REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID BEN BADIS
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté par :

NEKI SAYEH

pour obtenir le

DIPLOME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse Harmonique et EDP

Sujet

LA METHODE BKW ET APPLICATION

Soutenu le 26 Juin 2012

devant le Jury composé de :

Encadreur : Mme. Amina BENBERNOU — Université de Mostaganem
Président : Melle. BENSIKADDOUR — Université de Mostaganem
Examinateur : Mme. SAIDANI — Université de Mostaganem

Promotion : 2011-2012.

Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute ces années de recherche, c'est grâce à Lui que ce travail de mémoire a vu le jour. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à l'accomplissement de ce mémoire de Master, tout particulièrement :

Mon encadreur ; **Mme. Amina LAHMAR-BENBERNOU** qui a accepté d'encadrer ce travail. Je le remercie tout aussi pour avoir dirigé mes travaux, pour m'avoir écoutée et m'encouragée durant cette période. Merci aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie Melle. **BENSIKADDOUR** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire et je remercie également **Mme. SAIDANI** pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier le corps enseignant du Département de Mathématiques de l'Université de Mostaganem pour les efforts qu'ils ne cessent d'employer afin d'assurer le développement et l'épanouissement de la formation.

Je voudrais faire, maintenant, **une place toute particulière à mes parents**. Je profite cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profond et ma **très très** grande reconnaissance. Je remercie ma mère qui a attendu, avec patience et sans jamais se lasser, les fruits de son éducation et ses efforts.

A **mes frères et mes sœurs et à tout mes amis**. Merci pour vous tous et toutes.

Table des matières

Chapitre 1

INTRODUCTION GENERAL

1.1 Historique

Au niveau classique, l'idée que les solutions d'une équation différentielle sont bien décrites par la donnée d'intégrales du mouvement est très ancienne, et apparaît dès la n du $XVIII^{ème}$ siècle dans la Mécanique céleste de *Laplace*. Plus on dispose de telles intégrales, plus on a de chances de pouvoir intégrer le système. En langage moderne, la connaissance de nouvelles intégrales permet d'augmenter la codimension des surfaces invariantes. Mais la notion de système complètement intégrable est un peu plus tardive ; on la fait remonter en général à la célèbre note de *Liouville* présentée au bureau des Longitudes en 1853. Dès 1840, *Jacobi* et *Liouville* reconnaissaient en le fameux $\ll$ *crochet de Poisson* $\gg$, introduit par *Poisson* dans son mémoire de 1809, un outil très important pour l'étude des systèmes appelés aujourd'hui hamiltoniens. Non seulement le crochet de deux intégrales du mouvement en est une autre, ce qui peut permettre de découvrir de nouvelles intégrales, mais en outre, comme le dit *Liouville* en 1855 (il y a souvent un autre parti à tirer des intégrales connues, pour achever ou du moins pousser plus loin l'intégration). Dans sa note de 1853, *Liouville* avait montré comment, pour un système hamiltonien à $2n$ variables, la connaissance de n intégrales premières indépendantes en involution permet d'intégrer complètement le système. La clef du raisonnement était (en langage actuel) une certaine 1-forme la fameuse 1-forme de *Liouville*, justement dont la restriction à la sous-variété lagrangienne invariante donnée par les intégrales du mouvement est fermée.

D'un point de vue analytique, on ne fait guère mieux de nos jours. La naissance et l'extension spectaculaire de l'outillage symplectique a surtout permis de comprendre la nature intrinsèque des constructions de *Liouville*, et par suite de poser le problème de la structure globale, ou plutôt semi-globale des systèmes complètement intégrables. Par semi-global on entend : dans un voisinage d'une lagrangienne invariante. L'amélioration la plus connue du résultat de *Liouville* est le théorème de $Liouville - Arnold$, qui s'énonce comme suit : On suppose l'existence de n fonctions C^{∞} $f_1....,f_n$ en involution, et on appelle application moment la fonction $F=(f_1....,f_n)$. Si c est une valeur régulière de F telle que $\Lambda_c \overset{def}{=} F^{-1}(c)$ est compacte, alors Λ_c est difféomorphe à un tore, et un voisinage de Λ_c est symplectiquement difféomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^*(T^n)$; en outre, si on note (x,ξ) les coordonnées canoniques de ce cotangent, F s'écrit $F(\xi)$. (Ce résultat était essentiellement connu dès 1936). On appelle (x,ξ) des coordonnées actions-angles. L'existence locale de coordonnées symplectiques (x,ξ) dans lesquelles $F=F(\xi)$ était aussi connue bien avant

Arnold ; on cite en général *Carathéodory*. Il ne faut pas croire que les physiciens quantiques aient attendu les derniers développements de la théorie des systèmes de *Liouville* pour proposer les conditions de quantification supposées résoudre les systèmes quantiques dont la limite classique est complètement intégrable. Dès 1915, $Sommerfeld$ et $Wilson$ proposent une généralisation à ces systèmes des conditions de quantifcation de *Planck* et *Bohr*. Il est remarquable que ces premiers essais précèdent l'interprétation des énergies quantifées comme valeurs propres d'opérateurs sur des espaces de *Hilbert*. Cependant, même si *Einstein* présente en 1917 une amélioration de ces conditions, elles restent mathématiquement infondées, et d'ailleursse révéleront inexactes dans la mesure où elles ignorent la correction dite de $Keller - Maslov$. Cette correction apparaît dans les années 1925, avec la méthode *BKW* ($Brillouin, Kramers$ et $Wentzel$) destinée à trouver des solutions approchées de l'équation de *Schrödinger*. Mais tous ces travaux restent vagues sur la formulation quantique des transformations canoniques, qui sont pourtant centrales dans la théorie classique, et il semble qu'il faille attendre $Maslov$ (1965) pour disposer d'une formulation intrinsèque de ces fameuses conditions, dites de $Bohr - Sommerfeld$.

1.2 Introduction

La méthode *BKW* est importante en tant que des moyens pratiques de rapprocher des solutions pour l'équation de *Schrödinger*, et également comme cadre conceptuel pour comprendre la limite classique de la mécanique quantique. Les lettres *BKW* représentées les physiciens *Brillouin*, $Kramers\ et\ Wentzel$, et, qui se sont appliqués la première fois la méthode à l'équation de *Schrödinger* en 1926. Certains pensent que le nom de $Jeffreys$ devrait être ajouté, et se réfèrent à la méthode de $BKWJ$. L'approximation *BKW* s'appelle également l'*approximation semi classique* ou *quasi classique*. L'idée fondamentale derrière la méthode peut être appliquée à n'importe quel genre de vague (dans le systeme optique, l'acoustique, etc.), elle doit augmenter la solution de l'équation des ondes dans le rapport du longueur d'onde à la longueur de balance de l'environnement dans lequel la vague propage, quand ce rapport est petit. Dans la mécanique quantique, c'est équivalent à traiter le h formellement comme petit paramètre. La mécanique quantique d'antidates de la méthode elle-même par beaucoup d'années, et a été employée par *Liouville* et *Green* dans le dix-neuvième siècle tôt.

