REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE

Pour obtenir le diplôme de

Master **en Mathématiques**

Option : Analyse harmonique et EDP

Approche semi-classique de la solution de l'équation de Heisenberg

Présenté par

MOHAMED SENOUSSI

Soutenu le 26/06/2012 devant le Jury

Djamia BENSIKADDOUR	**Président**	Maître assistant	U. MOSTAGANEM
Amina LAHMAR-BENBERNOU	**Encadreur**	Professeur	U. MOSTAGANEM
Rahma SAHRAOUI	**Examinateur**	Maître de conférences A	U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2011 / 2012

Remerciements

Tout d'abord, le grand Merci à notre « DIEU» le tout puissant, qui m'a donné la force et la volonté pour finir ce projet.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de prés, à la réalisation de ce modeste travail, et en particulier :

*Mon encadreur Madame **Amina LAHMAR-BENBERNOU** Professeur à l'université de Mostaganem, pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail.*

*Mademoiselle **Djamia BENSIKADDOUR** Maitre assistant à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Madame **Rahma SAHRAOUI** Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.*

Tous les enseignants que j'ai rencontré ou côtoyé durant mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes très chers parents

Mon encadreur **Madame Amina LAHMAR-BENBRNOU**

Mes collègues de la promotion Master "Analyse harmonique et EDP" de l'année **2011/2012**

Tout mes amis sans exception surtout mes très cher amis Haidra, khatabe

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

x	:	la position, $x \in \mathbb{R}^n$,
p	:	l'impulsion, $p \in \mathbb{R}^n$,
h	:	la constante de planck,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	:	espace de Schwartz,
$C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions m fois continument différentiables,
$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions infiniment dérivable,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$,
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	$\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n} \lvert f(x)\rvert^p \, dx < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
S^m	:	espace des symboles d'ordre m,
$\lVert f \rVert_p$	:	la norme de la fonction f dans L^p,
H_p	:	champ Hamiltonien,
$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	:	opérateur de Laplacien,
$D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},\ i^2 = -1$	:	la différentielle au point x,
$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{(\partial x_1)^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{(\partial x_1)^{\alpha_n}}$	:	la différentielle au point x d'ordre α,
$\langle .,. \rangle$	:	produit scalaire,

INTRODUCTION

Le cadre général de ce mémoire est celui de l'étude l'approximation semi classique de la solution de l'équation de Heisenberg à terme h pseudo-différentielle et la liaison entre cette solution et celle du système Hamiltonien correspondant.

Plus précisément, notre plan de travail est le suivant :

Au premier chapitre, nous donnons des définitions et quelques résultats utilisés dans nos calculs.

Dans le second chapitre, nous donnons, dans un premier temps, le théorème d'existence de la solution de Heisenberg, cette dernière est donnée par :

$$ih\frac{\partial F_h(t,s)}{\partial t}= \left[F_h(s,t), A_h(t)\right], \tag{0.0.1}$$

avec $F_h(s,s) = C^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)$, $A_h(t) = a^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D, t)$ et C est un symbole de poids borné. Pour C non borné, le problème de domaine se pose. Notre étude de (0.0.1) est basée sur la régularité de l'équation de Schrödinger ([8]) :

$$ih\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = A_h(t)u(t,s) \text{ avec } u(s,s) = f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{0.0.2}$$

Aussi nous montrons que la solution de (0.0.1) admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs h pseudo-différentiels dont le premier terme est un opérateur de symbole $C\circ\ \Phi_s^t$ ou $\Phi_s^t = (x(t,s), p(t,s))$ est la solution du système Hamiltonien donnée comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \partial_p a(x(t,s), p(t,s), t); x(s,s) = y \\ \frac{\partial p(t,s)}{\partial t} = \partial_x a(x(t,s), p(t,s), t); p(s,s) = q \end{cases} ; (y,q) \in R^{2n}. \tag{0.0.3}$$

Le dernier chapitre consiste à étudier la limite classique de la fonction de corrélation quantique et l'étude de l'approximation semi-classique d'opérateur du type :

$$W_h(x_0,p_0) * U_h(t)\exp(-ih^{1l2}(r\cdot x + s\cdot D_x))U_h(t)W_h(x_0,p_0),$$

où $W_h(x_0,p_0)$ est opérateur de Weyl :

$$W_h(x_0,p_0) = \exp(ih^{-1l2}(p_0\cdot x - x_0\cdot D_x)).$$

Dans notre cas, nous considérons les opérateurs du type :

$$W_h(x_0, p_0) * U_h(t) B(h) U_h(t) W_h(x_0, p_0).$$

où $B(h)$ est un opérateur pseudo-différentiel, généralement non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc il s'applique au théorème d'Ehrenfels et permet d'obtenir une correspondance remarquable entre mécanique quantique et mécanique classique.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans cette partie, On rappelle essentiellement des définitions et des résultats utilisés dans nos calcules.

1.1 Les symboles

Définition 1.1.1 ([8]) *On désigne par $S^m(h)$ la classe des symboles admissibles $b(h)$ vérifiant que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p,h)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|p|)^{m-|\alpha|-|\beta|},\ \forall h \in]0,1] \tag{1.1.1}$$

Définition 1.1.2 ([8]) *On désigne par $S_+^m(h)$ la classe des symboles admissibles $b(h)$ vérifiant l'estimation :*

$$\exists C_{\alpha,\beta} \ \textit{telque} \ \left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p,h)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|p|)^{(m-|\alpha|-|\beta|)_+},\quad \forall h \in]0,1] \tag{1.1.2}$$

que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Définition 1.1.3 ([8]) *$a(.,.;t)$, $t \in]-T,T]$ est une famille de symboles réels si pour tout T_1, $0 < T_1 < T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante C telle que :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p,t)\right| \leq C\ (1+|x|+|p|)^{2-|\alpha|-|\beta|},\ \ |t| \leq T_1; (x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{1.1.3}$$

1.2 Opérateur pseudo-différentiel par la formule de Weyl

Définition 1.2.1 ([5]) *Soit $a(.,.;h)$,une famille de symboles réels, on pose :$\forall(x,h)\in\mathbb{R}^n\times[0,1]$:*

$$Op_h^w(a(h^{1l2}x,h^{1l2}D;t)f)(x)=(a^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D;t)f)(x)=\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}}(\exp i(x-y),p)\ a(h^{1l2}(x+y)l2,h^{1l2}p;t)f(y)dy \tag{1.2.1}$$

où $f\in S(\mathbb{R}^n)$, $dp=(2\pi)^{-n}$ et h est un petit paramètre positive.

