République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem

UNIVERSITE
Abdelhamid Ibn Badis
MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et Informùatique
Département de Mathématiques
Option : Analyse Fonctinnelle

Mémoire de Master en Mathématiques

Régularité maximale de la solution d'un problème aux limites et de transmission sur un domaine avec un couche mince dans cadre des espaces de Hölder

Par

Melle Asma HADJ CHERIF

Soutenue le 26 Juin 2012

Devant le jury :

Président :	M. Ahmed MEDEGHRI, Professeur, Université de Mostaganem.
Examinateur :	M. Houari HAMMOU, M A B, Université de Mostaganem.
Encadreur	M. Omar BELHAMITI, Professeur, Université de Mostaganem

Table des matières

Remerciements

Nos remerciements vont en premier à Monsieur le professeur Omar Belhamiti notre directeur de mémoire sans qui ce travail n'aurait pas abouti.Qu'il trouve dans ces lignes, notre profonde gratitude pour sa guidance, sa disponibilité et ses conseils judicieux et encourageants tout au long du déroulement de ce travail.

Nous tenons aussi à remercier Messieurs les professeurs A Medeghri et H Hammou pour la faveur accordée à l'examination de ce travail

Nos remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont apporté une aide pour la réalisation de ce mémoire et nous citerons particulièrement monsieur le professeur A Medeghri pour ses conseils et ses orientations toujours à propos.

Nos remerciements vont sciemment aux parents qui n'ont lésiné sur aucun moyen pour nous guider dans notre vie, à mes frères Yassine pour sa collaboration à la mise en page de ce mémoire, Seif Eddine et ma soeur Bouchra qui m'a soulagé des travaux ménagers durant mes travaux.

Un remerciement spécial à mon lutin de frère Malik pour l'ambiance qu'il apporte à tous les membres de la famille et ses jeux interminables avec sa tortue.

Enfin, que toutes les personnes qui se reconnaissent dans ce travail (mes amies, mes camarades de promotion), trouvent ici mes plus sincères remerciements pour les bons moments pleins de labeur et de bonne humeur pour faciliter et partager les dures journées d'études et de privations.

Introduction

L'objectif de ce travail est de montrer la régularité maximale de la solution stricte d'une famille de problème aux limites et de transmission $\left(P^{\delta}\right)_{0<\delta\leq 1}$, régis par des équations différentielles abstraites de type elliptique à coefficient opérateurs, dans les espaces de Hölder. Notre problème s'écrit sous la forme d'une équation différentielle abstraite d'ordre deux.

On considère le problème suivant :

$$\left(u^{\delta}\right)''(x) + Au^{\delta}(x) = g^{\delta}(x) \quad \text{sur} \quad]-1,\delta[\,,$$

avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} u^{\delta}(-1) = f_- \\ \left(u^{\delta}\right)'(\delta) = f_+^{\delta}, \end{cases}$$

et des conditions de transmission

$$\begin{cases} u^{\delta}(0^-) = u^{\delta}(0^+) \\ p_-\left(u^{\delta}\right)'(0^-) = p_+\left(u^{\delta}\right)'(0^+), \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe E, δ un paramétre dans$[0,1]$, f_- et f_+^{δ} dans E et $g^{\delta} \in C([-1,\delta],E)$, p_- et p_+ sont des coefficients positifs liés aux deux corps $]-1,0[$ et $]0,\delta[$ respectivement dépendent de δ.

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur les problémes de transmission.On cite,par exemple **K Lemrabet**[7] et [8]dans le cadre Hilbertient. **A Favini, R Labbas, K Lemrabet et Maingot S**[5] dans les espaces L^P $(1 \leq p < \infty)$, **O Belhamiti** dans sa thèse de doctorat[2] a étudié le problème$\left(P^{\delta}\right)$ avec des conditions non homogènes dans le cadre des espaces de Hölder.

Dans notre travail on va présenter une syuthese d'une partie de l'article **O Belhamiti, R Labbas, K Lemrabet, A Medeghri[5]**. La méthode utilisée dans ce travail et décomposer le problème$\left(P^{\delta}\right)$ en deux problèmes intermédiaires : le problème $\left(P_+^{\delta}\right)$ sur la couche mince $(0,\delta)$ qui nous permettra de construire une condition d'impédance, en suite le problème $\left(P_-^{\delta}\right)$ sur le domaine fixe $(-1,0)$, qui est représenté par

$$\left(P_+^{\delta}\right) \begin{cases} \left(u_+^{\delta}\right)''(x) + Au_+^{\delta}(x) = g_+^{\delta}(x) \qquad \text{sur} \quad]0,\delta[\\ u_+^{\delta}(0) = u_-^{\delta}(0) \\ \left(u_+^{\delta}\right)'(\delta) = f_+^{\delta}, \end{cases}$$

u_+^{δ} représente la solution u^{δ} sur $[0,\delta]$, et

$$\left(P_{-}^{\delta}\right)\begin{cases}\left(u_{-}^{\delta}\right)''(x)+Au_{-}^{\delta}(x)=g_{-}^{\delta}(x) & \text{sur} \quad]-1,0[\\ u_{-}^{\delta}(-1)=f_{-}\\ p_{-}\left(u_{-}^{\delta}\right)'(0)=p_{+}\left(u_{+}^{\delta}\right)'(0),\end{cases}$$

u_{-}^{δ} représente la solution u^{δ} sur $[-1,0]$.

Ce mémoire comporte 4 chapitres

Le chapitre 1 est consacré aux rappels et définitions.On commencera par donner des résultats sur la théorie des semi-groupes, ensuite quelques définitions sur les espaces de Hölder et certains résultats classiques sur les espaces d'interpolation, on terminera ce chapitre par quelques lemmes techniques qui sont trés utiles pour la suite de notre travail.

Au chapitre 2, on commence par l'étude du problème dans le cas scalaire, qui nous permettra d'avoir une idée claire sur l'écriture de l'opérateur d'inpédance T_{δ}, et passer au cas opérateur. Dans ce dernier cas on donne la représentation des solutions de $\left(P_{+}^{\delta}\right)$ et $\left(P_{-}^{\delta}\right)$, en utilisant le calcul opérationnel de Dunford.On terminera par montrer la couvergence absolue des intégrales des solutions $\left(u_{+}^{\delta}\right)$ et $\left(u_{-}^{\delta}\right)$ et pour dire que les deux solutions sont bien définies.

Le chapitre 3,servira pour les résultats de régularité maximale des solutions $\left(u_{+}^{\delta}\right)$ et $\left(u_{-}^{\delta}\right)$.

Théorème 0.1 *soit $g_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ avec $0<2\alpha_0<1$, $\psi\in D(A)$ et $f_{+}^{\delta}\in D\left(\sqrt{-A}\right)$ alors l'unique solution stricte u_{+}^{δ} du problème $\left(P_{+}^{\delta}\right)$ à la propriété suivante :*

$$Au_{+}^{\delta}\left[\left(u_{+}^{\delta}\right)''\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)\right]$$

si et seulement si

$$A\psi-g_{+}^{\delta}(0)\in D_A(\alpha_0,+\infty)\quad et\quad (-A)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}\in D_A(\alpha_0,+\infty).$$

Pour la régularité maximale de le solution $\left(u_{-}^{\delta}\right)$, on obtient le théorème suivant

Théorème 0.2 *soit $g_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$,$g_{-}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ avec $0<2\alpha_0<1$, $f_{-}\in D(A)$ et $f_{+}^{\delta}\in D\left(\sqrt{-A}\right)$ alors l'unique solution stricte u_{-}^{δ} du problème $\left(P_{-}^{\delta}\right)$ à la propriété suivante :*

$$Au_{-}^{\delta}\left[\left(u_{-}^{\delta}\right)''\in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)\right]$$

si et seulement si

$$Af_{-}-g_{-}^{\delta}(-1)\in D_A(\alpha_0,+\infty)\quad et\ g_{-}(0)-g_{+}^{\delta}(0)\in D_A(\alpha_0,+\infty)\ et\quad (-A)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}\in D_A(\alpha_0,+\infty).$$

Enfin, le chapitre 4 contient un exemple d'application concrètes en EDP.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les semi-groupes

Définition 1.1 *A est un opérateur linéaire sur E si est seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectorielle $D(A)$ de E à valeur dans E, $A : D(A) \subset E \to E$.*

Définition 1.2 *A est dit fermé si :* $G(A) = \{(\xi, A\xi) \backslash \xi \in D(A)\}$ *est un fermé de* $X \times X$.

Définition 1.3 *soit E un espace de Banach complexe, muni de la norme $\|.\|_E$ et $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaines bornés sur E,*

A étant un opérateur linéaire fermé sur E ,définie l'ensemble de résoulvant de A et on note $\rho(A)$

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in C : R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(E)\right\},$$

et pour spectre de A

$$\sigma(A) = C \backslash \rho(A).$$

1.1.1 Semi-groupe uniformément continu

Définition 1.4 *Une famille $G(t), 0 \leq t \leq \infty$, d'opérateur linéaire bornée de E dans E est un semi-groupe d'opérateur lineaire bornés si :*

1.$G(t + s) = G(t)G(s)$pour $t \geq 0$ et $s \geq 0$

2.$G(0) = I$, $(I$ est l'opérateur identité$)$.

Remarque 1.1 *Lorsque la proprieté 1 est vrai pour t, $s \in \mathbb{R}$ alors on dit que $G(t)$est un groupe.*

Définition 1.5 *On dit qu'un semi-groupe $G(t)$ d'opérateurs linéaires bornés est uniformément continu si*

$$\lim_{t \to 0} \|G(t) - I\|_{L(E)} = 0.$$

Définition 1.6 *On appalle générateur infinitésimal du* $S-G$ $\{G(t)\}$ *,l'opérateur lineaire non borné* A *défini par*

$$D(A)=\left\{\varphi\in E:\lim_{t\to 0}\frac{G(t)\varphi-\varphi}{t}existe\right\}\ ;$$

où $A\varphi=\dfrac{G(t)\varphi-\varphi}{t}$, *pour* $\varphi\in D(A)$.

Théorème 1.1 *Un opérateur linéaire* A *est un générateur infinitésimal d'un semi- groupe uniformémet continu si est seulement si* A *est borné.*

Remarque 1.2 *Il est clair qu'un semi-groupe définit au plus un générateur infinitésimal.*

1.1.2 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.7 *On appelle semi-groupe fortement continu où vérifiant la condition* C_0 *l'application*

a.$G(0)=I$

b.$G(t+s)=G(t)G(s),\forall t,s\geq 0$

c.$\forall\varphi\in E$ *l'application* $\mathbb{R}_+\to E,\ t\to G(t)\varphi$

fortement continue en 0

$$\forall\varphi\in E\ :\ \lim_{t\to 0}\|G(t)\varphi-\varphi\|_E=0.$$

Remarque 1.3 *Si* $t\in\mathbb{R}:\{G(t)\}$ *est dite groupe.*

Proposition 1.1 *La condition c n'implique pas que :*$\lim_{t\to 0}\|G(t)-I\|_E=0.$

Proposition 1.2 *Soit*$\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-S-G *sur* E, *alors :*

1. $t\longrightarrow\|G(t)\|$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0,\alpha]$ *;*
2. $\forall\varphi\in E$, *la fonction* $G(t)\varphi$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$;
3. $\exists\omega;M\geq 1:\forall t\in\mathbb{R}_+\ \|G(t)\|\leq Me^{\omega t}$.

Théorème 1.2 (*Hille-Yosida*) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé* A *à domaine dense dans* E, *soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, est qu'il existe deux réels* ω *et* M *tels que :*$\forall\lambda\in\mathbb{R}$ *et* $\lambda>\omega$, *on a*

$$\lambda\in\rho(A)\,et\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\|\leq\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},$$

pour tout $n\geq 1$.