Le constant de *Planck* h a des dimensions d'action, ainsi sa valeur dépend des unités choisies, et elle ne se comprend pas de dire que le h est petit. Cependant, les problèmes mécaniques typiques ont des quantités avec les dimensions de l'action qui semblent dans elles. Et si ce sont grands par rapport au h, alors nous pouvons traiter le h comme petit. Ce serait normalement la caisse pour les systèmes macroscopiques, qui sont bien décrits par la mécanique classique. Ainsi la limite classique peut être considérée en tant qu'une dans laquelle toutes les actions sont grand par rapport au h.

Il est évident qu'il doive y avoir un certain subtile dans la limite classique de la mécanique quantique, puisque les interprétations physiques des deux théories sont différentes. Par exemple, la mécanique quantique fait les prévisions physiques qui sont fondamentalement statistiques, alors que les statistiques entre seulement dans la mécanique classique s'il y a un manque d'informations complètes sur des conditions initiales. D'ailleurs il y a des phénomènes quantique, tels que l'interférence et le perçage d'un tunnel, qui n'ont aucun analogue classique. Nous verrons comme nous procédons comment la théorie de BKW représente ces caractéristiques de la mécanique quantique autour d'un cadre construit hors de la mécanique classique.

1.3 Plan de travail

Ce mémoire est organisé en trois chapitre :

Dans la première chapitre, nous donnons quelques définitions et théorèmes intéressent.

Dans la deuxième chapitre on applique la méthode BKW sur les équation différentielle d'ordre 2 depend d'un paramètre h.

Enfin, la troisième est consacrée à introduit les solutions approchées des équations différentielles de nième ordre.

Chapitre 2

Rappels et Notions Préliminaires

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail.

2.1 Rappels sur les équations différentielles

Equations différentelles du premier ordre

Définition 2.1 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a\,(x)\,y' + b\,(x)\,y = c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{k}$, $\mathbb{k}$ étant l'un des corps ou, a étant non identiquement nulle.

Exemple 2.1 *(Équations de Ricatti)*

Les équations de Ricatti sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (Ric)$$

méthode de résolution : Si y_1 est une solution particulière alors on pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

.Cette substitution transforme l'équation (Ric) en une équation linéaire en z.

Equations différentielles du second ordre

Les équations différentielles linéaires ou non d'ordre deux ce sont dans le cas général, les équation de la forme

$$y''(t) = f(t, y, y').$$

Dans le cas linéaire, l'équation du second ordre est

$$y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y + C(t) = 0. \qquad (1)$$

Les fonctions A, B, C sont supposées définies continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de methode général pour resoudre (1), ce pendant, si on atrouvé une solution $y_1(x)$, alors on peut calculer le deuxième solution, on posons $y_2(x) = u(t)\, y_1(t)$. Un cas particulier est résolvable complètement, se sont les équations à coefficient constante (i.e) : $y''(t) + ay'(t) + by + c = 0$.

Il y a un principe général qui ramène une équation du second ordre à une équation du premier ordre mais dans $\mathbb{R}^2$. On pose $y_1(t) = y(t)$, et $y_2(t) = y'(t)$.

Alors l'équation du second ordre est équivalente à

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t, y_1 \end{cases}$$

et dans le cas linéaire

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -A(t)y_2(t) - B(t)y_1(t) - C(t) \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -B(t) & -A(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -C(t) \end{pmatrix}$$

Si $C = 0$ l'équation est dite homogène.

Problème de Chauchy

Définition 2.2 *On appelle problème de Cauchy associé à l'équation (L1) au point* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{k}$, *le problème qu'on écrit*

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (Pc)$$

Qui consiste à trouver les solutions de (L1) qui prennent la valeur y_0 *en* x_0.

Théorème 2.1 *Pour toute donnée initiale* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{k}$, *le problème* (Pc) *admet une solution unique.*

Equations intégrales

On appelle équation intégrale toute équation qui renferme la fonction inconnue sous le signe somme. Soit à résoudre l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Ce problème se ramenait à la résolution de l'équation dite intégrale :

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0.$$

D'une façon tout à fait analogue le problème consistant à intégrer l'équation différentielle $y'' = f(x, y)$ avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y\prime(x_0) = y_0$ se ramène à la résolution de l'équation intégrale :

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - z) f[z, y(z)]dz + y_0 + y_0'(x - xo).$$

Soit l'équation linéaire

$$y'' + p(x)y = \omega(x).$$

Nous affirmons que résoudre cette équation avec les conditions aux limites

$$y(0) = a;\ y(l) = b$$

revient à résoudre l'équation intégrale linéaire

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x,z)\omega(z)dz + \int_0^l K(x,z)p(z)y(z)dz$$

où

$$F(x) = a + \frac{b-a}{l}x.$$

La diagonalisation des systèmes

Définitions

– Un vecteur non nul $x \in E$ est un vecteur propre d'une matrice A s'il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $Ax = \lambda x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x.

– Un scalaire $\lambda \in \mathbb{k}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $Ax = \lambda x$. Le vecteur x est un vecteur propre associé à λ.

– Le polynôme $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ est le polynôme caractéristique de A.

Définition 2.3 *Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire si elle s'écrit sous la forme :*

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{k}^n$ à une base de vecteurs propres de A.

Théorème (*Décomposition de Jordan*). Soit $A \in M_n(IK)$; on suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{k}$ (ce qui est toujours le cas sur $\mathbb{C}$) tel que $\pi_A(X) = \prod (X - \lambda_i)^{s_i}$. Alors il existe $P \in GL_n(IK)$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

où les matrices A_i sont diagonales par blocs :

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & J_{i,e_i} \end{pmatrix},$$

et où les matrices $J_{i,k}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq k \leq e_i$, sont des blocs de *Jordan*, i.e. des matrices carrées de la forme :

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_{i_i} \end{pmatrix},$$

n'ayant pas forcément toutes le même ordre $|J_{i,k}|$. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on a $e_i = dim E(\lambda_i)$, et $max\ |J_{i,k}| = s_i$.

2.2 Rappels sur les opérateur différentiels linéaires

Définitions

- Un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞ d'ordre m est un opérateur P définie par :

$$P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$
$$u \mapsto P(u(x)) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha(u(x)),$$

avec $a_\alpha \in C^\infty$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que l'opérateur A^* est l'adjoint de l'opérateur A si

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \ x \in D(A).$$

Opérateurs symétriques et autoadjoints

Définition 2.4 *On dit qu'un op erateur* $(D; A)$ *est sym etrique lorsque*

$$\forall u, v \in D, \ \ \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Définition 2.5 *On dit qu'un opérateur* $A : H \to H$ *est autoadjoint si*

i) $\overline{D(A)} = H$
et
ii) $A = A^*$.

Définition 2.6 *On dit que* A *est formelllement autoadjoint si la contion* $i)$ *n'est pas vérifiée.*

Chapitre 3

Introduction du problème

Avant que nous décrivions les situations exactes où nous pouvons utiliser la méthode de BKW,considérons d'abord le problème suivant

$$h^2 \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \quad 0 < h << 1 \quad (h \text{ est petit}).$$

Notons qu'il y a deux solutions de l'équation du type :

$$y(x,h) = \exp\left(\pm \frac{ix}{h}\right)$$

alors

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{i}{h} \exp\left(\pm \frac{ix}{h}\right)$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{i}{h}\right)^2 \exp\left(\pm \frac{ix}{h}\right) = \frac{-1}{h^2} \exp\left(\pm \frac{ix}{h}\right).$$

Il est important de noter que cette solution oscille rapidement sur une échelle de $O(h)$.

