REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

OPTION : Modélisation,Contrôle et Optimisation

Mémoire
Présenté pour l'obtention du diplome de
MASTER EN MATHEMATIQUES

par
Moulai Bekhta

Théorie des opérateurs intégraux de Carleman et application aux systèmes dynamiques

ENCADREUR
Sidi Mohamed Bahri
Devant le jury

Président : Mr M. ANDASMAS
Examinateur : Mr M. AMIR
ANNÉE UNIVERSITAIRE :
2011/2012

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A ma mère.

A mon père.

A mes soeurs (Fatima et khaoula).

A mon frère (Abd el-ghani).

A mes amis (Amel, Asma, naima, Zineb, Karima, Hakima, ...).

A Toute ma famille.

Remerciements

Avant tout, je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur Sidi Mohamed Bahri. mon encadreur qui m'a guidé dans cette étude, pour son aide continues ses en couragements sans cesse et ses conseils précieux.

Je n'oublierai pas de remercier également monsieur le président du jury, Monsieur AMIR et l'examinatrice ANDASMAS

Je remercie l'ensemble des membres du département de Mathématique à l'université de Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem. Nos remerciement s'adresse a tous ceux qui nous ont poussé vers la réussite en particulier :

nos parents, nos frère et sœurs, tous nous enseignants.

Notations

$\mathbb{R}$:corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

H :espace de Hilbert.

$L^2(X, \mu)$: espace de Hilbert des fonctions définies sur X à carrés intégrables.

$L^2(\mathbb{R}^n)$: espace de Hilbert des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à carrés intégrables.

T :opérateur de Carleman.

T^* :opérateur adjoint.

$K(x, y)$:noyau de l'opérateur intégrale.

$D(T)$:domaine de l'opérateur T.

μ : mesure $\sigma-$finie.

$B(H_1, H_2)$:espace des opérateurs linéaires bornés de l'espace de Hilbert H_1dans l'espace de Hilbert H_2.

$\rho(T)$: la résolvante de T.

$\sigma(T)$: le spectre de T.

Table des matières

Introduction

La théorie des opérateurs intégraux de Carleman et son application aux systèmes dynamiques est un domaine de recherche important et difficile étudiée en premier lieu dans l'article V.F.Zadorozhnyi ([17]).

Dans ce travail nous étudions des opérateurs intégrals et nous présentons plusieurs résultats de base au sujet des propriétés opérateurs de Carleman (*voir* [14]).

Ensuite on donnera une application aux systèmes dynamiques.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques rudiments de la théorie des opérateurs linéaires, ainsi que cette des systèmes dynamiques.

Dans le second chapitre, nous abordons les opérateurs intégraux et plus précisiment la classe des opérateurs de Carleman.

Au troisième chapitre, nous avons ésquisé un résultat fondamental, à savoir qui un système dynamique compact est engendré par or opérateur de Carleman.

Dans le quatrième chapitre, nous avons abordé la question de la stabilité asymptotique et la liaison avec les opérateur de Hilbert-Schmidt qui sont un classe spéciale des opérateurs de Carleman.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Opérateurs linéaires dans un espace Hilbert

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1 *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.2 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Théorème 1.1 (Inégalité de Schwartz) *[18] Pour tous vecteurs x, y dans un espace vectoriel H muni du produit scalaire $(.,.)$,l'inégalité suivante est vrais*

$$|(x,y)| \leq (x,x)^{\frac{1}{2}} (y,y)^{\frac{1}{2}} .$$

Suite orthonormale Une suite $(x_n)_{n>0}$ de vecteurs est dite orthonormée si

$$(x_m, x_n) = \delta_{m,n};$$

avec

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 \ si \ m \neq n, \\ 1 \ si \ m = n. \end{cases}$$

Définition 1.3 *Un suite orthonormale complete $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dans un espace de Hilbert H est une base dans H.*

Théorème 1.2 (Inégalité de Parseval) *[8]*

Soit $\{e_i\}_{i\geq 1}$ un systéme orthonormal. Alors $\{e_i\}_{i\geq 1}$ est une base dans H si, et seulement si, pour tout $x \in H$,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i\geq 1} |(x, e_i)|^2$$

Définition 1.4 *Soit X un espace mesuré $\sigma-$fini. Nous disons qu'une fonction mesurable f définie presque partout dans X, appartient à $L^2\ (X, \mu)$ si l'intégrale*

$$\|f\|^2 = \int_X |f(x)|^2 \, dx,$$

est finie.

1.1.2 Opérateur linéaire

Définition 1.5 (Opérateur linéaire) *On dit que $A: H_1 \to H_2$ est un opérateur linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. $D(A)$ domaine de définition.
2. $\forall x, y \in H \times H$; $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

1.1.3 Cas particulier : fonctionnelle linéaire

Si $H_2 = \mathbb{C}$ où $\mathbb{R}$, On dit que A est une fonctionnelle linéaire sur H_1 .

Définition 1.6 (Opérateur fermé) *Soit H un espace de Hilbert et $A : H_1 \to H_2$ or opérateur linéaire . Supposons que la suite (f_n) de H vérifie la conditions suivants :*

1. $f_n \in D(A)$ pourtout $x \in H$;
2. (f_n) converge vers un élément f.
3. (Af_n) converge.

Définition 1.7 *A est dit fermé si et seulement si pour toute suite (f_n) vérifiant 1 et 2, ona :*
$$\begin{gathered} f \in D(A) \\ Af = \lim_{n\to\infty} Af_n. \end{gathered}$$

Théorème 1.3 (Représentation de Riesz) *[18]*

Pour tout $T \in H^*$ il existe $y \in H$ tel que $T(x) = (x, y)$. (Toute fonctionnelle linéaire continue sur un espace de Hilbert est représentée par un élément du méme espace vérifiant : $T(x) = (x, y)$.) de plus $\|T\|^* = \|y\|$.

1.1.4 Adjoint d'un opérateur

Définition 1.8 (Opérateur adjoint) *Soit T un opérateur défini sur H. On dit que T admet un opérateur adjoint, s'il existe un opérateur T^* dans H, tel que pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$*
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle .$$

Définition 1.9 (Opérateur auto-adjoint) *T est dit auto-adjoint si et seulement si*
$$T = T^*.$$

T est dit opérateur normal si et seulement si
$$TT^* = T^*T.$$

1.2 Théorie spectrale d'un opérateur linéaire

1.2.1 Spectre et ensemble résolvant

Définition 1.10 *Soit T un opérateur linéaire définit sur un Hilbert H on appelle ensemble résolvent de T et on note $\rho(T)$, l'ensemble des nombres Complexes λ Tels que $(T - \lambda I)^{-1} \in L(H)$ i.e., existe et est bornée,*

$$\rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} / (T - \lambda I)^{-1} \in L(H) \right\},$$

on appelle spectre de T est not $\delta(T)$ le cmplémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$: $\delta(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$. L'ensemble des valeurs propres de T est dit spectre ponctuel de T et est notée

$$\begin{aligned} \delta(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \exists\ x \neq 0; Tx = \lambda x\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \exists\ x \neq 0; (T - \lambda I)\, x = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / \exists\ x \neq 0; et\ x \in \ker(T - \lambda I)\}. \end{aligned}$$

On appelle spectre continue de T, l'ensemble des complexes λ tels que

$$\begin{cases} \ker(T - \lambda I) = \{0\} \\ \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq H \\ \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = H. \end{cases}$$

On appelle spectre résiduel de T et on le note $\delta_r(T)$, l'ensemble des complexes λ tels que

$$\begin{cases} \ker(T - \lambda I) = \{0\} \\ \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} \neq H. \end{cases}$$

Résumé

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \delta(T)$$

avec

$$\delta(T) = \delta(T)_p \cup \delta(T)_c \cup \delta(T)_r$$

1.2.2 Résolvante et fonction spectrale

Soit A un opérateur auto-adjoint dans $L(H)$ défini sur un ensemble vectoriel

$$D(A) \subset L(H)$$

appelé domaine de A.

