéaire suivant,*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, et\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour l'étude de la stabilité du système, on prend la matrice dynamique A*, on calcul ses valeurs propres, on obtient*

$$\begin{aligned} \rho_A &= \det(sI - A) \\ &= \begin{vmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix} \\ &= (s+1)(s+2)(s+3) \end{aligned}$$

Donc, $\sigma(A) = \{-1, \ -2, \ -3\} \subset \mathbb{C}^-$, d'où la stabilité du système.

Test par les mineurs principaux

Théorème 3.1.2 *[16]Le système positif (3.1.1) est asymptotiquement stable si et seulement si tout les mineurs principaux $\Delta_i, i = 1, ..., n$ de la matrice $(-A)$ sont positifs, i.e :*

$$\Delta_1 = -a_{11} > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det(-A) > 0. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.2 *Nous prenons le système positif,*

$$\begin{cases} x' = Ax(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On va calculer les mineurs principaux de la matrice A. On obtient

$$\Delta_1 = -a_{11} = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Par conséquent, le système étudié est asymptotiquement stable.

Test de Lyaponov

La méthode de Lyaponov traité dans cette partie est basée sur la définition d'une fonction paticulière, noté $v(x)$ qui est appelée fonction de Lyaponov. On considère le système non forcé (i.e : sans contrôle) positif

$$x'(t) = Ax(t), \qquad A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}; x(t) \in \mathbb{R}_+^n. \tag{3.1.2}$$

On sait que ce système homogène est stable, s'il existe une norme telle que $\|x(t)\|$ décroisse strictement avec le temps.
Prenons

$$\|x(t)\| = v(x(t)) = x^*(t)Px(t), \; P > 0 \tag{3.1.3}$$

On veut donc que

$$v'(x(t)) < 0, \; \forall t, \; \forall x(0) \tag{3.1.4}$$

Ce qui permet d'imposer une condition à la matrice P.
Pour cela, il suffit d'insérer (3.1.2) dans (3.1.3) et (3.1.4) . On obtient

$$\begin{aligned} v'(x(t)) &= x'^*(t)Px(t) + x^*(t)Px'(t) \\ &= x^*(t)A^*Px(t) + x^*(t)PAx(t) \\ &= x^*(t)(A^*P + PA)x(t) \\ &= x^*(t)[-Q]x(t) \end{aligned}$$

Puisque $v'(x(t))$ doit être strictment négatif, pour tout t, il faut donc que Q soit une matrice définie positive. Ce qui nous amène à l'équation de Lyaponov

$$A^*P + PA = -Q \tag{3.1.5}$$

Théorème 3.1.3 *Si A satisfait (3.1.5) avec $P > 0$ $(P = P^*)$, $Q > 0$ alors*

$$\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0 \textit{ pour tout } \lambda_i \textit{ valeur propre de } A.$$

Preuve. Soit x_i vecteur propre associé à la valeur propre λ_i,alors

$$\begin{aligned} -x_i^*Qx_i &= x_i^*(A^*P + PA)x_i \\ &= x_i^*Px_i\left(\overline{\lambda_i} + \lambda_i\right) \\ &= 2\operatorname{Re}(\lambda_i)x_i^*Px_i \end{aligned}$$

Or $x_i^* Q x_i$ et $x_i^* P x_i$ sont strictement positif, donc $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$ $\square$

On continue avec les conditions nécssaires et suffisantes pour la stabilité des systèmes linéaires singuliers positifs, en se basant sur les références [4],[8] et [20].

3.2 Stabilité des systèmes singuliers positifs

3.2.1 Position du problème

Comme le cas du système linéaire standard, quand on étudie la stabilité du système linéaire singulier positif, il suffit de considèrer l'équation homogène suivante,

$$Ex'(t) = Ax(t) \;\text{ tels que } A \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ de Metzler}, E \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, x\,(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0 \qquad (3.2.1)$$

avec la condition initiale $x\,(0) = x_0$ qui est positive .
Pour simplifier l'étude, nous supposons dans cette section que le système (3.2.1) est régulier parceque dans ce cas le système a une unique solution.

Définition 3.2.1 *Le système singulier régulier* (3.2.1) *est dit stable si* $\exists\ \alpha, \beta > 0$ *tel que l'état du système* $x\,(t)$
satisfasse

$$\|x\,(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t}\,\|x\,(0)\|\,, t \geq 0.$$

3.2.2 Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité

Test par les valeurs propres

Le théorème suivant donne un critère direct pour la stabilité des systèmes linéaires singuliers réguliers.

