REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM (UMAB)

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M$^{\text{lle}}$. Rahou Djamila

THEME

Valeurs possibles de l'ordre de la croissance de certaines équations différentielles linéaires dans le domaine complexe

Soutenu le 26 / 06 / 2012 devant le Jury

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**UMAB**
Melle BERRIGHI Nacera	**Examinatrice**	**M.A.A**	**UMAB**
Mr HAMOUDA Saâda	**Encadreur**	**M.C.A**	**UMAB**

Année universitaire : 2011-2012

Table des matières

Introduction

Depuis plus de trois décennies, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna joue un rôle très important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaire dans le domaine complexe. Il y a beaucoup de résultats des recherches jusqu'à maintenant concernant les applications de la théorie de Rolphe Nevanlinna sur les équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières et méromorphes.
Considérons l'équation différentielle

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + A_0(z)f = 0$$

où $A_{n-1}(z), ...A_0(z)$ sont des fonctions entières avec $A_0(z) \not\equiv 0$, il est très connu que les solutions sont des fonctions entières. Dans [9], Frei a démontré que "*si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante alors il existe au plus p solutions linéairement indépendantes d'ordre fini*". En 1966, H.Wittich a démontré le résultat suivant : "*Les coefficients de l'équation différentielle*

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + p_0(z) f = 0 \tag{0.0.1}$$

sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions sont des fonctions entières d'ordre fini de croissance". En 1998 [12], G. G. Gundersen, M. Steinbart et S. Wang, ont trouvé toutes les valeurs possibles de l'ordre des solutions de cette équation. Récemment en 2010 [14], S. Hamouda a donné toutes les valeurs possibles de l'ordre des solutions l'équation différentielles

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z) e^z f^{(n-1)} + ... + p_0(z) e^z f = 0. \tag{0.0.2}$$

Dans ce mémoire, on va voir les similitudes et les différences entre les deux équations (0.0.1) et (0.0.2).
Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.
Le premier chapitre contient des rappels et définitions et propriétés sur la théorie de R. Nevanlinna et quelques préliminaires de la théorie de Wiman-Valiron, qu'on aura besoin par la suite.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des valeurs possible de l'ordre des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux.
La troisième chapitre est consacré à étudier la croissance des solutions de d'équation différentielles linéaire (0.0.2).

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 ([18], [23], [25], [36]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$, situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racines étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Posons*

$$\begin{aligned} N(r,a,f) &= N(r,\frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt + n(0,a,f)\log r, \\ \text{tel que } a &\neq \infty \text{ et } f \not\equiv a \in \mathbb{C}, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\log r. \tag{1.1.2}$$

$N(r,a,f)$ est appelée la fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$. Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$.

$$m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta, \qquad a \neq \infty, \tag{1.1.3}$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta. \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.1 *Pour tout $x > 0$ réel on définit*

$$\log^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

$m(r, a, f)$ est la fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.
On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \tag{1.1.6}$$

Exemple 1 :

1. Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$$\begin{cases} m(r, f) = \frac{r}{\pi}, \\ N(r, f) = 0 \end{cases} \implies T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = \frac{r}{\pi}.$$

2. Pour la fonction $f(z) = e^{3z^4}$, on a

$$\begin{cases} m(r, f) = 3\frac{r^4}{\pi}, \\ N(r, f) = 0 \end{cases} \implies T(r, f) = 3\frac{r^4}{\pi}.$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 (*[25], [18]*) *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurrant*

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}. \tag{1.2.1}$$

Alors

$$\forall a \in \mathbb{C} : T(r, a, f) = T(r, \frac{1}{f - a}) = T(r, f) - \ln|c_m| + \varphi(r, a), \tag{1.2.2}$$

où

$$|\varphi(r, a)| \leq \ln^+ |a| + \ln 2. \tag{1.2.3}$$

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 *Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.4}$$

Alors

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right). \tag{1.2.5}$$

Théorème de Jensen
[18] Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$. $a_1, ..., a_n$ des zéros, et $b_1, b_2, ..., b_n$ des pôles, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\le r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\le r} \ln\frac{r}{|a_j|}. \tag{1.2.6}$$

Lemme 1.2.1 *Soit f une fonction méromorphe avec $a-$point $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dans le disque $|z| \le 1$, tel que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < r$ étant compté avec son ordre de multiplicité.*

Alors
$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t}dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t}dt = \sum_{0<|\alpha_j|\le r} \ln\frac{r}{|\alpha_j|} \tag{1.2.7}$$

Démonstration de la proposition 1.2.1
On considère la fonction $h(z) = f(z)\, z^{-m}$.
Il est clair que $h(0) \neq 0$, et
$$m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$$

En fin,

i) Si $m > 0$ alors
$$n(0,0,f) = m \text{ et } n(0,\infty,f) = 0.$$

ii) Si $m < 0$ alors
$$n(0,0,f) = 0 \text{ et } n(0,\infty,f) = -m.$$

iii) Si $m = 0$ alors
$$n(0,0,f) = n(0,\infty,f) = 0.$$

Donc les fonctions f et h on les même zéros et même pôles dans $0 < |z| \le r$.
Le théorème de Jensen et lemme 1.2.1 on donne

$$\begin{aligned}
\ln|C_m| &= \ln|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right) r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\le r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\le r} \ln\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta - m\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t}dt \\
&\quad - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|C_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta-\left[n\left(0,0,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)\right]\ln r \\
&\quad+\int_0^r\frac{n\left(t,\infty,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)}{t}dt-\int_0^r\frac{n\left(t,0,f\right)-n\left(0,0,f\right)}{t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+\int_0^r\frac{n\left(t,\infty,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)}{t}dt+n\left(0,\infty,f\right)\ln r \\
&\quad-\left[\int_0^r\frac{n\left(t,0,f\right)-n\left(0,0,f\right)}{t}dt+n\left(0,0,f\right)\ln r\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)
\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 1.2.1 :

1. Montrons le théorème pour $a=0$. D'après la proposition 1.2.1, on a

$$\ln|c_m|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

D'après les propriétés de $\left(\ln^+\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}d\theta+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= m\left(r,f\right)-m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,f\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right) \\
&= T\left(r,f\right)-T\left(r,\frac{1}{f}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)=T\left(r,f\right)-\ln|c_m|,$$

avec $\varphi\left(r,0\right)=0$

2. Montrons le théorème pour $a\neq 0$. Posons $h=f-a$, alors

$$\begin{aligned}
N\left(r,\frac{1}{h}\right) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right), \\
N\left(r,h\right) &= N\left(r,f-a\right)=N\left(r,f\right), \\
m\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{f-a}\right),
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\ln^+|h| &= \ln^+|f-a|\leq\ln^+|f|+\ln^+|a|+\ln 2. \\
\ln^+|f| &= \ln^+|f-a+a|=\ln^+|h+a| \\
&\leq \ln^+|h|+\ln^+|a|+\ln 2.
\end{aligned}$$

En intégrant les deux égalités de 0 à 2π, on trouve

$$\begin{aligned} m(r,h) &\leq m(r,f) + \ln^+|a| + \ln 2. \\ m(r,f) &\leq m(r,h) + \ln^+|a| + \ln 2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f).$$

Alors

$$\varphi|(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

D'après le $1^{er} cas$, on a

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{1}{h}\right) &= m\left(r,\frac{1}{h}\right) + N\left(r,\frac{1}{h}\right) \\ &= T(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\ &= m(r,f) + \varphi(r,a) + N(r,f) - \ln|c_m| \\ &= T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T(r,a,f) = T(r,\frac{1}{f-a}) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

Remarque 1.2.1 *([19], [27], [30]) Le premier théorème fondamental peut être exprimé comme suit*

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + \epsilon(r,a), \tag{1.2.8}$$

pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, où $\epsilon(r,a) = \bigcirc(1)$ quand $r \to +\infty$.

1.3 Propriétés de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Proposition 1.3.1 *Soit f_i $(i = 1, ..., n)$ des fonctions méromorphes, et a, b, c, d des constants complexe tels que $ad - bc \neq 0$. Alors*

1. $$T(r,\prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i), \quad n \geq 1. \tag{1.3.1}$$

2. $$T(r,f^n) = nT(r,f), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3.2}$$

3.
$$T(r, \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n. \tag{1.3.3}$$

4.
$$T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + \bigcirc(1), \quad f \not\equiv \frac{-d}{c}. \tag{1.3.4}$$

Démonstration :

1.
$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) = m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right),$$

$$\begin{aligned} m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r, f_i\right), \end{aligned}$$

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r, f_i\right).$$

Donc
$$T(r, \prod_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i).$$

2. On a

(a) $|f|^n \leq 1 \iff |f| \leq 1$.