1.3 Système Hamiltonien et le flot Hamiltonien

Définition 1.3.1 ([5]) *Le système Hamiltonien associé à $a(y\,(t,s)\,,q\,(t,s))$ est de la forme :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(t,s)=\partial_q a(y(t,s),q(t,s)) \\ \frac{\partial q}{\partial t}(t,s)=-\partial_y a(y(t,s),q(t,s)) \end{cases}. \tag{1.3.1}$$

Si de plus, $t=s$ alors,

$$y(s,s)=x \text{ et } q(s,s)=p. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.2 ([8]) *On appelle $\Phi_s^t=(y(t,s),q(t,s))$ le flot Hamiltonien définit par* (1.3.1) *et* (1.3.2), *s'il existe $\delta(T_1)>0$ tel que pour $|t-s|\leq\delta(T_1)$,On a :*

$$1+\left|\Phi_s^t(x,p)\right|\geq C_0(1+|x|+|p|) \tag{1.3.3}$$

avec $C_0>0$ indépendante (x,p) et de t, s tels que $|t-s|\leq\delta(T_1)$.

Lemme 1.3.1 ([8]) *Soient $(y(t,s),q(t,s))$ associées au problème* (1.3.1) *et* (1.3.2). *Alors $y(t,s)$ et $q(t,s)$ sont C^∞ par rapport à (x,p) et C^1par rapport à t, et s.*
De plus, on a :

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_p^\beta y(t,s)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|p|)^{1-|\alpha|-|\beta|} \tag{1.3.4}$$

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_p^\beta q(t,s)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|p|)^{1-|\alpha|-|\beta|} \tag{1.3.5}$$

pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ et pour tout t,s tel que $|t-s|\leq\delta\,(T_1)$.

1.4 L'espace $B^k(h)$

Définition 1.4.1 ([8]) *On définie l'espace $B^k(h)$ par :*

$$B^k(h) = \left\{ f \in L^2(R^n) : (h^{1l2}x)^\alpha (h^{1l2}D)^\beta f \in L^2(R^n), |\alpha| + |\beta| \le k \right\} \tag{1.4.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{k,h} = \left(\sum_{|\alpha|+|\beta| \le k} \left\| (h^{1l2}x)^\alpha (h^{1l2}D)^\beta f \right\|^2 \right)^{1l2}, \ \textit{pour } f \in B^k(h) \tag{1.4.2}$$

Lemme 1.4.1 ([8]) *Soient $t, s, |t-s| \le \delta(T_1)$. Alors pour tout $b(h) \in S^m(h)$:*

$$\partial_x^\alpha \partial_p^\beta (\Phi_s^t, h) \in S^{m-|\alpha|-|\beta|}(h) \tag{1.4.3}$$

Preuve. Utilisant les notations du lemme (1.3.1), notons $u = (x, p)$. Alors, on peut écrire :

$$\partial_u^\theta b(\Phi_s^t, h) = \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{y_1+\ldots+y_j=\theta} C_{y_1\ldots y_j} (\partial_u^j b)(\Phi_s^t, h) \partial_u^{y_1}\Phi_s^t \ldots \partial_u^{y_j}\Phi_s^t \quad ; \theta, y_k \in \mathbb{N}^{2n} - \{0\}. \tag{1.4.4}$$

Donc si $b(h) \in S^m(h)$, on a :

$$\left|\partial_u^\theta b(\Phi_s^t, h)\right| \le C \sum_{j=1}^{|\theta|} \sum_{y_1+\ldots+y_j=\theta} (1 + \left|\Phi_s^t\right|)^{m-j} (1+|u|)^{j-|\theta|} \le C'(1+|u|)^{m-|\theta|}; \text{ si. } |t-s| \le \delta(T_1). \tag{1.4.5}$$

□

Définition 1.4.2 ([8]) *On dira que B_h un opérateur uniformément continu de $B^k(h)$ dans $B^m(h)$, s'il existe une constante C_k telle que :*

$$\|B_h f\|_{m,h} \le C_k \|f\|_{k,h}, \ \textit{pour } f \in B^k(h) \ \textit{et } 0 < h \le h_0. \tag{1.4.6}$$

Définition 1.4.3 ([8]) *Posons :*

$$\Delta(T_1) = \{(t, s), |t| \le T_1, |s| \le T_1 : |t-s| \le \delta(T_1)\}, \tag{1.4.7}$$

pour $(t, s) \in \Delta(T_1)$ introduisons les opérateurs pseudo-différentiels :

$$\begin{aligned} X_j^h(t,s) &= Op^w x_j(t,s) = x_j^w(t, s; h^{1l2}x, h^{1l2}D), &(1.4.8)\\ P_j^h(t,s) &= Op^w p_j(t,s) = p_j^w(t, s; h^{1l2}x, h^{1l2}D), &(1.4.9)\end{aligned}$$

$j = 1, 2, ..., n$.