Théorème 3.2.1 [8]*Le système linéaire singulier régulier positif est stable si et seulement si* $\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^-$ *avec*

$$\mathbb{C}^- = \{s/s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(s) < 0\}\,.$$

Exemple 3.2.1 *Prenons comme exemple de circuit éléctrique, le système* (3.2.1) *où*

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de ce système est

$$\begin{aligned}P_{E,A}(s)&=\det(sE-A)\\&=\begin{vmatrix}s&-1&0&0\\-1&0&s&0\\1&0&0&-1\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}\\&=s^2+s+1\\&=\left(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\end{aligned}$$

Donc le spectre de la matrice paire (E,A) est :

$$\sigma(E,A)=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}\subset\mathbb{C}^-$$

Alors le système est stable par le théorème précédent.

Test par les polynômes caractéristiques

Considérons le système linéaire positif à temps continu :

$$Ex'(t)=Ax(t),\quad x(0)=x_0 \tag{3.2.2}$$

où $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$, et la paire (E,A) est régulière.

On suppose qu'il est possible de rendre la paire (E,A) sous forme :

$$P[Es-A]Q=\overline{E}s-\overline{A}. \tag{3.2.3}$$

où

$$\begin{aligned}\overline{E}&=PEQ=\begin{bmatrix}I_{n_1}&0\\0&0\end{bmatrix},\overline{A}=PAQ=\begin{bmatrix}\overline{A_{11}}&\overline{A_{12}}\\\overline{A_{21}}&\overline{A_{22}}\end{bmatrix}, \qquad (3.2.4)\\ \overline{A_{11}}&\in M_{n_1}(\mathbb{R}),\overline{A_{22}}\in M_{n_2}(\mathbb{R})\ \text{deux matrices de Metzler},\overline{A_{12}}\in\mathbb{R}_+^{n_1\times n_2},\overline{A_{21}}\in\mathbb{R}_+^{n_2\times n_1}\\ n_1&=rgE,\ n=n_2+n_1\ \text{et}\ p\in\mathbb{R}^{n\times n},Q\in\mathbb{R}_+^{n\times n}\ \text{est une matrice monomiale.}\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 *Si Q est une matrice monomiale alors*

$$x'(t) = Q^{-1}x(t) \in \mathbb{R}_{+}^{n},\ t \geq 0 \ \ \textit{pour tout } x(t) \in \mathbb{R}_{+}^{*} \textit{ car } Q^{-1} \in \mathbb{R}_{+}^{n\times n}.$$

Théorème 3.2.2 *[20] Supposons qu'il existe une paire dè matrices (P, Q) satisfaisant les équations (3.2.4) alors le système (3.2.2) est positif et asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients des polynômes*

$$P_1(s) = \det \begin{bmatrix} I_{n_1}s - \overline{A_{11}} & -\overline{A_{12}} \\ -\overline{A_{21}} & -\overline{A_{22}} \end{bmatrix} = \overline{a_{n_1}}s^{n_1} + \overline{a_{n_2}}s^{n_2-1} + ... + \overline{a_1}s + \overline{a_0} \qquad (3.2.5)$$

$$P_2(s) = \det\left[I_{n_2}s - \overline{A_{22}}\right] = s^{n_1} + \overline{a_{n_2}}s^{n_2-1} + ... + \overline{a_1}s + \overline{a_0}$$

sont positifs, i.e : $\overline{a_j} > 0, j = 0, 1, ..., n_1$ et $a_i > 0,\ i = 0, 1, ..., n_2 - 1$.

Exemple 3.2.2 *Considérons le système (3.2.2) avec les matrices*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Prenons la matrice E, puis en ajoutant la $3^{ème}$ ligne multipliant par 2 à la $2^{ème}$ ligne, on obtient :

$$E^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Deuxièment, nous additionons la $3^{ème}$ ligne à $4^{ème}$ ligne, on trouve

$$E^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant ,on va multiplier par (-2) la première ligne et on l' ajoute à la troixième ligne, on obtient :

$$E^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par permutation entre la $2^{ème}$ et $3^{ème}$ ligne puis entre le $1^{ère}$ et le quatrième colonne, on obtient :

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PEQ$$

on fera les mêmes opérations sur la matrice A, on trouve

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = PAQ$$

où

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons les deux polynômes $P_1(s)$ et $P_2(s)$

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \det \begin{bmatrix} I_2 s - \overline{A_{11}} & -\overline{A_{11}} \\ -\overline{A_{21}} & -\overline{A_{22}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} s+2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 10s^2 + 41s + 18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(s) &= \det \left[I_{n_2} s - \overline{A_{22}} \right] \\ &= \begin{vmatrix} s+3 & -2 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + 7s + 10 \end{aligned}$$

Donc les coefficients des deux polynômes sont positifs. Alors d'aprés théorème (3.2.2) le système est positif et asymptotiquement stable .

Corollaire 3.2.1 *Le système linéaire* (3.2.2) *est positif et asymptotiquement stable si toute les coefficients du polynôme*

$$P(s) = \det[Es - A]$$

sont défférents de zéro et tous ont le même signe.