1.1.3 Semi-groupe analytiques

Théorème 1.3 *Soit $G(z)$ est un semi-groupe fortement continu uniformément borné.Soit A est un générateur infinitésimal de $G(z)$ et $0 \in \rho(A)$.Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$G(z)$ se prolonge en un semi-groupe analytique sur le secteur $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$ et $\|G(z)\|$ est uniformément borné sur tout sous secteur $\Sigma_{\tilde{\theta}}$ de Σ_θ avec $\tilde{\theta} < \theta$.*
2. *Il existe une constante C telle que pour tout $\sigma > 0$ et $\tau \neq 0$*
$$\|R(\sigma + I + i\tau, A)\| \leq \frac{C}{\tau}.$$
3. *Il existe $\vartheta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $M > 0$ tels que*
$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \vartheta\right\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$$
et
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|},$$
pour $\lambda \in \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \vartheta\right\} \cup \{0\}$ et $\lambda \neq 0$.
4. *$G(z)$ est différentiable pour $t > 0$ et il y a une constante C telle que*
$$\|AG(t)\| \leq \frac{C}{t},$$

pour $t > 0$.

1.2 Les espaces de Hölder

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et $\alpha \in]0,1[$ un nombre fixé.

Définition 1.8 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on désigne par*
-$B(I;E)$,l'espace des fonctions bornées, muni de la norme
$$\|f\|_{B(I;E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E \,.$$
-$C(I,E)$ l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme
$$\|f\|_{C(I;E)} = \|f\|_{B(I;E)} \,.$$
-$C^k(I;E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace deqs fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornées, muni de la norme
$$\|f\|_{C^k(I;E)} = \sum_{i=0}^{k} \left\|f^{(i)}\right\|_{B(I;E)} \,.$$
-$C^\infty(I;E)$ l'espace des fonctions indéfférentiable.

Définition 1.9 *Les espaces de Hölder des fonctions continues* $C^{\alpha}(I;E)$ *et* $C^{k+\alpha}(I;E)$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *sont définis par*

$$C^{\alpha}(I;E)=\left\{f\in B(I;E):[f]_{C^{\alpha}(I;E)}=\sup_{x,y\in I;x>y}\frac{\|f(x)-f(y)\|_E}{(x-y)^{\alpha}}<+\infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{\alpha}(I;E)}=\|f\|_{B(I;E)}+[f]_{C^{\alpha}(I;E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(I;E)=\left\{f\in C^{k}(I;E):f^{(k)}\in C^{\alpha}(I;E)\right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(I;E)}=\|f\|_{C^{k}(I;E)}+\left[f^{(k)}\right]_{C^{\alpha}(I;E)}.$$

Dans le cadre continu , le probléme de la densité des domaines de certains opérateurs linéaires fermé se pose (ne se pose pas en général dans le cadre $L^{P},p\in]1,\infty[$).

1.3 Les espaces d'interpolation

Soient $(E_0,\|.\|_0)$ et $(E_1,\|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé F. En posant

$$\begin{cases}\|\varphi\|_{E_0\cap E_1}=\|\varphi\|_{E_0}+\|\varphi\|_{E_1}\\ \|\varphi\|_{E_0+E_1}=\inf\limits_{\varphi_i\in E_i,\varphi_0+\varphi_1=\varphi}\left(\|\varphi_0\|_{E_0}+\|\varphi_1\|_{E_1}\right)\ \text{si } \varphi\in E_0+E_1.\end{cases}$$

Il est alors connu que les espaces $\left(E_0\cap E_1,\|.\|_{E_0\cap E_1}\right)$ et $\left(E_0+E_1,\|.\|_{E_0+E_1}\right)$ sont des espaces de Banach.

Définition 1.10 *Pour* $p\in[1,+\infty]$ *et* $\theta\in]0,1[$, *on définit l'espace intermédiaire noté* $(E_0,E_1)_{\theta,p}$ *entre* $E_0\cap E_1$ *et* E_0+E_1, *par*

$$\varphi\in(E_0,E_1)_{\theta,p},$$

si et seulement si

$\forall t>0,\ \exists u_0\in E_0;\exists u_1\in E_1$ *tels que* $\varphi=u_0(x)+u_1x$

$t^{-\theta}u_0\in L_*^{P}(\mathbb{R}_+,E_0)$ et $t^{1-\theta}u_1\in L_*^{P}(\mathbb{R}_+,E_1)$. Avec la modification usuelle pour le cas $p=\infty$.

Proposition 1.3 *Posons*

$$\begin{cases}\|\varphi\|_{\theta,p}=\inf\limits_{\forall t>0,u_0+u_1=\varphi}\left(\left\|t^{-\theta}u_0\right\|_{L_*^{P}(\mathbb{R}_+,E_0)}+\left\|t^{1-\theta}u_1\right\|_{L_*^{P}(\mathbb{R}_+,E_1)}\right)\\ \text{si } \varphi\in(E_0,E_1)_{\theta,p}.\end{cases}$$

Alors

Définition 1.11
$$(E_0, E_1)_{\theta,p}\,, \|.\|_{\theta,p}\,,$$

est un espace de Banach vérifiant

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1,$$

(avec injections continues).

1.4 Lemmes techniques

Dans cette section on va énoncer quelques lemmes qui sont très utiles pour ce travail. Considère A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$, et pour le secteur

$$\Sigma_{\theta_0} = \{z : |z| \geq r_0 \text{ et } \theta_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \theta_0\}\,,$$

où $r_0 > 0$ fixé, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lemme 1.1 *Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$, on a*

$$\left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} = \min\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}, 1 - e^{-r_0^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0, \text{ *avec* } r_0 \text{ *est assez petit.*}$$

Lemme 1.2 *Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$, on a*

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} = \min\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}, 1 - e^{-r_0^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}\right) > 0, \text{ *avec* } r_0 \text{ *est assez petit.*}$$

Remarque 1.4 *II existe une constante C_{θ_0} independent de $\delta \in]0,1]$ telle que*

$$\left|1 \pm e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} > 0,$$

pour $z \in \Sigma_{\theta_0}$.

Lemme 1.3 *pour tout $\delta \in]0,1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$,on a*

$$|\Delta_z(-1,\delta)| \geq \frac{(C_{\theta_0})^2}{4} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)} > 0.$$

$$\Delta_z(\xi,\delta) = \cosh\sqrt{-z}\xi \cosh\sqrt{-z}\delta - p\sinh\sqrt{-z}\xi \sinh\sqrt{-z}s,$$

pour $\xi \in [-1,0]$.

Lemme 1.4 *pour tout $\xi \in [-1,0]\,, \delta \in]0,1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$, on a*

$$|\Delta_z(\xi,\delta)| \leq (1+p)\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\xi)},$$

et

$$|\partial_\xi \Delta_z(\xi,\delta)| \leq (1+p)\,|z|^{\frac{1}{2}}\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-\xi)}.$$

Lemme 1.5 *Il existe une constante C independent de $\delta \in]0,1]$ telle que*

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right| = \left|e^{-\sqrt{-z}x}\right| \left|\dfrac{1+e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x)}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}}\right| \leq Ce^{-x|z|^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \\ \left|\dfrac{\sinh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right| = \left|e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)}\right| \left|\dfrac{1+e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}}\right| \leq Ce^{-(\delta-|x|)|z|^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \\ \left|\dfrac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right| = \left|e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)}\right| \left|\dfrac{1+e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}}\right| \leq Ce^{-(\delta-|x|)|z|^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}, \end{cases}$$

pour tout $x \in [-1,\delta]$.

Remarque 1.5 *pour $z \in \gamma, |z| \geq r_0, \delta > 0$ et $x \in]-1,0[\cup]0,\delta[$,on a*
$\operatorname{Re}\left(\sqrt{-z}\delta\right) = \delta\,|z|^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right) = \delta\,|z|^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$

Lemme 1.6 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense alors*

$$\overline{D(A)} = \overline{D\left(\sqrt{-A}\right)}.$$

Proposition 1.4 *soit*

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \quad et \quad \sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b$$

.

$$\cosh(a-b) = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b$$

.

$$\sinh(a+b) = \sinh a\cosh b + \cosh a\sinh b$$

.

$$\sinh(a-b) = \sinh a\cosh b - \cosh a\sinh b,$$

et de plus

$$\begin{array}{rcll} |\cosh a| & \leq & \cosh \operatorname{Re} a & \forall a \\ |\sinh a| & \leq & \cosh \operatorname{Re} a & \forall a. \end{array}$$

Chapitre 2

Le problème de transmission

Considérons le probléme de transmission suivant :

$$\left(P^{\delta}\right)\begin{cases}\left(u^{\delta}\right)''(x)+Au^{\delta}(x)=g^{\delta}(x) \quad \text{sur } \left]-1,\delta\right[\\ (CL)\begin{cases}u^{\delta}(-1)=f_{-}\\ \left(u^{\delta}\right)'(\delta)=f_{+}^{\delta}\end{cases}\\ (CT)\begin{cases}u^{\delta}\left(0^{-}\right)=u^{\delta}\left(0^{+}\right)\\ p_{-}\left(u^{\delta}\right)'\left(0^{-}\right)=p_{+}\left(u^{\delta}\right)'\left(0^{+}\right),\end{cases}\end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur le domaine $D(A)$ non nécessairement dense , inclus dans un espace de Banach complexe E, f_{-} et f_{+}^{δ} sont données dans l'espace de Banach complexe E et g^{δ}est donnée dans $C([-1,\delta],E)$, vérifiant des conditions compatibilités qui seront indiquées dans la suite, p_{-} et p_{+} sont des coefficients positifs liés aux deux corps $]-1,0[$ et $]0,\delta[$ respectivement dépendent de δ.

On supposera l'unique hypothèse d'ellipticité de l'opérateur A suivante :

$$\rho(A)\supset[0,\infty[\text{ et } \exists C>0:\forall\lambda\geq 0, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\frac{C}{1+|\lambda|}, \tag{2.1}$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A.

Il est bien connu que l'hypothèse (2.1) implique l'existence de $\theta_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $r_0>0$ telle que

$$\rho(A)\supset S_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}^*:|\arg(z)|\leq\ \theta_0\}\cup\overline{B(0,r_0)},$$

et (2.1) reste vraie dans S_{θ_0}.