Alors, pour $t = s$ la condition (1.3.2) donne :

$$X_j^h(t,t)f = x_j f,\ P_j^h(t,t) = D_j f,\ \text{pour } f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.4.10}$$

Proposition 1.4.1 ([8]) *Pour $(t,s) \in \Delta(T_1)$, soit $C(t,s)$ l'un des opérateurs $X_j^h(t,s)$, $P_j^h(t,s)$, $j = 1, ..., n$. Alors, pour tout entier $k \geq 0$, il existe une constante C_k indépendante de t et s telle que l'on ait :*

$$\begin{aligned} \left\| \left(X_{j,}^h C(t,s) \right) f \right\|_k &\leq C_k \left\| f \right\|_k \; ; \left\| \left(D_{j,} C(t,s) \right) f \right\|_k \leq C_k \left\| f \right\|_k , && (1.4.11) \\ \left\| C(t,s) f \right\|_k &\leq C_k \left\| f \right\|_{k+1} ; \text{pour } f \in S(\mathbb{R}^n). && (1.4.12) \end{aligned}$$

Corollaire 1.4.1 ([8]) *$X_j^h(t,s)$; $P_j^h(t,s)$ se prolongent en des opérateurs bornés de $B^k(\mathbb{R}^n)$ dans $B^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ pour $k \geq 1$, pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $X_j^h(t,s)f$ et $P_j^h(t,s)f$ sont de classe C^1 dans $B^k(\mathbb{R}^n)$ par rapport à $(t,s) \in \Delta(T_1)$.*

Preuve. $S(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $B^k(\mathbb{R}^n)$, la première affirmation vient directement de (1.4.12).

Comme les symboles de $X_j^h(t,s)$, $P_j(t,s)$ sont C^1 en t, s par la technique des intégrales oscillantes, la deuxième se justifie facilement. □

Définition 1.4.4 ([8]) *Soient $Q_j^h(t,s), G_j^h(t,s)$ deux opérateurs pseudo-différentielles définies par :*

$$\begin{aligned} Q_j^h(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s} X_j^h(t,s) + i \left[A_h(s), X_j^h(t,s) \right] && (1.4.13) \\ G_j^h(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s} P_j^h(t,s) + i \left[A_h(s), X_j^h(t,s) \right] && (1.4.14) \end{aligned}$$

Les opérateurs $Q_j^h(t,s), G_j^h(t,s)$ se prolongement en des opérateurs bornés dans $B^k(R^n)$ pour tout $k \geq 0$.

1.5 Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger

Définition 1.5.1 ([8]) *Soit l'opérateur de Schrödinger définit par :*

$$P = -h^2 \Delta + V.$$

Le problème de Cauchy d'opérateur de Schrödinger est définie par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_s(t) = A_h(t) f_s(t) \\ f_s(s) = f \end{cases} \tag{1.5.1}$$

avec $s, t \in]-T, T[$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ *et* $A_h(t) = a^w\left(h^{1/2}x, h^{1/2}D, t\right)$.

Remarque 1.5.1 ([8]) *Dans tout ce qui suit, on appelle solution de* (1.5.1) *toute application absolument continue :*

$$\begin{array}{rcl} f_s & : &]-T, T[\to L^2(\mathbb{R}^n) \\ t & \to & f_s(t) \end{array}$$

tel que : $f_s(t) \in D(A_h(t))$ *pour tout* t.

1.5.1 L'existence de la solution de problème de Cauchy

Théorème 1.5.1 ([8]) *Sous les conditions* (1.1.1) *et* (1.1.3), *la solution du problème* (1.5.1) *existe pour* $(t, s) \in \Delta(T_1)$.

Si on désigne par $U_h(t, s)$ *l'application :*

$$U_h(t, s) : f \to f_s(t).$$

Alors $U_h(t, s)$ *se prolonge en une famille d'opérateurs uniformément bornée de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^2(R^n)$ *et de* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B^2(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $(t, s) \in \Delta(T_1)$ *et on a :*

$$U_h(t, \theta) U_h(\theta, s) = U_h(t, s) \text{ avce } (t, \theta), (\theta, s) \in \Delta(T_1) \tag{1.5.2}$$

Si $A_h(t)$ *vérifie de plus la définition* (1.2.1). *Alors* $U_h(t, s)$ *est un opérateur unitaire dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir article Kitada et Kumano-go ([4]) □

Chapitre 2

Existence de solution de l'équation de Heisenberg

Théorème 2.0.2 ([8]) *Le problème de Heisenberg est donnée par :*

$$\begin{cases} ih\frac{\partial F_h(t,s)}{\partial t} = [F_h(t,s), A_h(t)] \\ F_h(s,s) = b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D) \end{cases} \quad dans\ L(S(\mathbb{R}^n), S(\mathbb{R}^n)) \tag{2.0.1}$$

où $A_h(t) = a^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D, t)$ est un opérateur pseudo-différentiel associe un symbole de Wely et b un symbole de poids tempérés. Le problème (2.0.1) *admet une solution unique définie par :*

$$F_h(t;s) = U_h(t,s)b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)U_h(s,t) \tag{2.0.2}$$

avec $U_h(t,s)$ se prolonge en un propagateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R})$, et vérifier :

$$U_h : U_0 \to U_h(t,s).$$

Avant d'étudier l'existence de la solution du problème (2.0.1), on rappelle un résultat sur la régularité de la solution de l'équation de Schrödinger.

2.1 Régularité de la solution de l'équation de Schrödinger

On considère l'un des symboles dépondant du temps $a(t)$,$t \in \left]-T,T\right[$, on fera les hypothèses suivantes sur $a(t)$: ([8])

i) $a(x,p;t)$ est à valeurs réels et pour tous multi-indices α, β, $\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x,p;t)\right|$ est continue en $t \in \left]-T,T\right[$.

ii) Pour tout $0 < T_1 < T$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| + |\beta| \geq 2$,$\exists$ C_{α,β,T_1} tel que :

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta b(x,p,h)\right| \leq C_{\alpha,\beta}, t \in [-T_1, T_1]\,; (x,p) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

iii) $Op^w a(t)$ définie sur $S(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, que l'on note $A_h(t)$, ici on a noté $Op^w a\,(t)$ l'opérateur associe au symbole a par la formule (1.2.1) avec $h = 1$.

