L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences éxactes et d'Informatiques

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Présenté par

Salhi Salima

Intitulé

Etude d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites non régulières

Soutenue le :

26 Juin 2012

Devant le jury :

Président :	M^{elle}Limam Khira
Examinateur :	M^{me}bouziani Fatima
Encadreur :	M.Ahmed Medeghri
Co-Encadreur :	Hammou Houari

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est l'étude de l'équation différentielle abstraite du second ordre de la forme

$$u"(t) + Au(t) = f(t), \ t \in [0,1], \tag{1}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans E (un espace de Banach), et $f \in \mathbb{C}([0,1], E)$, avec les différents types de conditions aux limites régulières

$$\begin{cases} u(0) = f_1 \\ u(1) = f_2, \end{cases} \tag{2}$$

(cas traité par Labbas [4]), ou non régulières

$$\begin{cases} u(0) = f_1 \\ u(1) + \alpha u'(0) = f_2, \end{cases} \tag{3}$$

(cas traité par Labbas-Maingot [5].Où f_1 et $f_2 \in E$.

L'objectif est l'étude de l'existence, l'unicité et la régularité de la solution obtenue, la méthode utilisée est basée sur une construction de la solution sous forme d'une intégrale de Dunford comme dans Da Prato Grisvard [2]et dans Labbas-Terreni [6].

Dans ce travail, nous considérons le cas elliptique qui est exprimé par l'hypothèse (4)

$$\rho(A) \supset \Pi \text{ et } \exists M > 0, \forall z \in \Pi : \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{M}{1 + |z|}, \tag{4}$$

Où

$$\Pi = (\mathbb{C} \backslash P) \cup \mathbb{R}_+$$

Tel que P est le domaine parabolique définie par

$$P = \left\{ x + iy : x < \pi, |y| < 2\pi\sqrt{\pi^2 - x} \right\}.$$

La deuxième condition au limite de (3) qui dépend deα, $(\alpha \neq 0)$ rend difficile l'étude de notre problème et crée une singularité.

La solution de (1) et (3) s'écrit sous la forme suivante

$$u(t) = u_R(t) + u_S(t),$$

avec une partie régulière $u_R(.)$ et une partie singulière $u_S(.)$.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle des notions de base, quelques définitions sur les opérateurs linéaires, l'intégrale de Dunford, les espaces d'interpolation et les espaces de Hölder et quelques lemmes principaux.

Au deuxième chapitre, on étudie l'équation différentielle abstraite du second ordre avec conditions aux limites régulières de type elliptique de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u\text{''}(t)+Au(t)=f(t), t\in[0,1] \\ u\,(0)=f_1 \\ u(1)=f_2, \end{array}\right. \tag{5}$$

ce problème a été étudié par Labbas [4].On suppose que A vérifie l'hypothèse suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \exists c_0\in\mathbb{R}, M>0, \text{ tels que } \rho(A)\supset[-c_0^2,+\infty[\\ \\ \|(\lambda-A)^{-1}\|_{L(E)}\leq\dfrac{M}{1+|\lambda|},\ \forall\lambda\in[-c_0^2,+\infty[\,, \end{array}\right. \tag{6}$$

où $\rho(A)$ est le domaine résolvant de A .

Grâce à l'hypothèse (2.2) et en utilisant le calcul de Dunford, on donne une représentation de la solution du problème (2.1) quand f est une fonction hölderienne et des résultats de régularité de la solution stricte.

Dans le troisième chapitre, on étudie le problème (3.1) suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u''(t)+Au(t)=f(t);\ t\in\,]0,1[\\ u(0)=f_1 \\ u(1)+\alpha u'(0)=f_2, \end{array}\right. \tag{7}$$

où $f\in\mathbb{C}\left([0,1],E\right)$, f_1 et $f_2\in E$ et α est un paramètre réel positif.

On suppose que A vérifie l'hypothèse suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,(A)\supset\Pi \\ \exists M>0:\forall z\in\Pi:\left\|(A-zI)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\dfrac{M}{1+|z|}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Grâce à l'hypothèse (3.2) et en faisant des calculs simples, on obtient une représentation de la solution du problème (3.1) quand f est une fonction holderienne et on trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une solution unique du problème (3.1).

Dans la même section, on étudie le problème spectral suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u''(t)+Au(t)-\mu I=f(t)\ ;\ t\in\,]0,1[\\ u(0)=f_1 \\ u(1)+\tilde{\alpha}u'(0)=f_2, \end{array}\right. \tag{9}$$

où $\tilde{\alpha}$ est un nombre complexe fixé et μ est un nombre complexe tel que

$$\operatorname{Re}\mu>0.$$

Pour ce problème, on suppose que A vérifie l'hypothèse

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,(A)\supset\Sigma_0=\left\{z\in\mathbb{C}^*\diagup\,|\arg z|\leq\delta_0\right\},\ \delta_0\in\,]0,\pi[\\ \\ \exists M>0,\ \forall z\in\Sigma_0:\left\|(A-zI)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\dfrac{M}{|z|}. \end{array}\right. \tag{10}$$

Avec $f \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1], E\right)$ et $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on obtient

$$u_\mu(t) = u_{\mu,R}(t) + u_{\mu,S}(t)$$

Cette représentation est une solution du problème spectral (3.5) et vérifie les mêmes propriétés de la solution du problème (3.1).

Le dernier chapitre est illustré par des exemples concrets où on applique les résultats des chapitres précédents.

Chapitre 1

Notions et rappels

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les opérateurs linéaires, les espaces d'interpolation et quelques lemmes principaux.

Soit X un espace de Banach complexe,

1. A est un **opérateur linéaire** sur X si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$de X dans X.
2. A est dit **fermé** si
$$\sigma(A) = \{(\varphi, A\varphi) \diagup \varphi \in D(A)\}$$
est un fermé de $(X.X)$,σ : graphe de A.
3. A étant un opérateur linéaire fermé sur X, on définie$\rho(A)$ **l'ensemble résolvante** de A par
$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \diagup (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\right\},$$

et le **spectre** de A est
$$\sigma(A) = \mathbb{C} \diagup \rho(A).$$

1.1 Intégrale de Dunford :

Soit T un opérateur linéaire fermé et $\sigma(T)$ son spectre, notons $F(T)$ l'espace des fonctions à variable complexe qui sont analytique dans un ensemble fermé contenant $\sigma(T)$.

On définit l'intégrale de Dunford par
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(T - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

où $f \in F(T)$ et γ une courbe entourant $\sigma(T)$.

1.2 Les espaces d'interpolation :

Définition 1.1 ***(Espace intermédiaire)***

Soit $\{X_0, X_1\}$ un couple d'interpolation, X un espace de Banach tels que

$$X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1,$$

s'appelle espace intermédiaire entre X_0 et X_1.