(b) Si $|f| \leq 1$, alors
$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= N\left(r, f^n\right) = nN\left(r, f\right). \end{aligned}$$

(c) Si $|f| > 1$, alors
$$\begin{aligned} T\left(r, f^n\right) &= m\left(r, f^n\right) + N\left(r, f^n\right) \\ &= nm\left(r, f\right) + nN\left(r, f\right) \\ &= nT\left(r, f\right). \end{aligned}$$

3.
$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) = m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right),$$

On a

$$\begin{aligned} m\left(r,\sum_{i=1}^{n} f_i\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\left(f_i\left(re^{i\theta}\right)\right)\right| d\theta + \ln n \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r,f_i\right) + \ln n. \end{aligned}$$

$$N\left(r,\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r,f_i\right).$$

Donc

$$T(r,\sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r,f_i) + \ln n.$$

4. Soit

$$\begin{aligned} g &= \frac{af+b}{cf+d} = \frac{a\left(f+\frac{b}{a}\right)}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\left(\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{f+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{bc-ad}{ac}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\left(r,g\right) &= T\left(r,\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right) \\ &= T\left(r,\frac{bc-ad}{c^2}\left(\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)\right) + \bigcirc(1) \\ &= T\left(r,\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + \bigcirc(1) \\ &= T\left(r,f\right) + \bigcirc(1). \end{aligned}$$

1.4 L'ordre d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre de la croissance de f est définit par*

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \qquad (1.4.1) \\ &= \lim_{r\longrightarrow+\infty}\sup\frac{\log T(r,f)}{\log r}. \end{aligned}$$

On dit que la fonction f est d'ordre infini si

$$\overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=+\infty. \tag{1.4.2}$$

Définition 1.4.2 *([19], [28]) Soit f une fonction entière, alors l'ordre de f est définit par*

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\longrightarrow+\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}, \tag{1.4.3}$$

où

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|. \tag{1.4.4}$$

Proposition 1.4.1 *Soit f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

1.

$$\rho(f+g)\leq\max\{\rho(f),\rho(g)\}, \tag{1.4.5}$$

et

$$\rho(fg)\leq\max\{\rho(f),\rho(g)\}. \tag{1.4.6}$$

2. Si $\rho(g)<\rho(f)$, alors

$$\rho(f+g)=\rho(fg)=\rho(f). \tag{1.4.7}$$

Exemple 2 :

1. La fonction $f(z)=e^z$, alors $\sigma(e^z)=1$.
2. La fonction $f(z)=e^{P(z)}$, où $p(z)=a_pz^p+a_{p-1}z^{p-1}+...+a_0$, $\quad T(r,f)\sim\dfrac{|a_p|\,r^p}{\pi}$,alors $\rho(f)=p$.
3. La fonction $f(z)=e^{e^z}$, alors $\sigma\left(e^{e^z}\right)=\infty$.
4. Soit $f(z)=z^4+z^2+\dfrac{e^z}{z^2-1}$, alors $\rho(f)=\rho\left(\dfrac{e^z}{z^2-1}\right)=\rho(e^z)=1$.

1.5 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.5.1 *[18] On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty)$ par*

$$m(E)=\int_0^{+\infty}\chi_E(t)dt, \tag{1.5.1}$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E

Définition 1.5.2 *[18] La mesure logarithmique d'un ensemble $F\subset[1,+\infty)$ est donnée par*

$$lm(f)=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_F(t)}{t}dt. \tag{1.5.2}$$

Exemple 3 :

1. $E=[1,2]\subset[1,+\infty[;\quad m(E)=1, lm(E)=\ln 2$.
2. $E=[e,e^4]\subset[1,+\infty[;\quad m(E)=\int_1^{+\infty}\chi_E(t)dt=\int_e^{e^4}dt=e(e^3-1)$,

$lm(E)=\int_1^{+\infty}\chi_E(t)\dfrac{dt}{t}=\int_e^{e^4}\dfrac{dt}{t}=3$.

1.6 Le terme maximal et l'indice central

Définition 1.6.1 *[18] Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une fonction entière. Il est clair que si pour tout* $r > 0$*, la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge, alors pour tout* $r > 0$ *donné :*

$$\lim |a_n| r^n = 0,$$

et le terme maximal

$$\mu(r) = \mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n \tag{1.6.1}$$

est bien défini.

Définition 1.6.2 *[18] On définit l'indice central par*

$$V(r) = V(r, f) = \max_{n \geq 0} \{m : |a_m| r^m = \mu(r, f)\}. \tag{1.6.2}$$

Exemple 4 :

1. Soit le polynôme $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$, on a

$$\mu(r, p) = |a_n| r^n,$$

et

$$V(r, p) = n.$$

2. Soit $f(z) = e^z$. Donc le développement de f est $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Posons $a_n = \frac{1}{n!}$. On a

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $U_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. Étudiant la monotonie de la suite U_n. On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{r}{n+1}.$$

Donc U_n est décroissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, c'est à dire $n > [r] - 1$, où le crochet [] désigne la partie entier. La suite U_n est croissante si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, c'est à dire $n \leq [r] - 1$, d'où

$$\mu(r, f) = \frac{1}{[r]!} r^{[r]},$$

et par suite

$$V(r, f) = [r].$$

1.7 Théorème de Wiman-Valiron

Théorème 1.7.1 *[18] Soit $f \not\equiv 0$ une fonction entière, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $q = 1, 2, ..., n$ on a*

$$\frac{f^{(q)}(z_r)}{f(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V(r)}{z_r} \right)^q, \tag{1.7.1}$$

quand $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_0$, où z_r est un point dans le cercle $|z| = r$ qui satisfait

$$|f(z_r)| = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < \infty. \tag{1.7.2}$$

Chapitre 2

Les valeurs possibles de l'ordre des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients polynômiaux

2.1 Introduction et résultats

Pour $n \geq 2$, on considère l'équation différentielle linéaire

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + p_0(z)f = 0, \tag{2.1.1}$$

telles que $p_0(z), ..., p_{n-1}(z)$ sont des polynômes, avec $p_0(z) \not\equiv 0$.
Il est bien connu que toute solution de l'équation (2.1.1) est une fonction entière d'ordre rationnel fini (Voir [34],[32]).
Posons

$$\lambda = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\deg p_k}{n-k}. \tag{2.1.2}$$

Soit $\rho(f)$ désigne l'ordre d'une fonction entière f. Il est bien connu aussi [25] que toute solution f de l'équation (2.1.1) est d'ordre

$$\rho(f) \leq \lambda. \tag{2.1.3}$$

Afin de donner toutes les valeurs possibles de l'ordre de la croissance des solutions de l'équation (2.1.1) , G.Gundersen, M.Steinbart et S.Wang ont établi une sorte d'un organigramme comme suivant.
On commence par définir une suite strictement décroissante finie de nombres entiers positif ou nuls

$$s_1 > s_2 > ... > s_p \geq 0. \tag{2.1.4}$$

Dans la manière suivante : nous choisissons s_1 à être l'unique entier satisfaisant

$$\frac{d_{s_1}}{n-s_1} = \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{d_k}{n-k} \quad \text{et} \quad \frac{d_{s_1}}{n-s_1} > \frac{d_k}{n-k}, \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq s_1, \tag{2.1.5}$$

où

$$\begin{array}{lllll} d_j & = & \deg p_j & si \quad p_j \neq 0, & \\ d_j & = & -\infty & si \quad p_j = 0 & \text{pour tout} \quad 0 \leq j \leq n-1. \end{array}$$

pour s_j trouvé $j \geq 1$, on définie s_{j+1} comme étant l'unique entier s_1 satisfaisant

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j}}{s_j - s_{j+1}} & = & \max\limits_{0 \leq k \leq s_j} \dfrac{d_k - d_{s_j}}{s_j - k} > -1, & \\ \text{et} \quad \dfrac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j}}{s_j - s_{j+1}} & > & \dfrac{d_k - d_{s_j}}{s_j - k} & \text{pour tout } 0 \leq k \leq s_{j+1}. \end{array} \tag{2.1.6}$$

Pour un certain p, il existe un entier s_p, mais, il n'existe pas s_{p+1}, et ainsi la suite $s_1, s_2, ..., s_p$ se termine par s_p.
Il clair que $p \leq n$, et on voit aussi que (2.1.4) est vérifiée.
On définie pour $j = 1, 2, ..., p$.

$$\alpha_j = 1 + \frac{d_{s_j} - d_{s_{j-1}}}{s_{j-1} - s_j}. \tag{2.1.7}$$

où

$$s_0 = n \qquad et \qquad d_{s_0} = d_n = 0. \tag{2.1.8}$$

De (2.1.6) et (2.1.7), on observe que

$$\alpha_j > 0 \qquad \text{pour tout} \quad j,\, 1 \leq j \leq p.$$

On signale que les entiers $s_1, s_2, ..., s_p$ dans (2.1.4), peuvent aussi être exprimés de la manière suivante

$$s_1 = \min\left\{ j : \frac{d_j}{n-j} = \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{d_k}{n-k} \right\},$$

et pour trouvé $s_j,\ j \geq 1$, on a

$$s_{j+1} = \min\left\{ i : \frac{d_i - d_{s_j}}{s_j - i} = \max_{0 \leq k < s_j} \frac{d_k - d_{s_j}}{s_j - k} > -1 \right\}.$$

G.Gundersen, M.Steinbart et S.Wang ont établi les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 *[12] Pour l'équation* (2.1.1), *on a les résultats suivants*

(i) Si f est une solution transcendante de (2.1.1), alors

$$\rho(f) = \alpha_j \qquad\qquad \text{pour tout } j, 1 \leq j \leq p. \tag{2.1.9}$$

(ii) Si $s_1 \geq 1$ et $p \geq 2$, alors les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p \geq \frac{1}{s_{p-1} - s_p} \geq \frac{1}{s_1 - s_p} \geq \frac{1}{s_1}. \tag{2.1.10}$$

(iii) Si $s_1 = 0$ alors toute solution f non triviale de (2.1.1) satisfait

$$\rho(f) = 1 + \frac{d_0}{n}. \tag{2.1.11}$$

Corollaire 2.1.1 *Il existe au plus* (s_1+1) *valeur distinctes de l'ordre de la croissance des solutions transcendantes de l'équation* (2.1.1)*. De plus, si l'équation* (2.1.1) *admet* s_1+1 *solution transcendantes qui contient* s_1+1 *ordres distincts, alors ces* s_1+1 *valeurs doivent être les quantités suivantes*

$$1+\frac{d_{s_1}}{n-s_1}, 1+d_{s_1-1}-d_{s_1}, 1+d_{s_1-2}-d_{s_1-1}, ..., 1+d_0-d_1.$$