Remarque 2.1 *D'aprés* ***Balakrishnan A.V.***[7] *et* ***Martinez*** *l'hypothèse* (2.1)*implique* $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ *est générateur infinitésimal d'un semi-groupe anlytique pas nécessairement fortement continu en zéro.*

Dans ce travail on traitera le cadre Höldérien .On supposera

$$\begin{cases}g_{-}\in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)\\ g_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E),\end{cases} \tag{2.2}$$

$0<2\alpha_0<1$.Notons que l'hypothèse d'Hölderianité dans (2.2) implique que :

$$g^{\delta}\in C^{2\alpha_0}\left([-1,\delta];E\right) \text{ si et seulement si } g_{+}^{\delta}(0)=g_{-}(0). \tag{2.3}$$

En effet,pour x,x' proche de zéro,(par exemple $x<0<x'$) ,on a

$$\begin{aligned}\left\|g^{\delta}(x)-g^{\delta}(x')\right\|_E &= \left\|g^{\delta}(x)-g^{\delta}(0)+g^{\delta}(0)-g^{\delta}(x')\right\|_E\\ &\leq \left\|g^{\delta}(x)-g^{\delta}(0)\right\|_E+\left\|g^{\delta}(0)-g^{\delta}(x')\right\|_E\\ &\leq \left\|g_{-}(x)-g_{-}(0)\right\|_E+\left\|g_{+}^{\delta}(0)-g_{+}^{\delta}(x')\right\|_E\\ &\leq C\left[(-x)^{2\alpha_0}+(x')^{2\alpha_0}\right]\\ &\leq C\left[(-x+x')^{2\alpha_0}+(x'-x)^{2\alpha_0}\right]\\ &\leq C\left(x'-x\right)^{2\alpha_0}.\end{aligned}$$

Le problème $\left(P^{\delta}\right)$ est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases}\left(u_{-}^{\delta}\right)''(x)+Au_{-}^{\delta}(x)=g_{-}^{\delta}(x) & sur \quad (-1,0)\\ \left(u_{+}^{\delta}\right)''(x)+Au_{+}^{\delta}(x)=g_{+}^{\delta}(x) & sur \quad (0,\delta)\\ \left(u_{-}^{\delta}\right)(-1)=f_{-}\\ \left(u_{+}^{\delta}\right)'(\delta)=f_{+}^{\delta}\\ u_{+}^{\delta}(0)=u_{-}^{\delta}(0)\\ p_{-}\left(u_{-}^{\delta}\right)'(0)=p_{+}\left(u_{+}^{\delta}\right)'(0).\end{cases}$$

2.1 Probléme de transmission : cas scalaire

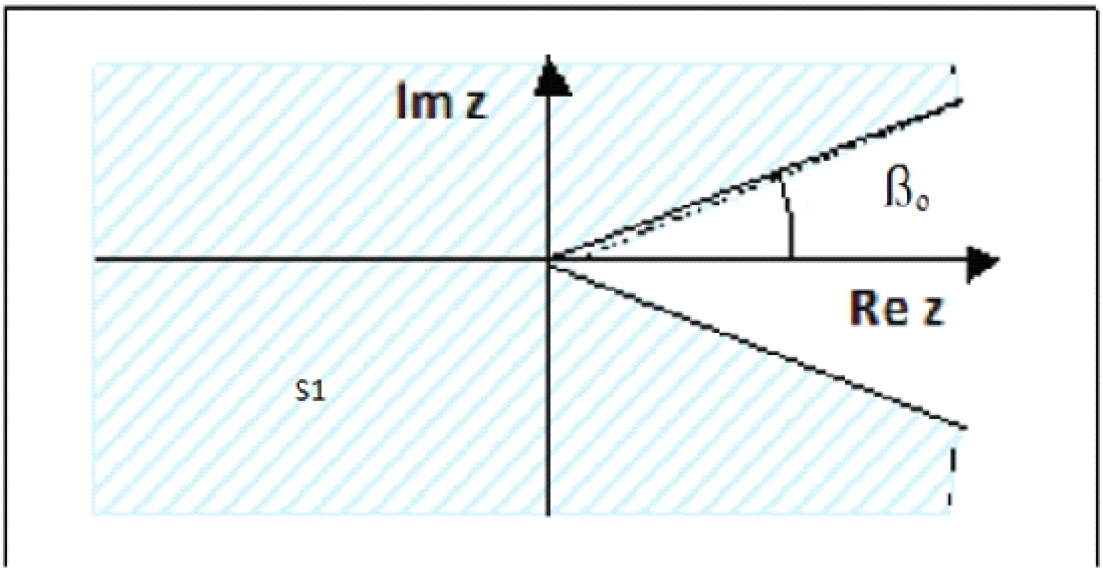
Soit β_0 fixe dans l'intervalle $]0,\pi[$ et $\theta_0$dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on définit θ_0 par

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta_0}{2}.$$

On pose

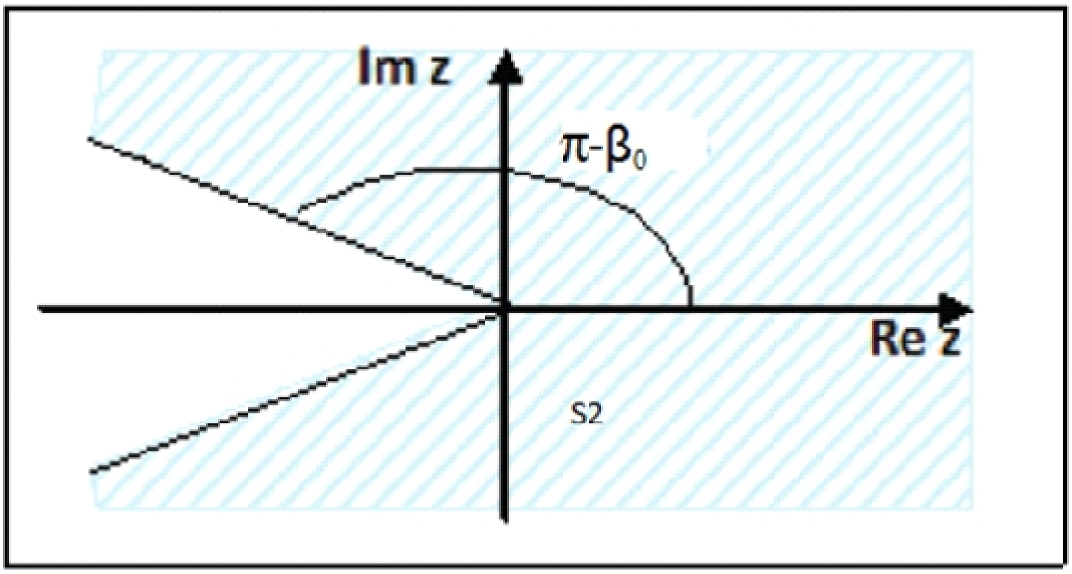
$$\begin{cases}\sum_{\beta_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}^*:|\arg\lambda|>\beta_0\}\\ S_{\ \theta_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}^*:|\arg\lambda|<\ \theta_0\}.\end{cases}$$

Si $z\in\sum_{\beta_0}$,



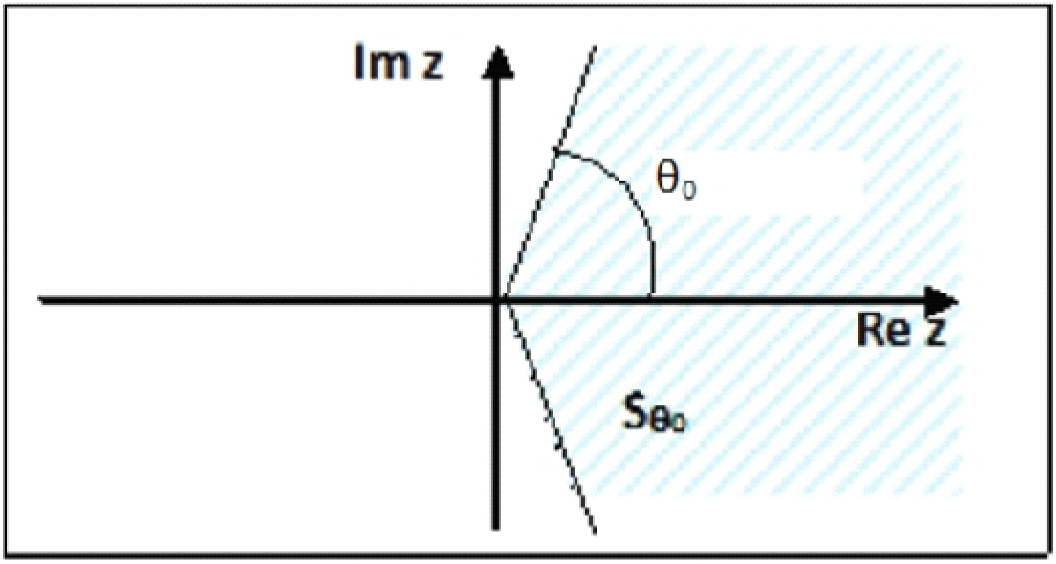
Le secteur S1

alors $-z \in \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| < \pi - \beta_0\}$,



Le secteur S2

et $\sqrt{-z} \in S_{\theta_0}$.



Le secteur S_{θ_0}

On considére le problème aux limites et de transmission suivants :

$$\begin{cases} \left(u_-^\delta\right)''(x) + z\left(u_-^\delta\right)(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur} \quad (-1,0) \\ \left(u_+^\delta\right)''(x) + z\left(u_+^\delta\right)(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur} \quad (0,\delta) \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ \left(u_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0) \\ p_-\left(u_-^\delta\right)'(0) = p_+\left(u_+^\delta\right)'(0), \end{cases}$$

avec $z \in \sum_{\beta_0}$.

Notre méthode conssiste à résoudre le probléme $\left(P_+^\delta\right)$ sur la couche mince $(0,\delta)$, dans le but d'obtenir explicitement l'opérateur d'inpédance T_δ , on résoud ensuite le probléme $\left(P_-^\delta\right)$ sur le domaine fixe $(-1,0)$.

2.1.1 La résolution du probléme $\left(P_+^\delta\right)$

Le probléme aux limites $\left(P_+^\delta\right)$ sur $[0,\delta]$ s'écrit :

$$\left(P_+^\delta\right) \begin{cases} \left(u_+^\delta\right)''(x) + z\, u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur} \quad]0,\delta[\\ u_+^\delta(0) = \psi \\ \left(u_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

où δ un paramétre dans $]0,1]$, $z \in \sum_{\beta_0}$, f_+^δ est donné dans un espace Banach complexe E, $g_+^\delta \in C([0,\delta], E)$ et ψ est un paramétre auxiliaire dans E.

La solution générale d'une équation différentielle d'ordre 2 est

$$u_+^\delta(x) = A(x)\, e^{\sqrt{-z}x} + B(x)\, e^{-\sqrt{-z}x}, \tag{2.4}$$

d'après la méthode de variation de constante, on a

$$\begin{cases} A'(x)\, e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)\, e^{-\sqrt{-z}x} = 0 \\ \sqrt{-z}A'(x)\, e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)\, e^{-\sqrt{-z}x} = g_+^\delta (x)\,. \end{cases}$$

On utilisant la méthode de Gramer, on obtient

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^x e^{-\sqrt{-z}s} g_+^\delta (s)\, ds + A_0 \\ B(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^x e^{-\sqrt{-z}s} g_+^\delta (s)\, ds + B_0. \end{cases}$$

En remplaçant les expréssions de $A(x)$ et $B(x)$ dans (2.4), on a

$$\begin{aligned} u_+^\delta (x) &= \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_0^x \sinh \sqrt{-z}\,(x-s)\, g_+^\delta (s)\, ds \\ &\quad + A_0 e^{\sqrt{-z}x} + B_0 e^{-\sqrt{-z}x}. \end{aligned}$$

La dérivée de $u_+^\delta (x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \left(u_+^\delta\right)' (x) &= \int_0^x \cosh \sqrt{-z}\,(x-s)\, g_+^\delta (s)\, ds \\ &\quad + \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}x}. \end{aligned}$$

Maintenant on va calculer les constantes A_0 et B_0, en appliquant les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_+^\delta (0) = \psi \\ \left(u_+^\delta\right)' (\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}x} = \psi \\ \int_0^\delta \cosh \sqrt{-z}\,(\delta - s)\, g_+^\delta (s)\, ds + \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}\delta} - \sqrt{-z} B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}\delta} = f_+^\delta, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}x} = \psi \\ \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}\delta} - \sqrt{-z} B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}\delta} = f_+^\delta + \int_0^\delta \cosh \sqrt{-z}\,(\delta - s)\, g_+^\delta (s)\, ds, \end{cases}$$

en utilisant la méthode Gramer, on obtient

$$\begin{cases} A_0 = -\int_0^\delta \dfrac{\cosh \sqrt{-z}\,(\delta - s)}{2\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta (s)\, ds + \dfrac{1}{2\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \dfrac{e^{\overline{\sqrt{-z}}\delta}}{2\cosh \sqrt{-z}\delta}\psi \\ B_0 = \int_0^\delta \dfrac{\cosh \sqrt{-z}\,(\delta - s)}{2\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta (s)\, ds - \dfrac{1}{2\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \dfrac{e^{\overline{\sqrt{-z}}\delta}}{2\cosh \sqrt{-z}\delta}\psi. \end{cases}$$