Définition 1.11 *Un point λ du plan complexe est dit point régulier de A si la résolvante*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

existe est définie sur tout H et bornée (I désigne l'identité de H). L'ensemble des points réguliers de A. est appelé ensemble résolvant et on le note $\rho(A)$.

1.2.3 Générateur infinitésimale d'un semi-groupe

Définition 1.12 (Semi-groupe) *On apple semi-groupe fortement continu, une application : telle que :*

1. $G(0) = I$.
2. $G(t+s) = G(t).G(s)\ \ \forall t,\ s \geq 0$.
3. $\forall\ \varphi \in E$.

Définition 1.13 *l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & E \\ t & \to & G(t)\varphi, \end{array}$$

est fortement continue en "0" *i.e* :

$$\varphi \in E\ :\lim_{t\to 0^+}\|G(t)\varphi - \varphi\|_E = 0.$$

On dira que $G(t)$ *vérifie la* C_0-*condition.*

Définition 1.14 ***Définition 1.15 Définition 1.16*** *On appelle générateur infinitésimale du semi-groupe* $\{G(t)\}$ *l'opérateur linéaire non bornée* A *définie par* $D(A)$ *ou*

$$D_A = \left\{\varphi \in E/\lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}\right\},$$

existe.

$$D_A \neq \varnothing$$

$$A\varphi = \lim_{t\to 0^+}\frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

Théorème 1.4 *Soit* A *le Générateur infinitésimal du* C_0 *semigroup* $\{G(t)\}$ *. Alors*

1. A est linéaire fermé.
2. $D_A$est dense dans E.
3. $\rho(A) \supset \left\{\begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}/\operatorname{Re}\lambda > W,\ W > 0\ , \\ \left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - W)},\quad \forall n \geq 1. \end{array}\right\}$

Théorème 1.5 (Hille-Yosida) *A un opérateur linéaire est le générateur infinitesimale d'un semigroup* C_0 *des contraction* $A(t), t \geq 0$; *si est seulement si :* A *est fermé et* $\overline{D(A)} = X$. *L'ensemble resolvent* $\rho(A)$ *de* A *et pour chaque*

$$\lambda \geq 0, \|(A,\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

1.3 Variétés différentiables

1.3.1 Flot

Dans cette partie, nous rappelons des resulta de base de l'analyse réelle et les théorèmes dont nous aurons besoin pour notre travail.

On pose

$$M = \{x_1, x_2 : 0 \leq x_i \leq 1\} = [0,1] \times [0,1] .$$

Définition 1.17 *Le flot est un modèle mathématique d'un processus déterministe. Soit M l'espace des phases d'un processus, $x \in M$ un état initial quelconque. Désignons par $g^t x$ l'état de ce processus à l'instant t avec un état initial x. Nous avons ainsi défini pour chaque t réel l'application.*

$$g^t : M \to M,$$

de l'espace des phases M sur lui-même. L'application g^t qui associe à chaque état $x \in M$ un nouvel état $g^t x \in M$ s'appelle application pendant le temps t. Par exemple, l'application g° qui laisse fixe chaque point de M est l'application identique.

Une famille $\{g^t\}$ d'applications de M dans M, indexée par l'ensemble des nombres réels ($t \in \mathbb{R}$), est appelée groupe à un paramètre d'application de M si quelque soient s et $t \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s \tag{1.1}$$

Définition 1.18 *On appelle flot $(M, \{g^t\})$ le couple formé de l'ensemble M et d'un groupe à un paramètre $\{g^t\}$ d'applications de M. L'ensemble M est appelé espace des phases du flot.*

Soit $x \in M$ un point quelconque de l'espace des phases. Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \to M, \ \varphi(t) = \ g^t x. \tag{1.2}$$

1.3.2 Variétés différentiables

Définition 1.19 *Une variété différentiable M est composée d'un ensemble M et de la structure de variété différentiable qui lui a été conférée.*

On dit qu'à l'ensemble M a été conférée une structure de variété si a été défini un atlas composé de cartes compatibles.

Définition 1.20 *Par carte on désigne un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ et l'application bijective*

$$\varphi : W \to U$$

du sous-ensemble W de l'ensemble M sur U . On appelle $\varphi(x)$ l'image sur la carte U du point $x \in W \subset M$.

Définition 1.21 *On appelle atlas sur M l'ensemble des cartes*

$$\varphi_i : W_i \to U_i. \tag{1.3}$$

On appelle structure d'une variété différentiable sur M une classe d'atlas équivalence.

1.3.3 Difféomorphisme

Les définitions données plus haut formalisent la notion de processus déterministe. La formalisation des conditions de finitude et de différentiable implique que l'espace des phases doit être une variété différentiable de dimension finie, et le flot un groupe à un paramètre de difféomorphismes de cette variété.

Définition 1.22 *On appelle fonction différentiable*

$$f: \ U \to \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

définie sur le domaine U de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni des coordonnées ($x_1, ..., x_n$), la fonction r fois continument différentiable $f(x_1, ..., x_n)$, où

$$1 \leq r \leq \infty.$$

Définition 1.23 *On appelle application différentiable*

$$f : U \to V,$$

du domaine U de l'ensemble euclidien $\mathbb{R}^n$ muni des coordonnées ($x_1, ..., x_n$) dans le domaine V de l'ensemble euclidien $\mathbb{R}^m$ muni des coordonnées $(y_1, ..., y_m)$ l'application définie par les fonctions différentiables

$$y_i = f_i(x_1, ..., x_n).$$

Ce qui signifie que si

$$y_i : V \to \mathbb{R},$$

sont des coordonnées sur V, alors

$$y_i \circ f : u \to \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq m),$$

sont des fonctions différentiables sur U.

Définition 1.24 *On appelle diffèomorphisme*

$$f : U \to V$$

une application bijective telle que f et

$$f^{-1} : V \to U$$

soient des applications différentiables.

1.4 Systèmes dynamiques

1.4.1 Théorème de Cauchy

Définition 1.25 *Un système dynamique à temps continue ou un flot sur un ensemble M^n est une famille de transformations Ψ_t $t \in \mathbb{R}$, sur M^n tels que Ψ_0 est une transformation d'identité et*

$$\Psi_{t+s} = \Psi_t + \Psi_s.$$

Des contraintes supplémentaires sont également imposées : la continuité, régularité...etc. La transformation Ψ_t est définie en utilisant un champ de vecteurs $X(x)$ ou une équation vectorielle non linéaire

$$\dot{x} = X(x), \ x \in M^n. \tag{1.5}$$

là où M^n est C^rréguliere. Le champ de vecteur $X(x)$, $x \in M^n$ est parfois traité comme système dynamique. Dans ce qui suit, les systèmes dynamiques sont considérés sur les ensembles bornés fermés (ensemble compact) C^rseules réguliér $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. On note par $\sum$ le système dynamique

Théorème 1.6 (Théoréme de cauchy) ([*13*]). *Soit* (1.5) *un* $\sum$ *−système dynamique compact. Soit l'ensemble compact $\overline{\Omega}$ une variété de classe C^r régulière. Alors la courbe intégrale (qui est unique) $x_t(x) : t \to x_t(x) \in \Omega$ passe par tout point x sur $\Omega = int\ \overline{\Omega}$ que par le point initial. Cette courbe appartient à la classe C^r pour chaque $t \in [0, \infty)$, l'égalité*

$$\Psi_t(x) = x_t(x)$$

définit l'application,

$$\Psi_t : \Omega \to \Omega$$

Ψ_0 étant l'application identité et

$$\Psi_{t_1} \circ \Psi_{t_2} = \Psi_{t_1+t_2}(x_{t_1}(x_{t_2}(x))) = x_{t_1+t_2}(x)).$$