Et dans ce cas, il faut qu'on ait

$$d_{s_1}\leq d_{s_1-1}\leq ... \leq d_1\leq d_0.$$

Et d'après (2.1.4)*, on a*

$$s_1\leq n-1. \tag{2.1.12}$$

De (2.1.12) *et Théorème 2.1.1, on obtient le corollaire suivant.*

Corollaire 2.1.2 *Toute solution transcendante* f *de l'équation* (2.1.1) *satisfait*

$$\rho(f)\geq\frac{1}{n-1}. \tag{2.1.13}$$

Théorème 2.1.2 *[12] Pour tout* $j=1,2,...,p$*, il existe au plus* s_j *solutions linéairement indépendantes de* (2.1.1) *satisfaites*

$$\rho(f)<\alpha_j.$$

Du Théorème 2.1.2 et le fait que $s_1\leq n-1$, on obtient le résultat suivant

Corollaire 2.1.3 *pour une équation donnée sous la forme* (2.1.1)*, il existe toujours une solution d'ordre*

$$\rho(f)=\alpha_1.$$

Ce résultat montre aussi qu'il n'est pas possible qu'une équation sous la forme (2.1.1) possède seulement des solutions polynômiales. De plus, du Théorème 2.1.2 on observe que si $\rho(f)<\alpha_p$, alors f doit être un polynôme. De cela et du Théorème 2.1.2, en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4 *Il existe au plus* s_p *solutions polynômiales linéairement indépendantes de* (2.1.1)

Théorème 2.1.3 *[12] Supposons que chaque solution non triviale de* (2.1.1) *est une solution transcendante. Si* $\{f_1,f_2,...,f_{n-1},f_n\}$ *est un système fondamental de solutions de l'équation* (2.1.1)*, alors*

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(f_k)\geq n. \tag{2.1.14}$$

Ce résultat a été ensuite amélioré par G.Gundersen, M.Steinbart et S.Wang comme suit

Corollaire 2.1.5 *Si* $\{f_1, f_2, ..., f_{n-1}, f_n\}$ *est un système fondamentale de solutions de l'équation* (2.1.1), *alors*

$$\sum_{k=1}^{n} \rho\left(f_k\right) \geq n + d_0. \tag{2.1.15}$$

Exemple :
Pour l'équation différentielle

$$f''' - f'' + zf' - zf = 0.$$

admet $f_1 = e^z$ comme une solution, et d'après Corollaire 2.1.3, cette équation admet une solution f_2 d'ordre $\rho\left(f_2\right) = \frac{3}{2}$. Pour cette équation on a $p = 2, s_1 = 1, s_2 = 0, \alpha_1 = \frac{3}{2}$, et $\alpha_2 = 1$. Comme $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, et $\alpha_2 = 2$, d'après Théorème 2.1.2 et corollaire 2.1.5, il existe une solution f_3 d'ordre $\rho\left(f_3\right) = \frac{3}{2}$, avec $\{f_1, f_2, f_3\}$ est un système fondamental de solutions, qui vérifie l'inégalité $4 = 4$ dans (2.1.15).

Les démonstrations de ces théorèmes nécessitent les lemmes suivants.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 *Pour un entier* $j = 1, 2, ..., p-1$, *soit* α *un nombre réel satisfaisant* $\alpha > \alpha_{j+1}$, *et soit* k *un entier vérifiant* $0 \leq k \leq s_j$. *Alors*

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha. \tag{2.2.1}$$

Démonstration :
On

$$n - k + d_k + k\alpha = \left(n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha\right) + \alpha\left(k - s_j\right) + d_k - d_{s_j} + s_j - k.$$

On obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < (n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha) + \alpha_{j+1}(k - s_j) + d_k - d_{s_j} + s_j - k. \tag{2.2.2}$$

D'après la définition de α_{j+1} dans (2.1.7) on trouve

$$\alpha_{j+1}(k - s_j) + d_k - d_{s_j} + s_j - k = (k - s_j)(\frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j}}{s_j - s_{j+1}} - \frac{d_k - d_{s_j}}{s_j - k}). \tag{2.2.3}$$

On a $o \leq k < s_j$, d'après la définition de s_{j+1} dans (2.1.5) et (2.1.6)

$$\frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_j}}{s_j - s_{j+1}} \geq \frac{d_k - d_{s_j}}{s_j - k}. \tag{2.2.4}$$

De (2.2.3) et (2.2.4) on obtient

$$\alpha_{j+1}(k - s_j) + d_k - d_{s_j} - s_j - k \leq 0. \tag{2.2.5}$$

Lemme 2.2.2 *Pour tout $j = 1, 2, ..., p$, soit α un nombre réel satisfait $\alpha < \alpha_j$, et soit k un entier qui vérifie $s_j < k \leq n$, Alors*

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha. \tag{2.2.6}$$

Démonstration :
<u>1^{ere}*cas*</u> : Supposons que $s_j < k \leq s_{j-1}$. Dans ce cas, on utilise le même raisonnement de la démonstration du lemme 2.2.1
<u>2^{eme}*cas*</u> : Supposons que $s_{j-1} < k \leq n$, puisque $s_j < s_{j-1} < ... < s_1 < s_0 = n$ et $s_{j-1} < k \leq n$, pour $j \geq 2$ d'où, il existe un entier m, $1 \leq m \leq j-1$ tel que $s_{j-m} < k \leq s_{j-m-1}$.
D'après le théorème 2.1.1 (ii) on a

$$\alpha_j < \alpha_{j-1} < ... < \alpha_{j-m}, \tag{2.2.7}$$

Puisque $\alpha < \alpha_j$, on trouve $\alpha < \alpha_{j-m}$, en appliquent le 1^{ere}cas, on obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_{j-m} + d_{s_{j-m}} + s_{j-m}\alpha. \tag{2.2.8}$$

Maintenant, d'après l'application successive du 1^{ere}cas, on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{array}{rcll}
n - s_{j-1+}d_{s_{j-1}} + s_{j-1}\alpha & < & n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha, & \text{pour } \alpha < \alpha_j. \\
n - s_{j-2} + d_{s_{j-2}} + s_{j-2}\alpha & < & n - s_{j-1} + d_{s_j-1} + s_{j-1}\alpha, & \text{pour } \alpha < \alpha_{j-1}. \\
 & & ... \quad ... \quad ... & \\
n - s_{j-m} + d_{s_{j-m}} + s_{j-m}\alpha & < & n - s_{j-m+1} + d_{s_{j-m+1}} + s_{j-m+1}\alpha, & \text{pour } \alpha < \alpha_{j-m+1}.
\end{array}$$

D'après (2.2.7) et les inégalités présidentes (pour $\alpha < \alpha_j$), on obtient (2.2.1).

Lemme 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$. Alors pour chaque entier k satisfaisant $0 \leq k < s_p$, on obtient*

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_p + d_{s_p} + s_p\alpha. \tag{2.2.9}$$

Démonstration :
D'après (2.1.5) et (2.1.6) pour $k < s_p$

$$\frac{d_k - d_{s_p}}{s_p - k} \leq -1,$$

d'où

$$d_k - k \leq d_{s_p} - s_p,$$

car $k\alpha < s_p\alpha$ on obtient (2.2.9).

Lemme 2.2.4 *Soit α un nombre réel satisfaisant $\alpha > \alpha_1$ et k un entier qui vérifient $0 \leq k \leq s_1$. Alors*

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_1 + d_{s_1} + s_1\alpha. \tag{2.2.10}$$

Démonstration :
On a

$$n-k+d_k+k\alpha = (n-s_1+d_{s_1}+s_1+s_1\alpha)+\alpha(k-s_1)+d_k-d_{s_1}+s_1-k,$$

et de puis $\alpha > \alpha_1$, et $0 \leq k < s_1$, on obtient

$$n-k+d_k+k\alpha < (n-s_1+d_{s_1}+s_1\alpha)+\alpha_1(k-s_1)+d_k-d_{s_1}+s_1-k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\alpha_1(k-s_1)+d_k-d_{s_1}+s_1-k &= (1+\frac{d_{s_1}}{n-s_1})(k-s_1)-\frac{d_k}{n-k}(k-n)-(k-s_1)-d_{s_1} \\
&= (\frac{d_{s_1}}{n-s_1})(k-s_1)-\frac{d_k}{n-k}(k-s_1+s_1-n)-d_{s_1} \\
&= (\frac{d_{s_1}}{n-s_1}-\frac{d_k}{n-k})(k-s_1)+(\frac{d_{s_1}}{n-s_1}-\frac{d_k}{n-k})(s_1-n) \\
&= (\frac{d_{s_1}}{n-s_1}-\frac{d_k}{n-k})(k-n),
\end{aligned}$$

et d'après la définition de s_1 dans (2.1.5), on obtient

$$(\frac{d_{s_1}}{n-s_1}-\frac{d_k}{n-k})(k-n) < 0, \quad \text{Pour } 0 \leq k \leq s_1,$$

donc on obtient

$$n-k+d_k+k\alpha < n-s_1+d_{s_1}+s_1\alpha, \qquad \text{pour tout } 0 \leq k \leq s_1.$$

Lemme 2.2.5 *Supposons que $s_{m-j} \leq k < n$, où $1 \leq j \leq m-1$. Alors*

$$d_{s_{m-j-1}}+(s_{m-j-1}-k)(\alpha_{m-j}-1) \leq d_{s_{m-j}}+(s_{m-j}-k)(\alpha_{m-j+1}-1). \tag{2.2.11}$$

Démonstration :
Si $k = s_{m-j}$ alors (2.2.11) est définition de α_{m-j} dans (2.1.7). D'autre côté, si $s_{m-j} < k < n$, alors on utilise (2.1.7), on obtient (2.2.11)

$$\begin{aligned}
&\iff (s_{m-j-1}-k)(\alpha_{m-j}-1) \leq d_{s_{m-j}}-d_{s_{m-j-1}}+(s_{m-j}-k)(\alpha_{m-j+1}-1) \\
&\iff (s_{m-j-1}-k)(\alpha_{m-j}-1) \leq (s_{m-j-1}-s_{m-j})(\alpha_{m-j}-1)+(s_{m-j}-k)(\alpha_{m-j+1}-1) \\
&\iff (s_{m-j-1}-k)(\alpha_{m-j}-1) \leq (s_{m-j}-k)(\alpha_{m-j+1}-1) \\
&\iff \alpha_{m-j} \geq \alpha_{m-j+1}.
\end{aligned}$$

Qui est vrais grâce au Théorème 2.1.1 (ii).