La solution du problème $\left(P_+^\delta\right)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^x \sinh\sqrt{-z}\,(x-s)\,g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_0^\delta \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi.
\end{aligned}$$

En découpant l'integrale sur $[0,\delta]\,(0<x<\delta)$

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^x \sinh\sqrt{-z}\,(x-s)\,g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_x^\delta \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi \\
&= \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^x \left(\sinh\sqrt{-z}\,(x-s)-\frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right)g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_x^\delta \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds+\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^x \left(\frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)-\sinh\sqrt{-z}\,(x-s)\cosh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right)g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_x^\delta \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds+\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad -\int_x^\delta \frac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta+\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
u_+^\delta(x) &= -\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)\,g_+^\delta(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_+^\delta \\
&\quad +\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi,
\end{aligned}$$

où, le noyau de Green est donné par

$$k_{z,+}^{\delta}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si } 0\leq s\leq x\\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si } x\leq s\leq \delta.\end{cases}$$

2.1.2 L'opérateur d'impédance

La dérivée de u_{+}^{δ} , pour x dans $]0,\delta[$ est donnée par

$$\begin{aligned}\left(u_{+}^{\delta}\right)'(x) &= \int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds\\ &\quad-\int_x^{\delta}\frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds\\ &\quad+\frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}f_{+}^{\delta}-\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi.\end{aligned}$$

La dérivée de u_{+}^{δ} en 0

$$\begin{aligned}\left(u_{+}^{\delta}\right)'(0) &= -\int_0^{\delta}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds\\ &\quad+\frac{1}{\cosh\sqrt{-z}\delta}f_{+}^{\delta}\\ &\quad-\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi,\end{aligned}$$

donc l'opérateur d'impédance T_{δ} défini par

$$\left(g_{+}^{\delta},f_{+}^{\delta},\psi\right)\rightarrow\left(u_{+}^{\delta}\right)'(0)=T_{\delta}\ \left(g_{+}^{\delta},f_{+}^{\delta},\psi\right),$$

avec

$$\begin{aligned}T_{\delta}\ \left(g_{+}^{\delta},f_{+}^{\delta},\psi\right) &= -\int_0^{\delta}\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds\\ &\quad+\frac{1}{\cosh\sqrt{-z}\delta}f_{+}^{\delta}-\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\psi.\end{aligned}$$

2.1.3 La résolution du probléme $\left(P_{-}^{\delta}\right)$

Le probléme $\left(P_{-}^{\delta}\right)$ avec condition d' impédance s'écrit

$$\left(P_{-}^{\delta}\right)\begin{cases}\left(u_{-}^{\delta}\right)''(x)+zu_{-}^{\delta}(x)=g_{-}^{\delta}(x) & \text{sur }]-1,0[\\ u_{-}^{\delta}(-1)=f_{-}\\ \left(u_{-}^{\delta}\right)'(0)=pT_{\delta}\ \left(g_{+}^{\delta},f_{+}^{\delta},u_{-}^{\delta}(0)\right),\end{cases}$$

où $p=\dfrac{p_{+}}{P_{-}}$ et $z\in\sum_{\beta_0}$.

comme pour $\left(P_{+}^{\delta}\right)$, la solution du probléme$\left(P_{-}^{\delta}\right)$ s'écrit

$$\begin{aligned} u_{-}^{\delta}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_{-1}^{x}\sinh\sqrt{-z}\,(x-s)\,g_{-}^{\delta}(s)\,ds \\ &\quad + A_0 e^{\sqrt{-z}x} + B_0 e^{-\sqrt{-z}x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(u_{-}^{\delta}\right)'(x) &= \int_{-1}^{x}\cosh\sqrt{-z}\,(x-s)\,g_{-}(s)\,ds \\ &\quad + \sqrt{-z}A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B_0 e^{\overline{\sqrt{-z}}x}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \left(u_{-}^{\delta}\right)'(0) = \int_{-1}^{0}\cosh\sqrt{-z}s\ g_{-}(s)\,ds + \sqrt{-z}A_0 - \sqrt{-z}B_0 \\ u_{-}^{\delta}(0) = -\frac{1}{\sqrt{-z}}\int_{-1}^{0}\sinh\sqrt{-z}s\ g_{-}^{\delta}(s)\,ds + A_0 + B_0. \end{cases}$$

On a d'aprés la condition d'impédance

$$\begin{aligned} \left(u_{-}^{\delta}\right)'(0) &= pT\left(g_{+}^{\delta}, f_{+}^{\delta}, u_{-}^{\delta}(0)\right) \\ &= -p\int_{0}^{\delta}\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds \\ &\quad + \frac{p}{\cosh\sqrt{-z}\delta}f_{+}^{\delta} - p\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}u_{-}^{\delta}(0), \end{aligned} \tag{2.5}$$

on a pour la condition $u_{-}^{\delta}(-1) = f_{-}$

$$A_0 e^{-\sqrt{-z}} + B_0 e^{\sqrt{-z}} = f_{-}, \tag{2.6}$$

en résolvant (2.5) et (2.6), on obtient

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\cosh\sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1,\delta)}\left(1 - p\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right)f_{-} + \dfrac{\cosh\sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1,\delta)}e^{\sqrt{-z}}G \\ B_0 = \dfrac{\cosh\sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1,\delta)}\left(1 + p\dfrac{\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right)f_{-} - \dfrac{\cosh\sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1,\delta)}e^{\sqrt{-z}}G, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} G &= -p\int_{0}^{\delta}\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{+}^{\delta}(s)\,ds \\ &\quad + \frac{p}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}f_{+}^{\delta} \\ &\quad + p\int_{-1}^{0}\frac{\sinh\sqrt{-z}\delta\sinh\sqrt{-z}s - \cosh\sqrt{-z}\delta\cosh\sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}g_{-}(s)\,ds. \end{aligned}$$

$$\Delta_z(\xi,\delta) = \cosh\sqrt{-z}\xi\cosh\sqrt{-z}\delta - p\sinh\sqrt{-z}\xi\sinh\sqrt{-z}s,$$

pour $\xi \in [-1, 0]$.
Par conséquent, la solution du probléme $\left(P_-^\delta\right)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} u_-^\delta (x) &= \int_{-1}^{0} k_{z,-}^\delta (x,s)\, g_- (s)\, ds + \frac{\Delta_z (x,\delta)}{\Delta_z (-1,\delta)} f_- \\ &\quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}\,(\delta - s) \sinh \sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z (-1,\delta)} g_+^\delta (s)\, ds, \end{aligned}$$

où

$$k_{z,-}^\delta (x,s) = \frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z (-1,\delta)} \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_z (x,\delta) \sinh \sqrt{-z}\,(s+1)\, si & -1 \leq s \leq x \\ \Delta_z (s,\delta) \sinh \sqrt{-z}\,(x+1)\, si & x \leq s \leq 0. \end{array} \right.$$

Remarque 2.2 *On utilise la méthode de résolution du probléme à coefficient scalaire pour nous permettre de passer au cas opérateur.*

2.2 Probléme de transmission cas abstrait

Dans se chapitre on va étudier le probléme de transmission dans le cas abstrait, en se basant sur la construction explicite de la solution sous la forme d'intégrale de Dunford.

On considère le probléme de transmition :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \left(u_-^\delta\right)'' (x) + A \left(u_-^\delta\right) (x) = g_- (x) & \text{sur} &]-1, 0] \\ \left(u_+^\delta\right)'' (x) + A \left(u_+^\delta\right) (x) = g_+^\delta (x) & \text{sur} & [0, \delta[\\ \left(u_-^\delta\right) (-1) = f_- & & \\ \left(u_+^\delta\right)' (\delta) = f_+^\delta & & \\ u_-^\delta (0) = u_+^\delta (0) & & \\ p_- \left(u_-^\delta\right)' (0) = p_+ \left(u_+^\delta\right)' (0), & & \end{array} \right.$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe E, δ un paramétre dans$[0, 1]$, f_- et f_+^δ des données dans E et g_+^δ, g_- vérifies l'hypothèse Hölderianté (2.2).

Comme le cas scalaire , en considère d'abord le probléme

$$\left(P_+^\delta\right) \left\{ \begin{array}{lll} \left(u_+^\delta\right)'' (x) + A \left(u_+^\delta\right) (x) = g_+^\delta (x) & \text{sur} &]0, \delta[\\ \left(u_+^\delta\right) (0) = \psi & & \\ \left(u_+^\delta\right)' (\delta) = f_+^\delta, & & \end{array} \right.$$

où ψ est une donnée auxillaire dans E.

On définit l'opérateur d'impédance

$$\begin{aligned} \left(u_+^\delta\right)' (0) &= T_\delta \left(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi\right) \\ &= T_\delta \left(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta (0)\right). \end{aligned}$$

Ceci nous permettra de construire la condition d'impédance

$$\begin{aligned}\left(u_-^\delta\right)'(0) &= p\left(u_+^\delta\right)'(0)\\ &= pT_\delta\ \left(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)\right),\end{aligned}$$

et ensuite, résoudre le problème

$$\left(P_-^\delta\right)\begin{cases}\left(u_-^\delta\right)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur} \quad]-1,0[\\ u_-^\delta(-1) = f_-\\ \left(u_-^\delta\right)'(0) = pT_\delta\ \left(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)\right).\end{cases}$$

2.2.1 Représentation de la solution du $\left(P_+^\delta\right)$

On considère le probléme

$$\left(P_+^\delta\right)\begin{cases}\left(u_+^\delta\right)''(x) + A\left(u_+^\delta\right)(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur} \quad]0,\delta[\\ \left(u_+^\delta\right)(0) = \psi\\ \left(u_+^\delta\right)'(\delta) = f_+^\delta,\end{cases}$$

en utilisant le calcul opératinnel de Dunford comme dans [6], [4] et [10], la solution du probléme $\left(P_+^\delta\right)$ est donnée formellement par

$$\begin{aligned}u_+^\delta(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta(s)\,ds\ dz \qquad (2.7)\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}f_+^\delta dz\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\psi\ dz,\end{aligned}$$

où, $k_{z,+}^\delta$ représente le noyau de Green

$$k_{z,+}^\delta(x,s) = \begin{cases}\dfrac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si} \ \ 0\le s\le x\\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} & \text{si} \ \ x\le s\le\delta.\end{cases}$$

2.2.2 L'opérateur d'impédance T_δ

La dérivée de u_+^δ est donnée par

$$\begin{aligned}
\left(u_+^\delta\right)'(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}\left(\delta-x\right)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1} g_+^\delta\left(s\right)ds\;dz \qquad (2.8)\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\left(\delta-s\right)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1} g_+^\delta\left(s\right)ds\;dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1} f_+^\delta dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1}\psi\;dz\\
&= \sum_{i=1}^4 I_i, \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

pour dire que $\left(u_+^\delta\right)'$ est bien défini on montre la couvergance absolue des integrales.
Pour I_1+I_2
Soit $g_+^\delta\in C\left(\left[0,\delta\right],E\right), z\in\gamma$ et $x\in\left[0,\delta\right]$