Ce sont les types de problèmes qui sont idéaux pour la méthode de BKW parce que nous pouvons supposer que la solution est sous une forme spécifique .

3.1 Présentation de la méthode BKW

On s'intérèsse aux problèmes suivants :

$$h^2 y'' - q(x) y = 0 \tag{1.1}$$

sur l'intervalle I où $I \in \mathbb{R}$, $q(x) \in C^\infty(I)$ et h est un petit paramètre positif.

La résolution du problème (1.1) sera donnée trois cas suivantes

1. Si $q(x) = 0$, la solution de (1.1) est de la forme

$$y = ax + b, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si $q(x) = cte$

$$y_{1,2} = e^{\pm\sqrt{q(x)}/h}$$

$$y = Ay_1 + By_2$$

3. Si $q(x) \neq cte$, on cherche les solutions sous la forme :

$$y(x,h) = \exp(\int_{x_0}^{x} s(t,h)dt \tag{1.2}$$

où

$$s(x,h) = \sum_{j=-1}^{\infty} \alpha_j\,(x)\,h^j \tag{1.3}$$

est une série formelle en h et x_0 est un point fixé.

Si en remplaçant (1.2) dans (1.1), on obtient l'équation de *Riccati*

$$\frac{ds}{dx} + s^2 = h^{-2}q. \tag{1.4}$$

En outre, en remplaçant (3) dans (4), nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^2(x) = q(x) \\ 2\alpha_0(x)\alpha_{-1}(x) + \alpha_0'(x) = 0 \\ 2\alpha_1(x)\alpha_{j+1}(x) = -\alpha_{j+1}'(x) - \displaystyle\sum_{k=-1}^{j} \alpha_k(x)\alpha_{j-k}(x),\ j \geq 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Pour la première équation, on trouve

$$\alpha_{-1}(x) = \pm\sqrt{q(x)}.$$

Si on pose $\alpha_{-1}(x) = +\sqrt{q(x)}$, alors on obtient

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{-q'(x)}{4q(x)} \\ \alpha_1(x) = \frac{1}{8}\frac{q''(x)}{q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32}\frac{q'^2(x)}{q^{5/2}(x)} \\ \alpha_{j+1}(x) = \frac{-1}{2\sqrt{q(x)}}\left[\alpha_j'(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \alpha_k(x)\alpha_{j-k}(x)\right],\ j \geq 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Si on pose $\alpha_{-1}(x) = -\sqrt{q(x)}$, alors dans les formule de $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots$. On remplace $\sqrt{q(x)}$ par $-\sqrt{q(x)}$. Donc pour l'équation (1), on a deux solution formelles

$$\begin{aligned} y_1(x,h) &= q^{\frac{-1}{4}}(x)\exp(\lambda\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}dt + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\int_{x_0}^{x}\alpha_k(t)dt) \\ y_2(x,h) &= q^{\frac{-1}{4}}(x)\exp(-\lambda\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}dt + \sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda)^{-k}\int_{x_0}^{x}\alpha_k(t)dt) \end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\lambda = h^{-1}$ est un grand paramètre.

Définition 3.1 *Les fonctions y_1, y_2 sont appelées solutions formelles asymptotique (SFA).*

3.2 Diagonalisation asymptotique des systèmes

Dans l'équation (1.1) soit

$$y = y_1, \quad \lambda y_1 = y_2, \quad Y = (y_1, y_2)^T, \tag{1.8}$$

avec $\lambda = h^{-1}$, alors on obtient le système

$$\frac{dY}{dx} = \lambda A(x)Y, \qquad\qquad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

avec $q(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

Remarque 3.1 *Un système de n équations de la forme $y\prime = B(x)y$ avec des coefficients variables peut être intégré si $B(x)$ est diagonal.*

Dans ce cas-ci le système découple les n équations indépendant du premières ordre $y_j' = b_{jj}y_j$, $1 \leq j \leq n$.

Le système (1.9), en général, ne peut pas être intégré et transformée à la forme diagonale. La présence du grand paramètre λ ici ne complique pas, mais simplifie en fait la situation. À savoir, (1.9) peut être diagonalisée jusqu'à $O\left(\lambda^{-N}\right)$ pour n'importe quel $N > 0$, c'est-à-dire, il est réduit à un système dont la matrice est diagonale jusqu'aux limites de l'ordre $O\left(\lambda^{-N}\right)$.

Maintenant, cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de A, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - q(x),$$

donc

$$\lambda^2 - q(x) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{q(x)}.$$

Pour $\lambda = \sqrt{q(x)}$, on a le vecteur propre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{q(x)} \end{pmatrix},$$

et pour $\lambda = -\sqrt{q(x)}$, on a

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{q(x)} \end{pmatrix}.$$

Donc, on peut écrire la matrice A sous la forme

$$A(x) = T_0(x)D(x)T_0^{-1}(x)$$

tels que

$$T_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{q(x)} & -\sqrt{q(x)} \end{pmatrix},$$

$$D(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{q(x)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{q(x)} \end{pmatrix}.$$

Donc le système (1.9) devient

$$\frac{dY}{dx} = \lambda T_0(x)D(x)T_0^{-1}(x)Y \tag{1.10}$$

Posons $T_0^{-1}(x)Y = z \Rightarrow Y = T_0(x)z$, On obtient

$$\frac{dz}{dx} = \left[\lambda T_0^{-1}(x)A(x)T_0(x) - T_0^{-1}(x)\frac{T_0(x)}{dx}\right] z \tag{1.11}$$

alors

$$\frac{dz}{dx} = \left[\lambda D(x) + B(x)\right] z$$

où

$$D(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{q(x)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{q(x)} \end{pmatrix}, \qquad B(x) = \frac{q'(x)}{4q(x)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la substitution $z = \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)\omega$ pour écrire le système (1.11) sous la forme diagonal, on aura

$$\frac{d\omega}{dx} = [\lambda \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)^{-1} D(x) \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right) - \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)^{-1} T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx} \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)$$

$$-\lambda \left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)^{-1} \frac{d_1T(x)}{dx}]\omega. \tag{1.12}$$

où

$$\left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)^{-1} = I - \lambda^{-1}T_1(x) + O(\lambda^{-2}).$$

Alors la matrice du système (1.12) est égale à

$$\lambda D(x) + E(x) + O(\lambda^{-1}),\ E(x) = -T_1(x)D(x) + D(x)T_1(x) - T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx}.$$

Cette matrice est diagonale d'ordre $O(\lambda^{-1})$ si la matrice E est diagonale.
Par conséquent, on trouve

$$\left(T_1(x)\right)_{j,k} = \frac{1}{p_j(x) - p_k(x)} \left(T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx}\right)_{j,k}, \qquad j \neq k. \tag{1.13}$$