Lemme 2.2.6 *Supposons que $s_m+1 \leq k < n$, pour deux entiers positifs m et k. Alors*

$$d_{s_{m-j-1}}+(s_{m-j-1}-k)(\alpha_{m-j}-1) \leq d_{s_{m-1}}+(s_{m-1}-k)(\alpha_m-1). \tag{2.2.12}$$

Démonstration :
Comme $s_{m-j} > s_{m-j+1} > ... > s_{m-1}$, en utilisent lemme 2.2.5, on obtient

$$\begin{aligned} d_{s_{m-j-1}} + (s_{m-j-1} - k)(\alpha_{m-j} - 1) &\leq d_{s_{m-j}} + (s_{m-j} - k)(\alpha_{m-j+1} - 1) \\ &\leq d_{s_{m-j+1}} + (s_{m-j+1} - k)(\alpha_{m-j+2} - 1) \\ &\leq ... \quad ... \quad ... \\ &\leq d_{s_{m-1}} + (s_{m-1} - k)(\alpha_m - 1). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.7 *Supposons que $s_m + 1 \leq k < n$. Pour m et k sont des entiers positifs, alors*

$$d_k \leq d_{s_{m-1}} + (s_{m-1} - k)(\alpha_m - 1). \tag{2.2.13}$$

Démonstration :
Si $s_m + 1 \leq k < s_{m-1}$, alors d'après la définition de s_m dans (2.1.6) et (2.1.7), on a

$$\frac{d_k - d_{s_{m-1}}}{s_{m-1} - k} \leq \frac{d_{s_m} - d_{s_{m-1}}}{s_{m-1} - s_m} = \alpha_m - 1.$$

D'autre côté, si $s_{m-1} \leq k < n$, alors $m \geq 2$ et $s_{m-j} \leq k < s_{m-j-1}$ pour tout $j = 0, 1, ..., m-1$. Alors par définition de s_{m-j} on obtient

$$\frac{d_k - d_{s_{m-j-1}}}{s_{m-j-1} - k} \leq \frac{d_{s_{m-j}} - d_{s_{m-1}}}{s_{m-j-1} - s_{m-j}} = \alpha_{m-j} - 1. \tag{2.2.14}$$

On utilise lemme 2.2.6 à (2.2.14) on a

$$d_k \leq d_{s_{m-j-1}} + (s_{m-j-1} - k)(\alpha_{m-j} - 1) \leq d_{s_{m-1}} + (s_{m-1} - k)(\alpha_m - 1).$$

Lemme 2.2.8 *Soit $f \not\equiv 0$ un fonction pour d'ordre fini β, et soit $k \geq 1$ est un nombre entier. Alors pour tout $\epsilon > 0$ on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq |z|^{k(\beta-1)+\epsilon}, \tag{2.2.15}$$

où $|z| \notin [0,1] \cup E, E \subset (1, \infty)$

Lemme 2.2.9 *Soient f et g deux solutions méromorphes linéairement indépendantes de l'équation suivante*

$$y^{(n)} + A_{n-1}(z)y^{(n-1)} + ... + A_1(z)y' + A_0(z)y = 0. \tag{2.2.16}$$

où $A_0(z), A_1(z), ..., A_{n-1}(z)$ sont des fonctions méromorphes. Soit $u = (f/g)'$. Alors $y = u(z)$ satisfait l'équation

$$y^{(n-1)} + B_{n-2}(z)y^{(n-2)} + ... + B_1(z)y' + B_0(z)y = 0,$$

où

$$B_j(z) = \sum_{k=j+1}^{n} \begin{pmatrix} k \\ j+1 \end{pmatrix} A_k(z) \frac{g^{(k-j-1)}(z)}{g(z)}, \qquad j = 0, 1, ..., n-2,$$

tels que $\begin{pmatrix} k \\ j+1 \end{pmatrix}$ les coefficients binomiales et $A_n(z) \equiv 1$.

Démonstration :
Soit $v = f/g$. Par substitution $f = vg$ dans l'équation (2.2.16), et noté $u = v'$,

Lemme 2.2.10 *Soit $f_{0,1}, f_{0,2}, ..., f_{0,m}$ $(m \geq 2)$ des solutions méromorphes linéairement indépendantes de l'équation sous la forme*

$$y^{(n)} + A_{0,n-1}(z)y^{(n-1)} + ... + A_{0,0}(z)y = 0, \quad n \geq m, \tag{2.2.17}$$

où $A_{0,0}(z), ..., A_{0,n-1}(z)$ sont des fonctions méromorphes. Pour $1 \leq q \leq m-1$ posons

$$f_{q,j} = \left(\frac{f_{q-1,j+1}}{f_{q-1,1}}\right)', \quad j = 1, 2, ..., m-q.$$

Alors $f_{q,1}, f_{q,2}, ..., f_{q,m-q}$ sont des $m-q$ solutions méromorphes linéairement indépendantes de l'équation

$$y^{(n-q)} + A_{q,n-q-1}(z)y^{(n-q-1)} + ... + A_{q,0}(z)y = 0. \tag{2.2.18}$$

où

$$A_{q,j}(z) = \sum_{k=j+1}^{n-q+1} \left(\begin{array}{c} k \\ j+1 \end{array} \right) A_{q-1,k}(z) \frac{\left(f_{q-1,1}\right)^{(k-j-1)}(z)}{f_{q-1,1}(z)}. \quad \textit{pour } j = 0, 1, ..., n-q-1. \tag{2.2.19}$$

Ici on a $A_{k,n-k}(z) \equiv 1$ pour tout $k = 0, 1, ..., q$. De plus, supposons que pour tout j, $j = 0, 1, ...n-1$, il existe $\tau_{0,j}$ un nombre réel telle que

$$|A_{0,j}(z)| \leq |z|^{\tau_{0,j}}, \quad |z| \notin E. \tag{2.2.20}$$

On pose $f_{0,j}$ telle que $\rho(f_{0,j})$ est finie. Soit $\beta = \max_{1 \leq j \leq m} \{\rho(f_{0,j})\}$ alors pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$|A_{q,j}(z)| \leq |z|^{\tau_{q,j}}, \quad |z| \notin E. \tag{2.2.21}$$

où

$$\tau_{q,j} = \max_{q+j \leq k \leq n} \{\tau_{0,k} + (k-q-1)(\beta+1) + \epsilon\}, \quad \textit{pour } \ j = 0, 1, ..., n-q-1. \tag{2.2.22}$$

Démonstration :
Premièrement, on suppose que $q = 1$, alors (2.2.19) est

$$A_{1,j}(z) = \sum_{k=j+1}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ j+1 \end{array} \right) A_{0,k}(z) \frac{f_{0,1}^{(k-j-1)}(z)}{f_{0,1}(z)}, \tag{2.2.23}$$

$$|A_{1,j}(z)| \leq \sum_{k=j+1}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ j+1 \end{array} \right) |A_{0,k}(z)| \left| \frac{f_{0,1}^{(k-j-1)}(z)}{f_{0,1}(z)} \right|. \tag{2.2.24}$$

Comme $\rho(f_{0,j}) \leq \beta$ de (2.2.15) et (2.2.20) et (2.2.24) respectivement qui (2.2.21) et (2.2.22) possède pour $q = 1$.

Pour indication par étape, on construit l'hypothèse pour $\epsilon > 0$ de (2.2.21) et (2.2.22) qui possède pour $q-1$, i.e

$$A_{q-1,j}(z) \leq |z|^{\tau_{q-1,j}}, |z| \notin E, \tag{2.2.25}$$

où

$$\tau_{q-1,j} = \max_{q-1+j \leq k \leq n} \{\tau_{0,j} + (k-q+1-j)(\beta-1)+\epsilon\}, \tag{2.2.26}$$

pour $j = 0, 1, ..., n-q$.
D'où (2.2.22) et (2.2.23) sont claires pour q.
D'après (2.2.25) et $\rho(f_{q-1,1}) \leq \beta$, on utilise les même argument par dessus de (2.2.20), et obtient

$$|A_{q,j}(z)| \leq |z|^{\mu_{q,j}}, |z| \notin E, \tag{2.2.27}$$

où

$$\mu_{q,j} = \max_{j+1 \leq k \leq n-q+1} \{\tau_{q-1,k} + (k-j-1)(\beta-1)+\epsilon\}. \tag{2.2.28}$$

De (2.2.28) et (2.2.26), on a

$$\begin{aligned} \mu_{q,j} &= \max_{j+1\leq k\leq n-q+1} \left\{ \begin{array}{r} \max\limits_{q-1+k\leq l\leq n} \{\tau_{0,l} + (l-q+1-k)(\beta-1)+\epsilon\} \\ +(k-j-1)(\beta-1)+\epsilon \end{array} \right\} \\ &\leq \max_{q+j\leq l\leq n} \{\tau_{0,l} + (l-q-j)(\beta-1)+2\epsilon\}. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

D'après (2.2.29), (2.2.28) et (2.2.27), on a remarque que et sont valables pour q.
Maintenant on traite le coefficient particulier $A_{q,0}(z)$ dans (2.2.19), pour utiliser dans la démonstration du lemme suivant. Du (2.2.19), on a

$$\begin{aligned} A_{q,0} &= A_{q-1,1} + \sum_{k=2}^{n-q+1} \binom{k}{1} A_{q-1,k} \frac{f_{q-1,1}^{(k-1)}}{f_{q-1,1}} \\ &= A_{q-2,2} + \sum_{k=3}^{n-q+2} \binom{k}{2} A_{q-2,k} \frac{f_{q-2,1}^{(k-2)}}{f_{q-2,1}} + \sum_{k=2}^{n-q+1} \binom{k}{1} A_{q-1,k} \frac{f_{q-1,1}^{(k-1)}}{f_{q-1,1}} \\ &= \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &= A_{0,q} + \sum_{k=q+1}^{n} \binom{k}{q} A_{0,k} \frac{f_{0,1}^{(k-q)}}{f_{0,1}} + \sum_{k=q}^{n-1} \binom{k}{q-1} A_{1,k} \frac{f_{1,1}^{(k-q+1)}}{f_{1,1}} \\ &\quad + \ldots + \sum_{k=3}^{n-q+2} \binom{k}{2} A_{q-2,k} \frac{f_{q-2,1}^{(k-2)}}{f_{q-2,1}} + \sum_{k=2}^{n-q+1} \binom{k}{1} A_{q-1,k} \frac{f_{q-1,1}^{(k-1)}}{f_{q-1,1}} \\ &= A_{0,q} + \sum_{j=2}^{q+1} H_j, \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

où

$$H_j(z) = \sum_{k=j}^{n-q+j-1} \binom{k}{j-1} A_{q-j+1,k}(z) \frac{f_{q-j+1,1}^{(k-j+1)}(z)}{f_{q-j+1,1}(z)}. \tag{2.2.31}$$

Alors on a les résultats suivants.