Définition 1.2 ***(Espace d'interpolation)***

Un espace intermédiaire X entre X_0 et X_1 est dit espace d'interpolation si pour tout

$$K : X_0 + X_1 \to X_0 + X_1,$$

l'implication suivante a lieu

$$\begin{cases} K \in \mathcal{L}(X_0) \\ K \in \mathcal{L}(X_1), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow K \in \mathcal{L}(X).$$

1.3 Les espaces de Hölder :

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et $\alpha \in]0, 1[$ un nombre fixé, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3 *Les espaces de Hölder $\mathbb{C}^\alpha(I, E)$ sont des fonctions continues sur I définie par*

$$\mathbb{C}^\alpha(I, E) = \left\{ f \in B(I, E) : [f]_{\mathbb{C}^\alpha(I,E)} = \sup \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{(x-y)^\alpha} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{C}^\alpha(I,E)} = \|f\|_{B(I,E)} + [f]_{\mathbb{C}^\alpha(I,E)},$$

avec :
$B(I, E)$: l'espace des fonctions bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{B(I,E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E.$$

On considère les espaces :

$$\mathbb{C}([0,1], E) = \{f : [0,1] \to E,\ f \text{ continue}\} = \mathbb{C}(E).$$

$$\mathbb{C}^\theta([0,1], E) = \{f \in \mathbb{C}(E),\ f \text{ holdérienne d'exposant } \theta\}.$$

muni des normes usuelles suivantes

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbb{C}^\theta(E)} &= \max \|f(t)\| + \max_{t,s} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{|t-s|^\theta} \\ \|f\|_{\mathbb{C}(E)} &= \max \|f(t)\|_E. \end{aligned}$$

1.4 Inégalité de Hölder :

Soit
$$\begin{cases} f \in L^p \\ g \in L^p, \end{cases}$$
avec
$$\begin{cases} 1 \leq p \leq \infty \\ 1 \leq q \leq \infty, \end{cases}$$
alors
$$fg \in L^1,$$
et
$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q.}$$
* $D_A(\theta, +\infty) = \left\{x \in E,\ \sup_{t>0} \left\|t^\theta A (A-t)^{-1} X\right\|_E \leq K\right\}.$

1.5 Les relations

$$\begin{aligned} \sinh\sqrt{-z}(a+b) &= \sinh\sqrt{-z}a \cosh\sqrt{-z}b + \cosh\sqrt{-z}a \sinh\sqrt{-z}b \\ \cosh\sqrt{-z}(a+b) &= \cosh\sqrt{-z}a \cosh\sqrt{-z}b + \sinh\sqrt{-z}a \sinh\sqrt{-z}b \end{aligned}$$

Lemme 1.1 *Pour chaque* $t \in \left]0,1\right[$, *on a*
$$\left|\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}\right| \leq K(\gamma)\, e^{-|\lambda|^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)t}$$

Preuve. On a
$$\begin{aligned} \left|\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}\right| &= \frac{\left|e^{\sqrt{-\lambda}(1-t)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(1-t)}\right|}{\left|e^{\sqrt{-\lambda}}\left(1-e^{-2\sqrt{-\lambda}}\right)\right|} \\ &\leq \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}}\left(e^{\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}(1-t)} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}(1-t)}\right)}{\left|\left(1-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}}\right)\right|} \\ &\leq \frac{\left(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}t} + e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}(2-t)}\right)}{\left|\left(1-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}}\right)\right|} \\ &\leq \frac{2}{\left|\left(1-e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}}\right)\right|} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}t} \\ &\leq \frac{2}{\left(1-e^{-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\sqrt{\varepsilon_0}}\right)} e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda}t} \\ &\leq K(\delta)\, e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)|\lambda|^{\frac{1}{2}}t} \end{aligned}$$

■

Lemme 1.2 *Pour chaque* $t \in \left]0,1\right[$,

$$\left\| \int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t-s) \left(\lambda I - A\right)^{-1} f(s) ds \right\|_E \leq \frac{K}{\left|\lambda\right|^2} \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t-s) \left(\lambda I - A\right)^{-1} f(s) ds \right\| &\leq \left\| \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-\lambda}(1-t) \sinh \sqrt{-\lambda} s}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda}} \left(\lambda I - A\right)^{-1} f(s) ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_t^1 \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} t \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda}} \left(\lambda I - A\right)^{-1} f(s) ds \right\| \\
&\leq 2MK\left(\delta\right) \int_0^t \frac{e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{\left|\lambda\right|^{\frac{3}{2}}} ds \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)} \\
&\quad + 2MK\left(\delta\right) \int_t^1 \frac{e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(s-t)}}{\left|\lambda\right|^{\frac{3}{2}}} ds \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)} \\
&\leq 2MK\left(\delta\right) \int_0^t \frac{e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}\sigma}}{\left|\lambda\right|^{\frac{3}{2}}} d\sigma \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)} \\
&\quad + 2MK\left(\delta\right) \int_0^{1-t} \frac{e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}\sigma}}{\left|\lambda\right|^{\frac{3}{2}}} d\sigma \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)} \\
&\leq \left(\frac{K'}{\left|\lambda\right|^2} + \frac{K"}{\left|\lambda\right|^2} \right) \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)} = \frac{K}{\left|\lambda\right|^2} \left\| f \right\|_{\mathbb{C}(E)}
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.3 *On a :*

1. $\lambda \in \overline{\mathbb{C} \diagup \Pi_0} \Longrightarrow \delta_\alpha\left(\lambda\right) \neq 0$.
2. $\exists \theta_\alpha \in \left]0.\pi\right[$ tel que $\delta_\alpha\left(\lambda\right) \neq 0$ dans le secteur : $S\left(\theta_\alpha, \varepsilon_0\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \varepsilon_0 \text{ et } \left|\arg(\lambda)\right| \geq \theta_\alpha\right\}$. ▌

preuve

1. Soit $z = x + iy$ avec $x > 0$ et on suppose que $\alpha z + \sinh z = 0$, alors on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha z + \sinh z = 0 \\ x > 0, \end{array} \right.$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x+iy) + \sinh(x+iy) = 0 \\ x > 0, \end{array} \right.$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \sinh x \cos y = 0 \\ \alpha y + \cos x \sinh y = 0 \\ x > 0. \end{array} \right.$$

Nous voyons que pour

$$(x, y) \in \left]0, +\infty\right[+ i\left[-\pi, \pi\right],$$

$$\alpha z + \sinh z \neq 0,$$

donc

$$z \notin \left]0. + \infty\right[+ i\left[-\pi, \pi\right]. \tag{1.1}$$

Maintenant si

$$\lambda \in \overline{\mathbb{C} \diagup \Pi_0},$$

alors

$$\sqrt{-\lambda} \in \left]0, +\infty\right[+ i\left[-\pi, \pi\right],$$

et en utilisant (1.1), on obtient

$$\delta_\alpha \neq 0.$$

2. On fixe

$$\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

et soit

$$z = x + iy,$$

avec

$$|\arg(z)| \leq \theta_0,$$

on a pour x suffisamment grand

$$|\alpha z + \sinh z| \geq |\sinh z| - \alpha |z| \geq \sinh x - \alpha \frac{x}{\cos \theta_0},$$

et

$$\exists c_\alpha = c(\alpha, \theta_0),$$

tel que

$$\operatorname{Re} z = x > c_\alpha \Longrightarrow |\alpha z + \sinh z| > 0.$$

Maintenant dans le secteur compact

$$\{z : \operatorname{Re} z = x \leq c_\alpha, |\arg(z)| \leq \theta_0\},$$

la fonction analytique

$$z \mapsto \alpha z + \sinh z,$$

a un nombre fini des zéros, de plus, ces points n'appartiennent pas à l'axe réel strictement positive, c'est à dire

$$\exists \theta'_\alpha \in \left]0.\theta_0\right[,$$

tel que pour toute $z \in \mathbb{C}^*$ avec

$$|\arg z| \leq \theta'_\alpha,$$

$$\alpha z + \sinh z \neq 0.$$

En posant

$$\theta_\alpha = \pi - 2\theta'_\alpha,$$

alors pour chaque

$$\lambda \in S\left(\theta_\alpha, \varepsilon_0\right),$$

on a :

$$\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}^*$$

avec

$$\left|\arg \sqrt{-\lambda}\right| \leq \theta'_\alpha,$$

$$\alpha\sqrt{-\lambda} + \sinh \sqrt{-\lambda} \neq 0.$$

Chapitre 2

Etude de l'équation différentielle abstraite du second ordre avec conditions aux limites régulières

2.1 Position du problème et hypothèses :

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine D_A non nècessairment dense dans E considère alors le problème abstrait suivant

$$\left\{\begin{array}{l} u''(t) + Au(t) = f(t)\ ;\ t \in [0,1] \\ u(0) = f_1 \\ u(1) = f_2, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où f_1 et $f_2 \in E$, $f \in C\left([0.1], E\right)$.