L'égalité

$$\Psi(t, x) = x_t(x)$$

définit l'application

$$\Psi_t : \mathbb{R} \times M^n \to M^n.$$

Cette application appartient à la classe C^r. Maintenant, utilisons un noyau $k(x, y)$, x, $y \in \Omega$, pour introduire un opérateur A, où $k(x, .) \in L^2(Y)$ pour presque tout

$$x(0) = x \in \Omega.$$

Soit $k(x, .)$ est le noyau de Carleman et soit $g \in L^2\left(\overline{\Omega}\right)$, puis $k(x, .)g(.) \in L^1(Y)$ pour presque chacun des x. Pour de tels noyaux, le domaine de définition g se compose des $g(x)$ dont les images appartiennent à $L^2(\overline{\Omega})$. Le théorème établit les conditions d'existence et d'unicité pour la solution

$$x_t(x) = T_t(x),$$

dans son ensemble.

Supposons que le système (1.5) admet une solution dans son ensemble pour n'importe quel instant de temps si pour presque tous les points x avec la mesure ordinaire de Lebesgue et pour tout $t \in [0, \infty)$, il existe une solution du systéme (1.5) sous les conditions initiales $x(0) = x$, tel que tout point de l'ensemble Ω, éxcepté pour points d'un ensemble de mesure nulle, ne tend pas à l'infini dans un temps fini.

1.4.2 Notion de stabilité

Définition 1.26 (Stabilité) *Le point d'equilibre x_0 est dit stable au sens de Lyapounov. Si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour toute condition initiale dans $B\left(x, r\right)$, la trajectoire du système $\left(\dot{x} = f\left(x\right) \text{ avec } f\left(x_0\right) = 0\right)$ reste dans $B\left(x_0, R\right)$, pour tout $t \geq 0$.*

Définition 1.27 (Stabilité asymptotique) *Le point d'equilibre x_0 est locament asymptotique stable (respectivement globalement asymptotique stable) si*

1. x_0 est localement attractif (respectivement globalement attractif).
2. x_0 est un point d'equilibre stable au sens de Lyapounov.

1.4.3 Domaine d'attraction

Définition 1.28 *On considérons un système non linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x\right) \\ x\left(0\right) = 0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad ...(1)$$

f continu Lipschitiz, $f\left(0\right) = 0$. Supposons que

$$x^* = 0,$$

est asymptotiquement stable. Le domaine d'attraction de 0 est définie par

$$A\left(0\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n / \varphi\left(t, x\right) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \right\}.$$

Ici $\varphi\left(., x\right)$ dénote la solution de $\left(1\right)$.

1.4.4 Fonctions de Liapunov

Définition 1.29 *Une fonction de Liapunov est un outil permettant de déterminer par exemple la stabilité d'un point d'équilibre d'un point de vue global et non seulement local. Par ailleurs, une fonction de Liapunov peut également être utilisée pour déterminer la stabilité d'un équilibre non hyperbolique, c'est-à-dire lorsque la linéarisation ne permet pas de conclure. Pour commencer, définissons ce qu'est une fonction définie positive.*

1.4.5 Fonction définie positive

Définition 1.30 *On appelle fonction définie positive (resp.négative) une fonction $V(x, y)$ définie, différentiable et de différentielle continue sur un ouvert D contenant l'origine et vérifiant les propriétés suivantes :*

$$V(0, 0) = 0;$$

$$\forall (x, y) \in D - (0, 0), V(x, y) > 0 \; (resp. V(x, y) < 0).$$

1.5 Quelques résultats de la théorie d'intégration

Théorème 1.7 (Théoréme de la convergence dominée) *[14]*

Soit (f_n) *une suite de l'espace vectorielle normée* X *telle que* $f_n \to f$, $n \to \infty$ *,il existe une fonction* $g \in X$ *telle que* $|f_n| \leq g$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.Donc* $f \in X$ *et* $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu.$

Théorème 1.8 *[5] Si* (f_n) *est une suite convergente vers* f *dans* $L^2(X)$ *, alors* (f_n) *admet une sous suite* (f_{n_k}) *qui converge presque partout. De plus, il existe un* $h \in L^2(X)$ *tel que pour tout* k

Théorème 1.9 (Théoréme de Beppo.Levi) *[4] Soit*(f_n) *une suite décroissante dans* X *et la suite des l'intégrales* $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ *est bornée. Alors, il existe une fonction* $f \in X$ *telle que* $f_n \to f$ *et* $\int_X f_n d\mu \to \int_X f \, d\mu.$

Chapitre 2

Les opérateurs intégraux

Un opérateur intégral T est un opérateur ayant la forme intégrale suivante

$$Tf(x) = \int\limits_X K(x,y)f(y)dy. \tag{2.1}$$

Chaque opérateur correspond à un choix différent de la fonction K, qui s'appelle le noyau de l'operateur T.

Nous devons considérer les opérateurs intégraux non pas comme une classe d'opérateurs comme celle des opérateurs différentiels ou celle des opérateurs de substitution, etc., mais plutôt comme une façon normalisée de représentation des opérateurs linéaires. Il existe plusieur représentation pour définir les opérateurs intégraux, nous choisirons ici trois des plus répondus.

2.1 Représentation intégrale des opérateurs linéaires

2.1.1 Approche des fonctionnelles linéaires

Nous considérons des familles de fonctionnelles linéaires $F(\lambda)$ agissantes sur l'espace de fonctions $L^2\ (X,\mu)$ .Si $\lambda \in X$ et $F(\lambda)$ est une fonctionnelle bornée *p.p.*, il existe d'aprés le lemme de Riesz (1.3), un élément fixe

$$K_\lambda (x) \in L^2 (X, \mu);$$

tels que

$$F(\lambda)\,\phi(x) = \int\limits_X K_\lambda (x)\,\phi(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Traitons maintenant λ comme une variable, alors (2.2) prend la forme

$$F(\lambda)\,\phi(x) = \int_X K(\lambda, x)\,\phi(x)\,dx. \tag{2.3}$$

avec

$$K(\lambda, x) \in L^2 (X, \mu)\ \ p.p.$$

ou bien

$$\int_X |K(\lambda, x)|^2 < \infty \ p.p. \tag{2.4}$$

La classe d'opérateurs décrite par(2.3) et (2.4) est la classe de Carleman contenant un important sous-ensemble la classe de Hilbert-Schmidt.

2.1.2 Approche de la moyenne pondérée

Nous considérons la moyenne pondérée (ou moyenne erithméétique généralisée) d'une fonction $\phi(x) \in L^2(X, \mu)$ donnée par

$$T\phi(x) = \int_X t(x)\,\phi(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Si nous introduisons des familles entière de telles "fonctionnelles moyenne", alors (2.5) devient

$$T(\lambda)\,\phi(x) = \int_X t(\lambda, x)\,\phi(x)\,dx,$$

un arrangement formel semblable à (2.3) , seulement la forme intégrale n'était pas présente et s'est produite par usage du lemme de Riesz et ici la forme intégrale est inhérente dans l'approche de la moyenne. De l'autre côté, nous ne pouvons rien dire au sujet des propriétés de $t(\lambda, x)$. Ces propriétés sont plutôt un problème de définition, pendant que, dans la première approche, la condition (2.4) s'en suit.