Lemme 2.2.11 *Sous les hypothèses du Lemme 2.2.11, on a*

$$A_{q,0}(z) = A_{0,q}(z) + G_q(z), \tag{2.2.32}$$

où

$$G_q(z) = \sum_{j=2}^{q+1} H_j(z) \quad \textit{avec} \quad H_j(z) \textit{ est définie dans } (2.2.31)\,.$$

De plus, $G_q(z)$ *vérifie*

$$|G_q(z)| \leq |z|^{\tau_q}\,, \quad |z| \notin E, \tag{2.2.33}$$

où

$$\tau_q = \max_{q+1\leq k\leq n} \{\tau_{0,k} + (k-q)(\beta-1) + \epsilon\}\,. \tag{2.2.34}$$

Démonstration :
Premièrement, notons que (2.2.32) c'est (2.2.30) et (2.2.31). Alors on a besoin de démontrer seulement (2.2.33) et (2.2.34).
Soit j, $2 \leq j \leq q+1$, d'après (2.2.31), on a

$$|H_j(z)| \leq \sum_{k=j}^{n-q+j-1} \begin{pmatrix} k \\ j-1 \end{pmatrix} |A_{q-j+1,k}(z)| \left| \frac{f_{q-j+1,1}^{(k-j+1)}(z)}{f_{q-j+1,1}(z)} \right|. \tag{2.2.35}$$

Comme $\rho\left(f_{q-j+1,1}\right) \leq \beta$, on obtient d'après (2.2.16) (2.2.22) et (2.2.35) que

$$|H_j(z)| \leq |z|^{\mu_j}\,, \quad |z| \notin E, \tag{2.2.36}$$

où

$$\mu_{q,j} = \max_{j\leq k\leq n-q+j-1} \{\tau_{q-j+1,k} + (k-j+1)(\beta-1) + \epsilon\}\,. \tag{2.2.37}$$

D'autre part, d'après (2.2.37) et (2.2.23), on a

$$\begin{aligned} \mu_{q,j} &= \max_{j\leq k\leq n-q+j-1} \left\{ \begin{array}{c} \max\limits_{q+k-j\leq l\leq n} \{\tau_{0,l} + (l-q-k+j-1)(\beta-1) + \epsilon\} \\ + (k-j+1)(\beta-1) + \epsilon \end{array} \right\} \\ &\leq \max_{q+1\leq l\leq n} \{\tau_{0,l} + (l-q)(\beta-1) + 2\epsilon\}\,. \end{aligned}$$

Comme $G_q(z) = \sum_{j=2}^{q+1} H_j(z)$, (2.2.33) et (2.2.34) est respectivement de (2.2.36) et (2.2.37)

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

(i) Soit f une solution entier transcendante de (2.1.1) .On a (voir [34], [32])

$$0 < \rho(f) < \infty. \tag{2.3.1}$$

De plus, si $V(r)$ est l'indice central de f, alors

$$V(r) = (1 + o(1))\, Cr^{\alpha}, \tag{2.3.2}$$

quand $r \longrightarrow +\infty$, où $\alpha = \rho(f)$ et C est constante positif d'après théorème de Wiman Valiron, il existe un ensemble $E_0 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour tout $q = 1, 2, ..., n$ on a

$$\frac{f^{(q)}(z_r)}{f(z_r)} = (1 + o(1)) \left(\frac{V(r)}{z_r} \right)^q, \tag{2.3.3}$$

quand $r \longrightarrow +\infty$, $|z| = r \notin E_0$, où z_r est un point dans le cercle $|z| = r$ qui satisfait

$$|f(z_r)| = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 < r < \infty.$$

Pour l'équation (2.1.1), pour tout k, $0 \leq k \leq n-1$, soit b_k coefficient principale du polynôme $p_k(z)$, et soit $a_k = C^k |b_k|$, où $C > 0$ (même constante dans (2.3.2), et $a_n = C^n$).
Divisions l'équation (2.1.1) par f, et substituons (2.3.3) et (2.3.2) dans (2.1.1), on obtient une équation dont le côté droit est nul et le côté gauche est la somme de $(n+1)$ termes dont le valeurs absolues sont asymptotiques ($r \longrightarrow +\infty, |z| = r \notin E_0$) aux $(n+1)$ termes suivants

$$a_n r^{n\alpha}, a_{n-1} r^{1+d_{n-1}+(n-1)\alpha}, ..., a_k r^{n-k+d_k+k\alpha}, ..., a_0 r^{n+d_0}. \tag{2.3.4}$$

Maintenant, d'après (2.1.1) et (2.1.3), l'ordre de solution de l'équation (2.1.1) est λ et $\lambda = \alpha_1$ (d'après (2.1.7) et (2.1.5)). D'où

$$\alpha \leq \alpha_1.$$

On pose que $\alpha_{j+1} < \alpha < \alpha_j$ pour tout $j = 1, 2, ..., p-1$, alors d'après le lemme 2.2.1 et lemme 2.2.2, on obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_j + d_{s_j} + s_j \alpha \quad \text{pour tout } k \neq s_j. \tag{2.3.5}$$

Mais d'après (2.3.5)et (2.3.4), il existe un seul terme (quand $r \longrightarrow +\infty, |z| = r \notin E_0$) dans l'équation (2.3.4). En particulier, il existe exactement un seul terme dans la relation (2.3.4) d'exposent $n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha$ où $a_{s_j} \neq 0$, tel que cet exposant est supérieur des exposent des autres termes dans l'équation (2.3.4), ce qui est impossible (contradiction).
D'autre part, on pose $\alpha < \alpha_p$, alors d'après le lemme 2.2.3 et le lemme 2.2.5, on obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_p + d_{s_p} + s_p\alpha, \qquad \text{pour tout } k \neq s_p. \tag{2.3.6}$$

De nouveau, même résultat par (2.3.6) est impossible, d'autre part
car :(2.3.4) il n'existe pas un seule terme dominant (quand $r \longrightarrow +\infty, |z| = r \notin E_0$)
donc, la seule valeur pour α de l'ordre de f sont $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$.
(ii) On démontre pour $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p$.
D'après $(2.1.4)$, $(2.1.5)$, $(2.1.6)$ et $(2.1.7)$, on obtient pour $j = 1, 2, ..., p-1$,

$$s_j > s_{j+1} \quad \text{et} \quad \frac{d_{s_j} - d_{s_{j-1}}}{s_{j-1} - s_j} > \frac{d_{s_{j+1}} - d_{s_{j-1}}}{s_{j-1} - s_{j+1}}.$$

On trouve

$$-d_{s_j} s_{j+1} - d_{s_{j-1}}(s_j - s_{j+1}) > d_{s_{j+1}}(s_{j-1} - s_j) - d_{s_j} s_{j-1}. \tag{2.3.7}$$

On ajoute $d_{s_j}s_j$ de les deux côté de (2.3.7) on a

$$\begin{aligned}\left(d_{s_j}-s_{j-1}\right)\left(s_j-s_{j+1}\right) &> \left(d_{s_{j+1}}-d_{s_j}\right)\left(s_{j-1}-s_j\right), \\ \frac{d_{s_j}-d_{s_{j-1}}}{s_{j-1}-s_j} &> \frac{d_{s_{j+1}}-d_{s_j}}{s_j-s_{j+1}}.\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

D'après la définition de α_j dans (2.1.7) et (2.3.8), on obtient directement que $\alpha_j > \alpha_{j+1}$ d'où $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_p$.
D'après (2.1.4), on a

$$\frac{1}{s_{p-1}-s_p} \geq \frac{1}{s_1-s_p} \geq \frac{1}{s_1}. \tag{2.3.9}$$

Pour compléter la démonstration du Théorème 2.1.1 (ii), on démontre

$$\alpha_p \geq \frac{1}{s_{p-1}-s_p}. \tag{2.3.10}$$

D'après (2.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d_{s_p}-d_{s_{p-1}}}{s_{p-1}-s_p} &> -1, \\ d_{s_p}-d_{s_{p-1}}+s_{p-1}-s_p &> 0.\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Comme le membre gauche de l'équation (2.3.11) est entier, on trouve que

$$d_{s_p}-d_{s_{p-1}}+s_{p-1}-s_p \geq 1.$$

Alors, en utilisant l'équation (2.1.7), on obtient la relation (2.3.10).
En simplifiant les équation (2.3.8) , (2.3.9) et (2.3.10), on obtient le Théorème 2.1.1 (ii) .
(iii) Pour démontrer (iii) on utilise le lemme 2.2.1.
Si $s_1 = 0$, alors toute solution non triviale de l'équation (2.1.1) est d'ordre égale à $1+\frac{d_0}{n}$.
Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe f une solution non triviale de l'équation (2.1.1) qui vérifie $\rho(f) < 1+\frac{d_0}{n}$.
Soit $\beta = \rho(f)$. Alors

$$\beta = 1+\frac{d_0}{n}-\tau, \tag{2.3.12}$$

où τ est une constante positive. On démontre que cela nous amène à une contradiction.
Comme $s_1 = 0$ et d'après (2.1.5) on obtient que

$$d_k \leq \frac{n-k}{n}d_0, \quad k = 1,2,...,n-1. \tag{2.3.13}$$

Et puisque f est une solution de l'équation (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}-p_0(z) &= \frac{f^{(n)}}{f}+p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f}+...+p_1(z)\frac{f'}{f}, \\ |p_0(z)| &\leq \sum_{k=1}^{n}\left|p_k(z)\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|,\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

où $p_n(z) \equiv 1$.
Comme $p_k(z)$ est un polynôme de degré d_k et β l'ordre de f, et d'après les relations (2.2.15) et (2.3.14), pour tout $\epsilon > 0$, on obtient

$$|p_0(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} |z|^{d_k + k(\beta-1)+2\epsilon}, \quad |z| \notin E. \tag{2.3.15}$$