Test de Lyaponov

On considère le système

$$Ex'(t) = Ax(t) \tag{3.2.6}$$

On traite d'abord le cas où E inversible. Donc (3.2.6) sera

$$x'(t) = E^{-1}Ax(t) = \tilde{A}x(t)$$

Théorème 3.2.3 *Le système (3.2.6)avec E inversible est stable s'il existe une matrice P définie positive vérifiant*
$P^* = P$ et qui est la solution de l'équation

$$\tilde{A}P + P\tilde{A} = -Q$$

Pour toute matrice Q définie positive avec $\tilde{A} = E^{-1}A$.

Cas où E est singulier Considérons le système singulier à temps continu suivant

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Théorème 3.2.4 *On dit que le système (3.2.7) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice P tel que*

$$P^T A + A^T P = -Q \qquad \textit{pour une matrice } Q \textit{ définie positive}$$

avec

$$E^T P = P^T E \geq 0.$$

Preuve. On considère comme fonction condidate la fonction,

$$V(x(t)) = x^T(t)\,PEx(t) \tag{3.2.8}$$

Pour assurer la stabilité il suffit que,

$$V'(x(t)) = x'^T(t)\left(PE^T\right)x + x^T(t)\,(PE)\,x'(t) < 0$$

si de plus

$$PE^T = E^T P \tag{3.2.9}$$

En remplaçant (3.2.9)dans(3.2.8) on obtient :

$$\begin{aligned} V'(x(t)) &< 0 \Longrightarrow (Ex')^T Px + x^T P (Ex'(t)) < 0 \\ &\Longrightarrow x^T \left(A^T P + PA\right) x < 0 \\ &\Longrightarrow A^T P + PA < 0. \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 4

Systèmes linéaires fractionnaires à temps continu

4.1 Introduction

Beaucoup de vrais systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre non entier, basé en générale sur la notion de différentiation ou l'intégration de l'ordre non entier.

Les systèmes fractionnaires ou d'ordre non entier sont aussi stables que leurs homoloques, les systèmes d'ordre entier. Du fait que les systèmes fractionnaires sont d'une part, pour la plupart considérés comme les systèmes à mémoire qui sont généralement plus stables comparés aux systèmes d'ordre entier et d'autre part, du fait qu'ils affichent une dynamique beaucoup plus sophistiquée, ce qui présente une grande importance par exemple dans le domaine de la communication sécurisée. Récement, le problème de la synchronisation chaotique a étè naturellement étendue aux systèmes fractionnaires des lasers, des réacteurs chimiques, de la communication sécurisée et de la biomédecine. Le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la nature autour de nous. La raison principale de l'usage fréquent des modèles d'ordre entier était l'absence des méhodes de solution pour des équations fractionnaires ou d'ordre non entier. Actuellement, un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire peut être facilement employé dans diverses applications notamment en théorie du contrôle.

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'étude des tests de stabilité des systèmes linéaires fractionnaires singuliers positifs en temps continu. On commence par quelques rappels et des définitions dont aura besoin pour les paragraphes qui vont suivre.
On cite les références dont nous utilisons dans ce chapitre, [3],[10],[12],[13],[14],[15],[17],[18] et [19].

4.2 Quelques concepts de calcul fractionnaire

4.2.1 La fonction Gamma d'Euler

Définition 4.2.1 *On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction donné par*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} dt.$$

telle que si on se place dans $\mathbb{C}$ on suppose alors que $\mathrm{Re}(x) > 0$. Mais, si on travaille dans $\mathbb{R}$, alors il faut se contenter de prendre $x > 0$.

Propriétés

Parmi les propriétés de la fonction Gamma, on donne :
Soit $x > 0$. Alors on a

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(1) = 1$

Il existe plusieurs définitions mathématiques sur la dérivée fractionnaire. Dans cette partie on adopte les définitions habituellement utilisées :Capito et son inverse l'opérateur de Riemann-liouville. Cela est dû au fait que la dériveé fractionnaire au sens de Caputo permet de d'imposer les conditions initiales classiques et les conditions aux limites.