Proposition 2.1.1 ([8]) *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante C_m tel que pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et pour t, s tels que $(t,s) \in \Delta(T_1)$ on a :*

$$U^h(t,s)f \in B^m(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|U_h(t,s)f\|_{m,h} \leq C_m \|f\|_{m,h} \tag{2.1.1}$$

uniformément par rapport à $(t,s) \in \Delta(T_1)$.

Pour prouver cette proposition nous commencerons par établir des lemmes et proposition.

Lemme 2.1.1 ([8]) *Pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$, on a :*

$$\frac{\partial}{\partial x} X_j^h(t,s)f = -(Op^{w\prime}\{a(.,.,s), x_j^h(t,s;.,.)\})f \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_j^h(t,s)f = (Op^{w\prime}\{\partial_{p_j} a(x(t,s,.;.), p(t,s;.,.),t)\})f \tag{2.1.3}$$

de même pour $P_j^h(t,s)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} P_j^h(t,s)f = -(Op^{w\prime}\{a(.,.,s), p_j^h(t,s;.,.)\})f \tag{2.1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P_j^h(t,s)f = -(Op^{w\prime}\{\partial_{x_j} a(x(t,s,.;.), p(t,s;.,.),t)\})f \tag{2.1.5}$$

Les égalités (2.1.2)(2.1.3) ont lieu dans $B^k(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geq 0$; $\{.,.\}$ désigne le crochet de Poisson donnée par :

$$\{c,d\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial c}{\partial p_j}.\frac{\partial d}{\partial x_j} - \frac{\partial c}{\partial x_j}.\frac{\partial d}{\partial p_j}\right).$$

Preuve. Par la définition des opérateurs $X_j^h(t,s)$, $P_j^h(t,s)$; (1.4.7), (2.1.3) , (2.1.5) sont immédiat.. On démontre (2.1.2) et (2.1.4) se déduit de la même manière.

En revenant aux intégrales oscillantes, on a facilement :

$$\frac{\partial}{\partial s} X_j^h(t,s)f = (\frac{\partial}{\partial s} x_j^h)^w(t,s;x,D)f, \text{ pour } f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{2.1.6}$$

Donc, il suffit de vérifier :

$$\frac{\partial}{\partial s} x_j^h(t,s) = -\left\{a(s), x_j^h(t,s)\right\}. \tag{2.1.7}$$

On note Φ_s^t la solution $(x(t,s), p(t,s))$ du problème (1.3.1) et (1.3.2).comme :

$$\begin{aligned} \Phi_s^t \circ \Phi_t^s &= 1; \text{ sur } \mathbb{R}^{2n} && (2.1.8)\\ \frac{\partial b}{\partial t} \circ \Phi_s^t &= \{a(t), b\} \circ \Phi_s^t; \text{ pour } b \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}), && (2.1.9) \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\frac{\partial b}{\partial s} \circ \Phi_s^t = -[\frac{\partial}{\partial r}(b \circ \Phi_s^t \circ \Phi_s^r)_{r=s}] \circ \Phi_s^t = -\left\{a(s), b \circ \Phi_s^t\right\} \circ \Phi_t^s \circ \Phi_s^t = -\left\{a(s), b \circ \Phi_s^t\right\} \tag{2.1.10}$$

En particulier, si on prend $b = x_j^h$, on obtient (2.1.4).(2.1.5) provient de (2.1.7) et (2.1.2) d'après le corollaire (2.1.6), cela finit la démonstration. □

Lemme 2.1.2 *Pour tout $k \geq 0$, il existe C_k tel que :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial s} X_j^h(t,s)f + i[A_h(s), X_j^h(t,s)]f \right\|_k &\leq C_k \|f\|_k ; (t,s) \in \Delta(T_1) && (2.1.11)\\ \left\| \frac{\partial}{\partial s} P_j^h(t,s)f + i[A_h(s), P_j^h(t,s)]f \right\|_k &\leq C_k \|f\|_k ; f \in S(\mathbb{R}^n) && (2.1.12) \end{aligned}$$

Preuve. Voir l'article de X. P. Wang ([8]). □

Lemme 2.1.3 ([8]) *Pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$, on a dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} (P_j^h(t,\tau)U_h(\tau,s) - U_h(\tau,s)P_j^h(t,s))f &= \int_s^\tau U_h(\tau,\theta)G_j^h(t,\theta)U_h(\theta,s)f \, d\theta && (2.1.13)\\ (X_j^h(t,\tau)U_h(\tau,s) - U_h(\tau,s)X_j^h(t,s))f &= \int_s^\tau U_h(\tau,\theta)Q_j^h(t,\theta)U_h(\theta,s)f \, d\theta && (2.1.14) \end{aligned}$$

Preuve. Par le théorème (1.5.1), les premier membres de (2.1.13) et (2.1.14) sont bien définis, puisque $U_h(t,s)f.\in B^2(\mathbb{R}^n)$ et que $X_j^h(t,\tau); P_j^h(t,\tau)$ sont continues de $B^2(\mathbb{R}^n)$ dans $B^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), (U_h(\tau,s)P_j^h(t,r)U_h(r,s)f,\Psi)$ est C^1 en r, donc on a la formule :

$$
\begin{aligned}
< \; & [P_j^h(t,\tau)U_h(\tau,s) - U_h(\tau,s)P_j^h(t,s)]f,\Psi >= \int_s^\tau \frac{\partial}{\partial r} < U_h(\tau,r)P_j^h(t,r)U_h(r,s)f,\Psi > \; dr \\
= & \int_s^\tau < U_h(\tau,r)i[A_h(r),P_j^h(t,r)] + \frac{\partial}{\partial r}P_j^h(t,r)U_h(r,s)f,\Psi > \; dr \\
= & \int_s^\tau < U_h(\tau,r)G_j^h(t,r)U_h(r,s)f,\Psi > dr
\end{aligned}
$$

$<,>$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.d'où obtient (2.1.13).