D'après (2.3.12), (2.3.13) et (2.3.15), on a

$$\begin{aligned} |p_0(z)| &\leq \sum_{k=1}^{n} |z|^{d_0 - k\tau + 2\epsilon} \\ &\leq n\,|z|^{d_0 - \tau + 2\epsilon}, \qquad |z| \notin E. \end{aligned}$$

En posant $2\epsilon < \tau$, on obtient une contradiction, car : $d_0 = \deg p_0(z)$.
D'où la démonstration du Théorème 2.1.1 (iii) est achevée.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

Supposons le contraire, i.e. on suppose que pour un certain entier m $(1 \leq m \leq p)$ l'équation (2.1.1) admet $s_m + 1$ solutions linéairement indépendantes avec l'ordre inférieur de α_m. On montre que cette hypothèse mène à une contradiction.
On considère deux cas.
$\underline{Cas\ (i)}$: Supposons que $s_m \geq 1$.
On note s_m+1 la solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.1.1) avec $f_{0,1}, f_{0,2}, ..., f_{0,s_m+1}$, et on définit β l'ordre maximum de ces $s_m + 1$ solutions. Alors on a

$$\beta = \max_{1 \leq k \leq s_m+1} \{\rho(f_{0,k})\} < \alpha_m. \tag{2.4.1}$$

On note $A_{0,k}(z) = p_k(z)$, pour $k = 1, 2, ..., n-1$.
Maintenant on utilise la méthode de la réduction de l'ordre de que l'équation (2.1.1), en utilise les solution de (2.1.1) et le Lemme 2.2.10 pour $1 \leq q \leq s_m$, on a

$$f_{q,j} = \left(\frac{f_{q-1,j+1}}{f_{q-1,1}}\right)', \quad j = 1, 2, ..., s_m + 1 - q. \tag{2.4.2}$$

D'après le lemme 2.2.10 : $f_{q,1}, f_{q,2}, ..., f_{q,s_m+1-q}$ sont des solutions méromorphes linéairement indépendantes de l'équation (2.1.1) ; on prend $q = s_m$ et on utilise (2.4.1) et lemme 2.2.10, on obtient la que fonction $f = f_{s_m,1}(z)$ est une solution non triviale de l'équation de la forme

$$f^{(n-s_m)} + A_{s_m,n-s_m-1}(z) f^{(n-s_m-1)} + ... + A_{s_m,0}(z) f = 0, \tag{2.4.3}$$

où les coefficients $A_{s_m,n-s_m-1}(z), ..., A_{s_m,0}(z)$ sont des fonctions méromorphes telles que pour $\epsilon > 0$, on a

$$|A_{s_m,j}(z)| \leq |z|^{\tau_{s_m,j}}, \quad |z| \notin E, \tag{2.4.4}$$

avec

$$\tau_{s_m,j} = \max_{s_m+j\leq k\leq n} \{d_k + (k - s_m - j)(\beta - 1) + \epsilon\}, \tag{2.4.5}$$

Pour $j = 1, 2, ..., n - s_m - 1$, et $d_k = \deg p_k(z) = \deg A_{0,k}(z)$.
On note $\rho(f_{s_m,1}) \leq \beta$,d'où, d'après (2.4.4), (2.4.5) et (2.2.16) respectivement pour $j = 0, 1, ..., n - s_m - 1$

$$\left| A_{s_m,j}(z) \frac{f^{(j)}_{s_m,1}(z)}{f_{s_m,1}(z)} \right| \leq |z|^{\rho_j}, \quad |z| \notin E, \tag{2.4.6}$$

où

$$\rho_j = \max_{s_m\leq k\leq n} \{d_k + (k - s_m)(\beta - 1) + 2\epsilon\}. \tag{2.4.7}$$

D'autre parts, d'après (2.4.8), on a

$$-A_{s_m,0}(z) = \frac{f^{(n-s_m)}_{s_m,1}}{f_{s_m,1}} + \sum_{j=1}^{n-s_m-1} A_{s_m,j}(z) \frac{f^{(j)}_{s_m,1}}{f_{s_m,1}}. \tag{2.4.8}$$

Donc, d'après (2.4.6) (2.4.7) et (2.4.8), on obtient

$$|A_{s_m,0}(z)| \leq |z|^{\eta}, \quad |z| \notin E, \tag{2.4.9}$$

où

$$\eta = \max_{s_m+1\leq k\leq n} \{d_k + (k - s_m)(\beta - 1) + 2\epsilon\}. \tag{2.4.10}$$

De plus, d'après le lemme 2.2.11, on a

$$A_{0,s_m}(z) = A_{s_m,0}(z) - G_{s_m}(z), \tag{2.4.11}$$

où $G_{s_m}(z)$ satisfaisant les relations (2.2.33) et (2.2.34) en remplaçant q par s_m, d'où d'après (2.4.9), (2.4.11), (2.2.33) et (2.2.34) ($q = s_m$) on obtient

$$|A_{0,s_m}(z)| \leq |z|^{\eta}, \quad |z| \notin E, \tag{2.4.12}$$

où η est une constante dans l'équation (2.4.10). On note $\tau_{0,k} = d_k + \epsilon$ dans (2.2.34).
En fin, on va montrer que (2.4.12) méne à une contradiction.
Pour cela, on démontre que pour tout k vérifiant $s_m + 1 \leq k \leq n$, alors

$$d_k + (k - s_m)(\beta - 1) \leq d_{s_m} - \alpha, \tag{2.4.13}$$

où $\alpha = \alpha_m - \beta > 0$, d'après (2.4.1).
Si (2.4.13) est bien définie, alors on obtient directement une contradiction (d'après les équations (2.4.13), (2.4.12) et (2.3.15)), on obtient $|A_{0,s_m}(z)| \leq |z|^{d_{s_m}-\alpha+2\epsilon}$. Ce qui impossible lorsque $2\epsilon < \alpha$, car $A_{0,s_m}(z) = p_{s_m}(z)$ est polynôme de degré d_{s_m}.
Pour prouver (2.4.13), on utilise lemme 2.2.6 et lemme 2.2.7.
On considère le cas $s_m + 1 \leq k \leq n$ et $k = n$.

Si $s_m + 1 \leq k \leq n$, d'après le lemme 2.2.7 et définition de α_m dans (2.1.6), on obtient

$$\begin{aligned} d_k + (k - s_m)(\beta - 1) &\leq d_{s_{m-1}}(s_{m-1} - k)(\alpha_m - 1) + (k - s_m)(\beta - 1) \\ &= d_{s_m} - \alpha(k - s_m) \\ &\leq d_{s_m} - \alpha. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

D'autre côté, d'après le lemme 2.2.6 et la définition de dans (2.1.6) on obtient

$$(n - s_m)(d_{s_m} - d_{s_{m-1}}) \leq (s_{m-1} - s_m)\, d_{s_m}.$$

Pour $d_n = 0$, on a

$$\begin{aligned} d_n + (n - s_m)(\beta - 1) &= (n - s_m)(\alpha_m - 1) - \alpha(n - s_m) \\ &\leq (n - s_m)\frac{d_{s_m} - d_{s_{m-1}}}{s_{m-1} - s_m} - \alpha \\ &\leq d_{s_m} - \alpha. \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Par (2.4.15) et (2.4.14) on obtient (2.4.13) pour tout $s_m + 1 \leq k \leq n$.
Donc on démontrer (2.4.13), d'où à complété la démonstration de cas (i).
$\underline{Cas(ii)}$: Supposons $s_m = 0$
Dans ce cas, $m = p$ et $s_p = 0$; ainsi, on a besoin de montrer que l'équation (2.1.1) n'admet pas une solution non triviale de l'ordre inferieure à α_p.
En fin, on suppose qu'il existe une solution $f_0 \not\equiv 0$ de (2.1.1) avec $\rho(f_0) < \alpha_p$, alors par Théorème 2.1.1 (i), il faut que f_0 soit un polynôme.
D'après (2.1.1), on obtient

$$-p_0(z) = p_1(z)\frac{f_0'}{f_0} + ... + p_{n-1}(z)\frac{f_0^{(n-1)}}{f_0} + \frac{f_0^{(n)}}{f_0}. \tag{2.4.16}$$

Depuis f_0 est un polynôme, de (2.4.16) , on a

$$d_0 \leq \max_{1\leq k\leq n-1}\{d_k - k\}. \tag{2.4.17}$$

En utilisant le lemme 2.2.6 avec $m = p$ on obtient

$$d_k \leq d_{s_{p-1}} + (s_{p-1} - k)(\alpha_p - 1), \quad \text{Pour tout } 1 \leq k \leq n - 1. \tag{2.4.18}$$

Comme $s_p = 0$. donc d'après (2.4.18) et la définition de α_p dans (2.1.6) et la valeur de $s_p = 0$, on obtient pour tout $1 \leq k \leq n - 1$

$$\begin{aligned} d_n - k &\leq d_{s_{p-1}} - k + (s_{p-1} - k)(\alpha_p - 1) \\ &= d_0 + \frac{k}{s_{p-1}}(d_{s_{p-1}} - d_0 - s_{p-1}). \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Puisque $\alpha_p > 0$ et $s_p = 0$, la définition de α_p dans (2.1.6) que $d_{s_{p-1}} < s_{p-1} + d_{0.}$
Donc, d'après (2.4.19) on obtient

$$d_k - k < d_0 \quad \text{pour tout } k = 0, 1, ..., n - 1.$$

Contradiction avec (2.4.17) .
Cela démontre le cas (ii), et qui complète la démonstration du Théorème 2.1.2.