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}\left(\delta-x\right)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1} g_+^\delta\left(s\right)ds\;dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\left(\delta-s\right)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A-zI\right)^{-1} g_+^\delta\left(s\right)ds\;dz
\end{aligned}$$

d'aprés le lemme (1.5) et l'hypothèse d'ellipticité,on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|I_1+I_2\right\| &\leq C\int_\gamma\int_0^x \frac{\left|\sinh\sqrt{-z}s\right|\left|\sinh\sqrt{-z}\left(\delta-x\right)\right|}{\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left\|A-zI\right\|_E^{-1}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{\left|\cosh\sqrt{-z}x\right|\left|\cosh\sqrt{-z}\left(\delta-s\right)\right|}{\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left\|A-zI\right\|_E^{-1}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|\\
&\leq C\int_\gamma\int_0^x \frac{\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}\right)\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}\right)}{\left|z\right|e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|\\
&+C\int_\gamma\int_x^\delta \frac{\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right)\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}+e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}\right)}{\left|z\right|e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|\\
&\leq C\int_\gamma\int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+\delta-x)}\left(1+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}\right)\left(1+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}\right)}{\left|z\right|e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|\\
&+C\int_\gamma\int_x^\delta \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+\delta-s)}\left(1+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}\right)\left(1+e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}\right)}{\left|z\right|e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_+^\delta\left(s\right)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\left|dz\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\int_{\gamma}\int_{0}^{x}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_{+}^{\delta}(s)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\,|dz| \\
&\quad +C\int_{\gamma}\int_{x}^{\delta}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}}{|z|\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left\|g_{+}^{\delta}(s)\right\|_{C([0,\delta],E)}ds\,|dz| \\
&\leq C\int_{\gamma}\frac{|dz|}{|z|^{\frac{3}{2}}}\left\|g_{+}^{\delta}(s)\right\|_{C([0,\delta],E)} \\
&\leq C\left\|g_{+}^{\delta}(s)\right\|_{C([0,\delta],E)}.
\end{aligned}$$

pour I_3

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}dz.$$

Soit $f_{+}^{\delta}\in D\left(\sqrt{-A}\right)$ et $\sqrt{-A}f_{+}^{\delta}\in\overline{D(A)}$,on a
on utilise le lemme(1.5) et l'hypothèse d'ellipticité, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|I_3\|_E \\
&\leq \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\left(\sqrt{-A}\right)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}dz\right\|_E \\
&\leq C\int_{\gamma}\frac{\left|\sinh\sqrt{-z}x\right|}{\sqrt{|z|}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left\|A(A-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}\right\|_E|dz| \\
&\leq C\int_{\gamma}\frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}}\left\|\sqrt{-A}f_{+}^{\delta}\right\|_E|dz| \\
&\leq C\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{D\left(\sqrt{-A}\right)}.
\end{aligned}$$

Pour I_4,on a

$$I_4=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\psi\ dz.$$

Soit $z\in\gamma$ et $x\in[0,\delta]$, $\psi\in D(A)$.
On utilise le lemme(1.5) et l'hypothèse d'ellipticité, on obtient

$$\begin{aligned}
I_4 &= C\int_{\gamma}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\psi dz \\
&= C\int_{\gamma}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left[\frac{A(A-z)^{-1}}{z}-\frac{I}{z}\right]\psi dz \\
&= C\int_{\gamma}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{(A-z)^{-1}}{z}A\psi dz,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_E &\leq C\int_\gamma \left|\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{z\cosh\sqrt{-z}\delta}\right| \left\|(A-z)^{-1}\right\|_E \|A\psi\|_E |dz| \\
&\leq C\int_\gamma \frac{\left|\sinh\sqrt{-z}\delta\right|}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|} \|A\psi\|_E |dz| \\
&\leq C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}} |dz| \, \|A\psi\|_{D(A)} \\
&\leq C\|\psi\|_{D(A)}.
\end{aligned}$$

L'opérateur d'impédance T_δ défini par

$$\left(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi\right) \to \left(u_+^\delta\right)'(0) = T_\delta\left(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
T_\delta\left(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi\right) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s)\,ds\,dz \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\psi\,dz.
\end{aligned}$$

2.2.3 Représentation de la solution du $\left(P_-^\delta\right)$

On considère le probléme de valeurs aux limites avec condition d'impédance sur l'intervalle$]-1,0[$

$$\left(P_-^\delta\right)\begin{cases}
\left(u_-^\delta\right)''(x) + zu_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur }]-1,0[\\
u_-^\delta(-1) = f_- \\
\left(u_-^\delta\right)'(0) = pT_\delta\left(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)\right).
\end{cases}$$

Comme pour le probléme $\left(P_+^\delta\right)$, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford la représentation de la solution de ce probléme sur l'intervalle$]-1,0[$ est donnée formellement par

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{-1}^0 k_{z,-}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1} g_-(s)\,ds\,dz \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)}(A-zI)^{-1} f_- \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1} f_+^\delta \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)\sinh\sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s)\,ds\,dz,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$k_{z,-}^{\delta}(x,s)=\frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}\left\{\begin{array}{l}\Delta_z(x,\delta)\sinh\sqrt{-z}(s+1) \text{ si } -1\leq s\leq x\\ \Delta_z(s,\delta)\sinh\sqrt{-z}(x+1) \text{ si } x\leq s\leq 0.\end{array}\right.$$

et

$$\Delta_z(\xi,\delta)=\cosh\sqrt{-z}\xi\cosh\sqrt{-z}\delta-p\sinh\sqrt{-z}\xi\sinh\sqrt{-z}s,$$

pour $\xi\in[-1,0]$.

2.2.4 La convergence des integrales

Dans cette partie on montre la convergance absolue de u_+^{δ} et u_-^{δ}.

La représentation de u_+^{δ}

$$u_+^{\delta}(x)=\sum_{i=1}^{3}I_i.$$

Pour I_1

Soit $g_+^{\delta}\in C([0,\delta],E)$, $z\in\gamma$ et $x\in[0,\delta]$, d'aprés le lemme(1.5) et l'hypothèse d'ellipticit, on a

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_0^{\delta}k_{z,+}^{\delta}(x,s)(A-zI)^{-1}g_+^{\delta}(s)\ ds\ dz\right\|_E\\
&\leq C\int_{\gamma}\int_0^{x}\frac{\left|\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)\right|}{|z|\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}ds\ \ |dz|\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\quad+C\int_{\gamma}\int_x^{\delta}\frac{\left|\sinh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)\right|}{|z|\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}ds\,|dz|\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq C\int_{\gamma}\int_0^{x}\frac{\cosh\mathrm{Re}\sqrt{-z}s\cosh\mathrm{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}ds\,|dz|\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\quad+C\int_{\gamma}\int_x^{\delta}\frac{\sinh\mathrm{Re}\sqrt{-z}x\cosh\mathrm{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\,|z|\,ds\,|dz|\left\|g_+^{\delta}\right\|_{C([0,\delta],E)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_\gamma\int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{\frac{3}{2}}\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}ds\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\quad +C\int_\gamma\int_x^\delta \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{\frac{3}{2}}\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}ds\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq C\int_\gamma \frac{\left(\int_0^x e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}ds\right)}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\quad +C\int_\gamma \frac{\left(\int_x^\delta e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}ds\right)}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq C\int_\gamma \frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^2\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\quad +C\int_\gamma \frac{1-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^2\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq C\int_\gamma \frac{2-e^{-RE\sqrt{-z}x}-e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^2\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq \frac{C}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)C_{\theta_0}}\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}\\
&\leq C\left\|g_+^\delta\right\|_{C([0,\delta],E)}.
\end{aligned}
$$

Pour I_2

Soit $z\in\gamma$ et $x\in[0,\delta]$, $f_+^\delta\in D\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)$, en utilisant l'hypotèse d'ellipticité et le lemme (1.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
\|I_3\|_E &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}f_+^\delta dz\right\|_E\\
&= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\;(-A)^{\frac{1}{2}}f_+^\delta dz\right\|_E\\
&\leq C\int_\gamma \frac{\left|\cosh\sqrt{-z}x\right|}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\;\left\|(-A)^{\frac{1}{2}}f_+^\delta\right\|_E|dz|\\
&\leq C\left\|(-A)^{\frac{1}{2}}f_+^\delta\right\|_E.
\end{aligned}
$$

Pour I_3

Soit $\psi\in E$, $z\in\gamma$ et $\forall x\in[0,\delta]$, d'aprés le lemme(1.5) et l'hypothèse d'ellipticité, on obtient

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi \; dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{\left|\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)\right|}{|z| \left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|} \|\psi\|_E \, |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{|z| \left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|} \|\psi\|_E \, |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)} \left(1 + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}\right)}{|z| \, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta} \left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|} \|\psi\|_E \, |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} \|\psi\|_E \, |dz|
\end{aligned}$$

si $x \in [0, \delta[$,on a

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|} \|\psi\|_E \, |dz| \\
&\leq C \|\psi\|_E \left[\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\, |z|} \right]_0^{+\infty} \\
&\leq C \|\psi\|_E \left[\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \right]_0^{+\infty} \\
&\leq C \|\psi\|_E \left[\frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \right] \\
&\leq C \|\psi\|_E \,,
\end{aligned}$$

si $x = 0$,dans ce cas l'integrale est diverge, pour se la en pose que $\psi \in \overline{D(A)}$

$$\|I_3\|_E = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi \; dz \right\|_E$$

on a

$$\begin{aligned}
A (A - z)^{-1} &= (A - z + z)(A - z)^{-1} \\
&= (A - z)(A - z)^{-1} + z (A - z)^{-1},
\end{aligned}$$

d'où

$$(A - z)^{-1} = \frac{A (A - z)^{-1}}{z} - \frac{I}{z},$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} \psi \; dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} \left(\frac{A\,(A - z)^{-1}}{z} - \frac{I}{z} \right) \psi \; dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} \frac{A\,(A - z)^{-1}}{z} \psi \; dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} \frac{(A - z)^{-1}}{z} A\psi \; dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)} \left(1 + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)}\right)}{|z|^2 e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta} \left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|} \|A\psi\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} dz \, \|A\psi\|_E \\
&\leq C \, \|\psi\|_{\overline{D(A)}} .
\end{aligned}$$

La représentation de u_-^δ

$$u_-^\delta\,(x) = \sum_{j=1}^{4} J_i.$$

Pour J_1

Pour $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1, 0]$ .et soit $g_- \in C\left([-1, 0], E\right)$, par l'hypothèse d'ellipticité et le lemme (1.5),on a

$$
\begin{aligned}
\|J_1\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_{-1}^{0} k_{z,-}^{\delta}(x,s)(A - zI)^{-1} g_-(s)\, ds\ dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_{-1}^{x} \frac{|\Delta_z(x,\delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\,(s+1)}{|z|^{\frac{3}{2}} |\Delta_z(-1,\delta)|} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0],E)}\, ds\, |dz| \\
&\quad + C \int_\gamma \int_{x}^{0} \frac{|\Delta_z(s,\delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\,(x+1)}{|z|^{\frac{3}{2}} |\Delta_z(-1,\delta)|} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0],E)}\, ds\, |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \int_{-1}^{x} \frac{4(1+p)\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - x)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{\frac{3}{2}} (C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} ds\, |dz|\, \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0],E)} \\
&\quad + C \int_\gamma \int_{x}^{0} \frac{4(1+p)\, e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - s)} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\frac{3}{2}} (C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}} ds\, |dz|\, \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0],E)} \\
&\leq \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \left(\int_{-1}^{x} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{\frac{3}{2}}} ds \right) |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\quad + \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \left(\int_{x}^{0} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{3}{2}}} ds \right) |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\, |z|^{\frac{3}{2}}} |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\quad + \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \frac{1 - e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}|x|}}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\, |z|^{\frac{3}{2}}} |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)} - e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}|x|}}{|z|^2} |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz|\, \|g_-\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C \|g_-\|_{C([-1,0],E)} .
\end{aligned}
$$