De même, on peut montrer (2.1.14). □

Maintenant, tous les outils sont prêts pour montrer la proposition (2.1.1) :

Preuve. [de la propostion (**??**)] Pour $m, 0 \le m \le 2$, (2.0.1) est déja montré dans le théoréme (1.5.1). Supposons que l'on ait déja (2.0.1) pour $m, 0 \le m \le k-1$.

On va le montrer pour $m = k$, Pronons $t = 2$, (2.1.13) et (2.1.14) deviennent :

$$
D_jU_h(\tau,s)f \;=\; U_h(\tau,s)P_j^h(\tau,s)f + \int_s^\tau U_h(\tau,\theta)G_j^h(t,\theta)U_h(\theta,s)f\; d\theta \qquad (2.1.15)
$$

$$
X_j^hU_h(\tau,s)f \;=\; U_h(\tau,s)X_j^h(t,s))f + \int_s^\tau U_h(\tau,\theta)Q_j^h(t,\theta)U_h(\theta,s)f\; d\theta \qquad (2.1.16)
$$

Par le Lemme (2.1.1)et l'hypothése de récurennence, on déduit de (2.1.15) et (2.1.16) que $D_jU_h(\tau,s)f, X_j^hU_h(\tau,s)f$ sont $B^{k-1}(R^n)$ et vérifier :

$$
\|D_jU_h(\tau,s)f\|_{k-1} \;\le\; C_{k-1}\left\|P_j^h(t,s)f\right\|_{k-1} + C'_{k-1}\|f\|_{k-1} \qquad (2.1.17)
$$

$$
\left\|X_j^hU_h(\tau,s)f\right\|_{k-1} \;\le\; C_{k-1}\left\|X_j^h(t,s)f\right\|_{k-1} + C'_{k-1}\|f\|_{k-1}. \qquad (2.1.18)
$$

Le lemmes (2.1.2), (2.1.3) et (2.1.13) impliquent que

$$
U_h(\tau,s)f \in B^k(\mathbb{R}^n) \text{ avce } \|U_h(t,s)f\|_k \le C_k\|f\|_k.
$$

□

Remarque 2.1.1 ([*8*]) *On remarque que par* (1.1.1)*, on peut définir* $U_h(t,s)$ *pour tous* t,s *avec* $|t|,|s| \le T_1$.

Théorème 2.1.1 ([*8*]) *Si le symbole de $A_h(t)$ vérifie les conditions (i) et (ii). Alors pour $|t|, |s| \leq T_1, U_h(t,s)$ définit dans le théorème* (1.5.1) *est une application de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$. Si on suppose, de plus, que $A_h(t)$ vérifie l'hypothèse (iii), alors $U_h(t,s)$ est un isomorphisme linéaire topologique de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Par la proposition (**??**) et une inégalité de Sobolev, $U_h(t,s)f \in S(\mathbb{R}^n)$.
Lorsque $f \in S(\mathbb{R}^n)$, au moins pour $|t-s| \leq \delta(T_1)$. De plus l'application $U_h(t,s) : S \to S$ est uniformément continue. Pour t, s quelconques avec $|t|$, $|s| \leq T_{1,}$on suppose $t > s$ et :

$$s = t_0 < t_1 < ... < t_l = t$$

de sorte que $|t_j - t_{j-1}| \leq \delta(T_1)$, $j = 1, ..., l$.
D'après le théorème (1.5.1),on a :

$$U_h(t,s) = U_h(t, t_{l-1})U_h(t_{l-1}, t_{l-2})...U_h(t_1, s).$$

Donc $U_h(t,s)$ est continu de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.
Si $A_h(t)$ vérifie l'hypothèse $(iii), U_h(t,s)$ est un opérateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Et comme $U_h^{-1}(t,s) = U_h(t,s)$ est continu de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$, alors, $U_h(t,s)$ est un isomorphisme topologique linéaire de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$. □

Corollaire 2.1.1 ([*8*]) *Sous les condition (i) et (ii) et supposons que $A_h(t)$ soit indépendant de t c'est-à-dire*

$$A_h(t) = A_h.$$

Alors, A_h défini sur $S(\mathbb{R}^n)$,est un opérateur essentiellement auto-adjoint .

De la proposition (**??**), découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.2 ([*8*]) *$F_h(t;s) = U_h(t,s)b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)U_h(s,t)$ est un application continue de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.*
$F_h(t;s)$ vérifie l'équation de Heisenberg (2.0.1). *Ici*(2.0.1) *s'interprète au sens des opérateurs linéaires continues de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$, $A_h(t)$ étant auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La solution de* (2.0.1) *est unique. Donc on cherche une solution : $s \to F_h(t;s)$ pour* (2.0.1) *à valeur d'opérateurs h pseudo-différentielles.*

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.4 ([*8*]) *Avec les notations précédentes, le problème :*

$$\begin{cases} ih\frac{\partial f_h(x,p,t)}{\partial t} = [Z\ (x,p,t), f_h(x,p;t)] \\ f_h(x,p,0) = b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}p) \end{cases} \tag{2.1.19}$$

où $Z(x,p;t)$ *une forme quadratique vérifier :*

$$Z(x,p,t) = \sum_{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha!\beta!} x^\alpha p^\beta \partial_x^\alpha \partial_p^\beta a(x(t,s),p(t,s);t).$$

Le système (2.1.19) *admet une seule solution*

$$f_h(x,p,t) = b(y(t,x,p), q(t,s,p)).$$

Preuve. Soient $\Phi_s$le flot Hamiltonien définit par (1.3.1) et $f_h(x,p,t)$ solution de (2.1.19) avec $b = 0$. Alors :

$$\frac{d}{dt} f_h(\Phi_0^t, t) = \left\{ -Z(\Phi_0^t, t), f_h(\Phi_0^t, t) + \frac{\partial f_h(\Phi_0^t, t}{\partial t} \right\}. \tag{2.1.20}$$

Utilisant la condition initiale, il vient :

$$f_h(\Phi_0^t, t) = 0.$$

Comme $\Phi_0^t \circ \Phi_t^0(x,p) = (x,p)$, cela entraine que

$$f_h(x,p,t) = 0, \forall (x,p) \in R^{2n}.t \in \left]-T, T\right[.$$

Donc l'unicité de la solution de (2.1.19) est démontrée.