2.1.3 Approche du noyau reproduisant

L'approche la plus fendamentale aux opérateurs intégrals est la suivante. Considérons un espace S de fonctions définies sur un ensemble D tel qu'un noyau reproduisant (2.6) existe. Un tel noyau est une famille à un paramaitre $K(x, y)$ tel que

$$K(x, y) \in S$$

pour toutes les valeurs fixes du paramètre x,et pour tout $f \in S$

$$\int K(x, y)\,f(y)\,dy = f(x) \tag{2.6}$$

Soit Ω un opérateur linéaire défini sur S et écrivons

$$(\Omega f)(x) = \int [\Omega_k(x, y)]f(y)\,dy,$$

Remarque 2.1 *Il est évident qu'un opérateur intégral est linéaire, mais réciproquement les opérateurs linéaires ne sont pas tous des opérateurs intégraux ; en effet certains des opérateurs les plus simples ne le sont pas, par exemple l'opérateur d'identité.*

La théorie des opérateurs intégraux est intéressante en partie parce qu'elle lie les propriétés de l'opérateur T (2.1) aux propriétés du noyau K, une fonction de deux variables. N'importe quelle propriété de l'opérateur doit être de façon ou d'autre renvoyée en une propriété du noyau et vice-versa.

2.2 Les opérateurs integraux de Carleman

Définition 2.1 *Un opérateur linéaire*

$$T \ : L^2(X) \ \to L^2(X)$$

est appelé opérateur de Carleman s'il existe une fonction mesurable

$$k : X \times X \to \mathbb{C}$$

telle que pour tout $f \in D(T)$

$$Tf(x) = (k(x), f)$$

et pour presque tout $x \in X$ *. Dans ce cas, la fonction* k *et dite fonction induisante de l'opérateur* T *.*

Lemme 2.1 *Pour tout* $f \in D(T)$*,la fonction* $(k(), f)$ *est mesurable.*

Définition 2.2 *L'opérateur integral* T *sur* $D(T)$ *dans* $L^2(X)$ *induit par le noyau* K *est défini par*

$$Tf(x) = \int K(x, y)g(y)dy$$

pour tout $g \in D(T)$*.*

Lemme 2.2 *L'opérateur integral* T *est linéaire.*

Preuve.

$$\int K(x, y)(\alpha g_1 + \beta g_2)(y)dy = \alpha \int K(x, y)g_1(y)dy + \beta \int K(x, y)g_2(y)dy,$$

$$\alpha, \beta \in \Bbbk, g_1, g_2 \in D(T).$$

$D(T)$ est évidement un sous-espace vectoriel dans $L^2(X)$. ■

Théorème 2.1 [5] *Si le noyau* K *est tel que* $D(T) = L^2(X)$*, alors L'opérateur intégral* T *est borné.*

Preuve. Commençons par montrer que T est un opérateur fermé.

Supposons que $g_n \to g$ et $Tg_n \to f$ dans $L^2(X)$. Nous devons montrer que $g \in D(T)$ et $Tg = f$. Sans perte de la généralité, en répétant l'utilisation du théorème (1.8) , on peut supposer que pour un certain $h \in L^2(X)$,

$g_n \to g, Tg_n \to f$, et $|g_n| \leq h$ pour presque tout x .

Donc pour presque tout x

$$\lim_n K(x, y)g_n(y) = K(x, y)g(y),$$

et pour preque tout y

$$\begin{aligned} |K(x, y)g_n(y)| &= |K(x, y)||g_n(y)| \\ &\leq |K(x, y)|h(y). \end{aligned}$$

Mais $h \in L^2(X)$ et $K(x,y) \in L^2(X)$ comme fonction de y. Ceci implique que

$$|K(x,y)||h(y)| = |K(x,y)|h \in L^2(X).$$

D'aprés le théorème de la convergence dominée (1.7) , il s'en suit que

$$\begin{aligned}\lim_n Tg_n &= \lim_n \int K(x,y)g_n(y)dy \\ &= \int K(x,y)g(y)dy \ p.p.\end{aligned}$$

Mais

$$\|Tg_n - f\| \to 0.$$

Donc,

$$f(x) = \int K(x,y)g(y)dy \ p.p.$$

Il s'en suit maintenant que T est fermé. D'aprés le théorème du graphe fermé (1.5), comme T est fermé et $D(T) = L^2(X)$, nous concluons que T est borné.

Remarque 2.2 *La classe des opérateurs de Carleman inclue quelques opérateurs intégraux les plus importants. Nous présentons plusieurs résultats de base des opérateurs de Carleman. Finalement, nous montrons que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est de Carleman.*

■

2.3 Propriétés des opérateurs de Carleman

2.3.1 Espace des opérateurs de Carleman

Théorème 2.2 [14] *Si T et S sont des opérateurs de Carleman, alors $aT + bS$ est aussi opérateur de Carleman pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.*

Preuve. Supposons que T et S sont opéreteurs de Carleman avec les fonctions induisantes k_1 et k_2 respectivement. Donc

$$T\ f\ (x) = (k_1(x),\ f\ )\ p.p.dans\ X\ ,\ f\ \in D(T);$$

$$Sf\ (x) = (k_2(x),\ f\ )\ p.p.dans\ X\ ,\ f\ \in D(S).$$

Ona

$$\begin{aligned}(aT + bS)f\ (x) &= (aT)f\ (x) + (bS)f\ (x) \\ &= (ak_1(x), f)\ + (bk_2(x), f\ ),\end{aligned}$$

Donc $aT + bS$ est un opérateur de Carleman avec de fonction induite $ak_1 + bk_2$. ■

Théorème 2.3 [14]*Si T est un opérateur de Carleman de H dans $L^2(X)$ induit par la fonction k et $S \in B(H)$ est un opérateur linéaire borné dans H, alors TS est un opérateur de Carleman de H dans $L^2(X)$ induit par S^*k.*

Preuve. Les hypothéses impliquent que

$$D(TS) = \{f \in H, Sf \in D(t)\}$$

$$= \left\{f \in H, (k(.), Sf) \in L^2(X)\right\}$$
$$= \left\{f \in H, (S^*k(.), f \in L^2(X)\right\}$$

et

$$TSf(x) = (k(x), Sf) = (S^*k(.), f)$$

pour presque tout $x \in X.i.e., TS$ est un opérateur de Carleman induit par S^*k. ■

Corollaire 2.1 *L'ensemble des opérateur de Carleman est un ideal à droite dans algébre de Banach $B(H)$.*

Corollaire 2.2 [14] *Soient $T \in B(H_1, H_2), S \in B(H_2, H_3)$, tel que l'un des deux opérateurs tous de Hilbert-Schmidt. Alors ST est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

Donc L'ensemble des opérateur de Carleman est aussi un ideal à gauche dans algébre de Banach $B(H)$.