4.2.2 Intégrale fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville

Définition 4.2.2 *Soit $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que x est continue sur $[0,T]$. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de x, la fonction suivante :*

$$J^{\alpha}x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)\, ds, \alpha > 0.$$

4.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 4.2.3 *Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ de classe $C^n([0,T])$. La dérivée d'ordre α au sens de Caputo de $x(t)$ est donnée par :*

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(s)\, ds$$

4.3 Système linéaire fractionnaire à temps continu

4.3.1 Représentation d'état

Considérons un système linéaire à temps continu d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Sa représentation d'état peut être de la forme suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bu(t) ......(1.a) \qquad , \ t \in [0,T], \ 0 < \alpha \leq 1 \\ y(t) = Cx(t).........................(1.b) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

4.3.2 Trajectoire et sortie du système

Théorème 4.3.1 *La solution de l'équation $(1.a)$ sous la condition initiale $x(0) = x_0$, est de la forme :*

$$x(t) = \phi_0(t)\, x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, d\tau$$

où

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)},$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}, \text{ avec } 0 < \alpha \leq 1.$$

Alors l'équation de la sortie s'écrit :

$$y(t) = C\phi_0(t)\,x_0 + \int_0^t C\phi(t-\tau)\,Bu(\tau)\,d\tau$$

Remarque 4.3.1 *Remarquons que dans le système (4.3.1), si on prend $\alpha = 1$. on obtient le système linéaire standard et on a*

$$\phi_0(t) = \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{\Gamma(k+1)} = \exp(At).$$

Dans les parties qui vont suivre, nous considérons le cas $0 < \alpha < 1$.

4.3.3 Positivité des systèmes linéaires fractionnaires standards

Parmi les définitions qui sont vérifiées pour le cas classique et sont aussi pour le cas fractionnaire, on donne :

Définition 4.3.1 *Le système fractionnaire (4.3.1) est dit positif si $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, y(t) \in \mathbb{R}_+^p, t \geq 0$ pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m, t \geq 0$.*

Lemme 4.3.1 *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $0 \prec \alpha \prec 1$ alors :*

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ pour } t \geq 0\ , \tag{4.3.2}$$

et

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ pour } t \geq 0 \tag{4.3.3}$$

si et seulement si A est une matrice de Metzler.

Preuve. **Necéssité :** on a

$$\phi_0(t) = I_n + \frac{At^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + ...,$$

$$\phi(t) = I_n \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{At^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} + ...,$$

il s'ensuit que $\phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $\phi(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ pour $t \geq 0$, si A est une matrice de Metzler.

Suffisance :

Supposons que A est une matrice de Metzler alors d'après le théorème (1.2.2) ona

$$e^{At} \geq 0 \text{ pour } t \geq 0, \tag{4.3.4}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \phi_0(t) - e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^{\alpha})^k}{\Gamma(k\alpha+1)} - \frac{(At^{\alpha})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! - \Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)} \frac{(At^{\alpha})^k}{k!} \\ &\geq 0 \qquad \text{pour } t \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Puisque $k! \geq \Gamma(k\alpha+1)$ pour $0 < \alpha < 1$ et de (4.3.4) et (4.3.5) nous avons

$$\phi_0(t) \geq e^{At} \text{ pour } t \geq 0,$$

Par suite $\phi_0(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, et la démonstration est similaire pour $\phi(t)$. $\square$

Théorème 4.3.2 *Le système fractionnaire linéaire décrit par (4.3.1)est positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$.*

4.3.4 Stabilité des systèmes linéaires fractionnaires standards positifs

Soit le système linéaire fractionnaire positif à temps continu suivant :

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t), \quad 0 \prec \alpha \prec 1, \quad t \geq 0 \tag{4.3.6}$$

Théorème 4.3.3 *Le système fractionnaire continu positif (4.3.6) est asymptotiquement stable si seulement si les valeurs propres de la matrice A sont situées dans le demi-plan complexe gauche ouvert i.e : $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$.*

Théorème 4.3.4 *Le système fractionnaire (4.3.6) est asymptotiquement stable si et seulement si tout les coefficients du polynôme :*

$$\det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

sont positifs, i.e : $a_i > 0$ pour $i = 0, 1, ..., n-1$

4.4 Systèmes linéaires fractionnaires singuliers

4.4.1 Représentation d'état

Considéraons le système singulier fractionnaire décrit par l'équation d'état

$$\begin{aligned} ED^{\alpha}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad 0 < \alpha < 1 \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Avec D^{α} est l'opérateur différentiel de Caputo,$x(t) \in \mathbb{R}^n$est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de commande, $y(t) \in \mathbb{R}^p$est le vecteur de sortie, $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

4.4.2 Régularité des systèmes singuliers fractionnaires

Définition 4.4.1 *On dit que la paire (E, A) dans le système (4.4.1) est régulière si et seulement si* $\det(E\lambda - A) \neq 0$ *pour certain* $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda = s^{\alpha})$, $0 \prec \alpha \prec 1$.