Par l'inégalité :

$$\frac{\partial b}{\partial s} \circ \Phi_s^t = -[\frac{\partial}{\partial r}(b \circ \Phi_s^t \circ \Phi_s^r)_{r=s}] \circ \Phi_s^t = -\left\{a(s), b \circ \Phi_s^t\right\} \circ \Phi_t^s \circ \Phi_s^t = -\left\{a(s), b \circ \Phi_s^t\right\}$$

On a $f_h(x,p,t) = b \circ \Phi_t^0$; Alors

$$\frac{\partial f_h(x,p,t)}{\partial t} = \left\{Z(x,p,t), b \circ \Phi_t^0\right\}.$$

La condition (1.3.2) entraine $f_h(x,p,0) = b(x,p)$ cela fini la démonstration de lemme (2.1.4).

D'après le corollaire(2.1.2) et comme $i\ [F_h(t,s), A_h(t)]$ admet pour symbole $\{Z(t), f_h(t)\}$ lorsque $F_h(t,s)$ a pour symbole $f_h(t,s)$. D'après le lemme (2.1.4) ; l'opérateur pseudo-différentielle associe au symbole $b(y(t,x,p), q(t,x,p))$ vérifie évidement (2.0.1).
Donc l'unicité du problème (2.0.1) entraine par :

$$F_h(s,t) = b^w(y(t,x,D), q(t,x,D)).$$

□

2.2 Développement semi-classique de solution de l'équation de Heisenberg

Théorème 2.2.1 ([8]) *D'après les définitions* (1.1.1) , (1.1.2) *et les lemmes* (1.3.1), (1.4.1), *il existe* $\delta(T_1) > 0$ *tel que pour tout* $b(h) \in S^m(h)$; $F_h(t,s)$ *admet un développement au sens suivant : pour tout* $N \geq 0$ *:*

$$F_h(s;t) = \sum_{j=0}^{N} h^j B_j(t,s;h) + h^{N+1} R_{N+1}(t,s;h); \ \textit{pour} \ |t-s| \leq \delta(T_1)$$

où $B_j(t,s;h)$ *est un opérateur pseudo-différentiel de symbole* $b^j(.,.,t,s;h) \in S^{m-j}(h)$, $j = 1,...,n$ *et* $R_{N+1}(t,s;h)$ *application continument de* $S(\mathbb{R}^n)$ *dans* $S(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout $k \geq 0$, F_h *se prolonge en un opérateur continu de* $B^k(h)$ *dans* $B^{k-N-m}(h)$ *uniformément par rapport à* $h \in \left]0,1\right]$, $|t-s| \leq \delta(T_1)$ *,en particulier ,*$b^0(t,s;h)$ *est donnée par :*

$$b^0(x,p;t,s;h) = b(\Phi_s^t(x,p);h)$$

où Φ_s^t *définit par* (1.3.1).

Remarque 2.2.1 ([8]) *Dans le cas où* $a(t)$ *est indépendant de* t, *soit* Φ_s^t *la solution du problème* (1.3.1) *avec* $s = 0$, *alors le théorème* (2.2.1) *donne :*

$$F_h(s,t) = B_0(t,h) + hB_1(t,h) + h^2 B_2(t,h) + ...;$$

où $U_h(t)$ *est le groupe unitaire associe à* $A_h = a^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)$ *et* $B_0(t,h)$*est un opérateur pseudo-différentiel du symbole* $b(\Phi_0^t, h)$.

Avant d'aborder la démonstration du théorème (2.2.1) nous aurons besoin des lemmes suivants :

Soit $\delta(T_1)$ donné dans le lemme (1.4.1), $|t-s| \leq \delta(T_1)$, définissions l'opérateur $B_k(r)$ par :

$$B_k(r)f = U_h(s,r)op_h^w b(\Phi_0^t,h)U_h(s,r)f,\ \ f \in S(\mathbb{R}^n) \tag{2.2.1}$$

Lemme 2.2.1 ([8]) *Pour tout $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $B_k(r)f$ est continument différentiable dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et on a :*

$$\frac{d}{dr}B_k(r)f = U_h(s,r)\left\{\frac{i}{h}\left[A_h(r), op_h^w b(\Phi_r^t,h)\right] op_h^w \left\{a(r), b(\Phi_r^t,h)\right\}\right\} U_h(r,s)f \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2 *Posons :*

$$hR_1(h,r,t) = h^{-1}\left[A_h(r), op_h^w b(\Phi_r^t,h)\right] - op_h^w\left\{a(.,.,r), b(\Phi_r^t,h)\right\} \tag{2.2.3}$$

Alors $R_1(h,r,t)$ admet comme symbole $b_1(r,t;h) \in S^{m-2}(h)$

Preuve. D'après le lemme (1.4.1) ,on a pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} U_h(t,s)b^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)U_h(s,t)f - op_h^w b(\Phi_s^t,h)f &= \int_s^t U_h(s,r)\left\{\frac{i}{h}\left[A_h(r), op_h^w b(\Phi_r^t,h)\right] - op_h^w\left\{a(.,.,r), b\right.\right. \\ &= h^2\int_s^t U_h(s,r)op_h^w b_1(r,t,t)U_h(r,s)fdr. \end{aligned}$$

Par le lemme (2.2.1), $b_1(r,t,h) \in S^{m-2}(h)$, donc l'opérateur $U_h(s,r)op_h^w b_1(r,t;h)U_h(r,s)$ est uniformément continu de $B^{k+m-1}(h)$ dans $B^k(h)$ pour tout entier k.