On suppose que A vérifie l'hypothèse (2.2) suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \exists c_0 \in \mathbb{R},\ M > 0, \text{ tels que } \rho(A) \supset [-c_0^2, +\infty[\\ \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{1+\lambda},\ \forall \lambda \in [-c_0^2, +\infty[\,. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Si $f_1 = f_2 = 0$, alors le problème (2.1) est un cas particulier de la théorie des sommes d'opérateurs dévloppées dans Da-Prato-Grisvard.

On se propose dans ce chapitre d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale pour la solution stricte de(2.1) lorsque f est assez régulière et $f_1$etf_2 vérifient certaines conditions de compatibilité naturelles liées à l'èquation.

La méthode utilisé ici pour l'étude du problème (2.1) est basée essentielement sur une construction explicite de la solution sous la forme d'intégrale de Dunford comme dans Da-Prato-Grisvard et dans Labbas-Terrani et sur la caractérisation des espaces d'interpolation $D_A(\theta, +\infty)$ faite par Grisvard.

2.2 Construction de la solution

Considérons le problème

$$\begin{cases} v"(t) + \lambda v(t) = f(t) \\ v(0) = f_1 \\ v(1) = f_2, \end{cases}$$

où $f_1, f_2 \in E$, $f \in C(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \diagdown \mathbb{R}_+$.
La solution générale de ce problème homogène est

$$v(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}.$$

La racine carrée de $-\lambda$ est la détermination analytique définie sur $\mathbb{C}$ privé de l'axe réel négatif.

La solution de ce système est alors

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e^{-\sqrt{-\lambda}s} \, f(s)ds + K_1 \\ c_2(t) = \frac{-1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e^{\sqrt{-\lambda}s} \, f(s)ds + K_2. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e^{\sqrt{-\lambda}(t-s)} f(s)ds - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e^{-\sqrt{-\lambda}(t-s)} f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + K_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t \sinh \sqrt{-\lambda}(t-s) f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + K_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites donnent

$$v(0) = K_1 + K_2 = f_1,$$

et

$$v(1) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + K_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = f_2,$$

on a

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = f_1 \\ K_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + K_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = f_2 - \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s)ds, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} K_1 = \frac{-1}{2\sinh\sqrt{-\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s)ds - f_2 + e^{-\sqrt{-\lambda}} f_1 \right] \\ K_2 = \frac{1}{2\sinh\sqrt{-\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s)ds - f_2 + e^{\sqrt{-\lambda}} f_1 \right]. \end{cases}$$

D'où la solution du problème :

$$
\begin{aligned}
v(t) = & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t \sinh \sqrt{-\lambda}(t-s) f(s) ds \\
& - \frac{1}{2\sinh\sqrt{-\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds - f_2 + e^{-\sqrt{-\lambda}} f_1 \right] e^{\sqrt{-\lambda} t} \\
& + \frac{1}{2\sinh\sqrt{-\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds - f_2 + e^{\sqrt{-\lambda}} f_1 \right] e^{-\sqrt{-\lambda} t} \\
& = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t \sinh \sqrt{-\lambda}(t-s) f(s) ds \\
& - \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} \int_0^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds \\
& + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_2 + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_1 \\
& = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t \sinh \sqrt{-\lambda}(t-s) f(s) ds \\
& - \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} \left[\int_0^t \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds + \int_t^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds \right] \\
& + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_2 + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_1 \\
& = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} \\
& \times \int_0^t \left[\sinh\sqrt{-\lambda} \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s) - \sinh\sqrt{-\lambda} t \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s) \right] f(s) ds \\
& - \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} \int_t^1 \sinh \sqrt{-\lambda}(1-s) f(s) ds \\
& + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_2 + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_1 \\
& = - \int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} s \sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} f(s) ds \\
& - \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} f(s) ds \\
& + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_1 + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_2
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
v_{\sqrt{-\lambda}}(t) \quad = & \quad \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_1 + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda} t}{\sinh\sqrt{-\lambda}} f_2 \\
& + \int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t-s) f(s) ds
\end{aligned}
$$

avec :

$$K_{\sqrt{-\lambda}}(t.s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)\sinh\sqrt{-\lambda}s}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} & ;\ 0 \le s \le t \\ \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}} & ;\ t \le s \le 1 \end{cases}$$

soit γ une courbe simple joignant $+\infty\exp(-i\delta)$ à $-\infty\exp(i\delta)$; ($\delta \in]0, \delta_0[$) tel que $\gamma \subset \rho(A) - \mathbb{R}_+$.

La solution de (2.1) est donnée formellement par

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda I - A)^{-1}\ v_{\sqrt{-\lambda}}(t)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_1 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_2 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t.s)(\lambda I - A)^{-1} f(s) ds d\lambda. \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes sont absolument convergentes (voir chapitre 01).
Pour X dans E, on pose

$$S(t,A)f_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_1 d\lambda.$$

1. $\exists\ K$ ne dépendant que de γ tel que $\forall t > 0 : \|S(.,A)f_1\|_E \le K(\delta)\|f_1\|_E$.
2. l'application $S(.,A)f_1 \in \mathbb{C}([0,1], E)$ si et seulement si $f_1 \in \overline{D_A}$.
3. $f_1 \in D_A(\theta, +\infty)$ si et seulement si $S(.,A)f_1 \in \mathbb{C}^{2\theta}([0,1], E)$.
4. $f_1 \in D_A(\theta, +\infty)$ si et seulement si $S(.,A)f_1 \in B(D_A(\theta, +\infty))$.

Remarque 2.1 *on obtient les mêmes résultats pour les termes en f_2.*

2.3 Conditions nécessaires

On dira que $u \in \mathbb{C}([0,1], E)$ est solution **stricte** du problème (2.1) si

$$u \in \mathbb{C}^2(E) \cap \mathbb{C}(D_A),$$

et u vérifie les conditions du problème (2.1).

Lemme 2.1

Soit u la solution stricte du problème (2.1) alors :
$f \in \mathbb{C}([0,1], E)$ et $f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in \overline{D(A)}$.
preuve
Il suffit d'écrire que $u"(0)$ et $u"(1)$ existent. En effet on a :

$$u"(0) = f(0) - Af_1 = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(2t) - 2u(t) + u(0)}{t^2} \in \overline{D(A)},$$

et

$$u"(1) = f(1) - Af_2 = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(2t-1) - 2u(t) + u(1)}{(t-1)^2} \in \overline{D(A)},\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

On va étudier les propriétés de l'éventuelle solution $u(t)$ donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_1 d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_2 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t-s)(\lambda I - A)^{-1} f(s) ds d\lambda. \end{aligned}$$

2.4 Régularité de la solution

Theorème 2.1 *On suppose que* $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1], E)$, $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ *et* $f_1, f_2 \in D(A)$ *alors :*

1. $u(t) \in D(A)$.
2. $Au(.) \in \mathbb{C}([0,1], E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1$ et $f(1) - Af_2 \in \overline{D(A)}$.
3. $Au(.) \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1], E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta, +\infty)$.
4. $Au(.) - f(.) = u''(.) \in B(D_A(\eta, +\infty)) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta, +\infty)$.