Exemple 4.4.1 *On considère le système (4.4.1) pour $\alpha = 0.5$ avec les matrices*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et la condition initiale $x_0 = 0$, alors le système est régulier car

$$\begin{aligned} \det(E\lambda - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda, \ (\lambda = s^{\alpha}) \\ &\neq 0 \ \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C}^*, \end{aligned}$$

4.4.3 Trajectoire et sortie du système

Supposons que $\det E = 0$ (E singulier) et que la paire (E, A) est régulière, i.e $\det[Es^{\alpha} - A] \neq 0$ pour certain $s \in \mathbb{C}$. Alors

$$(Es^{\alpha} - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \varphi_i s^{-(i+1)^{\alpha}}, \tag{4.4.2}$$

où φ_i vérifie

$$E\varphi_i - A\varphi_{i-1} = \varphi_i E - \varphi_{i-1} A = \delta_{i0} = \begin{cases} I_n & \text{pour } i = 0 \\ 0 & \text{pour } i \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.3}$$

où (δ_{ij} est le delta de Kronecker) et

$$\varphi_i = 0 \ pour \ \ i < -\mu, \ \varphi_{-\mu}E = E\varphi_{-\mu} = 0 \tag{4.4.4}$$

Théorème 4.4.1 *La solution du système dynamique de l'équation fractionnaire(4.4.1) est donnée par*

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{+\infty}(\varphi_0 A)^i\varphi_0\left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma[(i+1)\alpha]}Bu(\tau)d\tau + \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(i\alpha+1)}Ex_0\right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\mu}\left[\varphi_{-i}Bu(t)^{(i-1)\alpha} + \delta^{(i\alpha-1)}Ex_0\right], \end{aligned}$$

Preuve. Supposons que (E, A) est régulière, donc $(Es^\alpha - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\varphi_i s^{-(i+1)^\alpha}$ où φ_i vérifie (4.4.1) et (4.4.4)

on a

$$(Es^\alpha - A)\sum_{i=-\mu}^{+\infty}\varphi_i s^{-(i+1)^\alpha} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\varphi_i s^{-(i+1)^\alpha}(Es^\alpha - A) \tag{4.4.5}$$

d'une part,

on prend l'équation différentielle fractionnaire, puis on applique la transformation de Laplace, on obtient cependant,

$$E\mathcal{L}(\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha}) = \mathcal{L}(Ax(t) + Bu(t))$$

alors

$$\begin{aligned} Es^\alpha X(s) &= AX(s) + BU(s) + s^{\alpha-1}Ex_0 \\ X(s) &= (Es^\alpha - A)^{-1}[Bu(s) + s^{\alpha-1}Ex_0] \end{aligned}$$

En remplaçant $(Es^\alpha - A)^{-1}$par (4.4.5), on trouve alors,

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\varphi_i s^{-(i+1)^\alpha}[Bu(s) + s^{\alpha-1}Ex_0] \\ &= \sum_{i=-\mu}^{+\infty}\varphi_i[s^{-(i+1)^\alpha}Bu(s) + s^{-(\alpha i+1)}Ex_0] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\varphi_i[s^{-(i+1)^\alpha}Bu(s) + s^{-(\alpha i+1)}Ex_0] + \sum_{i=1}^{\mu}\varphi_{-i}[s^{-(i+1)^\alpha}Bu(s) + s^{-(\alpha i+1)}Ex_0] \end{aligned}$$

Par l'application de la transformation inverse de Laplace, on obtient

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}(X(s)) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}[\varphi_i \int_0^t \varphi_i \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma[(i+1)\alpha]} Bu(\tau)d\tau + \frac{\varphi_i t^{\alpha i}}{\Gamma(i\alpha+1)} Ex_0] + \sum_{i=1}^{\mu} \varphi_{-i}[Bu(t)^{(i-1)\alpha} + \delta^{(i\alpha-1)} Ex_0],
\end{aligned}
$$

□

Remarque 4.4.1 *Si* $\det(E) \neq 0$, *alors* E^{-1}*existe et donc la solution devient*

$$
x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\int_0^t (E^{-1}A)^i \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma\left[(i+1)\alpha\right]} E^{-1}Bu(t)d\tau + \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma\left(i\alpha+1\right)} \left(E^{-1}A\right)^i x_0 \right]
$$

En effet, puisque E^{-1}existe on trouve

$$
\begin{aligned}
(Es^\alpha - A)^{-1} &= \left[Es^\alpha \left(I_n - (Es^\alpha)^{-1}\right) A\right]^{-1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}(E^{-1}A)^i E^{-1} s^{-(i+1)\alpha},
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
X(s) = \sum_{i=0}^{+\infty}(E^{-1}A)^i E^{-1} s^{-(i+1)\alpha} BU(s) + \sum_{i=0}^{+\infty}(E^{-1}A)^i s^{-(i\alpha+1)} x_0
$$

En appliquant la transformation inverse de Laplace, on obtient

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\int_0^t (E^{-1}A)^i \frac{(t-\tau)^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma\left[(i+1)\alpha\right]} E^{-1}Bu(t)d\tau + \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma\left(i\alpha+1\right)} \left(E^{-1}A\right)^i x_0 \right],
\end{aligned}
$$

d'où le résultat,

4.4.4 Positivité des systèmes singuliers fractionnaires

Dans cette partie, nous représentons la définition de la positivité des systèmes singuliers linéaires fractionnaires.