Théorème 2.4 *Tout opérateur de Carleman est fermé.*

Preuve. Soient T un opérateur de Carleman et $g_n \in D(t)$ telle que $g_n \to g$ et $Tg_n \to f$ dans $L^2(X)$ implique $g_n \to g$ faiblement,i.e.,

$$(h, g_n) \to (h, g)$$

pour tout h fixé. En particulier,quand $K(x, .) \in L^2(X)$,alors $(K(x, .), \overline{g}_n) \to (K(x, .), \overline{g})$.i.e.,

$$\int K(x, y)\overline{g_n(y)}dy \to \int K(x, y)\overline{g(y)}dy.$$

Mais

$$\int K(x, y)\overline{g_n(y)}dy = Tg_n(x)$$

et

$$\int k(x, y)\overline{g(y)}dy = Tg(x) \ p.p.$$

Alors

$$Tg_n(x) \to \int K(x, y)g(y)dy \ p.p.$$

D'aprés les hypothéses, $Tg_n \to f$ dans $L^2(X)$ donc, toute sous-suite (Tg_{n_k}) convergente vers f $p.p.$ (théoréme (1.8)).Alors

$$|Tg_{n_k}(x) - f(x)| \to 0 \ p.p.$$

i.e.,

$$Tg_{n_k}(x) \to f(x) \ p.p.$$

D'où

$$f = Tg.$$

■

Théorème 2.5 *Soient T un opérateur de Carleman et S un opérateur linéaire borné.Si T et S ont les mêmes valeurs dans sous ensemble D dense de $L^2(a,b)$ alors $T = S$.*

Preuve. Soient K un noyau de T et f un élément de $L^2(a,b)$, alors en utilisant l'inégalité de Schwartz (1.1) dans l'espace L^2 avec les propriétés de lintégrale de lebesgue, on obtient

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right| \\
&\leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |f(y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|
\end{aligned}$$

pour presque tout x. Si (f_n) est une suite dans L^2 et $\|f_n - f\| \to 0$, alors en utilisant encore l'énégalité de Schwartz (1.1)

$$\begin{aligned}
|(Tf_n)(x) - (Tf)(x)| &= |T(f_n - f)(x)| \\
&\leq \left(\int |K(x,y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} \|f_n - f\|
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro p.p., dans L^2 .D'où

$$Tf_n \to Tf \quad p.p.$$

Maintenant, supposons

$$f \in L^2\ , f_n \to f,\ f_n \in D,$$

car

$$\overline{D} = L^2$$

alors

$$Tf_n \to Tf \quad p.p.,$$

(d'aprés ce qui précede) et par la continuité de S,

$$S(f_n) \to S(f) \ \ dans\ L^2\ .$$

Donc, toute sous-suite (Sf_{n_k}) de $(S(f_n))$ convergence vers $S(f)$ $p.p.$ D'où

$$Tf_n = Sf.$$

■

Définition 2.3 *T est normal si, et seulement si,*

$$TT^* = T^*T.$$

Théorème 2.6 *Soient T un opérateur de Carleman normal sur $L^2(a,b)$ où $a,b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, et $\{\Phi_n\}$ une base orthonormale constitée de vecteurs propres de T. Supposons que pour tout $\Phi \in L^2(a,b)$,*

$$|\Phi_n(x)| \leq |\Phi(x)|$$

pour tout n et pour presque tout x. Alors T est compact.

Preuve. *Un opérateur normal dont spectre est seul 0 quand la limite de point nécéssaire compact. Soit $\{\lambda_n\}$ associée les valeurs propres, i.e.,*

$$T\ \Phi_n = \ \lambda_n\ \Phi_n$$

pour tout n. Donc,

$$\lim_n |T\ \Phi_n(x)| = \lim_n |\lambda_n\ |\ \|\ \Phi_n(x)\| = 0 \quad p.p.$$

Maintenant, supposons que T est non compact. Alors pour tous sous-suites $\{\Gamma_{n_k}\}$ on trouve nécéssairement $|\lambda_{n_k}| > \delta > 0$ pour δ. D'où, $|\Phi_{n_k}(x)| \to 0$, donc d'aprés le théoreme de la convergence domainée (1.7)

$$\|\Phi_{n_k}\| \to 0$$

est contraduction avec

$$\|\Phi_{n_k}\| = 1$$

pour tout n. Nous conclurons que T est compact. ■

2.4 Opérateur de Carleman et convergence des séries

Définition 2.4 *Un opérateur linéaire borné $T \in B(H_1, H_2)$ est dit un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe au moins une base orthogonale $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ de l'espace de Hilbert H_1, tel que*

$$\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty \tag{2.7}$$

Si H_1 est séparable, nous choisissons la base dénombrable dénote par $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ou simplement $\{e_i\}$ avec $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

Théorème 2.7 *[14] Soient $T \in B(H_1, H_2), S \in B(H_2, H_3)$, tel que l'un des deux opérateurs tous de Hilbert-Schmidt. Alors ST est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

Donc L'ensemble des opérateur de Carleman est aussi un ideal à gauche dans algébre de Banach $B(H)$.

Théorème 2.8 *Si $T : L^2(X) \to L^2(X)$ est un opéreteur de Hilbert-Schmidt et $D(T) = L^2(X)$, alors T est de Carleman.*

Preuve. Si H est séparable et T est un opérateur de Hilbert-Schmidt,nous trouvons une base orthonormale $\{e_n\}$ dans H qui satisfait (2.7) pour l'opérateur T. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |Te_n(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

D'où, d'aprés le lemme du Beppo-Levi(1.9),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n(x)|^2 < \infty.$$

presque partout dans X, et

$$\int |Te_n(x)|^2 dx < \infty.$$

Maintenant définissons la fonction

$$k : X \to H$$

par

$$k(x) = \begin{cases} \sum_n (Te_n(x))\, e_n \ si \ \sum_n |Te_n(x)|^2 < \infty, \\ 0 \qquad\qquad \sin on. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (k(x), f) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (Te_n(x))e_n, f \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Te_n(x)(e_n, f) \\ &= T\left(\sum_{n=0}^{\infty} (e_n, f)e_n(x) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$(k(x), f) = Tf(x), \ p.p. \ dans \ X \tag{2.8}$$

Aussi,

$$\|K(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |Te_n(x)|^2 .$$

On implique que $\|T(.)\|$ appartient à $L^2(X)$. Finalement (2.8) implique que T est un opérateur de Carleman. ■

2.5 Caractérisation de l'opérateur de Carleman

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire borné dans $L^2(X)$ soit un opérateur de Carleman. Ainsi, sous réserve de restriction de ce mémoire, ces théorémes caractérisent complétement ces opéreateurs.

Théorème 2.9 [*14*] *Un opérateur T dans $L^2(X)$ est un opérateur de Carleman si, et seulement s'il existe une fonction mesurable Γ dans X ,$0 \leq \Gamma(x) < \infty$, p.p, telle que*

$$|Tf(x)| \leq \|f\| \, \Gamma(x) \ p.p. \tag{2.9}$$

pour tout f dans $L^2(X)$.

Preuve. Premiérement, supposons que T est un opérateur de Carleman dans $L^2(X)$. Alors il existe une fonction de Carleman

$$k : X \to L^2(X) \tag{2.10}$$

telle que

$$Tf(x) = (f, k(x))$$

presque partout et pour tout f dans $L^2(X)$. D'aprés l'inégalité de Schwartz (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= |(f, k(x))| \\ &\leq \|f\|_2 \|k(x)\|_2 . \end{aligned}$$

Maintenant, soit

$$\Gamma(x) = \|k(x)\| ,$$

et la condition (2.9) s'en suit.Supposons ensuite que la condition (2.9) est vérifiée pour une certaine fonction mesurable Γ. Alors il existe une fonction bornée

$$g : X \to]0, \infty[$$

pour tout $\Gamma \in L^2(X)$;par exemple nous choisirons une fonction

$$g(x) = [1 + |x|^m (1 + \Gamma(x))]^{-1}, \; x \in X.$$

Si $G \in B(L^2(X))$ est un opérateur de multiplication par g, alors pour tout $f \in D(T)$,

$$|GTf(x)| \leq \|f\| \, g(x)\Gamma(x) \; p.p. \; dans \; X.$$

Alors l'opérateur GT est la restriction de l'opérateur de Hilbert-Schmidt et il existe une fonction

$$\Gamma' : X \to H$$

telle que

$$GTf(x) = \left(\Gamma'(x), f\right) \; p.p. \; dans \; X,$$

avec

$$\Gamma(x) = g(x)^{-1}\Gamma'(x)$$

nous avons donc pour tout $f \in D(T)$

$$Tf(x) = g(x)^{-1} \left(\Gamma'(x); f\right) = (\Gamma(x), f) \; p.p. \; dans \; X.$$

Donc T est un opérateur de Carleman induit par une fonction Γ. ■

Théorème 2.10 *[14] Un opérateur linéaire borné $T \in L^2(X)$ est un opérateur de Carleman si, et seulement si, pour certaine base orthonormale $\{\Phi_n\}$ dans $L^2(X)$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T\Phi_n(x)|^2 < \infty$$

pour presque tout x.