2.4.1 Solution stricte

Proposition 2.1 *On suppose* $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1], E)$, $f_1, f_2 \in D_A$, $Af_1 - f(0)$ *et* $f(1) - Af_2 \in \overline{D_A}$, *alors la représentation donnée par*

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_1 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(\lambda I - A)^{-1} f_2 d\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda}}(t.s)(\lambda I - A)^{-1} f(s) ds d\lambda \end{aligned}$$

est solution stricte du problème (2.1).

Chapitre 3

Etude de l'équation différentielle abstraite du second ordre avec conditions aux limites non régulières

3.1 Position du problème et hypothèses

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine D_A non nécessairment dense dans E, on considère alors le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t) & ; t \in \left]0,1\right[\\ u(0) = f_1 \\ u(1) + \alpha u'(0) = f_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f \in \mathbb{C}\left([0.1], E\right)$, f_1 et $f_2 \in E$ et α est un paramètre réel positif, on suppose que A vérifie l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \rho\left(A\right) \supset \Pi \\ \exists M > 0 : \forall z \in \Pi : \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{1 + |z|}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$, $c > 0$, $\varphi_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors l'hypothèse (3.2) implique l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \rho\left(A\right) \supset \Lambda_0 = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \varphi_0\} \cup \{z : |z| \leq \varepsilon_0\} \\ \\ \forall z \in \Lambda_0 : \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \dfrac{c}{(1 + |z|)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{cases} \rho\left(A\right) \supset \Pi_0 = (\mathbb{C} \backslash P) \cup \Lambda_0, \text{ et } \exists M > 0 : \\ \\ \forall z \in \Pi_0 : \left\| (A - zI)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{1 + |z|}, \end{cases}$$

où P est un domaine parabolique qui est définie par

$$P = \left\{ x + iy : x < \pi, \ \ |y| < 2\pi\sqrt{\pi^2 - x} \right\}.$$

On pose

$$\delta_\alpha(\lambda) = \alpha\sqrt{-\lambda} + \sinh\sqrt{-\lambda},$$

où $\sqrt{-\lambda}$ est la détermination analytique définie par

$$\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda} > 0.$$

On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution obtenue.

3.2 Construction de la solution

Considérons le problème

$$\begin{cases} w''(t) + \lambda w(t) = f(t) & ; t \in]0,1[\\ w(0) = f_1 \\ w(1) + \alpha w'(0) = f_2, \end{cases}$$

où f_1 et $f_2 \in E$, $f \in \mathbb{C}([0,1], E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$.
La solution de

$$w(t) + \lambda w(t) = 0,$$

est

$$w(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}.$$

La variation de la constante à

$$w(t) = c_1(t)e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2(t)e^{-\sqrt{-\lambda}t},$$

donne

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2'(t)e^{-\sqrt{-\lambda}t} = 0 \\ \\ \sqrt{-\lambda}c_1'(t)e^{\sqrt{-\lambda}t} - \sqrt{-\lambda}c_2'(t)e^{-\sqrt{-\lambda}t} = f(t), \end{cases}$$

$$\Delta_{c_1'} = \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{-\lambda}t} & 0 \\ -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}t} & -f(t) \end{vmatrix},$$

et

$$\Delta_{c_2'} = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{-\lambda}t} & 0 \\ \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}t} & -f(t) \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{1}{-2\sqrt{-\lambda}}\Delta_{c_1'} = \dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}}e^{-\sqrt{-\lambda}t}f(t) \\ \\ c_2'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\Delta_{c_2'} = \dfrac{-1}{2\sqrt{-\lambda}}e^{\sqrt{-\lambda}t}f(t), \end{cases}$$

la solution de ce système est alors

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^t e^{-\sqrt{-\lambda}s}f(s)ds + K_1 \\ \\ c_2(t) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^t e^{\sqrt{-\lambda}s}f(s)ds + K_2, \end{cases}$$

d'où

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds+K_1e^{\sqrt{-\lambda}t}+K_2e^{-\sqrt{-\lambda}t},$$

les conditions aux limites donnent

$$w(0)=K_1+K_2=f_1,$$

et

$$w'(t)=\int_0^t \cosh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds+\sqrt{-\lambda}K_1e^{\sqrt{-\lambda}t}-\sqrt{-\lambda}K_2e^{-\sqrt{-\lambda}t},$$

donc

$$w'(0)=\sqrt{-\lambda}K_1-\sqrt{-\lambda}K_2,$$

et

$$w(1)=\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds+K_1e^{\sqrt{-\lambda}}+K_2e^{-\sqrt{-\lambda}},$$

on a

$$\begin{aligned}\alpha w'(0)+w(1) &= \alpha\left(\sqrt{-\lambda}K_1-\sqrt{-\lambda}K_2\right)+\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds+K_1e^{\sqrt{-\lambda}}+K_2e^{-\sqrt{-\lambda}}\\ &= f_2\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} K_1+K_2=f_1 \\ \left(\alpha\sqrt{-\lambda}+e^{\sqrt{-\lambda}}\right)K_1+\left(-\alpha\sqrt{-\lambda}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)K_2+\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds \\ =f_2. \end{cases}$$

On pose

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -f_1 \\ -\alpha\sqrt{-\lambda}+e^{-\sqrt{-\lambda}} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds-f_2, \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -f_1 \\ \alpha\sqrt{-\lambda}+e^{\sqrt{-\lambda}} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds-f_2, \end{vmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} K_1=\dfrac{-1}{2\left(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}\right)}\Delta_1 \\ K_2=\dfrac{1}{2\left(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}\right)}\Delta_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{-1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds - f_2 + \left(-\alpha\sqrt{-\lambda}+e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)f_1\right] \\ K_2 = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\displaystyle\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds - f_2 + \left(\alpha\sqrt{-\lambda}+e^{\sqrt{-\lambda}}\right)f_1\right]. \end{cases}$$

D'où la solution du problème est

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_0^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1 \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})} \\
&\quad \times\left[\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds + \int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds\right] \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1 \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2 \\
&= \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})} \\
&\quad \times\int_0^t\left[\frac{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}{\sinh\sqrt{-\lambda}t}\sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)-\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)\right]f(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1 \\
&\quad +\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds + \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\\
&\times\int_0^t [\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(\sinh\sqrt{-\lambda}t\cosh\sqrt{-\lambda}s-\cosh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}s)}{\sinh\sqrt{-\lambda}t}\\
&-\left[\sinh\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}s-\cosh\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}s\right]]f(s)ds\\
&-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2,\\
&= \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds\\
&-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds\\
&+\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\\
&\times\int_0^t\left[\frac{-\sinh\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}s}{\sinh\sqrt{-\lambda}t}+\cosh\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}s\right]f(s)ds\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2\\
&= \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds\\
&-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds\\
&+\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\\
&\times\int_0^t\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}s(-\sinh\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t+\cosh\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}t)}{\sinh\sqrt{-\lambda}t}f(s)ds\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1\\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds \\
&-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_t^1 \sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)f(s)ds \\
&-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}s\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)f(s)ds \\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1 \\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\left[\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)+\alpha\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t\right]f_1 \\
&+\frac{1}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t)\ f_2 \\
&+\frac{\alpha}{\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda}}\int_0^t \sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)f(s)ds \\
&+\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t,s)f(s)ds,
\end{aligned}$$

avec

$$K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}(1-t)\sinh\sqrt{-\lambda}s}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}; 0\le s\le t \\[2ex] \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}t\sinh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\sqrt{-\lambda}(\alpha\sqrt{-\lambda}+\sinh\sqrt{-\lambda})}; t\le s\le 1. \end{cases}$$