Définition 4.4.2 *Le système fractionnaire* (4.4.1) *est dit positif si* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n, t \geq 0$ *pour toute condition initiale non-négative* $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ *et tout contrôle admissible* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$.

Il existe a d'autres critères et conditions nécessaires et suffisantes de la positivité de ce type de systèmes liées avec leur stabilité.

4.4.5 Stabilité des systèmes singuliers linéaires fractionnaires positifs

On considère le système singulier fractionnaire positif sans contrôle suivant

$$E\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = Ax\left(t\right), \; x(0) = x_0, 0 \prec \alpha \prec 1 \tag{4.4.6}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}_+^n, u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ et $E, A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Définition 4.4.3 *le système singulier fractionnaire positif décrit par l'équation* (4.4.6) *est dit asymptotiquement stable si*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0, \; \textit{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+^n.$$

Supposons que nous pouvons réduire la paire (E, A) dans (4.4.6) sous la forme

$$P\left[Es - A\right]Q = \bar{E}s - \bar{A}, \text{ où } \bar{E} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.4.7}$$

$\bar{A}_{11} \in M_{n_1}(\mathbb{R})$et $\bar{A}_{22} \in M_{n2}(\mathbb{R})$ deux matrices de Metzler, $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}_+^{n_1\times n_2}, \bar{A}_{21} \in \mathbb{R}_+^{n_2\times n_1}, n_1 + n_2 = n,\; P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ est une matrice monomiale.

Théorème 4.4.2 *Le système fractionnaire linéaire singulier* (4.4.1) *est positif et asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une paire de matrice* (P, Q) *qui satisfait* (4.4.7) *tel que les coefficients des polynômes :*

$$P_1(s) = \det\begin{bmatrix} I_{n_1}s - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ -\bar{A}_{21} & -\bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

et

$$P_2(s) = \det\left[I_{n_2}s - \bar{A}_{22}\right]$$

sont positifs.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes linéaires singuliers discret 2D par l'approche IML.

5.1 Introduction

Les inégalités matricielles linéaires représentent un outil éfficace pour résoudre beaucoup de problèmes d'optimisation, dans le domaine de la théorie de contrôle, le traitement de signal,... Du point de vue contrôle, l'utilisation des IMLs est vraiment large dans l'analyse de la stabilité.

Dans ce chapitre, on va s'intérésser à l'étude de la stabilité des systèmes singuliers discrets à deux dimensions sous la contrainte de positivité de l'état, des conditions nécessaires et suffisantes seront donc établies. Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes :[1],[2] et [4].

5.2 Inégalités matricielles linéaires

Pour pouvoir présenter des résultats sur la stabilité des systèmes positifs par IML, on a besoin de quelques notions citées dans [4].

5.2.1 les formulations IMLs

Définition 5.2.1 *Une inégalité matricielle* (IML) *est une expréssion de la forme*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i > 0, \tag{5.2.1}$$

où $x = (x_i)_{i=1,..,n}$ est un vecteur de nombres réels et $(F_i)_{i=0,..,n}$ sont des matrices réelles symétriques.

Remarque 5.2.1 *L'inégalité "$>$" dans* (5.2.1) *signifie «définie positive»*

Exemple 5.2.1 *L'inégalité*

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{bmatrix} > 0$$

est une IML à deux variables. On peut alors l'écrire comme

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0$$

Définition 5.2.2 *Une inégalité matricielle linéaire est une inégalité de la forme*

$$F\left(x\right) \succ 0 \tag{5.2.2}$$

où F est fonction affine d'un espace vectoriel de dimension fini vers un ensemle de matrices réelles symétriques

$$S^n = \left\{M/M = M^T \in \mathbb{R}^{n\times n}\right\}_{n\ >0}$$

1. Une IML non stricte est une IML telle que l'inégalité dans (5.2.2) est non stricte i.e (5.2.2) devient$F\left(x\right) \geq 0$
2. Des inégalités matricielles linéaires $F\left(x\right) < 0$ est un cas particulier de (5.2.1) puisqu'elle peuvent être reformulées sous forme

$$-F\left(x\right) > 0$$

On écrit toujours une IML sous la forme $F(x) < 0$ avec $F : \mathbb{R}^n \to S^n$

Propriétés

-Si

$$\begin{aligned} G(x) &> 0, \\ H(x) &> 0 \end{aligned}$$

sont deux IMLs, alors,

$$\begin{bmatrix} G(x) & 0 \\ 0 & H(x) \end{bmatrix} > 0$$

est une IML.