Preuve. Soit $\{\Phi_n\}$ une base orthonormale de $L^2(a,b)$ et K un noyau de Carleman de T. Donc K admet la représentation de Fourier

$$K(x,.) = \sum_{n=1}^{\infty} (K(x,.), \overline{\Phi}_n)\overline{\Phi_n},$$

et d'aprés l'inégalité de Parseval (1.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(K(x,.), \overline{\Phi}_n\right|^2 \leq \|K(x,.)\|^2 < \infty \; p.p. \tag{2.11}$$

et

$$K(x,.) \in L^2(X).$$

Mais pour tout n

$$\begin{aligned}(K(x,.)\,, \overline{\Phi}_n) &= \int K(x,y)\Phi_n(y)dy \\ &= K\Phi_n.\end{aligned}$$

Et en substituant dans (2.11), nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K\Phi_n(x)|^2 < \infty$$

pour presque tout x.

Maintenant, nous supposons que (2.9) est vérifée et définissons

$$a(x,y) = \sum K\Phi_n(x)\overline{\Phi_n(y)}.$$

Donc a est un noyau de Carleman car a est mesurable et appartient à $L^2(a,b)$.Soit

$$Tf(x) = \int_X a(x,y)f(y)dy,$$

alors pour tout n

$$T\Phi_n = K\Phi_n$$

et K est conforme à l'opérateur de Carleman sur la base orthonormale $\{\Phi_n\}$ et donc sur l'enveloppe linéaire Λ de $\{\Phi_n\}$ .Mais Λ est dense dans $L^2(a,b)$. Donc, par complétion

$$K = T,$$

i.e.,K est Carleman. ■

Chapitre 3

Systèmes Dynamiques Compacts et Opérateur de Carleman

3.1 Introduction

Les systèmes dynamiques sont les modèls mathématiques des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes povant prouvenir de la physique, l'economique, la biologie, l'ecologie, ...

Définition 3.1 *Un système dynamique à temps continue ou un flot sur un ensemble M^n est une famille de transformations Ψ_t $t \in \mathbb{R}$, sur M^n tels que Ψ_0 est une transformation d'identité et*

$$\Psi_{t+s} = \Psi_t + \Psi_s.$$

Des contraintes supplémentaires sont également imposées : la continuité, régularité...etc.

Considérons le systeme dynamique

$$\sum : \ \dot{x} = X\left(x\right), \ x \in M^n.$$

Avec M^n or C^r-variété.

Nous allons utilisée un noyau $k(x, y)$, x, $y \in \Omega$, pour introduire un opérateur A, où $k(x, .) \in L^2(Y)$ pour presque tout

$$x\left(0\right) = x \in \Omega.$$

Soit $k(x, .)$ est le noyau de Carleman et soit $g \in L^2\left(\overline{\Omega}\right)$, puis $k(x, .)g(.) \in L^1(Y)$ pour presque chacun des x. Pour de tels noyaux, le domaine de définition g se compose des $g(x)$ dont les images appartiennent à $L^2(\overline{\Omega})$. Le théorème établit les conditions d'existence et d'unicité pour la solution

$$x_t(x) = T_t(x),$$

dans son ensemble. Supposons que le système (1.5) admet une solution dans son ensemble pour n'importe quel instant de temps si pour presque tous les points x avec la mesure ordinaire de Lebesgue et pour tout $t \in [0, \infty)$,il existe une solution du systéme (1.5) sous les conditions initiales $x(0) = x$, tel que tout point de l'ensemble Ω, éxcepté pour points d'un ensemble de mesure nulle, ne tend pas à l'infini dans un temps fini.

3.2 Systèmes Dynamiques Compacts et Opérateur de Carleman

Le portrait de phase du système $\sum$ se compose des modes stationnaires et transitaires. Il existe uniquement deux classes de mouvements stationnaires : les points fixes et les courbes fermées. Les premiers sont associés aux états d'équilibre, et les derniers avec des processus oscillants (A. Poincaré). Un chaos déterministe est considéré ici comme oscillation avec une très grande période. Un dispositif important des systèmes $\sum$ est la présence des fonctions $\varphi(x)$ sur lequel l'intégrale impropre converge et l'égalité suivante est vérifiée :

$$-v(x) = \int \varphi(x_t(x))dt < \infty, \varphi(x) \geq 0.$$

Lemme 3.1 *Soit $\{\Psi_i(x)\}$ un systéme orthonormé des éléments dans un espace de Hilbert L^2, soit $x_t(x)$ une solution du systéme compact $\sum$ sur la demi-droite $t \in [0, \infty)$, alors le systéme de fonctions $\{\Psi_i(x_t(x))\}$ forme une base dans l'espace $L^2([0, \infty, d\mu[t]), d\mu[t] = d\mu(x_t(x))$.*

La preuve du lemme est facile. Nous devrions montrer que le systéme des fonctions $\{\Psi_i(x_t(x))\}$ est linéairement indépendant et complet, qui découle du fait que $\{\Psi_i(x)\}$ est un système orthonormal complet des fonctions dans $L^2(\overline{\Omega})$.

Théorème 3.1 *Un systéme dynamique compact $\sum$ engendre un opérateur de carleman intégrale sur la variété compacte $\overline{\Omega}$.*

Esquisse de la démonstration

Avant de prouver ce statement, soit nous introduisons une définition et une explication. Soit B un espace avec la mésure σ, et $A \in M^n$ est l'union d' une collection. Dénombrable d'ensemble de mésure fini , ou A est la classe des tout σ sous ensembles mesurables de l'espace $L^2(M^n)$. D' intéret est le cas particulier de la construction de l'opérateur A pour le systéme dynamique compact , mais $\overline{\Omega} \in \mathbb{R}$ et considére une $L^2(\overline{\Omega}\ )$ espace de Hilbert à la mésure de lebésgue ordinaire dx. Rappelons que l'opérateur A est un l'opérateur carleman si et seulement si il éxiste une fonction mésurable Γ de telle $\Omega \in \mathbb{R}^n$, soit $k(x, .) \in L^2(\overline{\Omega}\ )$, $x \in \Omega$, presque partout pour chaque fonction $g(x) \in L^2(\overline{\Omega})$ .Notez que l'opérateur le plus naturel intégrale sur L^2 sont celles induites par les noyau de carleman $k(x, y)$ pour presque tout $x \in \Omega$ comme il ressort de cette définition de le noyau de carleman si A est un opérateur, alors A transforme la séquence $\{\Psi_i(x)\}$, normés convergent vers zéro, en séquence vers zéro presque partout.