La solution du problème (3.1) est donnée formellement par

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t)(A-\lambda I)^{-1}\ \ f_2 d\lambda \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(1-t)(A-\lambda I)^{-1}\ f_1 d\lambda \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t,s)(A-\lambda I)^{-1}\ f(s)ds\right)d\lambda \\
&+\frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma S_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t)(A-\lambda I)^{-1}\ f_1 d\lambda \\
&+\frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1}\ f(s)ds\right)d\lambda \\
&= \bar{u}_R(t)+\overline{\overline{u}}_R(t)+\bar{u}_S(t)+\overline{\overline{u}}_S(t),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \overline{\overline{u}}_R(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \left(\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t,s)(A-\lambda I)^{-1} f(s)ds\right) d\lambda \\ \overline{\overline{u}}_S(t) = \dfrac{\alpha}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \left(\int_0^t \dfrac{\sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1} f(s)ds\right) d\lambda, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \bar{u}_R(t) = R(t)f_2 + R(1-t)f_1 \\ \bar{u}_S(t) = S(t)f_1, \end{cases}$$

où $\gamma = \gamma_{\alpha,\varepsilon_0}$ est la courbe sectorielle de frontière du $S(\theta_\alpha, \varepsilon_0) \cup P\backslash\Lambda_0$ orientée négativement,

et pour $t \in]0,1[$et $\lambda \in \gamma$

$$\begin{aligned} g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t) &= \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\delta_\alpha(\lambda)}, \\ S_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t) &= \frac{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}t}{\delta_\alpha(\lambda)}. \end{aligned}$$

On remarque qu'il existe deux constantes $c = c(\gamma)$et $K_0 = K_0(\gamma)$ tels que :
$\forall\lambda \in \gamma$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\max\left(\left|\frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\delta_\alpha(\lambda)}\right|, \left|\frac{\cosh\sqrt{-\lambda}t}{\delta_\alpha(\lambda)}\right|\right) \leq K_0 e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(1-t)}. \tag{3.4}$$

On pose

$$R(t)f_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t)(A-\lambda I)^{-1} f_2 d\lambda,$$

et

$$R(1-t)f_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(1-t)(A-\lambda I)^{-1} f_1 d\lambda,$$

et

$$S(t)f_1 = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma S_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t)(A-\lambda I)^{-1} f_1 d\lambda.$$

Toutes ces intégrales sont absolument convergentes grâce aux (3.4), mais $S(1)f_1$ n'est pas convergente puisque

$$\left|S_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(1)\right| = 0\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\right).$$

3.3 La régularité de la solution

Proposition 3.1 *On suppose que l'opérateur A vérifie (3.2), et soit $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, alors*

1. $\forall f_2 \in E$, $t \longmapsto R(t)f_2 \in \mathbb{C}^\infty([0,1]; D(A))$.
2. $t \longmapsto R(t)f_2 \in \mathbb{C}([0,1]; E) \Longleftrightarrow f_2 \in \overline{D(A)}$.

3. $t \longmapsto R(t)f_2 \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow f_2 \in D_A(\eta,+\infty)$,si $f_2 \in D(A)$, alors.
4. $\forall\, t \in [0,1]\,,\, R(t)f_2 \in D(A)$.
5. $t \longmapsto R(t)f_2 \in \mathbb{C}^{2}([0,1];E) \cap \mathbb{C}([0,1];D(A)) \Longleftrightarrow Af_2 \in \overline{D(A)}$.
   $t \longmapsto AR(t)f_2 \in \mathbb{C}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_2 \in \overline{D(A)}$.
6. $t \longmapsto R"(t)f_2 \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_2 \in D_A(\eta,+\infty)$.

$t \longmapsto AR(t)f_2 \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_2 \in D_A(\eta,+\infty)$.

preuve

On va poser pour $f_2 \in E$ et $t \in [0,1]$

$$v(t)f_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\sinh\sqrt{-\lambda}}(A-\lambda I)^{-1}\ \ f_2 d\lambda.$$

Puis, en utilisant les mêmes techniques que dans [1] et [8], nous montrons que la proposition précédente est vrai pour

$$t \longmapsto v(t)f_2.$$

Maintenant, en écrivant

$$R(t)f_2 = v(t)f_2 + w(t)f_2,$$

avec

$$w(t)f_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-\alpha\sqrt{-\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}t}{\delta_\alpha(\lambda)\sinh\sqrt{-\lambda}}(A-\lambda I)^{-1}\ \ f_2 d\lambda,$$

et l'inégalité (3.4), on obtient

$$t \longmapsto w(t)f_2 \in \mathbb{C}^{\infty}([0,1];D(A)).$$

6. D'après 3) on a

$$R"(t)f_2 = -R(t)Af_2 \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_2 \in D_A(\eta,+\infty).$$

Remarque 3.1 *on obtient les mêmes résultats pour $R(1-t)f_1$ quand on remplace t par $(1-t)$.*

Proposition 3.2 *On suppose que l'opérateur A vérifie l'hypothèse (3.3) et soit $\eta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ alors :*

1. *$\forall f_1 \in E$, $t \longmapsto s(t)f_1 \in \mathbb{C}^{\infty}([0,1[;D(A))$ quand $f_1 \in D(A)$, alors :*
2. *$s(t)f_1 \in \mathbb{C}^{1}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_1 \in \overline{D(A)}$.*
3. *$s(t)f_1 \in \mathbb{C}^{1+2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow Af_1 \in D(\eta,+\infty)$.*

preuve

1. Il résulte de (3.4).
2. C'est une conséquence de la proposition (3.1) puisque

$$s'(t)f_1 = -\alpha R(t)Af_1.$$

3. Nous utilisons la proposition (3.1) et le faire que

$$s(t)f_1 \in \mathbb{C}^{1+2\eta}\left([0,1]\,;E\right) \Longleftrightarrow s'(t)f_1 \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1]\,;E\right).$$

On pose

$$\begin{cases} u_R = \bar{u}_R + \bar{\bar{u}}_R \\ \\ u_S = \bar{u}_S + \bar{\bar{u}}_S. \end{cases}$$

Proposition 3.3 *On suppose que A vérifie (3.3), f_1 et $f_2 \in D(A)$ .Soit $f \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1]\,;E\right)$, $\eta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, alors :*

1. $u_R \in \mathbb{C}^2\left(]0,1[\,;E\right) \cap \mathbb{C}\left(]0,1[\,;D(A)\right)$.
2. $u_R"(t),\ Au_R \in \mathbb{C}\left([0,1]\,;E\right) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in \overline{D(A).}$
3. $u_R"(t),\ Au_R \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1]\,;E\right) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta,+\infty)$.

preuve
On pose

$$\begin{aligned} v_R(t) \;\; &= \;\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},0}(t)(A-\lambda I)^{-1}\;\; f_2 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_{\sqrt{-\lambda},0}(1-t)(A-\lambda I)^{-1}\; f_1 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda},0}(t,s)(A-\lambda I)^{-1}\; f(s)ds\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Puis, par les mêmes techniques que dans [4], v_R satisfait à toutes les hypothèses de la proposition (3.3) et

$$\begin{cases} v_R''(t) + \lambda v_R(t) = f(t) & ;t \in \left]0,1\right[\\ v_R(0) = f_1 \\ v_R(1) = f_2. \end{cases}$$