Appliquant (2.2.5) successivement N fois, on obtient :

$$\begin{aligned} U_h(t,s)b^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)U_h(s,t) &= op_h^w b(\Phi_r^t,h)f + h^2\int_s^t (op_h^w b_1(r,t,h)\circ\Phi_s^t)fdr_1 + .. \\ &\quad ... + h^{2N}\int_s^t\int_s^r ... \int_s^{r_{N-1}} (op_h^w b_N(t,r_{1,r_2...,r_N},h)\circ\Phi_s^{r_N})fdr_1...dr_N \\ &\quad + h^{2N}\int_s^t\int_s^{R_1} .... \int_s^{r_N} U_h(s,r_{N+1})(op_h^w b_{N+1}(t,r_1,r_2,....,r_{N+1};h))U_h(r_N \end{aligned}$$

D'ou ,il suffit de prendre :

$$b^0(.,.,t,s;h) = b(\Phi_s^t,h),$$

et

$$b^j(.,.s,t,;h) = \int_s^t\int_s^r ... \int_s^{r_{j-1}} b_j(t,r_1,r_2,....,r_{j-1};h)\circ\Phi_s^t dr_1dr_2...dr_j.$$

Par une récurrence, il est facile à montrer $b^j(.,.,t,s;h) \in S^{m-2}(h)$. et pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$,$|t-s| \leq \delta(T_1)$ on a : $\|hR_{N+1}(t,s;)f\|_{k+N-m,h} \leq C\,\|f\|_{k,h}$;pour $h \in]0,1]$; $\forall k$

Donc R_{N+1}se prolonge en une famille d'opérateur uniformément continus de $B^k(h)$ dans $B^{k+2N-m}(h)$.

□

Théorème 2.2.2 ([8]) *D'après l'hypothèse du théorème* (2.2.1), *pour* $a(t)$. *Posons*

$$F_h(s,t) = U_h(s,t)b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)U_h(t,s);$$

où b *vérifie l'estimation* (1.1.2) ,$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$;*Alors il existe* $\delta > 0$ *tel que l'on ait :*

$$F_h(s;t) = \sum_{j=0}^{N} h^j b_j^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D, t, s) + h^{N+1}R_{N+1}(t,s;h);\, pour\ |t-s| \leq \delta(T_1) \qquad (2.2.6)$$

où b_j*est symbole vérifiant :* $\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\alpha b^j(x,p,t,s)\right| \leq C_0(1+|x|+|p|)^{(m-j-|\alpha|+|\beta|)_+}, |t-s| \leq \delta(T_1)$.

Pour $j = 1, ...n$ *et pour* $N \geq 0$ *assez grand* .$R_{N+1}(t,s;h)$ *se prolonge en un opérateur uniformément borné dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En particulier on a :

$$b_0(t,s) = b \circ \Phi_s^t.$$

Chapitre 3

Limite classique de fonctions de corrélation quantique

Dans cette partie, nous allons montrer que les résultats obtenus dans([8]) se déduisent facilement du théorème du type Egorov. On se borne ici au cas où $a(t)$ est indépendant de t. Pour des Hamiltoniens dépendant de t, on a le résultat analogue à ceux de([8]).

Soit $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Posons

$$W_h(x_0, p_0) = \exp(ih^{-1l2}(x \cdot p_0 - x_0 \cdot D)).$$

Alors d'après ([4]), $W_h(x_0, p_0)$ est un opérateur pseudo-différentiel et on a :

$$W_h(x_0, p_0) * b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)W_h(x_0, p_0)f = b^w(h^{1l2}x + x_0, h^{1l2}D + p_0)f; f \in S(R^n) \quad (3.0.1)$$

où b est un symbole de poids tempéré quelconque.

3.1 Asymptotique semi-classique autour des trajectoires classiques

Soit a un symbole vérifiant la condition suivante :

i) Si $L(.,.)$ est une forme réelle linéaire sur $\mathbb{R}^{2n}$, $a(x,p) = \exp i(L(x,p))$; alors $\exp i\,(L(x,D))$ défini par la théorie spectrale est un opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl $a(x,p)$.

Alors, la solution de l'équation de Schrödinger (0.0.2) existe. De plus l'application

$$U_h(t) : f \to f_h(t)$$

se prolonge en un groupe unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Théorème 3.1.1 ([8]) *Soit a vérifiant les conditions précédentes, soit b un symbole de poids borné. On note $B(h)$ l'extension continue dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)$. Notons $(x(t), p(t))$ la solution du problème* (1.3.1) *et* (1.3.2)*. Alors,*

$$s - \lim_{h \to 0_+} W_h(x_0, p_0) * U_h(t) * b^w(h^{1l2}x, h^{1l2}D)U_h(t)W_h(x_0, p_0)f = b(x(t), p(t)) \qquad (3.1.1)$$

uniformément par rapport à t sur tout compact de $]-T, T[$

Pour la démonstration de ce théorème nous aurons besoin, de plus, des résultats ci-dessous

Lemme 3.1.1 ([8]) *Soit C un symbole de poids tempéré vérifiant :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta C(x, p, h)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |x| + |p|)^N \qquad (3.1.2)$$

Pour tout $N \geq 0$.alors pour $f \in S(\mathbb{R}^n)$,on a :

$$\left\|C^w(h^{1l2}s, h^{1l2}D)f - C(0,0)f\right\|_{k,h} \leq C_k h^{1l2} \sum_{|\alpha|+|\beta=1|} \left\|(h^{1l2}x)^\alpha (h^{1l2}D)^\beta f\right\|_{k\ +N,h} \qquad (3.1.3)$$

avec C_k indépendant de $h \in]0, h_0]$.