Les éléments diagonaux du $T_1(x)$ demeurent indéterminés, depuis les éléments diagonaux de $-T_1(x)D(x) + D(x)T_1(x)$ sont zéro, et eux peuvent être mis, par exemple, égale à zéro. Pour le système concret de deux équations (1.13) que nous obtenons $t_{12} = t_{21} = -q'(x)/(4q^2(x))$. Ainsi la substitution

$$y = T_0(x)\left(I + \lambda^{-1}T_1(x)\right)\omega \tag{1.14}$$

réduit (1.9) à

$$\frac{d\omega}{dx} = \left[\lambda D(x) + D_1(x) + O(\lambda^{-2})\right]\omega$$

$$D_1(x) = -diag\left(T_0^{-1}(x)\frac{dT_0(x)}{dx}\right), \tag{1.15}$$

on utilise la notation : le $diagA$ est la matrice diagonale avec les éléments diagonaux $a_{11}, ..., a_{nn}$. Donnent une autre formule pour $D_1(x)$. Soit $\{e_1(x), ..., e_n(x)\}$, $\{e_1^*(x), ..., e_n^*(x)\}$ être des bases des vecteurs propres gauches et droits de $D(x)$, c.-à-d.,

$$Ae_j(x) = p_j(x)e_j(x), \qquad e_j^*(x)A = p_j(x)e_j^*(x).$$

Les vecteurs $e_j(x)$ sont des colonnes, $e_j^*(x)$ les lignes, et

$$e_j^*(x)e_k(x) \equiv 0, \qquad j \neq k.$$

En tant que $T_0(x)$ on prend la matrice avec des colonnes que $e_1(x), ..., e_n(x)$, alors $T_0^{-1}(x)$ sera la matrice avec des lignes $\left(e_1^*(x), ..., e_n^*(x)\right)$, $j = 1, ..., n$. Par conséquent, $D_1(x)$ est diagonale avec les éléments diagonaux

$$p_j^{(1)} = -\frac{e_j^*(x)\frac{d}{dx}e_j(x)}{e_j^*(x)e_j(x)}, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.16}$$

Le processus du diagonalisation asymptotique peut être prolongé arbitrairement $N \geq 1$ aux matrices de trouvaille $T_1(x), ..., T_N(x)$, tels que la substitution

$$y = T_0(x)\left(I + \lambda^{-1}T_1(x) + \cdots + \lambda^{-N}T_N(x)\right)z$$

réduit (1.9) à0

$$\frac{dz}{dx} = \lambda D(x) + D_1(x) + \cdots + \lambda^{-N+1}D_{N-1}(x) + \lambda^{-N}B_N(x, \lambda).$$

Ici, les $D_j(x)$ sont des matrices diagonales, $T_j(x), D_j(x) \in C^\infty(I)$ et

$$\|B_N(x, \lambda)\| \leq C_N, \qquad x \in I, \qquad |\lambda| \geq \lambda_0 > .$$

Le nombre λ peut être complexe.
Négligeant $\lambda^{-N}B_N(x, \lambda)$ dans le dernier système, nous obtenons un système qui découple dans des n équations séparées que n'importe quelle solution de lui sera SFA de (1.9).

3.3 Estimation de BKW

Considérons l'équation du second degré

$$y'' - Q(x)y = 0, \tag{1.17}$$

avec ce que, évidemment, coïncide (1.10) si $Q = \lambda^2 q$. (1.17) est équivalent au système

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

on prend l'équation (1.17) comme un exemple nous démontrerons les formules asymptotique et clarifions la signification des conditions qui sont imposées aux coefficients. La première condition est évidente, l'absence des points tournants :

$$Q(x) \neq 0, \qquad x \in I. \tag{1.18}$$

Faisons la transformation

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{Q(x)} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} & -\sqrt{Q(x)} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

alors on obtient le système

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left[\sqrt{Q(x)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{Q'(x)}{4Q(x)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1(x)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{8}\frac{Q''(x)}{Q^{3/2}(x)} - \frac{5}{32}\frac{(Q'(x))^2}{Q^{5/2}(x)}. \tag{1.21}$$

Si $Q = \lambda^2 q$, alors la substitution (1.19) diagonalises (1.9) jusqu'à $O(\lambda^{-1})$. En outre, dans ce cas $\alpha_1(x,\lambda) = \lambda^{-1}\alpha_1(x)$, où $\alpha_1(x)$ est la fonction définie dans (1.6).
Au plus de (1.18) nous présentons la condition suivante :

(A) : il y a une branche de la racine $\sqrt{Q(x)}$, régulière pour $x \in I$, tels que Re $\sqrt{Q(x)} \geq 0$, $x \in I$.
Si $Q(x)$ est une fonction à valeurs réelles puis ceci suit de (1.18). En effet, si $Q(x) > 0$, alors on pose pour cela $\sqrt{Q(x)} > 0$; si $Q(x) < 0$, alors $\sqrt{Q(x)}$ est purement imaginaire.
Mais si $Q(x)$ est à valeur complexe, alors (A) ne suit pas (1.18).

Soient

$$S(x_0,x) = \int_{x_0}^{x}\sqrt{Q(t)}dt,$$

et

$$\widetilde{y}_{1,2}(x,x_0) = Q^{-1/4}(x)\exp\left\{\pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{Q(t)}dt\right\},$$

$$\rho(x_1,x_2) = \left|\int_{x_1}^{x_2}|\alpha_1(x)|\,dx\right|, \tag{1.22}$$

on choisi comme I un intervalle $a < x < b$, qui peut être infini, et soit

$$\rho(a,x) < \infty \tag{1.23}$$

alors (1.17) admet une solution y_1 tels que

$$\left|\frac{y_1(x)}{\widetilde{y}_1(x)} - 1\right| \leq 2\left(e^{2\rho(a,x)} - 1\right), \ x \in I. \tag{1.24}$$

Si la condition

$$\rho(x,b) < \infty \tag{1.25}$$

est vérifiée, alors (1.17) admet une solution y_2 tels que

$$\left|\frac{y_2(x)}{\widetilde{y}_2(x)} - 1\right| \leq 2\left(e^{2\rho(x,b)} - 1\right), \ x \in I. \tag{1.26}$$

Les estimations analogues restent valables pour les dérivés y_1', y_2'. Les estimations de la forme (1.26) s'appellent *estimation BKW*.
Cependant, il y a une raison. Le fait est que la preuve nous permet de comprendre pourquoi, et dans quels domaines du plan complexe de x, la formule *asymptotique BKW* est valide quand $q(x)$ est analytique.

Faisant la substitution $z_j = \widetilde{y}_2 u_j$, $j = 1, 2$, et remplacons l'équation obtenue par les équations intégrales

$$u(x) = u^0 + (Ku)(x), \qquad u^0 = (1,0)^T, \qquad u(x) = (u_1(x),\ u_2(x))^T,$$

où K est un opérateur intégral

$$(Ku)_1(x) = \int_b^x \exp\{2S(t,x)\}\,\alpha_1(x)\,(u_1(t)+u_2(t))\,dt,$$

$$(Ku)_2(x) = -\int_b^x \alpha_1(x)\,(u_1(t)+u_2(t))\,dt. \tag{1.27}$$

on désigne par $\|u(x)\| = \sup_{x\in I}\max(|u_1(x)|,\ |u_2(x)|)$, puis évidemment

$$|(Ku)_2(x)| \leq \rho(x,b)\,\|u(x)\|. \tag{1.28}$$

Nous estimons $|(Ku)_2(x)|$. Ici la condition (A) vient à notre aide, quand

$$\operatorname{Re}\sqrt{Q(x)} \geq 0, \qquad a < x < b,$$

alors

$$\operatorname{Re} S(t,x) \leq 0, \qquad |\exp\{S(t,x)\}| \leq 1, \qquad x \leq t < b,$$

et (1.28) est vérifiée pour $|Ku_1|$. Il reste à appliquer la méthode d'approximations successives, pour vérifier sa convergence, et pour dériver (1.24) de (1.28). Ce procédé est tout à fait standard.