On écrit

$$u_R = v_R + w_R,$$

avec

$$\begin{aligned} w_R(t) \;\; &= \;\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t) - g_{\sqrt{-\lambda},0}(t))(A-\lambda I)^{-1}\;\; f_2 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(1-t) - g_{\sqrt{-\lambda},0}(1-t))(A-\lambda I)^{-1}\; f_1 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_0^1 (K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t.s) - K_{\sqrt{-\lambda},0}(t.s))(A-\lambda I)^{-1}\; f(s)ds\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Pour tout $\varphi,\ t,\ s \in [0,1]$ nous avons

$$\begin{cases} \left|g_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(\varphi) - g_{\sqrt{-\lambda},0}(\varphi)\right| = 0\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\, e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}} e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}(1-\varphi)}}\right) \\ \\ \left|K_{\sqrt{-\lambda},\alpha}(t.s) - K_{\sqrt{-\lambda},0}(t.s)\right| = 0\left(|\lambda|^{\frac{1}{2}}\, e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\right)\left|K_{\sqrt{-\lambda},0}(t.s)\right|. \end{cases}$$

Ainsi $\forall K \geq 1$, nous obtenons

$$w_R \in \mathbb{C}^{2+2\eta}\left([0,1];E\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1];D\left(A^K\right)\right).$$

Pour le comportement de

$$u_S = \bar{u}_S + \overline{\overline{u}}_S,$$

il suffit de préciser celui de $\overline{\overline{u}}_S$.

Proposition 3.4 *On suppose que A vérifie (3.3), f_1 et $f_2 \in D(A)$. soit $f \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1];E\right)$, $\eta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, alors :*

1. $\overline{\overline{u}}_S(t) \in \mathbb{C}^2\left([0,1[\,;E\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1[\,;D(A)\right)$.
2. $\overline{\overline{u}}_S(t) \in \mathbb{C}^1\left([0,1];E\right) \Longleftrightarrow f(0) \in \overline{D(A)}$.
3. $\overline{\overline{u}}_S(t) \in \mathbb{C}^{1+2\eta}\left([0,1];E\right) \Longleftrightarrow f(0) \in D_A\left(\eta;+\infty\right)$.

preuve

1. Il est évident.
2. on peut écrire que, pour chaque $t \in [0,1[$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{u}}'_S(t) &= \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}(t-s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1}\ (f(s)-f(0))\,ds\right)d\lambda \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}(t-s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1}\ f(0)ds\right)d\lambda \\
&= I_t + J_t,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\left|\int_0^t e^{-cs|\lambda|^{\frac{1}{2}}} s^{2\eta} ds\right| \leq \frac{K}{|\lambda|^{\frac{1}{2}+\eta}},$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\|I_t\|_E &\leq K\int_\gamma\left(\int_0^1 e^{-cs|\lambda|^{\frac{1}{2}}}\,\|f(s)-f(0)\|_E\,ds\right)\frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}d|\lambda| \\
&\leq K\,\|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)}\int_\gamma \frac{1}{|\lambda|^{1+\eta}}d|\lambda|,
\end{aligned}$$

et

$$t \longmapsto I_t \in \mathbb{C}\left([0,1];E\right),$$

on peut écrit

$$J_t = \alpha R(t) f(0),$$

et la proposition (3.1) rendements

$$t \longmapsto J_t \in \mathbb{C}\left([0,1];E\right) \Longleftrightarrow f(0) \in \overline{D(A)}.$$

3. On suppose que :

$$f(0) \in D_A(\eta; +\infty),$$

d'après 3) de la proposition (3.1), on obtient

$$J_t \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1]; E),$$

et en utilisant l'égalité :

$$\overline{\overline{u}}'_S(t) = I_t + J_t,$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_t &= \frac{-\alpha}{2\pi i}\int_t^1 \int_\gamma \int_0^t \frac{\lambda \sinh\sqrt{-\lambda}\,(\xi - s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1}\ (f(s)-f(0))\,dsd\lambda d\xi \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi i}\int_\gamma \int_t^1 \frac{\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}(1-s)}{\delta_\alpha(\lambda)}(A-\lambda I)^{-1}(f(s)-f(0))dsd\lambda \\ &= a + b, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|a\| &\leq k\left(\int_t^1 \int_\gamma \int\limits_0^t e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(1-\xi+s)} s^{2\eta} dsd|\lambda|\, d\xi\right) \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K\int_t^1 \left(\int_\gamma e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(1-\xi)}\left(\int_0^t e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}S} s^{2\eta} ds\right) d|\lambda|\right) d\xi\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K\int_t^1 \left(\int_\gamma e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}(1-\xi)} \frac{1}{|\lambda|^{\eta+\frac{1}{2}}} d|\lambda|\right) d\xi\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K\int_t^1 (1-\xi)^{2\eta-1}\, d\xi\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K(1-t)^{2\eta}\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|b\| &\leq K\int_t^1 \left(\int_\gamma |\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-c|\lambda|^{\frac{1}{2}}s)} \frac{1}{|\lambda|} d|\lambda|\right) s^{2\eta} ds\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K\int_t^1 \left(\int_\gamma |\lambda|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2}|\lambda|^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{|\lambda|} d|\lambda|\right) s^{2\eta} ds\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K\left(1 - t^{2\eta+1}\right) \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \\ &\leq K(1-t)^{2\eta}\, \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)}, \end{aligned}$$

et pour le sens inverse on a :
si

$$\overline{\overline{u}}_S(t) \in \mathbb{C}^{1+2\eta}([0,1]; E),$$

alors

$$\overline{\overline{u}}'_S(t) \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1]; E),$$

donc

$$J_t = \alpha R(t)f(0) \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E)$$

et d'aprés 3)de la proposition (3.1),

$$f(0) \in D_A(\eta;+\infty).$$

Theorème 3.1 *On suppose que* A *vérifie* (3.3), *soit* f_1 *et* $f_2 \in D(A)$, *et* $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E)$, $\eta \in \left]0\frac{1}{2}\right[$, *alors*

$$u = u_R + u_S$$

est une solution unique du problème (3.1) *et vérifie :*

1. $u_R \in \mathbb{C}^2(]0,1[;E) \cap \mathbb{C}(]0,1[;D(A))$.
2. $u_R \in \mathbb{C}^2([0,1];E) \cap \mathbb{C}([0,1];D(A)) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in \overline{D(A).}$
3. u_R", $Au_R \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta,+\infty)$.
4. $u_S \in \mathbb{C}^2([0,1[;E) \cap \mathbb{C}([0,1[;D(A))$.
5. $u_S \in \mathbb{C}^1([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1 \in \overline{D(A).}$
6. $u_S \in \mathbb{C}^{1+2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1 \in D_A(\eta,+\infty)$.