Chapitre 3

La croissance des solutions d'une classe d'équation différentielles linéaire à coefficients entiers

3.1 Introduction et résultats

Dans ce chapitre, on va étudier les valeurs possibles de l'ordre des solutions de l'équation différentielles suivantes

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z)e^z f^{(n-1)} + ... + p_0(z)e^z f = 0, \tag{3.1.1}$$

où $p_0(z) \not\equiv 0, ..., p_{n-1}(z)$ sont des polynômes. On va voir qu'il y a des ressemblances et des différences entre cette équation et l'équation étudiée dans le deuxième chapitre de coefficients polynomiaux. Pour $n \geq 2$, voir [15] on considère l'équation différentielle linéaire

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + ... + A_0(z)f = 0, \tag{3.1.2}$$

où $A_0(z), .., A_{n-1}(z)$ sont des fonctions entières avec $A_0(z) \not\equiv 0$. Il est bien connu que toutes les solutions de l'équation (3.1.2) sont des fonctions entières. Dans [9] Frei a démontré que si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante alors il existe au plus p solutions linéairement indépendante d'ordre fini. En appliquant ce résultat à notre équation (3.1.1), on en déduit que cette équation possède aux plus $n-1$ solutions linéairement indépendante d'ordre fini ; ce qui veut dire que cette équation admet au moins une solution d'ordre infini. D'autre coté, cette équation peut avoir une solution polynômiale, par exemple $f(z) = z^2$ est une solution de l'équation différentielle $f^{(3)} + z^2e^z f^{(2)} - 2e^z f = 0$.
Désignons $n' \leq n-1$ le plus grand entier tel que $p_{n'}(z) \not\equiv 0$ dans (3.1.1), si $n' \geq 1$, on définit une suite strictement décroissante finie des nombres entiers positifs ou nuls

$$s'_1 > s'_2 > ... > s'_q \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Dans la manière suivante : nous choisissons s'_1 à être l'unique entier satisfaisant

$$\frac{d_{s'_1} - d_{n'}}{n' - s'_1} = \max_{0 \leq k \leq n'-1} \frac{d_k - d_{n'}}{n' - k} > -1, \tag{3.1.4}$$

$$\text{et} \qquad \frac{d_{s'_1} - d_{n'}}{n' - s_1} > \frac{d_k - d_{n'}}{n' - k} \qquad \text{pour tout } 0 \leq k \leq s'_1.$$

pour s'_j trouvé, $j \geq 1$ on définie s'_{j+1} comme étant l'unique entier satisfaisant

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{d_{s'_{j+1}} - d_{s'_j}}{s'_j - s'_{j+1}} & = & \max\limits_{0 \leq k < s'_j} \dfrac{d_k - d_{s'_j}}{s'_j - k} > -1, & (3.1.5) \\ \text{et} \quad \dfrac{d_{s'_{j+1}} - d_{s'_j}}{s'_j - s'_{j+1}} & > & \dfrac{d_k - d_{s'_j}}{s'_j - k} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq k \leq s'_{j+1}. & \end{array}$$

comme ci dessus, cette suite se termine par s'_q et il est claire que $q \leq n'$.
On définie pour $j = 1, ..., q$.

$$\begin{array}{rcll} \alpha'_j & = & 1 + \dfrac{d_{s'_j} - d_{s'_{j-1}}}{s'_{j-1} - s'_j}, & (3.1.6) \\ \text{ou} \quad s'_0 & = & n' \qquad \text{et} \qquad \alpha'_1 > \alpha'_2 > ... > \alpha'_q > 0. & \end{array}$$

On signale que les entiers $s'_1, s'_2, ..., s'_q$ dans (3.1.3), peuvent aussi être exprimés de la manière suivante

$$s'_1 = \min \left\{ j : \frac{d_j - d_{n'}}{n' - j} = \max_{0 \leq k \leq n'-1} \frac{d_k - d_{n'}}{n' - k} \right\}.$$

et pour trouvé $s'_j, j \geq 1$, on

$$s'_{j+1} = \min \left\{ i : \frac{d_i - d_{s'_j}}{s'_j - i} = \max_{0 \leq k < s'_j} \frac{d_k - d_{s'_j}}{s'_j - k} > -1 \right\}.$$

S. Hamouda a établi les résultats suivants.

Théorème 3.1.1 *[14] Si* (3.1.1) *admet une solution transcendante de l'ordre finie α, alors*

$$\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\} \cup \{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_q\}, \tag{3.1.7}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_q$ sont définis dans (2.1.7) et (3.1.6).

Remarque 3.1.1 *Il se peut que certaines valeurs de $\{\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_q\}$ sont égales à certaines valeurs de $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\}$ et globalement on a n valeurs distinctes. Plus précisément, si $s_1 = n'$ alors $\alpha_{k+1} = \alpha'_k$ pour tout entiers $k, 1 \leq k \leq q$; et si $s_1 \neq n'$ et $s_i = s'_j$ pour tout entiers i, j, alors $\alpha_{i+k} = \alpha'_{j+k}$ pour tout pour tout k, $1 \leq k \leq q - j$.*

Exemple 1 :
Pour l'equation $f^{(3)} + ze^z f'' + (4z^3 + 3z^2)\, e^z f' - 4z^4 f = 0$, on a
$n = 3$, $d_0 = 4$, $d_1 = 3$, $d_2 = 1$, alors $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $\alpha_1 = \frac{5}{2}$, $\alpha_2 = 2$, $p = 2$, et $s'_1 = 1$, $s'_2 = 0$, $\alpha'_1 = 3$, $\alpha'_2 = 2$, $q = 2$.

Théorème 3.1.2 *[14] Si $s_1 = 0$, alors toute solution non triviale de* (3.1.1) *satisfait*

$$\rho(f) \geq 1 + \frac{d_0}{n}. \tag{3.1.8}$$

La question qui se pose ici c'est : est-ce-qu' il y a des cas de (3.1.1) qui vérifie que toute solution non triviale est d'ordre infini.
La réponse est positive, comme indique l'exemple suivant :
Exemple 2 :
Chaque solution non triviale de l'équation différentielle

$$f^{(n)} + p_0(z)e^z f = 0$$

est d'ordre infini, où $p_0(z) \not\equiv 0$ est un polynôme. En fait, si on suppose que $f \not\equiv 0$ est d'ordre fini, alors en utilisant $e^z = -\frac{1}{p_0(z)}\frac{f^{(n)}}{f}$, on obtient que

$$\begin{aligned} T\left(r, e^z\right) &= T\left(r, -\frac{1}{p_0(z)}\frac{f^{(n)}}{f}\right) \\ &\leq T\left(r, -\frac{1}{p_0(z)}\right) + T\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right). \end{aligned}$$

et $T\left(r, -\frac{1}{p_0(z)}\right) = T\left(r, p_0(z)\right) + O(1) = O(\log r)$ (car $N(r, p_0(z)) = n\log r + O(1)$ et $m(r, p_0(z)) = O(1)$). On a aussi $T(r, \frac{f^{(n)}}{f}) = O(\log r)$,
donc $T(r, e^z) = O(\log r)$, est une contradiction.

Théorème 3.1.3 *[14] Si $s_p = 0$, alors $f \not\equiv 0$ n'est pas solution polynomiale de* (3.1.1)

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1 *Soit α un nombre réel satisfaisant $\alpha > \alpha_1$, et k un entier qui vérifie $0 < k < n'$ (n' est le plus grand entier) tel que $p_{n'}(z) \not\equiv 0$ dans* (3.1.1).

Si $s_1 < n'$ et $\dfrac{d_{s_1}}{n - s_1} = \dfrac{d_{n'}}{n - n'}$. Alors

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha. \tag{3.2.1}$$

Démonstration :
On a

$$n - k + d_k + k\alpha = n - n' + d_{n'} + n'\alpha + \alpha(k - n') + d_k - d_{n'} + n' - k.$$

Et puis que $\alpha > \alpha_1$ et $0 \leq k < n'$, on obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha + \alpha_1(k - n') + d_k - d_{n'} + n' - k,$$

et on a

$$\begin{aligned}
\alpha_1(k-n') + d_k - d_{n'} + n' - k &= \frac{d_{s_1}}{n-s_1}(k-n') + d_k - d_{n'} \\
&= \frac{d_{s_1}}{n-s_1}(k-n) + \frac{d_{s_1}}{n-s_1}(n-n') + d_k - d_{n'} \\
&= \frac{d_{s_1}}{n-s_1}(k-n) + \frac{d_{n'}}{n-n'}(n-n') + d_k - d_{n'} \\
&= \frac{d_{s_1}}{n-s_1}(k-n) + d_k \\
&= (\frac{d_{s_1}}{n-s_1} - \frac{d_k}{n-k})(k-n) \leq 0.
\end{aligned}$$