La condition (A) peut être reformulée comme suit.

La fonction $\operatorname{Re} S(x_0,x)$ n' augmente pas le long du chemin de l'intégration (le long de l'intervalle (x_0,b)).

3.4 La forme asymptotique des solutions de (1.1) :

À partir de l'estimation des solution de l'équation (1.1) , nous pouvons obtenir une formule asymptotique pour les deux solutions de grandes valeurs du paramètre λ et pour de grandes valeurs de l'argument en x. Comparons (1.1) et (1.17) on voit que $Q = \lambda^2 q$, de sorte que

$$\alpha_1(x;\ Q) = \lambda^{-1}\alpha_1(x;\ q), \qquad \rho(x_0,x;\ Q) = \lambda^{-1}\rho(x_0,x;q).$$

1. Soit $q(x) > 0$ pour $x \in I$, on choisit la branche $\sqrt{q(x)} > 0$, $x \in I$. Alors (1.1) a les SFS

$$y_{1,2}(x,\lambda) = \widetilde{y}_{1,2}(x;x_0,\lambda)\left[1 + O\left(\lambda^{-1}\right)\right], \qquad \lambda \to +\infty,$$

$$\widetilde{y}_{1,2} = q^{-1/4}(x)\exp\left\{\pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}dt\right\}. \tag{1.29}$$

On peut donner la forme asymptotique on obtient

$$y_{1,2}'(x,\lambda) = \mp\lambda\sqrt{q(x)}\widetilde{y}_{1,2}(x;x_0,\lambda)\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right],$$

uniformement par rapport à x pour le rest.Du moment où y_1, y_2 sont solutions de (1.1), leur forme asymptotique peut être dériné autant de fois possible.
Posons $x_0 = a$ dans y_1, alors

$y_1(a) \sim q^{-1/4}(a)$, quand $\lambda \to +\infty$, $(x > a)$, la solution decroit exponentiellement quand $S(a,x) > 0$ pour $x > a$.

$y_1 \neq 0$ pour un voisinage suffisament petit d'ordre λ^{-1},
Si on pose $x_0 = b$ dans y_2, alors la solution y_2 decroit exponentiellement de la droite vers la gauche (pour $x < b$).
Nous remarquons que la solution $y_{1,2}$ vérifie le *problème de Cauchy*

$$y_1(a) = A, \qquad y_1'(a) = -A\left(\lambda\sqrt{q(a)} + q'(a)/4q(a)\right),$$

$$y_2(a) = B \qquad y_2'(a) = B\left(\lambda\sqrt{q(b)} + q'(b)/4q(b)\right),$$

où $A = q^{-1/4}(a)$, $B = q^{-1/4}(b)$.
Finalement, la forme asymptotique de la solution est vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, quand $\operatorname{Re}\left(\lambda\sqrt{q(x)}\right)$ ne change pas de signe pour $x \in I$.
Les deux solutions y_1, y_2 sont donc analytiques dans le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\forall x \in I$.
D'une façon analogue, il y a des solutions de la forme (1.29) quand λ parcourt le demi-plan à gauche : $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

2. Soit $Q(x) > 0$, $I = [a, +\infty)$. L'intégrale suivante

$$\int_a^x |\alpha_1(t)|\, dt < \infty \tag{1.30}$$

est convergente. Alors (1.17) a une solution y_1 telle que

$$\left|\frac{y_1(x)}{\widetilde{y}_1(x;x_0)} - 1\right| \leq C\int_x^\infty |\alpha_1(t)|\, dt.$$

La dernière intégrale tend à zéro quand $x \to +\infty$, ainsi nous avons obtenu une formule asymptotique

$$y_1(x) = \widetilde{y}_1(x,\ x), \qquad x \to +\infty.$$

Nous avons également une estimation du reste

$$y_1(x) = \widetilde{y}_1(x,\ x)\left[1+\varepsilon_1(x)\right],$$

$$|\varepsilon_1(x)| \leq C\int_x^\infty |\alpha_1(t)|\, dt. \tag{1.31}$$

Détermonons la classes pour laquelle $Q(x)$ est vérifiée.

Considérons $Q(x) \sim ax^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, quand $x \to +\infty$, suposons que la forme asymptotique estdifférentiable. Alors

$$\alpha_1(x) = O(x^{-\alpha/2-2}), \qquad x \to \infty,$$

et (1.30) converge pour $\alpha > -2$.

En particulier, (1.30) est valable si Q est un polynôme.

Il y a des fonctions admissibles qui croit rapidement, et d'autre qui croit rapidement, quand $x \to +\infty$, par exemple,

$$Q(x) = Ae^{Bx^{\alpha}}, \quad (A,\ B,\ \alpha > 0), \qquad Q(x) = (\log x)^{\alpha}, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

Nous analysons (1.30) d'un point de vue de la théorie analytique des équations différentielles. Soit

$Q(z)$ analytique dans le domaine $R < |z| < \infty$, et en $z = \infty$

$Q(x)$ soit analytique ou soit admet un pole.

Alors $Q(x) \sim az^n$ quand $z \to \infty$, où $n \in \mathbb{N}$.

Le point $z = \infty$

1) n'est pas singulier pour (1.17) pour $n \leq -3$,

2) singulier régulier pour $n = -2$

3) singulier irrégulier pour $n \geq -1$.

Donc pour $\alpha > -2$, $z = \infty$ est un point singulier irrégulier de (1.17).

La condition (1.30) est requise pour une certaine régularité de $Q(x)$ à l'infini.

Pour simplifer, $Q(x)$ est un polynôme, $y_1(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et $y_2(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$.

L'estimation BKW nous permet de construire une solutions, la solution décroissante $y_1(x)$. On peut vérifier

$$y_2(x) \sim cQ^{-1/4}(x) \exp\{S(x_0, x)\}, \qquad x \to +\infty.$$

Cette solution y_2 vérifie

$$\forall A,\ y_2 + Ay_1 \sim y_2.$$

Exemple 3.1 *Considérons l'équation d'Airy*

$$y'' - xy = 0$$

pour $x > 0$. *Posons* $S(0, x) = 2/3x^{3/2}$, *par conséquent il existe une solution*

$$y_1(x) = cx^{-1/4}e^{-2/3x^{3/2}}\left[1 + O\left(x^{-3/2}\right)\right], \ x \to +\infty.$$

Cette solution a un facteur constant près c, est déterminée par des conditions au bord à l'infini.

La solution y_1, normalisée par $c = 1/(2\sqrt{\pi})$, et est appellée fonction d'Airy, elle est notée $Ai(x)$. Une deuxième solution linéairement indépendante croit exponentiellement quand $x \to +\infty$:

$$y_2(x) = cx^{-1/4}e^{2/3x^{3/2}}\left[1 + O\left(x^{-3/2}\right)\right].$$

3. Soit $I = [a, +\infty[$, $q(x) > 0$, $\lambda > 0$ et soit (1.30) vérifiée. Alors

$$y_1(x) = \widetilde{y}_1(x,\ x)\left[1 + \lambda^{-1}\varepsilon_1(x)\right], \tag{1.32}$$

là où (1.31) se tient pour ε_1, si $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Le constante c ne dépend pas de λ.