Preuve. Soit une base arbitraire orthonormale $\{\Psi_i(x)\}$ dans l'éspace $L^2(\overline{\Omega}\ )$ est donnée. Considérent partie intégrante Ψ

$$\int_0^\infty g[t]d\mu[t] \tag{3.1}$$

oú $d\mu[t] = \varphi(x_t(x))dt$ pour presque tout x que les valeurs initiales de $x_t(x)$ solution du systéme dynamique, et

$$\Gamma(x) = \left\{ \sum \left| \int_0^\infty \Psi_s[y]d\mu[t] \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{3.2}$$

oú $\mu[t]$ est une fonction integrale sur l'interval $t \in [0, \infty)$. telle que une fonction peut facilement est construit pour un dynamique compact, le systéme par éxemple,

$$\mu = p(x)\exp(-\lambda t),$$

èllargie le $g(x) \in L^2(\Omega)$ fonction dans une série de fourier à un point arbitraire $x \in \Omega$ en termes de l'élément de systéme

$$\{\Psi_i(x_t(x))\} : g[t] = \sum c_s(x)\psi_s[t].$$

Systéme ici et plus tard de raisons de comme dite le domaine de l'intégration. Ecrivons la fonction de Carleman comme suite :

$$\Gamma(x) = \left\{ \sum \left| \int_0^\infty \Psi_s[t] d\mu[t] \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ presque partout} \tag{3.3}$$

Si

$$(Ag)(x) = \sum c_s A\psi_s[t],$$

alors

$$\sum c_s A\psi_s[t] \to Ag, n \to \infty;$$

pour

$$|Ag| \leq \left\{ \sum c_s^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum |A\psi_s[t]|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|(A)g\|_2 \, \Gamma(x) \text{ presque partout.} \tag{3.4}$$

$$\eta_N = \sum_{s=1}^{N} c_s(x)\psi_s[t] \textit{ converge vers } \Gamma(x),\ 0 \leq \Gamma(x) \leq \infty \textit{ presque partout},\ |Ag| \leq \|g\|_2 \, \Gamma(x).$$

A est un opérateur de Carleman dans un espace de Hilbert, ce qui est le résultat exigé. ■

Cet opérateur est intégral et admet un ensemble complet de fonctions propres (qui peuvent être généralisées), qui peuvent être employer pour exprimer le noyau de Carleman et pour déterminer le spectre $\sigma(A)$. les fonctions propres généralisées(non à carée intégrables) sont connues pour corréspondre au spectre continu de l'opérateur A. Décrivons un plan de recherche de la fonction de Carleman engendrée par le système dynamique donné. Pour cette fin, introduisant un opérateur L qui soit une l'extension de l'opérateur L_0 défini par le système dynamique tout en étant une réalisation de l'expression différentielle $X\partial_x$ dans l'espace $L^2(\Omega)$.

D'aprés le théoréme de Krylov-Bogolyubov [3], un système dynamique compact préserve la mesure donc l'opérateur L_0 est symétrique et peut être prolongé à l'opérateur auto-adjoint L. Maintenant, nous devrions choisir la fonction carleman Γ de telle sorte que l'opérateur L, plus précisément, l'opérateur $(\lambda I - L)$ admet l'inverse et cet opérateur est un opérateur de carleman.

Théorème 3.2 (Théorème de Yosida) [11] *Pour* $\lambda > 0$*, l'opérateur* $(\lambda I - L)$ *admet l'opérateur inverse*

$$R(\lambda, L) = (\lambda I - L)^{-1} = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\varphi[t]dt \tag{3.5}$$

pour tout x*,* $\operatorname{Re}\lambda > 0$*, et pour toute base orthonormale arbitraire, alors* $k(x,.)g(y) \in L^1$*, dès que* $k \notin E$*, où* E *est un ensemble de la mésure nulle.*

Notons que la somme η ne dépend pas du choix du système orthonormal. Par conséquent, la somme η est une propriété caractéristique des opérateurs de Carleman. Puisque la somme est finie, $\eta = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\eta_n$, l'opérateur A applique chaque suite fortement convergente (convergence en norme) en une suite presque partout convergente. En d'autres termes, tous les nombres positifs réels et tous les nombres complexes (du à l'autoadjointé) appartiennent à l'ensemble résolvant de l'opérateur $\lambda I - L^{-1}$. Par conséquent, le demi-plan supérieur de plan complexe ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) est un ensemble résolvent de l'opérateur L,

$$f = \int k(x,y)g(y)dy \tag{3.6}$$

Les fonctions sous le signe intégral sont celle en termes desquelles la fonction de Carleman est exprimée. Ainsi, la formule (3.5) relie l'opérateur donnée L auto-adjoint, caractérisant un système dynamique compact,à l'opérateur de Carleman. Maintenant trouvons une équation qui définit cette fonction. Différencier (forméllement, pour commencer par gauche et les côtés droits),en vertu du champ de vecteur d'équation(3.5), du système dynamique donné :

$$Lf = \int k(x,y)^* g(y)dy, \; x,y \in \Omega, \; k(x,y)^* = \partial_x k(x,y) \circ X. \tag{3.7}$$

Représenter la fonction Lf comme somme de désiré une fonction g donnée, réspectivement. Selon les conditions de l'expension en l'espace L^2, si soit satisfait condition d'orthogonalité $\int gv^* dx = 0$. Nous considérerons le noyau $k(x,y)^*$ d'équation(3.7) comme dérivé généralisé en vertu du système $\sum$. En effet, la série $\sum \mu_s \Psi_s(x)\Psi_s(y)^*$ converge uniformément et absolument ; elle peut être sujette à la différentiation généralisée le long d'un champ donné X de vecteur. Par conséquent, le dérivé généralisé existe, cette équation devient,

$$\lambda g + v = \int k(x,y)^* g(y)dy \tag{3.8}$$

La solution d'équation(3.7) rapporte la fonction g, qui satisfait la condition

$$\int gv^* dx = 0$$

pour la fonction donnée. Prouvons que le noyau

$$k^* = \sum \mu_s D_x \Psi_s(x)\Psi_s(y)^*$$

est aussi Carleman.

Chapitre 4

Stabilité asymptotique et opérateurs de Hilbert-schmidt

Nous allons montrer que l'opérateur de Carleman se transforme en un opérateur de Hilbert-Schmidt dans le domaine d'attraction.

En effet, la fonction de Carleman devrait appartenir à l'espace de Hilbert dans ce cas.

Il est facile de passer de l'opérateur de Carleman à l'opérateur de Hilbert-Schmidt.

Il suffit de prouver que la fonction de Carleman appartient à l'espace de Hilbert.

prouvons qu'elle appartient à l'espace de Hilbert facile sans utiliser la solution du système dynamique.

Lemme 4.1 (théorème de Zubov) ([*16*])

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x)... (1) \\ \qquad\qquad f(0) = 0;\ x^* = 0... (2),\ \textit{est asymptotiquement stable} \end{cases}$$

Un ensemble A *content* 0 *dans son intérieur supposons*

$$0 \in \operatorname{int} A = A^{\circ}.$$

A *est le domaine d'attraction de l'equation* (1) *si et seulement si il exiete des fonctions continues* V*,* h *telle que*

$$\begin{aligned} V(0) &= h(0) = 0, \\ 0 &< V(x) < 1 \textit{ pour } x \in A \setminus \{0\}, h > 0 \textit{ sur } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$$V(x_n) \to 1 \textit{ pour } x_n \to \partial A \textit{ où } \|x_n\| \to \infty\ ,$$

$$DV(x).f(x) = -h(x)(1 - V(x))\sqrt{1 + \|f(x)\|^2}.$$

Théorème 4.1 *Supposons que le système dynamique* $\sum$ *sur l'ensemble compact* $(\overline{\Omega})$ *admet une position d'équilibre* $x = 0$ *et le domaine int* $\overline{\Omega}$ *soit le domaine d'attraction de ce point, alors l'opérateur de Carleman est l'opérateur de Hilbert-Schmidt.*

Preuve. Puisque Ω est le domaine d'attraction, il admet une paire de fonctions (υ, ω) satisfaisant le théorème de *Zubov* (4.1) sur la stabilité asymptotique ([19]). Introduisons un système $\{\Psi_s(x)\}$, au sens de L^2, et l'opérateur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$Rg = \int_0^\infty gd\sigma[t],$$

où g est une fonction continue arbitraire.