3.4 Problème spectral

Maintenant on considère le problème spectral

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) - \mu I = f(t) & ;t \in]0,1[\\ u(0) = f_1 \\ u(1) + \tilde{\alpha}u'(0) = f_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $f \in \mathbb{C}([0,1],E)$, f_1 et $f_2 \in E$,
avec

$$\mu \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

et $\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}$ et on suppose que A vérifie l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \rho(A) \supset \Sigma_0 = \{z \in \mathbb{C}^* \diagup |\arg z| \leq \delta_0\},\ \delta_0 \in]0,\pi[\\ \\ \exists M > 0,\ \forall z \in \Sigma_0 : \left\|(A - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{|z|}^{\cdot} \end{cases} \tag{3.6}$$

Soit

$$A_\mu = A - \mu I,$$

alors (3.6) implique l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \rho(A_\mu) \supset S_\mu = -\mu + \Sigma_0 \\ \exists M > 0,\ \forall z \in S_\mu : \left\|(A_\mu - zI)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{|z+\mu|}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Il existe

$$x_0 = x(\tilde{\alpha},\delta_0) > 0$$

tel que :

$$\lambda \in \overline{\mathbb{C} - S_{x_0}} \Longrightarrow \delta_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = \tilde{\alpha}\sqrt{-\lambda} + \sinh\sqrt{-\lambda} \neq 0.$$

On conclue que

$$u_\mu = u_{\mu,R} + u_{\mu,S},$$

est une solution du problème (3.5) , où :

$$\begin{aligned} u_{\mu,R}(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} g_{\sqrt{-\lambda},\tilde{\alpha}}(t)(A_\mu - \lambda I)^{-1}\ f_2 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} g_{\sqrt{-\lambda},\tilde{\alpha}}(1-t)(A_\mu - \lambda I)^{-1}\ f_1 d\lambda \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left(\int_0^1 K_{\sqrt{-\lambda},\tilde{\alpha}}(t.s)(A_\mu - \lambda I)^{-1}\ f(s)ds\right)d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{\mu,S}(t) &= \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi i}\int_{\gamma_0} S_{\sqrt{-\lambda},\tilde{\alpha}}(t)(A_\mu - \lambda I)^{-1}\ f_1 d\lambda \\ &+\frac{\tilde{\alpha}}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left(\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-\lambda}(t-s)}{\delta_{\tilde{\alpha}}(\lambda)}(A_\mu - \lambda I)^{-1}\ f(s)ds\right)d\lambda. \end{aligned}$$

Alors on a des résultats analogues au théorème précédent.

Proposition 3.5 *On suppose que A vérifie l'hypothèse (3.6) , f_1 et $f_2 \in D(A)$, $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E)$ et $\eta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, alors :*

$$u_\mu = u_{\mu,R} + u_{\mu,S}$$

est une solution du problème (3.5) , et vérifie :

1. $u_{\mu,R} \in \mathbb{C}^2(]0,1[;E) \cap \mathbb{C}(]0,1[;D(A))$.
2. $u_{\mu,R} \in \mathbb{C}^2([0,1];E) \cap \mathbb{C}([0,1];D(A)) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in \overline{D(A)}$.
3. $u"_{\mu,R},\ Au_{\mu,R} \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta,+\infty)$.
4. $u_{\mu,S} \in \mathbb{C}^2([0,1[;E) \cap \mathbb{C}([0,1[;D(A))$.
5. $u_{\mu,S} \in \mathbb{C}^1([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1 \in \overline{D(A)}$.
6. $u_{\mu,S} \in \mathbb{C}^{1+2\eta}([0,1];E) \Longleftrightarrow f(0) - Af_1 \in D_A(\eta,+\infty)$.

On considère le cas

$$\delta_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,$$

on fixe $\delta_1 : \delta_1 \in]0,\delta_0[$ et

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x_1 \text{ et } |\arg z| \leq \delta_1\}.$$

Theorème 3.2 *On suppose que A vérifie l'hypothèse (3.6) , f_1 et $f_2 \in D(A)$, $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];E)$, $\eta \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$, et $X = \mathbb{C}([0,1];E)$, alors :*

1. Si $f(0) - Af_1,\ f(1) - Af_2 \in D_A(\eta, +\infty)$, il existe $K = K(\gamma_0) > 0$ tel que pour toute

$$\begin{aligned}\mu \ \in \ \Omega : |\mu| \, \|u_{\mu,R}\|_X + \|u"_{\mu,R}\|_X + \|Au_{\mu,R}\|_X \leq \frac{K}{|\mu|^\eta} \\ \times \left(\|f(1) - Af_2\|_{D_A(\eta,+\infty)} + \|f(0) - Af_1\|_{D_A(\eta,+\infty)} + \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \right).\end{aligned}$$

2. Si $f(0) - Af_1 \in D_A(\eta, +\infty)$, il existe $K = K(\gamma_0) > 0$ tel que pour toute $\mu \in \Omega$:

$$\begin{aligned}|\mu|^{\frac{1}{2}} \|u_{\mu,S}\|_X + \left\|u'_{\mu,S}\right\|_X + \|u_{\mu,S}\|_{B\left(D_A\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right)} \ \leq \ & \frac{K}{|\mu|^\eta} \\ & \left(\|f(0) - Af_1\|_{D_A(\eta,+\infty)} + \|f\|_{\mathbb{C}^{2\eta}(E)} \right),\end{aligned}$$

où

$$B\left(D_A\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) = \left\{ u \in X : \sup \|u(t)\|_{D_A\left(\frac{1}{2},+\infty\right)} < \infty \right\}.$$

Chapitre 4

Exemples concrets

Exemple 4.1 *dans* $Q = (0,1) \times (a,b)$, *on considère le problème de type elliptique suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \Delta u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = f_1(x) \qquad ; x \in (a,b) \\ u(1,x) = f_2(x) \qquad ; x \in (a,b) \\ u(t,a) = \ u(t,b) = 0 \quad ; \ t \in (0,1), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $E = \mathbb{C}([a,b])$ *et* $f \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{C}[a,b])$, f_1 *et* $f_2 \in \mathbb{C}([a,b])$

$$\begin{cases} D(A) = \{g \in \mathbb{C}^2([a,b]) : g(a) = g(b) = 0\} \\ (Ag)(x) = g^{"}(x), \end{cases}$$

on a

$$\overline{D(A)} = \mathbb{C}_0([a,b]) = \{g \in \mathbb{C}([a,b]) : g(a) = g(b) = 0\} \neq E,$$

et

$$D_A(\eta, +\infty) = \mathbb{C}^{2\eta}([a,b]) \cap \mathbb{C}_0([a,b]).$$

Pour appliquer les résultats du chapitre 02 on doit vérifie l'hypothèse (2.2).

Vérification de l'hypothèse (2.2)

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = f \qquad ; \ f \in E \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

On pose :

$$x' = \frac{x-b}{a-b},$$

et

$$v(x') = u(x),$$

donc on a :

$$\frac{du}{dx}(x) = \frac{dv}{dx'}(x)\frac{dx'}{dx} = \frac{1}{a-b}v'(x'),$$

et

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = \frac{1}{(b-a)^2}v"(x),$$

alors le problème précédent est équivalent au

$$\begin{cases} v''(x) + zv(x) = F(x) & ; x \in (0.1) \\ v(0) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

$$F(x) = (b-a)^2 f\left((a-b)x + b\right),$$

et

$$z = -\lambda (b-a)^2.$$

Donc pour $\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda} > 0$ la solution de ce problème est de la forme

$$v(x) = \int_0^1 K(x,s)F(s)ds,$$

où

$$K(x,s) = -\begin{cases} \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))(1-x)\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))s}{(\sqrt{\lambda}\,(b-a))\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))} & ;\ 0 \leq s \leq x \\ \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))x\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))(1-s)}{(\sqrt{\lambda}\,(b-a))\sinh(\sqrt{\lambda}\,(b-a))} & ;\ x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Et donc pour $\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda} > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_E &= \left\|(A-\lambda I)^{-1} f\right\|_E = \|v\|_E = \left\|(A+\lambda I)^{-1} F\right\|_E \\ &\leq \|F\|_E \int_0^1 |K(x,s)|\, ds \leq \frac{K}{|\lambda|}\|f\|_E. \end{aligned}$$