Nous avons obtenue une double formule asymptotique. Le reste dans (1.32) tend vers zéro pour

$$\begin{cases} \lambda \to +\infty \text{ et } x \text{ fixé} \\ x \to +\infty \text{ et } \lambda \text{ fixé} \end{cases}$$

En outre,elle vérifiée pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

4. Soit $q(x) < 0$, $x \in I$. Il est convenable d'écrire (1), (10) sous la forme

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0, \qquad y'' + Q(x) y = 0,$$

là où $q > 0$, $Q > 0$.
Soit I un intervalle fini, il existe un $système\ fondamentale\ de\ solution$ (SFS)

$$y_{1,2}(x,\lambda) = q^{-1/4}(x)\exp\{\pm i\lambda S(x_0,x)\}[1 + O(\lambda^{-1})] \tag{1.33}$$

les deux solutions oscillent fortement pour $\lambda \gg 1$. La fonction $\operatorname{Re}(i\lambda S(x_0,x))$ ne change pas de signe si $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Im}\lambda \geq 0)$.
Par conséquent, il existe un $système\ fondamentale\ de\ solution$ y_1^+, y_2^+. (1.33) soit vérifiée quand $|\lambda| \to +\infty$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$.

Il existe de la même façon des $système\ fondamentale\ de\ solution$, ces formules sient vérifies pour $|\lambda| \to +\infty$, $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$.

Soit $I = [a, +\infty)$ et (1.30) vérifiée. Si $\operatorname{Re}\left(i\sqrt{Q(x)}\right) \equiv 0$, il existe un $système\ fondamentale$ $de\ solution$

$$y_{1,2}(x,\lambda) = Q^{-1/4}(x)\exp\{\pm i\int_{x_0}^{x}\sqrt{Q(t)}dt\}[1 + \varepsilon_{1,2}(x)],$$

où (1.31) est vérifie pour $\varepsilon_j(x)$. Ces solutions peuvent données des conditions aux bords à l'infini

$$\lim\left(\frac{y'(x)}{y(x)} \mp i\sqrt{Q(x)}\right) = 0. \tag{1.34}$$

Les signes $-, +$ sont associes respectivement à y_1, y_2. Les conditions du type de (24) s'appellent les *conditions de radiation.*

3.5 Des approximations plus élevées

3.5.1 Paramètres supplémentaires

Sous les conditions $q(x) \neq 0, x \in I, et\ (A)$, l'équation (2.8) admet un $système\ fondamentale$ $de\ solution$

$$y_j^N(x,\lambda) = q^{-1/4}(x)\exp\{\pm\lambda S(x_0,x)\}\left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x)\lambda^{-k} + O(\lambda^{-N-1})\right], \qquad \lambda \to +\infty,$$

où $N \geq 1$ est arbitraire,les signes $+$ et $-$ sont pris respectivement pour $j = 2$, $j = 1$.

L'estimation du reste est uniforme par rapport à $x \in I$. La forme asymptotique peut être différenciée autant de fois que possible et les coefficients a_{jk} sont donnés par l'identités suivante

$$1 + \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x)\lambda^{-k} = \exp\left\{ (\mp\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} \alpha_k(t)dt \right\},$$

et les α_k sont donnés par (2.11).

Les solutions $y_{1,2}^N$ sont construites comme suit : l'équation (1.1) est réduite à un système, puis diagonaliser jusqu'à $O(\lambda^{-N-1})$ et a réduit à un système d'équations intégrales du type (1.27). La méthode des approximations successives est alors appliquée. Les solutions $y_{1,2}^N$ sont donnés par *les conditions de Cauchy* du type (1.29), et par conséquent dépendant de l'index N $(a_{jk}(x))$ ne dépendant pas de N. Dans beaucoup d'article le résultat est formulé comme suit : l'équation (1.1) possède les solutions y_1, y_2 admettant des devlopement asymptotique quand $h \to 0$ du type

$$y_j(x,\varepsilon) = \widetilde{y}_j(x; x_0, \lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x)h^k \right],$$

uniformement $x \in I$. Nous évitons délibérément ces formulations et voici la raison pour laquelle. Le passage des sommes finies pour y_j^N à une série asymptotique est fait par *le théorème de Nörlund* (également appelé *le théorème de Borel*[6]).

Supposons que nous sommes donnés une série formelle arbitraire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$, et un secteur $D : 0 < |h| < h_0$, $\alpha < \arg h < \beta$, où $\beta - \alpha < 2\pi$, dans le plan complexe h. Il existe une fonction $f(h)$, analytique dans D, pour laquelle cette série est asymptotique :

$$f(h) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n, \qquad h \to 0,\ h \in D.$$

Par conséquent la construction des solutions $y_j(x,h)$ sont donnés sous la forme d'une série asymptotique.

L'équation (1.1) peut contenir des paramètres supplémentaires, par exemple,

$$y'' - \lambda^2 q(x,\alpha)y = 0, \qquad \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2].$$

Si la dépendance par rapport au paramètre est régulièr, il n'y a aucun points tournant et la condition (A) est préservée, alors toutes les formules ci-dessus restent valide.

Considérer l'équation

$$y'' + (\pm 1 + \alpha(x))\, y = 0$$

sur les demi axe $R_+ : 0 < x < \infty$, où $\lim_{x\to\to\infty} \alpha(x) = 0$. La forme asymptotique de la solution a été construite ci-dessus pour $\alpha \in L_1(R_+) = 0$. Il y a des résultats plus sensibles, qui nous permettent de construire la forme asymptotique de la solution quand $\alpha \in L_p(R_+)$, $p > 1$.

Chapitre 4

Équations d'Ordre n et les Systèmes sans Points Tournants

4.1 Système d'équation sur un intervalle fini

Considérons le système d'équations

$$\frac{dy}{dx} = \lambda A(x) \tag{2.1}$$

sur un intervalle fini I, $A(x) \in C^{\infty}(I)$. Soient $p_1(x), ..., p_n(x)$ les valeurs propres de $A(x)$.

Définition 4.1 *On appelle point tournant x_0 de* (2.1) *tout point tel que $A(x)$ admet des valeurs propres multiples.*

Considérons le polynôme caractéristique

$$l(x_0, p) = \det(A(x) - pI)$$

de $A(x)$.

Caractérisation des points tournants : x_0 est un point tournant si et seulement si le système

$$\begin{cases} l(x_0, p) = 0 \\ l_p(x_0, p) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

est conformé.

Supposons que (2.1) n'a pas de point tournant. Alors on peut construie un développent asymptotique diagonal, mais il est plus pratique d'écrire cette forme SFA comme suit

$$y = \exp\{\lambda S(x)\} \left[f_0(x) + \lambda^{-1} f_1(x) + \cdots\right]. \tag{2.3}$$

où $S(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots$ sont des fonctions.