-Plus généralement, lorsqu'il y a plusieurs IMLs $F_i(x) > 0, i = 1, .., n$, il est toujours possible de les réécrire sous une seule LMI

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_n(x) \end{bmatrix} > 0$$

L'inégalité a un sens puisque $F(x)$ est symétrique.

-Tout x vérifiant l'inégalité

$$F(x) > 0$$

satisfait aussi le système des IMLs $F_i(x) > 0, i = 1, .., n$ et vice versa.

-Pour $\alpha > 0$, on a $F(x) > 0$ équivalent à $\alpha F(x) > 0$.

On pense maintenant à introduire la théorie de stabilité par les IMLs.

5.2.2 Stabilité de Lyapunov

Les LMIs ne se présentent pas directement sous la forme de l'inégalité présentée ci-dessus (5.2.2). Prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire,

$$x' = Ax(t)$$

Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T > 0$ de même dimension que A telle que $A^T P + P^T A < 0$ qui se réécrit sous une seule inégalité

$$\begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^T P + P^T A \end{bmatrix} \prec 0$$

Cette inégalité représente une caractérisation matricielle de la stabilité sous formulation IML.

5.3 Stabilité des systèmes 2D de Lyaponov

Les systèmes 2D sont des systèmes qui sont caractérisés par deux variables indépendantes qui propagent l'information dans deux directions indépendantes.

On considère le système discret 2D

$$\begin{cases} Ex\left(i+1, j+1\right) = A_0 x\left(i, j\right) + x\left(i, j\right) A_1 + Bu\left(i, j\right) \\ y = Cx\left(i, j\right) \end{cases} \tag{5.3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$et $y \in \mathbb{R}^p, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, i = 0, 1, 2$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

avec

$$\begin{cases} x\left(i, 0\right) = x_{i0} & ,i = 1, .., n \\ x\left(0, j\right) = x_{0j} & ,j = 1, .., n \end{cases}$$

sont des conditions aux limites, ce système s'appelle le système linéaire de Lyapunov linéaire 2D en temps réel.

5.3.1 Conditions nécessaires et suffisantes de la stabilité

Soit le système 2D particulier (sans contrôle)

$$\begin{cases} Ex\left(i+1, j+1\right) = A_0 x\left(i, j\right) + x\left(i, j\right) A_1 \\ y = Cx\left(i, j\right) \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Véctorisation du modèle

On prend l'équation d'état dans le système (5.3.2) , puis on le véctorise, on obtient

$$vec\left[Ex\left(i+1, j+1\right)\right] = vec\left[A_0 x\left(i, j\right) + x\left(i, j\right) A_1\right]$$

La linéairité de l'opération vec , nous donne

$$vec\left[Ex\left(i+1, j+1\right)\right] = vec\left[A_0 x\left(i, j\right)\right] + vec\left[x\left(i, j\right) A_1\right]$$

et donc

$$(I_n \otimes E)\, vec\,[x\,(i+1,j+1)] = (I \otimes A_0)\, vec\,[x\,(i,j)] + \left(A_1^T \otimes I\right) vec\,[x\,(i,j)]$$

Cela implique que

$$(I_n \otimes E)\, vec\,[x\,(i+1,j+1)] = \left[(I_n \otimes A_0) + \left(A_1^T \otimes I_n\right)\right] vec\,[x\,(i,j)]$$

Alors le système (5.3.2) équivaux à

$$\begin{cases} \hat{E}X\,(i+1,j+1) = \hat{A}X\,(i,j) \\ \hat{Y}\,(i,j) = \hat{C}X\,(i,j) \end{cases} \tag{5.3.3}$$

où $\hat{E} = (I_n \otimes E)$, $\hat{A} = (I_n \otimes A_0) + \left(A_1^T \otimes I_n\right), = (I_n \otimes E)$,$X\,(i,j) = vec\,[x\,(i,j)]\,, \hat{Y}\,(i,j) = vec\,[y\,(i,j)]$ et $\hat{C} = (I_n \otimes C)\,.$

Stabilité

On reconsidère le système de Lyapunov transformée,

$$\begin{cases} \hat{E}X\,(i+1,j+1) = \hat{A}X\,(i,j) \\ \hat{Y}\,(i,j) = \hat{C}X\,(i,j) \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Définition 5.3.1 *Le système 2D décrit dans (5.3.4) est asymptotiquement stable si pour toutes conditions limites $X\,(i,0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$,$i = 1,..,n$ et $X\,(0,j) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $j = 1,..,n$ on a*

$$\lim_{i,j\to+\infty} X\,(i,j) = 0$$

Théorème 5.3.1 *[1] Une matrice polynômiale hermitienne*

$$P\,(z) = \sum_{i=0}^{2} P_i z^i \qquad \text{avec } P_{-i} = P_i^*$$

est définie positive sur le cercle unité si et seulement s'il existe une matrice hermitienne X telle que