Représentons g par une série de Fourier Généralisée$\sum c_s\Psi_s(x)$ de sorte que

$$c_s = \int g(x)\Psi_s(x)^* dx \quad et \, \|g\|_2^2 = \int g(x)g(x)^* dx$$

et la norme carrée dans L^2. Remplaçons la fonction g sous l'intégrale avec la somme de sa série

$$\sum c_s\Psi_s^*(x)$$

et de introduisons l'opérateur

$$Rg = \int_0^\infty gd\sigma[t]$$

qui implique l'inégalité

$$|\, Rg|^2 \leq N^2 \left| \int_0^\infty gd\sigma \right|^2,$$

où

$$N = \sup \left\{ \sum \left| \int \Psi_s d\sigma \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\sum \left| \int \Psi_s d\sigma \right|^2$ est une fonction continue sur un ensemble compact,

$$N = \sup \left\{ \sum \left| \int \Psi_s d\sigma \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|\, Rg| \leq \|g\|_2 \sup \left\{ \sum \left| \int \Psi_s d\sigma \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement , nous arrivons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'opérateur de Hilbert- Schmidt

$$|Rg| \leq N \|g\|_2 \; V(x).$$

Cette inégalité est la condition nécessaire et suffisant pour que R soit un opérateur de Hilbert-Schmidt ([6]). ■

Donc le système dynamique dans le domaine d'attraction (jusqu'à la frontière du domaine de la stabilité asymptotique) engendre l'opérateur de Hilbert-Schmidt. Rappelons qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur intégral compact dont le spectre est constitué par des nombres à carrés sommable. Par conséquent, les élements propres de l'opérateur sont des fonctions régulières. Les solutions de l'équation differentielle (1.5) peuvent être représentées comme suit :

$$f(x) = \int \omega(x,y)g(y)dy \tag{4.1}$$

Exprimons le noyau ω en termes d'éléments de la base choisie $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ de l'espace et dérivons les deux membres (4.1) de sorte que la série

$$Lf = \sum \mu_s h_s \varphi_s(x)$$

résultante de la différentiation converge uniformément en vertu de (1.5). Prouvons que cette condition est satisfaite pour les noyaux avec des valeurs propres convergentes $\{\mu_s\}$. Rappelons que les opérateurs intégraux avec de telles valeurs propres s'appellent opérateurs à noyaux ([6]) . En effet, dans ce cas, la série $\sum \mu_s h_s \varphi_s(x)$, $h_s = (g, \varphi_s)$, devrait converger pas plus mauvais que la série $\sum \mu_s h_s$. L'opérateur résolvant les équations du système dynamique compact devrait être à noyau.

Théorème 4.2 *L'opérateur intégral R résolvant l'equation*

$$Rg = \int_0^\infty g[t]d[t] \ ,$$

est un opérateur à noyau.

Preuve. Pour tout élément $g(.) \in L^1(\Omega)$, l'equation. (4.1) est résolue sous la forme

$$f(x) = \int \omega(x,y)g(y)dy$$

avec noyau de Hilbert. Puisque les solutions du système sont des fonctions continues, la série $\sum \mu_s h_s$ devrait converger uniformément et absolument, c-à-d.,

$$\sum |\mu_s h_s| < \infty$$

pour tous $g(.) \in L^1(\Omega)$. D'aprés le principe de la borne uniforme, cette inégalité tiendra si et seulement si

$$\sum |\mu_s| < \infty.$$

Notons les opérateurs à noyauin en dimension infinie sont plus proches des opérateurs dimension finie (matrices) :

(i) il existe des déterminants absolument convergents, c-à-d., la théorie d'opérateurs intégraux de *Fredholm* est complètement applicable à de tels opérateurs ;

(ii) la trace de matrice coincide avec sa trace spectrale ;

(iii) la somme $\sum \mu_s \varphi_s(x)\overline{\varphi_s(y)}$ ne dépend pas du choix du système orthonormal (pour des détails voir ([6])).

Employons la propriété (iii) et spésciffions le noyau $\sum \mu_s \varphi_s(x)\overline{\varphi_s(y)}$. Si l'opérateur R est à noyau , alors la somme $\sum \mu_s \varphi_s(x)\overline{\varphi_s(y)}$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale dans l'espace de Hilbert. Établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique des systèmes linéaires en dimension finie, *Lyapunov* emploie la dissipativité des opérateurs linéaires. Cependant, les opérateurs non bornés dimension infinie peuvent avoir cette propriété, à savoir, l'opérateur linéaire L appliquant $D(L) \subseteq L^2$ dans L^2 s'appelle disspatif si

$$\mathrm{Re}(Lg, g) \leq 0.$$

Théorème 4.3 *si l'opérateur L est disspatif, alors pour n'importe quel opérateur positive C du noyau, l'équation*

$$AR + R\overline{A} = C$$

est soluble sous forme d'opérateur positive A de Hilbert-Schmidt.

■

Bibliographie

[1] Appliced Mathematical Science 44 semigroups of Linear operators and Applications to partial Differential Equations. Springer-verlog. Newyork. Heidelberg α Berlin.

[2] V. I. Arnol'd, Ordinary Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1971) .

[3] N. N. Bogolyubov, Complete Works [in Russiant], Vol. 2, Naukova Dumka, Kyiv (1976).

[4] A.Fridman, Foundations of modern analysis, Holt, Rinehart and winston, Inc.(1970).

[5] P.R. Halmos & V.S. Sunder, Bounded integral operators on L^2 spaces, Springer-Verlag,(1978).

[6] P. R. Halmos and V.S. Sander, Bounded Integral Operators on L^2 Spaces, Springer-Verlag (1979).

[7] I. M. Gel'fand and A. G. Kostychenko, "Eigenfunction expansion of differential and other operators," Dokl. AN SSSR, 103, $349 - 352$ (1955) .

[8] A.Kolmogorov & S.Fomine, Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Moscow,Mir,(1977).

[9] Kôsaku Yosida, Functional Analisis,Part I,Part II. Springer-Verlag. Berlin Heidlberg. New Yourk, (1980) .

[10] M. G . Krein and A. A. Nudel'man, Markov Moment Problem and Extremum Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1978) .

[11] K.Moren, Methods in Hilbert Space [Russian translation], Mir, Moscow (1965).

[12] I.G. Petrovskii, Lecteures on the Theory of Integral Equations [in Russaian], Nauka, Moscow (1965) .

[13] I. Tamura,Topology of Foliations, Transl.Math.Monographs, 97, American Math.Soc.,Rhodel Island(1992) .

[14] J.Weidman, Linear operators in Hilbert spaces, Spring-Verlag, New-York Heidelberg, Berlin, (1980) .

[15] J.Weidman, Strong Carleman operators are of Hilbert-Schmidt type, Bull. Amer.Math.Soc., 74, (1968) .

[16] Fabian Wirth, Zubov's method for interconnected systems, Institute of Mathematics, University of Wurzburg,SADCO - Kick o meeting, Paris, March, $1 - 2$ 2011.joint work with : Fabio Camilli (L'Aquila) and Lars Grune (Bayreuth)

[17] V.F.Zadorozhnyi, "The Lyapunov problem in dynamic control systems, "Cyben. Syst. Analysis, 38, No. 6, $904 - 910$ (2002)

[18] M. Zamansky, Introduction à l'algébre et l'analyse modernes, Paris, (1967).

[19] V. I. Zubov, "Integral equations for the Lyapounov function, " Dok. AN SSSR, 314, No. 4, $780 - 782$ (1990) .