Remplaçant (2.3) dans le système, on obtient en également les coefficients d'ordre λ^{-1}, on obtient alors le système récurrent suivant

$$(A(x) - S'(x)I)\, f_0(x) = 0,$$

$$(A(x) - S'(x)I)\, f_k(x) = -f'_{k-1}(x),\ k \geq 1. \tag{2.4}$$

Il en découle de la première équation que $S(x)$ est une valeur propre, et $f_0(x)$ est un vecteur propre de $A(x)$. Soient $e_1(x), ..., e_n(x)$ une base des vecteurs propres. Posons

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} p_j\,(t)\,dt, \qquad f_0(x) = \alpha\,(x)\,e_j(x)$$

(est un vecteur propre défini à un facteur constant pris). La fonction $\alpha\,(x)$ est déterminée par la deuxième équation de (2.4)

$$(A(x) - S'(x)I)\, f_1(x) = -f'_0(x).$$

La matrice du système est dégénérée, soit la condition de résolution du système est donnée par l'orthogonalité $e_j^*(x)f'_0(x) = 0$. où, $e_j^*(x)$ est un vecteur propre de gauche : $e_j^*(x)A(x) = p_j(x)e_j^*(x)$. Par conséquence

$$\alpha'(x)e_j^*(x)e_j(x) + \alpha(x)e_j^*(x)e'_j(x) = 0,$$

on obtient

$$\alpha\,(x) = C\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p_1^{(j)}\,(t)\,dt\right\},$$

$$p_1^{(j)}\,(t) = \frac{e_j^*(x)e'_j(x)}{e_j^*(x)e_j(x)}.$$

Les fonctions $p_1^{(j)}\,(t)$ coïncide évidemment avec l'une des solutions obtenue au chapitre 2 (voir (1.16)). Le développent $f_1(x)$ par rapport à la base des vecteurs propres est donnée par :

$$f'_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,(x)\,e_k(x).$$

On obtient après multipliant par $e_k^*(x)$, nous obtenons

$$\alpha_k\,(x) = \frac{e_k^*(x)f'_0(x)}{p_j(x) - p_k(x)}, \qquad j \neq k.$$

Le coefficient $\alpha_j\,(x)$ demeure indéterminé, et est trouvé par l'équation de l'approximation suivante. Les fonctions $f_2(x), f_3(x), ...$sont déterminées de la même manière

Ainsi (2.1) admet n SFA de la forme (2.4). Écrivons les termes principaux. Soient

$$\widetilde{y}_j(x; x_0, \lambda) = \exp\left\{\lambda\int_{x_0}^{x} p_j(t)dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t)dt\right\}, \tag{2.5}$$

alors

$$y_j(x,\lambda) = \widetilde{y}_j\,(x; x_0, \lambda)\left[e_j(x) + O\left(\lambda^{-1}\right)\right]. \tag{2.6}$$

Le système (1.30) admet une solution y_j satisfaisant (2.6), quand $\lambda \to +\infty$, $x \in I$, si une condition similaire à la condition (A) est vérifié

(*B*) *les fonctions* $\mathrm{Re}\,(p_j(x) - p_k(x))$, $1 \leq k \leq n$, *ne changent pas de signe* $\forall x \in I$.

Il y a des contre-exemples : si la condition (B) n'est pas satisfaite, alors il n'y a pas de solution y_j avec un développement asymptotiques de la forme (2.6).

Comme dans le cas des équations du second ordre, tout les développement asymptotiques des solutions peuvent être différentiable autant de fois que possible par rapport à x et λ.

Si la condition (B) est satisfaite $\forall j$, alors (2.1) admet des solutions $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ de la forme (2.6). Pour $\lambda \gg 1$ ces solutions forment un SFS. La matrice fondamentale Y (x, λ) du système est donnée par

$$Y\,(x, \lambda) = [T(x) + O()] \exp \left[\lambda \int_{x_0}^{x} \Lambda(t) dt + \int_{x_0}^{x} \Lambda_1(t) dt \right]. \tag{2.7}$$

4.2 Équations d'ordre n sur un intervalle fini

Considérons l'équation

$$y^{(n)} + \lambda q_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \lambda^n q_n(x) y = 0 \tag{2.8}$$

sur un intervalle fini I. La fonction

$$l(x, p) = p^n + q_1(x) p^{n-1} + \cdots + q_n(x)$$

s'appelle le $\lambda -$ *symbole*, et l'équation

$$l(x, p) = 0$$

est appellée équation caractéristique. Soient $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ les racines de cette équation.

Un point x_0 s'appelle un point tournant si l'équation $l(x_0, p) = 0$ a des racines multiples ou le système (2.2) est conformé.

Supposons qu'il n'y a aucun point tournant dans l'intervalle I. Nous rechercherons encore FAS de (2.8) sous la forme (2.3), où $f_j(x)$ sont des fonctions scalaires. Puis nous obtenons un système d'équation récurrent, dont les deux premièrs équations

$$l(x, S'x)) f_0(x) = 0$$

$$l(x, S'x)) f_0'(x) + \frac{1}{2} l_{pp}(x, S'(x)) S''(x) f_0(x) = 0.$$

Par conséquent $S'(x)$ est une racine de l'équation caractéristique : Soit $S'(x) = p_j(x)$. De la deuxième équation y peut être déterminé. posons

$$\widetilde{y}_j(x; x_0, \lambda) = \exp \left\{ \lambda \int_{x_0}^{x} p_j(t) dt + \int_{x_0}^{x} p_j^{(1)}(t) dt \right\}, \tag{2.9}$$

$$p_j^{(1)}(t) = -\frac{1}{2} p_j^{'}(t) \frac{l_{pp}(x, p_j(x))}{l_p(x, p_j(x))},$$

alors nous obtenons un développement SFA

$$y_j(x,\lambda) = \widetilde{y}_j\,(x;x_0,\lambda)\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right]. \tag{2.10}$$

Si la condition (B) est satisfaite, alors (2.46) a une solution y_j de la forme (2.9), (2.10). Cette forme asymptotique est uniforme pour $x \in I$ et peut être différenciée autant fois que possible par rapport à x et λ. Le terme principale de la forme asymptotique peut être écrit sous la forme :

$$y_j(x;x_0,\lambda) = \exp\left\{\lambda\int\limits_{x_0}^{x} p_j(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_j'(t)}{p_j(x)-p_k(x)}dt\right\}.$$

est valable si la condition (B) est vérifiée.

Si la condition (B) est vérifiée $\forall j = 1, 2\ldots, n$, il existe n solutions $y_1, ..., y_n$ de la frme (2.10) et si $\lambda > 0$ les solution forme un SFS

Considérer une équation d'ordre impair formellement $auto-adjoint$

$$l_y \equiv (-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(q_0(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n y\right) + (-1)^n\lambda^2\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(q_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n y\right) + \cdots \tag{2.11}$$
$$+\lambda^{2n} q_n\,(x) = 0.$$

Si tous les coefficients sont réels, alors l est un opérateur symétrique sur $C_0^\infty(I)$.