$$\begin{bmatrix} P_0 - X & P_1 \\ P_1^* & X \end{bmatrix} > 0\ ,\ X = X^*$$

Théorème 5.3.2 *[1] Le système de Lyapunov (5.3.2) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice hermitienne X_0, X_1, X_2 avec $X_0 \geq 0, X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$ satisfaisant les IMLs suivantes*

$$\left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right)^T X_1 \left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right) - \bar{E}_{1,0}^T X_1 \bar{E}_{1,0} > 0$$

$$\begin{bmatrix} \left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right)^T X_2 \left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right) - X_0 & \left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right)^T X_2 \bar{E}_{1,0} \\ -\bar{E}_{1,0}^T X_2 \left(I_n \otimes A_0 + A_1^T \otimes I_n\right) & X_2 + \bar{E}_{1,0}^T X_2 \bar{E}_{1,0} + \bar{E}_{0,1}^T X_2 \bar{E}_{0,1} \end{bmatrix} > 0$$

où $\bar{E}_{k,l} = (I_n \otimes E) \begin{bmatrix} kI_{n_1} & 0 \\ 0 & lI_{n_2} \end{bmatrix}$ et $n_1 + n_2 = n$.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a pour but l'étude de la stabilité asymptotique des systèmes linéaires positifs. Nous avons commencer par rassembler les outils nécessaires pour cette étude et qui consiste à présenté les différentes définitions liées à l'analyse des systèmes linéaires positifs. Puis nous avons rappeler la solution d'un système linéaire standard à temps continu ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes de positivité. La solution du système singulier à fait l'objet d'une section à part. Nous avons donné des critères pour la stabilité des systèmes linéaires singuliers positifs et les systèmes linéaires singuliers fractionnaires positifs.
La classe des systèmes 2D de Lyapunov a été considérée où nous avons établis des conditions suffisantes de stabilité.
En perspectives , on poura considérer le problème de stabilité des modèles 2D fractionnaires de Lyapunov.

Bibliographie

[1] A.M. Ghezzar et D. Bouagada, «On The Stability of 2D general Rosser Lyaponov Systems», Journal of Mathematical Control and Information, 2017.

[2] D. Bouagada et P.Van Dooren, «On The Stability of 2D State Space Models», Numerical Linear Algebra with applications, 2011, Doi : 10.1002/nla.836.

[3] D. Bouagada et P.Van Dooren, «State Space Solution of Implicit Fractional Continuous Time Systems», Fractional calculus and Applied Analysis, 2012, Volume 15, number 3, Doi 10.2478/s13540-012-0026-z.

[4] D. Bouagada, «Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs»,2007.

[5] G. Ren Duan, «Analysis and design of descriptor Linear Systems»,Springer,2010.

[6] H. Zang et F.Ding, «On The Kronecker Products and Their Applications», Journal of Applied Mathematics, 2013.

[7] J. Liesen et V.Mehrmann,«Linear Algebra», Springer, 2015.

[8] L. Dai, «Singular control systems», Lecture Note in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] L. Farina et S.Rinaldi,«Positive Linear Systems :Theory and Applications»,Wiley, New York, 2000.

[10] T. Kaczorek,«Approximation of Fractional Positive Stable Continuous-Time Linear Systems by Fractional Positive Stable Discrete-Time Systems», Journal of Applied Mathematics, 2013.

[11] T.Kaczorek, «Checking of The Positivity of Descriptor linear systems with Singular pencils»,Archives of Control Sciences, 2012.

[12] T.Kaczorek, «Descriptor Fractional linear systems with Regular pencils», Journal of Applied Mathematics, 2013.

[13] T.Kaczorek, «Fractional Descriptor linear systems Observers for Fractional Descriptor Continuous-Time Linear System», Archives of Control Sciences, 2014.

[14] T.Kaczorek, «Fractional Positive Continuous-Time Linear Systems and Their Reachability», Journal of Applied Mathematics, 2008.

[15] T.Kaczorek, «New Stability Tests of Positive Standard and Fractional Linear Systems», Journal of Scientific Research, 2011.

[16] T.Kaczorek, «Positive 1D and 2D systems», Springer-Verlag, London, 2002.

[17] T.Kaczorek, «Positive Fractional Continuous-Time Linear Systems with Singular pencils»,Bulletin of Polish Academy of sciences, 2012.

[18] T.Kaczorek, «Positive Stable Realizations for Fractional Descriptor Continuous-Time Linear Systems», Archives of Control Sciences, 2012.

[19] T.Kaczorek, «Selected Problems of Fractional Systems Theory», Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[20] T.Kaczorek, «Stability of Descriptor positive linear systems»,The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2013.