Maintenant, on suppose que

$$\begin{cases} f \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1], \mathbb{C}\left([a.b]\right)\right) \\ f_i \in \mathbb{C}^2\left([a,b]\right) \text{ et } f_i(a) = f_i(b) = 0, \text{ pour } i = 1,2. \end{cases}$$

Alors d'aprés le théorème (2.1).on a :

Theorème 4.1 *On considère $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, f_1, $f_2 \in \mathbb{C}^2([a,b])$ et $f_i(a) = f_i(b)$, pour $i = 1,2$, $f \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1], \mathbb{C}([a,b])\right)$, alors la représentation u est une solution unique du problème (4.1) et vérifie :*

1. $u \in \mathbb{C}^2\left(]0,1[\,; \mathbb{C}([a,b])\right) \cap \mathbb{C}\left(]0,1[\,; \mathbb{C}^2([a,b])\right).$
2. $u \in \mathbb{C}^2\left([0,1]; \mathbb{C}([a,b])\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1]; \mathbb{C}^2([a,b])\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(0,a) - f_1"(a) \\ = f(0,b) - f_1"(b) = 0 \\ f(1,a) - f_2"(a) \\ = f(1,b) - f_2"(b) = 0. \end{cases}$

3. $u"$, $Au \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1];\mathbb{C}([a,b])) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(0,.) - f_1" \in \mathbb{C}^{2\eta}([a,b]), \\ f(1,.) - f_2" \in \mathbb{C}^{2\eta}([a,b]) \\ f(0,a) - f_1"(a) \\ = f(0,b) - f_1"(b) = 0 \\ f(1,a) - f_2"(a) \\ = f(1,b) - f_2"(b) = 0. \end{cases}$

Exemple 4.2 *dans $Q = (0.1) \times (a.b)$, on considère le problème de type elliptique suivant*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = f_1(x) \quad ; \ x \in (a,b) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) + u(1,x) = f_2(x) \quad ; \ x \in (a,b) \\ u(t,a) = \ u(t,b) = 0 \quad ; \ t \in (0,1), \end{cases} \tag{4.2}$$

et le problème spectral est

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = f_1(x) \quad ; \ x \in (a,b) \\ \tilde{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) + u(1,x) = f_2(x) \quad ; \ x \in (a,b) \\ u(t,a) = \ u(t,b) = 0 \quad ; \ t \in (0,1). \end{cases} \tag{4.3}$$

Où $E = \mathbb{C}([a,b])$,

$$\begin{cases} f \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{C}[a,b]), \ f_1 \text{et } f_2 \in \mathbb{C}([a,b]) \\ \alpha > 0, \ \tilde{\alpha} \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(\mu) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(A) = \{g \in \mathbb{C}^2([a,b]) : g(a) = g(b) = 0\} \\ (Ag)(x) = cg^{"}(x), \end{cases}$$

on a

$$\overline{D(A)} = \mathbb{C}_0([a,b]) = \{g \in \mathbb{C}([a,b]) : g(a) = g(b) = 0\} \neq E,$$

et

$$D_A(\eta, +\infty) = \mathbb{C}^{2\eta}([a,b]) \cap \mathbb{C}_0([a,b]).$$

On a A vérifie l'hypothèse (3.2), on fait les mêmes calculs comme vérification de l'hypothèse (2.2).

Maintenant, on suppose que

$$\begin{cases} f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1], \mathbb{C}([a,b])) \\ f_i \in \mathbb{C}^2([a,b]) \text{ et } f_i(a) = f_i(b) = 0, \text{,pour } i = 1,2. \end{cases}$$

Alors d'aprés le théorème (3.1).on a :

Theorème 4.2 *On considère $\eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, f_1 et $f_2 \in \mathbb{C}^2([a,b])$ et $f_i(a) = f_i(b)$, pour $i = 1,2$, $f \in \mathbb{C}^{2\eta}([0,1], \mathbb{C}([a,b]))$, alors la représentation*

$$u = u_R + u_S$$

est une solution unique du problème (4.2) et vérifie :

1. $u_R \in \mathbb{C}^2\left(]0,1[\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1[\,;\mathbb{C}^2\left([a,b]\right)\right).$
2. $u_R \in \mathbb{C}^2\left([0,1]\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1]\,;\mathbb{C}^2\left([a,b]\right)\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\left(0,a\right) - cf_1\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(0,b\right) - cf_1\text{"}\left(b\right) = 0 \\ f\left(1,a\right) - cf_2\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(1,b\right) - cf_2\text{"}\left(b\right) = 0. \end{cases}$
3. $u_R\text{"}, Au_R \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([0,1]\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\left(0,.\right) - cf_1\text{"}, \\ f\left(1,.\right) - cf_2\text{"} \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([a,b]\right) \\ f\left(0,a\right) - cf_1\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(0,b\right) - cf_1\text{"}\left(b\right) = 0 \\ f\left(1,a\right) - cf_2\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(1,b\right) - cf_2\text{"}\left(b\right) = 0. \end{cases}$
4. $u_S \in \mathbb{C}^2\left([0,1[\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \cap \mathbb{C}\left([0,1[\,;\mathbb{C}^2\left([a,b]\right)\right).$
5. $u_S \in \mathbb{C}^1\left([0,1]\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \Longleftrightarrow f\left(0,a\right) - cf_1\text{"}\left(a\right) = f\left(0,b\right) - cf_1\text{"}\left(b\right) = 0.$
6. $u_S \in \mathbb{C}^{1+2\eta}\left([0,1]\,;\mathbb{C}\left([a,b]\right)\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} f\left(0,.\right) - cf_1\text{"}, \\ f\left(1,.\right) - cf_2\text{"} \in \mathbb{C}^{2\eta}\left([a,b]\right) \\ f\left(0,a\right) - cf_1\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(0,b\right) - cf_1\text{"}\left(b\right) = 0 \\ f\left(1,a\right) - cf_2\text{"}\left(a\right) \\ = f\left(1,b\right) - cf_2\text{"}\left(b\right) = 0. \end{cases}$

Bibliographie

[1] **A. El Haial, R. Labbas**, on the elliptic and solvability of an abstract second order differential equation, Election. J. Diff Eqs. 57(2001). 1-18.

[2] **P. Grisvard**, Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures e Appl. 45(1966) 143-290.

[3] **H Hammou**, Etude d'une equation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec conditions aux limites non régulières, Magister. 2008. Mostaganem

[4] **R. Labbas**, Equation elliptique abstraite du second ordre et equation parabolique pour le problème de Cauchy abstrait, C. R. A cad. Sci. Paris t.305 Série I, 1987. PP. 785-788.

[5] **R. Labbas**, **Stéphane Maingot**, Singularity in boundary value problems for an abstract second order differential equation of elliptic type. Appl. Math. Comput. 148(2004) 645-663.

[6] **R. Labbas, B.Terreni**, Somme d'opérateurs linéaires de type parabolique, 2^{eme}partie Boll. un. Ma. Italiana, (7), 2-B : 141-162(1988).

[7] **Lions-peetre**, Esp d'interpolation.

[8] **E. Sinestrari**, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continous functions, J.Math. Anal. Appl. 66(1985) 16-66.