Le $\lambda - symbole$ de l est la fonction

$$l(x,p) = q_0\,(x)\,p^{2n} - q_1\,(x)\,p^{2n-2} + \cdots + (-1)^n\,q_n\,(x)\,,$$

et l'équation $l(x,p) = 0$ est sa équation caractéristique. Les conditions sur les racines $p_1(x), ..., p_{2n}(x)$, déterminé au parement. Alors (2.11) a les solutions y_j (ou un SFS, si (B) se tient pour tout le j) de la forme (2.10), où

$$\widetilde{y}_j(x;x_0,\lambda) = \left[l_p\,(x, p_j\,(x))\right]^{-1/2}\exp\left\{\lambda\int\limits_{x_0}^{x} p_j(t)dt\right\}. \tag{2.12}$$

Pour l'équation du second degré

$$y'' - \lambda^2 q(x)y = 0,$$

nous avons

$$l(x,p) = p^2 - q\,(x)\,, \quad l_p(x,p) = 2p, \quad p_{1,2} = \pm\sqrt{q(x)},$$

et (2.10), (2.12) devenu les formules BKW (1.29).

Exemple 4.1 *On considère l'équation suivante*

$$y^{(2n)} + \lambda^{2n} q(x)y = 0,$$

où $q(x)$ est à valeur réelle, $q(x) \neq 0$ pour $x \in I$. Nous avons

$$l(x,p) = p^{2n} + q(x), \quad p_j\,(x) = \sqrt[2n]{-q(x)},$$

là où la racine prend toutes ses valeurs. l'équation a un SFS tel que

$$y_j\,(x,\lambda) = (q\,(x))^{1/2-n}\exp\left\{\lambda\omega_j\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}dt\right\}\left[1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right], \qquad \lambda \to +\infty,$$

où $\omega_j \neq (-1)^n$.

4.3 Grandes valeurs de l'argument

Considérons le système de n équation

$$y' = A(x)\,y$$

sur le demi axs $x \geq 0$. Nous étudions le comportement asymptotique des solutions comme $x \to +\infty$. Cependant, considérer en général dans ce problème une forme est simplement désespéré.

Tout qui a été fait ici peut être brièvement énoncé comme suit.

Considérons le système

$$y' = [\Lambda(x) + B(x)]\,y. \tag{2.14}$$

où $\Lambda(x) = diag\,(p_1(x), ..., p_n(x))$ et la matrice fonctionne $\Lambda(x)$ et $B\,(x)$ sont continus pour $x \geq 0$. Soit $f_j = (0, ..., 1, ..., 0)^T$, où l'unité se tient à la place de j.

1. *Systèmes presque diagonaux.* Dans ce cas on a

$$\lim_{x\to\infty} \|B\,(x)\| = 0.$$

Supposons que la condition suivante est vérifiée

$$\operatorname{Re}\left(p_{k+1} - p_k\,(x)\right) \geq c > 0.$$

Alors (2.14) admet un SFS de la forme(41)

$$y_j(x) = \exp\left\{\lambda \int\limits_{x_0}^{x} (p_j(t) + p_j^{(1)})dt\right\}[f_j + u_j\,(x)]\,,$$

$$\lim p_j^{(1)}\,(x) = \lim_{x\to\to\infty} \|u_j\,(x)\| = 0. \tag{2.15}$$

Ce résultat est dû à $Perron$. Il a également construit un contre-exemple : dans le cas où $sign\,\operatorname{Re}(p_{k+1} - p_k\,(x))$ peut être changé pour $x \gg 1$, alors montrant que le résultat (2.53) est faux.

La formule asymptotique (2.15) est assez rugueuse ; c'est une asymptotique logarithmique. En fait

$$y_{jj}\,(x)\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x} p_j(t)dt\right\} = \exp\left\{o(x)\right\}, \qquad x\to\infty,$$

et le côté droit de cette formule peut être assez arbitraire quand $x \to \infty$.

2. *systèmes L-diagonaux.* Dans ce cas-ci

$$\int\limits_0^{\infty} \|B\,(x)\|\,dx < \infty.$$

Supposons pour un certain j et tout k : $\operatorname{Re}(p_j\,(x) - p_k\,(x))$ ne change pas de signe pour $x \gg 1$. Alors (42) admet une solution de la forme

$$y_j\,(x) = \exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} p_j\,(t)\,dt\right\}[f_j + u_j(x)]\,,$$

$$\lim_{x \to \to \infty} \|u_j(x)\| = 0.$$

Si la condition ci-dessus est satisfaite pour tout j, alors les solutions $y_1(x), ..., y_n(x)$ forment un SFS. Ce résultat est dû à *Levinson.*

Le contre-exemple de $Perron$ est également approprié aux $systèmes\ L - diagonaux.$

3. *Systèmes L-diagonaux.* Dans le cas

$$\int_0^\infty \|B(x)\|^2 \, dx < \infty.$$

Pour tout j, k, supposons que

$$|\mathrm{Re}\,(p_j(x) - p_k(x))| \geq c > 0, \qquad x \gg 1.$$

Alors (43) admet une matrice fondamentale de la forme

$$Y(x) = [I + o(1)] \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} [\Lambda(t) + diagB(t)] \, dt \right\}.$$

Ce résultat est dû à $Hartman$ et $Wintner$. Il y a certaines améliorations des résultats du type $1 - 3$.

Tous les résultats de base jusqu'ici obtenus sont de la forme asymptotique des solutions de (2.51), peuvent être divisés en deux classes.

1) Par une substitution de la forme $y = T(x)z$, le système réduit à un du type $1 - 3$.

En général ceci peut être fait si toutes les valeurs propres de $A(x)$ ont le même ordre de la croissance et sont asymptotiquement simples, c.-à-d.,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_j(x)}{p_k(x)} = c_{j,k} \neq 0, 1, \infty, \qquad j \neq k.$$

En outre les vecteurs propres ne doivent pas trop rapidement tourner pour $x \gg 1$. Dans ce cas-ci le comportement asymptotique du SFS est régulier, c.-à-d., son terme principale peut être exprimée en termes de valeurs propres et vecteurs propres de $A(x)$.

2) Le matrice du système a la forme

$$A(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k},$$

là où $r \geq 0$ est un nombre entier, A_k sont les matrices constantes et la série converge pour $|x| > R$. La forme asymptotique du SFS a été obtenue en théorie analytique d'équations.

Tout ce qui a été dit, naturellement s'applique également à l'équation du nième ordre.

4.4 Conclusion

On conclut en dernier, que notre but principal est l'application de la methode BKW sur une equation diffférentielle ordinaire. L'analyse semi-classique, élaborée à partir des anciennes techniques d'équations différentielles ordinaires, à déjà pu produire des résultats inattendus, mais il reste encore beaucoup à faire pour expliciter davantage ces possibilités et surtout pour l'étendre aux problèmes à plusieurs dimension.

Bibliographie

[1] A. Zarzo, J.S. Dehesa, Spectral properties of solutions of hypergeometric-type differential equations, Mathematics (Leuven, Belgium, July 1992), J. Comput. Appl. Math. vol. 50 (1994) pp.613-623.

[2] B. Seddoug. Médiane Sup, Oujda, Équations différentielles.

[3] F. Rouvière, petit guide de Calcul Différentiel (2008).

[4] J. M. Rasoamanana, Résurgence des solutions BKW formelles d'une EDO singuli erement perturbée, D epartement de Math ematiques, UMR CNRS 6093, Universit d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex 01, France.

[5] J. Shinn, Perturbation Theory and the WKB Method, Report submitted to Prof. J. Oprea for Math 676, Fall 2010, vol 2.

[6] M. V. Fedoryuk, Asymptotique methode in analysis.

[7] V. NGOC San, Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités (1998).

[8] V. SMIRNOV, Cours de Mathématique Superieures (1975).