Pour J_2

$$
J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A - zI)^{-1} f_-.
$$

Soit $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1,0]$, soit $f_- \in E$, d'aprés l'hypothèse d'ellipcité et le lemme(1.5), on a

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x,\delta)}{\Delta_z(-1,\delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{|\Delta_z(x,\delta)|}{|z|\, |\Delta_z(-1,\delta)|} \|f_-\|_E\, |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{(1+p)\, e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}}{|z|\, |\Delta_z(-1,\delta)|} \|f_-\|_E\, |dz| .
\end{aligned}
$$

Pour J_3

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1} f_+^\delta.dz$$

Soit $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1,0]$, soit le lemme(1.5) et l'hypothèse d'ellipticité, on obtient

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\cosh \sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \right\|_E \\
&\leq C\int_\gamma \frac{p\left|\sinh \sqrt{-z}\,(x+1)\right|}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\cosh \sqrt{-z}\delta\right|}\left\|f_+^\delta\right\|_E dz \\
&\leq C\int_\gamma \frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}}\left\|f_+^\delta\right\|_E dz \\
&\leq C\left\|f_+^\delta\right\|_E .
\end{aligned}$$

Pour J_4

$$J_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}\,(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s)\,ds\;dz$$

Soit $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1,0]$ et $g_+^\delta \in C([-1,0],E)$,d'aprés l'hypothèse d'ellipcité et le lemme (1.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta \frac{p\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)\sinh\sqrt{-z}\,(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1,\delta)}\,(A-zI)^{-1} g_+^\delta(s)\,ds\;dz \right\|_E \\
&\leq C\int_\gamma\int_0^\delta \frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(\delta-s)\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(x+1)}{|z|^{\frac{3}{2}}\left|\Delta_z(-1,\delta)\right|}ds\;\;|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C\int_\gamma\int_0^\delta \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-s)}e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{\frac{3}{2}}\left(C_{\theta_0}\right)^2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta+1)}}ds\;\;|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C\int_\gamma\int_0^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{\frac{3}{2}}}ds\;\;|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}-e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x}}{|z|^2}\;|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\;\;|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} \\
&\leq C\left\|g_+^\delta\right\|_{C([-1,0],E)} .
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Régularité maximale

3.1 Régularité maximale pour $\left(u_{+}^{\delta}\right)$

Dans le but de donner des résultats de régularité maximale de la solution u_{+}^{δ}, on écrit le théorème suivant :

Théorème 3.1 *soit* $g_{+}^{\delta} \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)$ *avec* $0 < 2\alpha_0 < 1, \psi \in D\left(A\right)$ *et* $f_{+}^{\delta} \in D\left(\sqrt{-A}\right)$ *alors l'unique solution stricte* u_{+}^{δ} *du problème* $\left(P_{+}^{\delta}\right)$

donne par la représentation(2.7) *à la propriété suivante :*

$$Au_{+}^{\delta} \quad \left[\left(u_{+}^{\delta}\right)'' \in C^{2\alpha_0}\left([0,\delta]\,;E\right)\right]$$

si et seulement si

$$A\psi - g_{+}^{\delta}\left(0\right) \in D_A\left(\alpha_0, +\infty\right) \text{ et } \left(-A\right)^{\frac{1}{2}} f_{+}^{\delta} \in D_A\left(\alpha_0, +\infty\right).$$

Preuve. pour $x \in [0,\delta]$, on a

$$\begin{aligned} u_{+}^{\delta}\left(x\right) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta} k_{z,+}^{\delta}\left(x,s\right)\left(A - zI\right)^{-1} g_{+}^{\delta}\left(s\right) ds\ dz \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A - zI\right)^{-1} f_{+}^{\delta} dz \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}\left(\delta - x\right)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\left(A - zI\right)^{-1}\psi\ dz \end{aligned}$$

■

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1}g_+^\delta(s)\,ds\,dz + m_+^\delta(x,A)f_+^\delta + w_+^\delta(x,A)\psi \\
&= m_+^\delta(x,A)f_+^\delta + w_+^\delta(x,A)\psi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]ds\,dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\cosh\sqrt{-z}\delta}\;(A-zI)^{-1}g_+^\delta(x)\;dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(A-zI)^{-1}}{z}g_+^\delta(x)\;dz \\
&= m_+^\delta(x,A)\;f_+^\delta + w_+^\delta(x,A)\;\psi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)(A-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]ds\,dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\cosh\sqrt{-z}\delta}\;(A-zI)^{-1}g_+^\delta(x)\;dz + A^{-1}g_+^\delta(x),
\end{aligned}
$$

d'autre part,on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&Au_+^\delta(x) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)\;A(A-zI)^{-1}g_+^\delta(s)\,ds\,dz \\
&\quad +Am_+^\delta(x,A)\;f_+^\delta + Aw_+^\delta(x,A)\;\psi \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-x)}{z\cosh\sqrt{-z}\delta}A\;(A-zI)^{-1}g_+^\delta(x)\;dz + g_+^\delta(x) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)\;A(A-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]ds\,dz + Am_+^\delta(x,A)\;f_+^\delta \\
&\quad +w_+^\delta(x,A)\left(g_+^\delta(0)-g_+^\delta(x)\right) + w_+^\delta\left(A\psi - g_+^\delta(0)\right) + g_+^\delta(x).
\end{aligned}
$$

On commence par montrer que u_+^δ est bien la solution de l'équation

$$\left(u_+^\delta\right)''(.) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(.).$$

On rapelle que

$$
\begin{aligned}
\left(u_+^\delta\right)'(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^x \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}g_+^\delta(s)\,dsdz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_x^\delta \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}g_+^\delta(s)\,ds\,dz \\
&\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}f_+^\delta dz \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\psi\;dz.
\end{aligned}
$$

Un calcul formel de leurs dérivée sécond des premiers termes donne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}x\sinh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,dz \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}x\sinh\sqrt{-z}\,(\delta-x)+\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,dz \\
= & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,dz.
\end{aligned}$$

On remarque que ce dernier terme n'est pas bien défini, c'est la raison qui nous pousse à adapter la méthode utilisée par Tanabe dans [12].

Soit ε est un nombre positif très petit et x tels que

$$0<\varepsilon\leq x\leq\delta-\varepsilon<\delta.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left[\left(u_+^\delta\right)'(x)\right]_\varepsilon = & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{x-\varepsilon} \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,dsdz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,g_+^\delta\,(s)\,ds\ dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,f_+^\delta dz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\delta}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\,(A-zI)^{-1}\,\psi\ dz,
\end{aligned}$$

et

$$\left[\left(u_+^\delta\right)'(x)\right]_\varepsilon(x)\rightarrow\left(u_+^\delta\right)'(x),$$

fortement quant $\varepsilon\rightarrow 0$.

La couvergence absolue des integrales déja cité dans le chapitre 2.

Un calcul fornel donne la dérivée de $\left[\left(u_+^\delta\right)'(x)\right]_\varepsilon(x)$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left[\left(u_+^\delta\right)'\right]_\varepsilon\right)'(x)\\
= \; & -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\left(A\psi-g_+^\delta(0)\right)dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}f_+^\delta dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-2x-\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}-\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-2x+\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right]\frac{A(A-zI)^{-1}}{z}g_+^\delta(x)\,dz\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}\left(g_+^\delta(0)-g_+^\delta(x)\right)dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{x-\varepsilon} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(x+\varepsilon)-g_+^\delta(x)\right]dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(x+\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(x-\varepsilon)-g_+^\delta(x)\right]dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & -w_+^\delta(x,A)\left(A\psi-g_+^\delta(0)\right)-Am_+^\delta(x,A)\,f_+^\delta-w_+^\delta(x,A)\left(g_+^\delta(0)-g_+^\delta(x)\right)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{x-\varepsilon} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{x+\varepsilon}^{\delta} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-s)\sinh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(s)-g_+^\delta(x)\right]dsdz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}x\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-x-\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(x+\varepsilon)-g_+^\delta(x)\right]dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(x-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}\,(\delta-x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_+^\delta(x-\varepsilon)-g_+^\delta(x)\right]dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-2x-\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}-\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta-2x+\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right]\frac{A(A-zI)^{-1}}{z}g_+^\delta(x)\,dz\\
= \; & \sum_{i=1}^{8} I_i,
\end{aligned}
$$

les intégrales $I_1,..,I_5$ sont absolument convergentes (cité dans le chapitre 2).

Pour I_6,

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \left[g_+^\delta (x+\varepsilon) - g_+^\delta (x) \right] dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta - x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| \frac{\varepsilon^{2\alpha_0}}{|z|} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \left| \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}}{1 + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}} \right| \frac{\varepsilon^{2\alpha_0}}{|z|} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} |dz| \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}}{|z|} |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour I_7, on obtient

$$\|I_7\|_E \leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Pour I_8

$$\begin{aligned}
\|I_8\|_E &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x - \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} - \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right] \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta (x)\, dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{z}} g_+^\delta (x)\, ds dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\sqrt{z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \right| ds\, |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_\gamma \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}}{|z|^{\frac{1}{2}} \left| 1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right|} ds\, |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\int_{|z| > \frac{1}{S^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}}{|z|^{\frac{1}{2}}} |dz| + \int_{|z| < \frac{1}{S^2}} \frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \right] ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\frac{2s^{-1}}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-\sigma \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} d\sigma + \frac{1}{s} - \sqrt{r_0} \right] ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} s^{-1} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \ln\left(\frac{2x+\varepsilon}{2x-\varepsilon} \right) \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

D'autre part,on a

$$\begin{aligned}
& Au_+^\delta (x) - g_+^\delta (x) \\
={}& -w_+^\delta (x, A) \left(A\psi - g_+^\delta (0) \right) - Am_+^\delta (x, A) f_+^\delta - w_+^\delta (x, A) \left(g_+^\delta (0) - g_+^\delta (x) \right) \\
& - \int_\gamma \int_0^\delta k_{z,+}^\delta (x, s) A(A - zI)^{-1} \left[g_+^\delta (s) - g_+^\delta (x) \right] ds dz.
\end{aligned}$$

Maintenant, on montre que $\left(\left[\left(u_{+}^{\delta}\right)'\right]_{\varepsilon}\right)'(x) + Au_{+}^{\delta}(x) - g_{+}^{\delta}(x) \to 0$ quant $\varepsilon \to 0$. Pour cela, écrire

$$
\begin{aligned}
& \left(\left[\left(u_{+}^{\delta}\right)'\right]_{\varepsilon}\right)'(x) + Au_{+}^{\delta}(x) - g_{+}^{\delta}(x) \\
= & -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_{+}^{\delta}(s) - g_{+}^{\delta}(x)\right] dsdz \\
& -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - s)\sinh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_{+}^{\delta}(s) - g_{+}^{\delta}(x)\right] dsdz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x - \varepsilon)\cosh\sqrt{-z}x}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_{+}^{\delta}(x + \varepsilon) - g_{+}^{\delta}(x)\right] dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\sinh\sqrt{-z}\,(x - \varepsilon)\sinh\sqrt{-z}\,(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_{+}^{\delta}(x - \varepsilon) - g_{+}^{\delta}(x)\right] dz \\
& +\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - 2x - \varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} - \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - 2x + \varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right]\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{z}g_{+}^{\delta}(x)\, dz \\
= & \sum_{j=1}^{5} J_j.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\|J_3\|_E \leq C\varepsilon^{2\alpha_0}\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)},
$$

$$
\|J_4\|_E \leq C\varepsilon^{2\alpha_0}\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
$$

et

$$
\|J_5\|_E \leq C\ln\left(\frac{2x + \varepsilon}{2x - \varepsilon}\right)\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C([0,\delta];E)}.
$$

Pour J_1

$$
\begin{aligned}
\|J_1\|_E = & \left\|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A\,(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\left[g_{+}^{\delta}(s) - g_{+}^{\delta}(x)\right] dsdz\right\|_E \\
\leq & \; C\int_{\gamma}\int_{x-\varepsilon}^{x}\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}\,(\delta - x)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right|\frac{(x - s)^{2\alpha_0}}{|z|^{\frac{1}{2}}}ds\,|dz|\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
\leq & \; C\int_{\gamma}\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{\left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\frac{(x - s)^{2\alpha_0}}{|z|^{\frac{1}{2}}}ds\,|dz|\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
\leq & \; C\int_{x-\varepsilon}^{x}\left[\int_{|z|>\frac{1}{(x-s)^2}}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}|dz| + \int_{|z|<\frac{1}{(x-s)^2}}\frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}}\right](x - s)^{2\alpha_0}ds\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
\leq & \; C\int_{x-\varepsilon}^{x}(x - s)^{2\alpha_0 - 1}ds\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
\leq & \; C\varepsilon^{2\alpha_0}\left\|g_{+}^{\delta}\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

pourJ_2 on fait le même calcul comme J_1 ,on obtient

$$\|J_2\|_E \leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.$$

Il est clair que $(J_j)_{j=1..5}$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Donc

$$\left[\left(u_+^\delta\right)'\right]_\varepsilon (x) \to \left(u_+^\delta\right)'(x) \text{ fortement}$$

et

$$\left(\left[\left(u_+^\delta\right)'\right]_\varepsilon\right)'(x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \to \left(u_+^\delta\right)''(x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) = 0$$

quand $\varepsilon \to 0$.