Corollaire 3.1.1 ([8]) *Soit $B(h)$ vérifiant les conditions du proposition* (**??**)*. Alors :*

$$s - \lim_{h \to 0_+} B(h) = b(0,0), \ \ dans\ L^2(\mathbb{R}^n) \qquad (3.1.4)$$

Proposition 3.1.1 ([8]) *Définissons l'opérateur $B_h(t, s)$ comme suit :*

$$B_h(t, s) = W_h(x_0, p_0) * U_1^h(t) * U_h(t - s)U_1^h(s)W_h(x_0, p_0) \exp\left(ih^{-1}\int_s^t a_0(\theta)d\theta\right) \qquad (3.1.5)$$

et désignons par $A_h(t)$ l'opérateur pseudo-différentiel ,de symbole $a(x+x(t), p+p(t), t)$ et par $U_h(t, s)$ le propagateur de l'équation de Schrödinger associé $A_h(t)$ alors pour , $f \in S(\mathbb{R}^n)$,on a :

$$\lim_{h \to 0} B_h(t, 0)f = U_h(t, o)f; dans\ L^2(\mathbb{R}^n) \qquad (3.1.6)$$

la limite est uniforme en t dans tout compact de $]-T, T[$.

Preuve. [Du théorème (3.1.1)] Par la proposition (3.1.1), on peut réécrire le premier membre de (3.1.2) :

$$W_h(x_0,p_0)*U_h(t)*B(h)U_h(t)W_h(x_0,p_0) = B_h(t,0)*b^w(h^{1l2}x+x(t),h^{1l2}D+p(t))B_h(t,0) \tag{3.1.7}$$

avec $B_h(t,s)$ défini par (3.1.1). $b^w(h^{1l2}x+x(t),h^{1l2}D+p(t))$ converge fortement vers $b(x(t),p(t))$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la convergence est uniforme par rapport à t, $|t|\leq T_1$. □

Théorème 3.1.2 ([8]) *Soit b un symbole de poids tempéré. Alors pour $f\in S(\mathbb{R}^n)$,on a :*

$$s-\lim_{h\to 0_+} W_h(x_0,p_0)*U_h(t)*b^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)U_h(t)W_h(x_0,p_0)f = b(x(t),p(t))f;\, dans\ L^2(\mathbb{R}^n) \tag{3.1.8}$$

La limite est uniforme par rapport à t,s dans tout compact de $]-T,T[$.

Preuve. On note par Φ^t la solution de (1.3.1) avec données initiales (x,p). Alors la démonstration du théorème (3.1.1) donne :

$$\left\|U_h(t)*b^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)U_h(t)f-(b\circ\Phi^t)^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)f\right\|\leq C_1h,\, f\in S(\mathbb{R}^n) \tag{3.1.9}$$

D'après le lemme (3.1.1), on a :

$$\left\|W_h(x_0,p_0)*(b\circ\Phi^t)^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)W_h(x_0,p_0)f-b\circ\Phi^t(x_{0,}p_0)f\right\|\leq C_2h^{1l2}, \tag{3.1.10}$$

où C_1 et C_2 sont dépendants de f, mais indépendant de t dans un compact de $\mathbb{R}$. De (3.1.10) et (3.1.9), il vient

$$\left\|W_h(x_0,p_0)*U_h(t)*b^w(h^{1l2}x,h^{1l2}D)U_h(t)W_h(x_0,p_0)f-b(x(t),p(t))\right\|\leq Ch^{1l2};\, f\in S(\mathbb{R}^n)$$

□

Corollaire 3.1.2 ([8]) *Sous les conditions du théorème (3.1.2), on a pour tout $f\in B^1$,*

$$\lim_{h\to 0_+} W_h(x_0,p_0)*U_h(t)*h^{1l2}x_jU_h(t)W_h(x_0,p_0)f = x_j(t)f \tag{3.1.11}$$

$$\lim_{h\to 0_+} W_h(x_0,p_0)*U_h(t)*h^{1l2}D_jU_h(t)W_h(x_0,p_0)f = p_j(t)f\ ,j=0,1,...n, \tag{3.1.12}$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté un rapide et partiel survol de l'étude de l'approximation semi-classique de solution d'équation de Heisenberg d'opérateur de terme h-pseudo-différentielle.

Comme application de ces résultats, nous obtenons la limite classique des fonctions de corrélation mécaniques de quantum pour une classe des choses observables non-délimitées.

Bibliographie

[1] D. Fujiwara.*A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equations.* J.Anal. Math. $35, 41 - 96(1979)$.

[2] G. A. Hagedorn. *Semi-classical quantum mechanics, I, the h-> 0 limit for coherent states.*Commun. Math. Phys. $71, 77 - 93(1980)$.

[3] L. Hormander. *The Weyl calculus of pseudo-differential operators.* Commun. Pure Appl. Math. $32, 359 - 443(1979)$.

[4] H. Kitada, H Kumano-go. *A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equations.* Osaka J. Math. $18, 291 - 360(1981)$

[5] A. Mrtinez. *In introduction to semi-classical anlysis.* Springer 2002

[6] D. Robert. *Autour de* Γ *approximation semi-classique.* Notas de Curso, n° 21, Recife, 1983.

[7] X. P. Wang. *Asymptotic behaviour of spectral means for pseudo-differential operators.* Approximation Theory and its Applications $1(2), 119 - 136$ and $1(3), 1 - 32(1985)$.

[8] X. P. Wang. *Etude semi-classique d'observables quantiques.* Ann. Fac. Si. (Toulouse), ser. 5,Vol. 7(1985)

[9] X. P. Wang. *Time-delay operators in semi-classical limit.* Expose Seminaire d'Analyse Fonctionelle, Universite Rennes 1985.