Maintenant on va montrer que $Au_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ si et seulement si $A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0,+\infty)$ et $(-A)^{\frac{1}{2}} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0,+\infty)$.

En effet, pour $x \in [0,\delta]$

$$\begin{aligned} & Au_+^\delta(x) \\ = \; & Am_+^\delta(x,A)\; f_+^\delta + w_+^\delta(x,A)\left(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)\right) + w_+^\delta\left(A\psi - g_+^\delta(0)\right) \\ & -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x,s)\;\; A(A-zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)\right] ds\; dz \\ & +g_+^\delta(x). \end{aligned}$$

soit $\psi \in D_A(\alpha_0,+\infty)$ et ξ, $x \in [0,\delta]$ tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$, alors

$$\begin{aligned} w_+^\delta(x,A)\psi - w_+^\delta(\xi,A)\psi &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} - \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta-\xi)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\right]\frac{A(A-zI)^{-1}}{z}\psi\; dz \\ &\leq -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh\sqrt{-z}\delta}\frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}}\psi ds\; dz, \end{aligned}$$

d'aprés le lemme(1.5) , on a

$$\begin{aligned}
& \left\| w_{+}^{\delta}(x,A)\psi - w_{+}^{\delta}(\xi,A)\psi \right\|_{E} \\
\leq\ & C\int_{\gamma}\int_{\xi}^{x} \frac{\left|\sinh\sqrt{-z}(\delta-s)\right|}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)}\,ds\ |dz| \\
\leq\ & C\int_{\gamma}\int_{\xi}^{x} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}}\|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)}\,ds\ |dz| \\
\leq\ & C\int_{\xi}^{x}\left[\int_{|z|\geq\frac{1}{S^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}}|dz| + \int_{|z|\leq\frac{1}{S^2}}\frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}}|dz|\right]ds\ \|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & C\int_{\xi}^{x} s^{2\alpha_0-1}ds\ \|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & C\left(x^{2\alpha_0}-\xi^{2\alpha_0}\right)\ \|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)} \\
\leq\ & C(x-\xi)^{2\alpha_0}\ \|\psi\|_{D_A(\alpha_0,+\infty)}.
\end{aligned}$$

on a

$$w_{+}^{\delta}(.,A)\left(A\psi - g_{+}^{\delta}(0)\right) \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E).$$

Soit $f_{+}^{\delta} \in D\left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)$, et $\xi, x \in [0,\delta]$ tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| A\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}x}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta}(A-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}dz \right\|_{E} \\
\leq\ & C\int_{\gamma}\frac{\left|\sinh\sqrt{-z}x\right|}{\sqrt{|z|}\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left\|A(A-zI)^{-1}f_{+}^{\delta}\right\|_{E}|dz| \\
\leq\ & C\int_{\gamma}\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha_0}C_{\theta_0}}\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{D_A\left(\frac{1}{2}+\alpha_0,+\infty\right)}|dz| \\
\leq\ & C\int_{\gamma}\frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}}\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{D_A\left(\frac{1}{2}+\alpha_0,+\infty\right)}|dz| \\
\leq\ & C\left\|f_{+}^{\delta}\right\|_{D_A\left(\frac{1}{2}+\alpha_0,+\infty\right)},
\end{aligned}$$

on a

$$Am_{+}^{\delta}(x,A)\ f_{+}^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E).$$

D'autre part, on pose

$$\begin{aligned}
h(x) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{0}^{\delta}k_{z,+}^{\delta}(x,s)A(A-zI)^{-1}\left[g_{+}^{\delta}(s)-g_{+}^{\delta}(x)\right]dsdz \\
&\quad + w_{+}\left(g_{+}^{\delta}(0)-g_{+}^{\delta}(x)\right),
\end{aligned}$$

soient ξ, x tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$ et en réecrivant les deux dernièrs termes, on a

$$
\begin{aligned}
& h(x) - h(\xi) \\
= \; & w_+^\delta(x, A)\left(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)\right) - w_+^\delta(x, \xi)\left(g_+^\delta(0) - g_+^\delta(\xi)\right) \\
& - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_0^\delta k_{z,+}^\delta(x, s) A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s) - g_+^\delta(x)\right] ds dz \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_0^\delta k_{z,+}^\delta(\xi, s) A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(s) - g_+^\delta(\xi)\right] ds dz \\
= \; & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_0^\xi \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta - s)\cosh\sqrt{-z}\mu}{\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(\xi)\right] d\mu ds dz \\
& - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_x^\delta \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\mu\cosh\sqrt{-z}(\delta - \mu)}{\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(x)\right] d\mu ds dz \\
& - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\mu\cosh\sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(x)\right] d\mu dz \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\xi\cosh\sqrt{-z}(\delta - \mu)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(\xi)\right] d\mu dz \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(\delta - x - \xi)}{z\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(x) - g_+^\delta(\xi)\right] dz \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta - \mu)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(0) - g_+^\delta(\xi)\right] d\mu dz \\
= \; & \sum_{i=1}^{6} L_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left\|L_1\right\|_E \\
= \; & \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \int_0^\xi \int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}(\delta - s)\cosh\sqrt{-z}\mu}{\cosh\sqrt{-z}\delta} A (A - zI)^{-1}\left[g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(\xi)\right] d\mu \; ds \; dz\right\|_E \\
\leq \; & C\int_\gamma \int_0^\xi \int_\xi^x \frac{\left|\sinh\sqrt{-z}(\delta - s)\right|\left|\cosh\sqrt{-z}\mu\right|}{\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left\|g_+^\delta(\mu) - g_+^\delta(\xi)\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} d\mu \; ds \, |dz| \\
\leq \; & C\int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta - s)}}{\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left(\int_0^\xi \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\mu \;\; (\mu - \xi)^{2\alpha_0} d\mu\right)\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \; ds \, |dz|
\end{aligned}
$$

Grase à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\xi \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\mu \, (\mu-\xi)^{2\alpha_0} \, d\mu \\
\leq \; & \left[\int_0^\xi \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\mu d\mu \right]^{1-2\alpha_0} \left[\int_0^\xi \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\mu \, (\mu-\xi) \, d\mu \right]^{2\alpha_0} \\
\leq \; & \left[\left[\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\mu}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right]_0^\xi \right]^{1-2\alpha_0} \left[\left[\frac{(\mu-\xi)}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \sinh \sqrt{-z}\mu \right]_0^\xi - \frac{1}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \int_0^\xi \sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\mu \; d\mu \right]^{2\alpha_0} \\
\leq \; & \left[\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right]^{1-2\alpha_0} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi - 1}{\left(\operatorname{Re} \sqrt{-z}\right)^2} \right]^{2\alpha_0} \\
\leq \; & \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}{\left(\operatorname{Re} \sqrt{-z}\right)^{1+2\alpha_0}} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi - 1}{\sinh \sqrt{-z}\xi} \right]^{2\alpha_0} \\
\leq \; & C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}}
\end{aligned}
$$

on a

$$
\begin{aligned}
A \, (A - zI)^{-1} &= (A - z + z) \, (A - zI)^{-1} \\
&= (A - z) \, (A - zI)^{-1} + z \, (A - zI)^{-1} \\
&= I + z \, (A - zI)^{-1} ,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
& \|L_1\|_E \\
\leq \; & C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)}}{\left|\cosh \sqrt{-z}\delta\right|} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} \right) \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \; ds \, |dz| \\
\leq \; & C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} ds \, |dz| \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq \; & C \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(s-\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} \, |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(s-\xi)^2}} \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} \, |dz| \right] ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq \; & C \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(s-\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\xi)}}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} \, |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(s-\xi)^2}} \frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}+\alpha_0}} \, |dz| \right] ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \Bigg(CV : \operatorname{Re} \sqrt{-z} \, (s-\xi) \\
\leq \; & C \int_\xi^x \frac{1}{(s-\xi)^{1-2\alpha_0}} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right)}}{\sigma^{2\alpha_0}} d\sigma \; ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& + C \int_\xi^x \frac{(s-\xi)^{2\alpha_0 - 1} - r_0^{\frac{1}{2}+\alpha_0}}{\frac{1}{2} - \alpha_0} ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq \; & C \int_\xi^x (s-\xi)^{2\alpha_0 - 1} \, ds \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \leq C \, (x-\xi)^{2\alpha_0} \left\| g_+^\delta \right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} .
\end{aligned}
$$

pour les autres termes L_2, L_3 et L_4 sont traités de la même manière que L_1

$$
\begin{aligned}
& \|L_5\|_E \\
= & \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\left(\delta-x-\xi\right)}{z\cosh\sqrt{-z}\delta} A\left(A-zI\right)^{-1}\left[g_+^\delta\left(x\right)-g_+^\delta\left(\xi\right)\right]dz\right\|_E \\
\leq & C\int_\gamma \frac{\left|\cosh\sqrt{-z}\left(\delta-x-\xi\right)\right|}{|z|\left|\cosh\sqrt{-z}\delta\right|}\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x-\xi)}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x-\xi)}\right|}{|z|\,e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|}\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+\xi)}}{|z|}\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}\int_{(x+\xi)\sqrt{r_0}} \frac{e^{-\sigma\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}}{|z|}d\sigma\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}\int_{\varepsilon<(x+\xi)\sqrt{r_0}} \frac{e^{-\sigma\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{2}\right)}}{|z|}d\sigma\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

et pour L_6

$$
\begin{aligned}
& \|L_6\|_E \\
= & \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_\xi^x \frac{\sinh\sqrt{-z}\left(\delta-\mu\right)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\delta} A\left(A-zI\right)^{-1}\left[g_+^\delta\left(0\right)-g_+^\delta\left(\xi\right)\right]d\mu dz\right\|_E \\
\leq & C\int_\gamma\int_\xi \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\mu}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\xi^{2\alpha_0}d\mu\,|dz|\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\int_\xi^x\left[\int_{|z|\geq\frac{1}{\mu^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\mu}}{|z|^{\frac{1}{2}}}|dz|+\int_{|z|\leq\frac{1}{\mu^2}}\frac{1}{|z|^{\frac{1}{2}}}|dz|\right]\mu^{2\alpha_0}d\mu\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\int_\xi^x \mu^{2\alpha_0-1}d\mu\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\int_\xi^x \mu^{2\alpha_0-1}d\mu\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\left(x^{2\alpha_0}-\xi^{2\alpha_0}\right)\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
\leq & C\left(x-\xi\right)^{2\alpha_0}\left\|g_+^\delta\right\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}
$$

La réciproque : par le calcul fonctionnel de Dunford $u_+^\delta\left(x\right)$ peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned}
& u_{+}^{\delta}(x) \\
= \quad & A^{-1}S^{-1}\left(I+e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}(\delta-x)}\right)e^{-(-A)^{\frac{1}{2}}x}\left(A\psi-g_{+}^{\delta}(0)\right) \\
& +S^{-1}\left(I+e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}x}\right)e^{-(-A)^{\frac{1}{2}}(\delta-x)}(-A)^{-\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta} \\
& -S^{-1}\left(I+e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}(\delta-x)}\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_{x}^{\delta}\left(I-e^{-2s(-A)^{\frac{1}{2}}}\right)e^{-(x-s)(-A)^{\frac{1}{2}}}g_{+}^{\delta}(s)\,ds \\
& -S^{-1}\left(I-e^{-2x(-A)^{\frac{1}{2}}}\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\int_{x}^{\delta}\left(I+e^{-2(\delta-s)(-A)^{\frac{1}{2}}}\right)e^{-(s-x)(-A)^{\frac{1}{2}}}g_{+}^{\delta}(s)\,ds \\
& +A^{-1}S^{-1}\left(I+e^{-2(-A)^{\frac{1}{2}}(\delta-x)}\right)e^{-(-A)^{\frac{1}{2}}x}g_{+}^{\delta}(0).
\end{aligned}$$

Grace à **A-Lunardi**[9] l'opérateur

$$S^{-1}=\left(I+e^{-2\delta(-A)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1},$$

est bien défini. En utilisant **Sineestrari-E**[11], on déduit que

$$u_{+}^{\delta}(.)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)\ \text{ alors }\left\{\begin{array}{l} w_{+}^{\delta}(.,A)\left(A\psi-g_{+}^{\delta}(0)\right)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E) \\ m_{+}^{\delta}(.,A)(-A)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)\end{array}\right.$$

alors

$$\left\{\begin{array}{l}(-A)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}\in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0,+\infty)=D_A(\alpha_0,+\infty) \\ A\psi-g_{+}^{\delta}(0)\in D_A(\alpha_0,+\infty).\end{array}\right.$$

3.2 Régularité maximale pour $\left(u_{-}^{\delta}\right)$

Pour la régularité maximale de le solution $\left(u_{-}^{\delta}\right)$,on obtient le théorème suivant

Théorème 3.2 *soient $g_{+}^{\delta}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ et $g_{-}\in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)$avec $0<2\alpha_0<1, f_{-}\in D(A)$ et $f_{+}^{\delta}\in D\left(\sqrt{-A}\right)$alors l'unique solution stricte $\left(u_{-}^{\delta}\right)$du problème $\left(P_{-}^{\delta}\right)$ donne par la représentation*(2.10) *a la propriété suivante :*

$$Au_{-}^{\delta}\quad\left[\left(u_{-}^{\delta}\right)''\in C^{2\alpha_0}([-1,0];E)\right]$$

si et seulement si

$Af_{-}-g_{-}(-1)\in D_A(\alpha_0,+\infty)$ *et* $g_{-}(0)-g_{+}^{\delta}(0)\in D_A(\alpha_0,+\infty)$ *et* $(-A)^{\frac{1}{2}}f_{+}^{\delta}\in D_A(\alpha_0,+\infty)$.▌

Preuve. Pour la preuve de ce théorème on utilise les mêmes techniques que précedemment.
■

Chapitre 4

Exemple

On considère le problème aux limites suivante

$$\left(p^{\delta}\right)\begin{cases} \frac{1}{b_\delta} div\ \left(b_\delta \nabla U^\delta\right) = G^\delta \text{ sur } \Omega^\delta \\ U^\delta = 0 \quad \partial\Omega^\delta \backslash \Gamma^\delta \\ \partial_\xi U^\delta = 0 \quad \Gamma^\delta, \end{cases}$$

où δ est un petit paramètre donné dans $]0,1]\,, \Omega^\delta$ est le cylindre $]-1,\delta] \times \Lambda$ de $\mathbb{R}^n$ des variables (ξ,η), Λ est un domaine ouvert régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\Gamma^\delta = \{\delta\} \times \Lambda$ et b_δ est une fonction définie par

$$b_\delta(\xi) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } \ \xi \in]-1,0[\\ \dfrac{1}{\delta} \ \text{ si } \ \xi \in]0,\delta[\,. \end{cases}$$

Ce problème, représente par exemple,la propagation de la chaleur entre le corps fixe

$$\Omega_- =]-1,\delta] \times \Lambda,$$

et une couche mince

$$\Omega_+^\delta =]-1,\delta] \times \Lambda,$$

(suppossée avec condutivité infinie) .

On note par U_-^δ et G_- les restrictions respectives de U^δ et G^δ sur Ω_-, et par U_+^δ et G_+^δ les restrictions de U^δ et G^δ sur Ω_+^δ.

La famille $\left(p^\delta\right)$ est équivalente au probléme aux limites et de transmission suivants

$$\begin{cases} \begin{cases} \Delta U_-^\delta = G_- \ \text{ sur } \Omega_- \\ \Delta U_+^\delta = G_+^\delta \ \text{ sur } \Omega_+^\delta \end{cases} \\ (cl) \begin{cases} U_-^\delta = 0 \quad \partial\Omega_- \backslash \Gamma^0 \\ U_+^\delta = 0 \quad \partial\Omega_+^\delta \backslash \left(\Gamma^0 \cup \Gamma^\delta\right) \\ \partial_\xi U_+^\delta = 0 \ \ \Gamma^\delta \end{cases} \\ (ct) \begin{cases} U_-^\delta = U_+^\delta \quad \Gamma^0 \\ \partial_\xi U_-^\delta = \frac{1}{\delta}\partial_\xi U_+^\delta \quad \Gamma^0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Gamma^0 = \{0\} \times \Lambda$ et $\partial\Omega_+^\delta$ sont les frontières de Ω_+^δ.

On consédère le cas $E = L^p(\Lambda)\,, 1 \le p < \infty$.Notre problème (4.1) peut être formulé comme suit

$$\left(p^{\delta}\right)\begin{cases}\left(u^{\delta}\right)''(\xi)+A\left(u^{\delta}\right)(\xi)=g^{\delta}(\xi) & \text{sur} \quad]-1,\delta[\setminus\{0\}\\ u^{\delta}(-1)=0 \text{ et } \left(u^{\delta}\right)'(\delta)=0 \\ u^{\delta}(0^{-})=u^{\delta}(0^{+}) \text{ et } \left(u^{\delta}\right)'(0^{-})=p\left(u^{\delta}\right)'(0^{+}),\end{cases}$$

où A est un opérateur liniéaire fermé défini par

$$\begin{cases}D(A)=W^{2,p}(\Lambda)\cap W_0^{1,p}(\Lambda)\\ (A\varphi)(\eta)=\Delta\varphi(\eta),\end{cases}$$

où Δ est Laplacien sur Λ (sur la variable η), on a

$$\begin{cases}g_{-}=g^{\delta}\mid_{[-1,0]}\in C^{2\alpha_0}([-1,0]\ ;\ L^{p}(\Lambda))\\ g_{+}^{\delta}=g^{\delta}\mid_{[0,\delta]}\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]\ ;\ L^{p}(\Lambda)),\quad (0<2\alpha_0<1).\end{cases}$$

Théorème 4.1 *On suppose que* $\left(2\alpha_0-\frac{1}{p}\right)>0$ *et*

$$G_{+}^{\delta}(.,.)\in C_{\xi}\left([0,\delta]\ ;\ L_{\eta}^{p}(\Lambda)\right) \text{ et } G_{+}^{\delta}(.,\eta)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p.}\eta\in\Lambda.$$

Alors il existe une unique solution

$$U_{+}^{\delta} \text{ sur } [0,\delta]$$

de (4.1) *telle que*

$$\begin{cases}\xi\longmapsto\Delta_{\eta}U_{+}^{\delta}(\xi,\eta)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p } \eta\in\Lambda\\ \xi\longmapsto\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}U_{+}^{\delta}(\xi,\eta)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p } \eta\in\Lambda.\end{cases}$$

Théorème 4.2 *On suppose que* $\left(2\alpha_0-\frac{1}{p}\right)>0$ *et*

$$\begin{cases}G_{-}(.,.)\in C_{\xi}\left([-1,0]\ ;\ L_{\eta}^{p}(\Lambda)\right),\ G_{-}^{\delta}(.,\eta)\in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ pour p.p.}\eta\in\Lambda\\ G_{+}^{\delta}(.,.)\in C_{\xi}\left([0,\delta]\ ;\ L_{\eta}^{p}(\Lambda)\right),\ G_{+}^{\delta}(.,\eta)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p.}\eta\in\Lambda.\end{cases}$$

Alors il existe une unique solution

$$U_{-}^{\delta} \text{ sur } [-1,0]$$

de (4.1)*telle que*

$$\begin{cases}\xi\longmapsto\Delta_{\eta}U_{-}^{\delta}(\xi,\eta)\in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ pour p.p } \eta\in\Lambda\\ \xi\longmapsto\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}U_{-}^{\delta}(\xi,\eta)\in C^{2\alpha_0}([0,\delta]) \text{ pour p.p } \eta\in\Lambda.\end{cases}$$

Bibliographie

[1] **Balakrishnan A V. :** Fractional power of closed operators and the semigroups generated by them, Pacif. J. Math. 10, pp419-437, 1960.

[2] **Belhamiti O :**Etude dans les espaces de Hölder de problème aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince, Thèse de doctorat, L'université du Havre, 2008.

[3] **Belhamiti O. Labbas R. Lemrabet K. Medeghri A. :** Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces,. Applied Mathematics and Computation 202 (2008) , doi :10.1016/$J.AMC$.2008.03.003.

[4] **El Haial A, Labbas R :** On the Ellipticity and Solvability of Abstract Secondorder Differential Equation. Electronic Journal of Differential Equation, 57 (2001).

[5] **Favini A, Labbas R, Lemrabet K et Maingot S. :** Study of The limit of Transmission Problems in a Thin Layer by The Sum Theory of Linear Operators, Rev. Mat.Complut .18 ; Num 1, pp 143-176, 2005.

[6] **Labbas R. :** Problème aux limites pour une équation différenteille abstraite de type elliptique, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.

[7] **Lemrabet K. :** Etude globale d'un probléme de transmission dans un polygone ou un polyèdre, Thèse $3^{ème}$ cycle, Université de Nice, 1976.

[8] **Lemrabet K. :** Régularité de la solution d'un problème de transmission, J. Math. pures et appl., $56; 1-38\,(1977)$.

[9] **Lunardi A. :** Analytic Semigroups and Optimal Reguularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, 1995.

[10] **Mezeghran F.Z :** Problème a deux points pour une équation différenteille opérationelle du second ordre. Thèse Magister, Université d'Oran, 1992.

[11] **Sinestrari E. :** On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions, J. Math. Anal. App. 66(1985) 16-66.

[12] **Tanabe H :** Equations of Evolution, Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

[13] **Triebel H. :** Interpolation Theory, Fuction Spaces, Differential Operators, North Holland, amsterdam (1978).