Pour tout k satisfaisant $0 \leq k < n'$ donc

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha.$$

Lemme 3.2.2 *Si* $s_1 < n'$ *et* $\frac{d_{s_1}}{n-s_1} > \frac{d_{n'}}{n-n'}$. *Alors*

$$\alpha'_1 > \alpha_1. \tag{3.2.2}$$

Démonstration :
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{d_{s_1}}{n-s_1} > \frac{d_{n'}}{n-n'} &\Longleftrightarrow d_{s_1} - \frac{n'-s_1}{n-s_1} d_{s_1} > d_{n'} \\
&\Longleftrightarrow d_{s_1} - d_{n'} > \frac{n'-s_1}{n-s_1} d_{s_1} \\
&\Longleftrightarrow \frac{d_{s_1} - d_{n'}}{n'-s_1} > \frac{d_{s_1}}{n-s_1}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\max_{0 \leq k < n'} \frac{d_k - d_{n'}}{n'-k} > \frac{d_{s_1}}{n-s_1},$$

et aussi

$$\alpha'_1 > \alpha_1.$$

Lemme 3.2.3 *Si* $\alpha'_1 > \alpha_1$, *alors pour* $\alpha > \alpha'_1$ *et* $0 \leq k < n'$, *on a*

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha. \tag{3.2.3}$$

Démonstration :
On a

$$n - k + d_k + k\alpha = (n - n' + d_{n'} + n'\alpha) + \alpha(k - n') + d_k - d_{n'} + n' - k,$$

et de $\alpha > \alpha'_1$ et $0 \leq k < n'$, on obtient

$$n - k + d_k + k\alpha < (n - n' + d_{n'} + n'\alpha) + \alpha_1(k - n') + d_k - d_{n'} + n' - k,$$

et on a

$$\begin{aligned} \acute{\alpha}_1(k-\acute{n})+d_k-d_{\acute{n}}+n-k &= (\frac{d_{\acute{s}_1}-d_{\acute{n}}}{\acute{n}-\acute{s}_1})(k-\acute{n})+d_k-d_{\acute{n}} \\ &= (\frac{d_{\acute{s}_1}-d_{\acute{n}}}{\acute{n}-\acute{s}_1}-\frac{d_k-d_{\acute{n}}}{\acute{n}-k})(k-\acute{n}) \leq 0. \end{aligned}$$

Pour tout k satisfaisant $0 \leq k \leq \acute{n}$, donc

$$n-k+d_k+k\alpha < n-\acute{n}+d_{\acute{n}}+\acute{n}\alpha.$$

En utilisant les mêmes démonstrations de lemme 2.2.1 et lemme 2.2.2, on peut démontrer les lemmes suivantes.

Lemme 3.2.4 *Pour tout $j = 0, 1, ..., q-1$, fixée, soit α un nombre réel vérifies $\alpha > \acute{\alpha}_{j+1}$, soit k un entier satisfaisant $0 \leq k < \acute{s}_j$. Alors*

$$n-k+d_k+k\alpha < n-\acute{s}_j+d_{\acute{s}_j}+\acute{s}_j\alpha. \tag{3.2.4}$$

Lemme 3.2.5 *Pour tout $j = 1, 2, ..., q$ fixé, soit α un nombre réel vérifies $\alpha < \acute{\alpha}_j$, et soit k un entier vérifies $\acute{s}_j < k < \acute{n}$. Alors*

$$n-k+d_k+k\alpha < n-\acute{s}_j+d_{\acute{s}_j}+\acute{s}_j\alpha. \tag{3.2.5}$$

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1

Supposons que (3.1.1) admet une solution transcendantale f d'ordre fini $\rho(f) = \alpha$.
À partir de (3.1.1), on a

$$e^{-z}\frac{f^{(n)}}{f}+p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f}+...+p_1(z)\frac{f'}{f}+p_0(z)=0. \tag{3.3.1}$$

Si $V(r)$ désigne l'indice central des f, alors

$$V(r) = (1+o(1))Cr^{\alpha}. \tag{3.3.2}$$

Quand $r \longrightarrow +\infty$, où C est une constante positive. En outre, à partir de la Théorie de Wiman-Valiron il s'ensuit qu'il existe un ensemble $E_0 \subset [1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour tout $j = 1, 2, ..., n$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z_r)}{f(z_r)} = (1+o(1))(\frac{V(r)}{z_r})^j. \tag{3.3.3}$$

Quand $r \longrightarrow +\infty$, $r \notin E_0$, où z_r est un point sur le cercle $|z_r| = r$ qui satisfait :

$$|f(z_r)| = \max_{|z|=r}|f(z)| \qquad 0 < r < \infty.$$

Soit b_k le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $p_k(z)$ et posons $a_k = C^k\,|b_k|$, où $C > 0$ est la constante dans (3.3.2) et posons $a_n = C^n$.

En remplacent (3.3.3)et (3.3.2) dans(3.3.1) et multipliant les deux côtés par z_r^n on obtient une équation dont le côté gauche se compose de la somme de $n+1$ termes de modules asymptotiques (quant $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$), aux $n+1$ termes suivants

$$e^{-r\cos\theta_r} a_n r^{n\alpha}, a_{n-1} r^{1+d_{n-1}+(n-1)\alpha}, ..., a_k r^{n-k+d_k+k\alpha}, ..., a_0 r^{n+d_0}. \tag{3.3.4}$$

On va discuter trois cas en fonction de la limite de $e^{-r\cos\theta_r}$.
<u>$1^{ere}cas$</u> : $\overline{\lim\limits_{r\longrightarrow\infty}} e^{-r\cos\theta_r} = \infty$, dans se cas $e^{-r\cos\theta_r} a_n r^{n\alpha}$ est le terme unique dominant (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$) dans(3.3.4), ce qui est impossible.
<u>$2^{eme}cas$</u> : $\overline{\lim\limits_{r\longrightarrow+\infty}} e^{-r\cos\theta_r} = c$,où $0 < c < \infty$, ou $\alpha_{j+1} < \alpha < \alpha_j$ pour certaine $j = 1, 2, ..., p-1$, alors d'après le lemme 2.2.1 et lemme 2.2.2,on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_j + d_{s_j} + s_j\alpha.$$

pour tout $k \neq s_j$, alors $a_{s_j} r^{n-s_j+d_{s_j}+s_j\alpha}$ est le terme unique dominant (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$) dans (3.3.4) ce qui impossible aussi. Maintenant si $0 < \alpha < \alpha_p$ alors d'après le lemme 2.2.2 et lemme 2.2.3, on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n - s_p + d_{s_p} + s_p\alpha.$$

pour tout $k \neq s_p$, alors $a_{s_p} r^{n-s_p+d_{s_p}+s_p\alpha}$ est le terme unique dominant (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$) dans (3.3.4) ce qui donne une contradiction dans (3.3.1). Finalement si $\alpha > \alpha_1$ alors d'après le lemme 2.2.2, on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n\alpha. \tag{3.3.5}$$

pour tout $0 \leq k < n$, alors $e^{-r\cos\theta_r} a_n r^{n\alpha}$ est le terme unique dominant (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$) dans (3.3.4). Aussi, ce qui conduit a une contradiction (3.3.1).
<u>$3^{eme}cas$</u> : $\overline{\lim\limits_{r\longrightarrow\infty}} e^{-r\cos\theta_r} = 0$. Si $0 < \alpha < \alpha_p$ ou $\alpha_{j+1} < \alpha < \alpha_j$ pour tout $j = 1, 2, ..., p-1$, on trouve la même contradiction que le $2^{eme}cas$.
Maintenant si $\alpha > \alpha_1$, bien que on a (3.3.5), $e^{-r\cos\theta_r} a_n r^{n\alpha}$ n'est pas le terme dominant par ce que

$$\overline{\lim_{r\longrightarrow\infty}} e^{-r\cos\theta_r} a_n r^{n\alpha} = 0.$$

Si $s_1 = n'$, alors d'après le lemme 2.2.4 on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha.$$

pour tout $0 \leq k < n'$, alors il existe un seule terme dominant dans (3.3.4) (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$). Contradiction.
Si $s_1 < n'$ et $\dfrac{d_{s_1}}{n - s_1} = \dfrac{d_{n'}}{n - n'}$, alors d'après le lemme 3.2.1, on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n - n' + d_{n'} + n'\alpha.$$

pour tout $0 \leq k < n'$, alors il existe un terme dominant dans (3.3.4) (quand $r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$), ce qui conduit a une contradiction.
Si $s_1 < n'$ et $\dfrac{d_{s_1}}{n - s_1} > \dfrac{d_{n'}}{n - n'}$, alors d'après le lemme 3.2.2, on a $\alpha'_1 > \alpha_1$.

Maintenant nous allons utiliser la suite $\acute{\alpha_1}, \acute{\alpha_2}, .., \acute{\alpha_q}$. Si $0 < \alpha < \acute{\alpha_q}$ ou $\acute{\alpha}_{j+1} < \alpha < \acute{\alpha_j}$, pour tout $j = 1, ..., q-1$, en utilisant le lemme 3.2.4 et lemme 3.2.5, on trouve la même contradiction précédant. Maintenant si $\alpha > \acute{\alpha_1}$, d'après le lemme 3.2.3 on a

$$n - k + d_k + k\alpha < n - \acute{n} + d_{\acute{n}} + \acute{n}\alpha.$$

Ce qui donne a une contradiction.
Ainsi, les valeurs possible de α sont $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p\} \cup \{\acute{\alpha_1}, \acute{\alpha_2}, ..., \acute{\alpha_q}\}$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.2

Supposons le contraire, qu'il existe une solution non trivial f de (3.1.1) qui satisfait $\rho(f) = \beta < 1 + \frac{d_0}{n}$. Alors

$$\beta = 1 + \frac{d_0}{n} - \tau, \tag{3.4.1}$$

où τ est une constante positive.
Puisque $s_1 = 0$ et d'après (2.1.5) on a

$$d_k \leq \frac{n-k}{n} d_0, \quad k = 1, 2, ..., n-1. \tag{3.4.2}$$

De (3.1.1) on peut écrire

$$-p_0(z) = e^{-z}\frac{f^{(n)}}{f} + p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + p_1(z)\frac{f'}{f}. \tag{3.4.3}$$

En prenant $\arg z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ on peut obtenir $|e^{-z}| < 1$, et d'après le lemme 2.2.8 et (3.4.3), on obtient

$$|p_0(z)| < \sum_{k=1}^{n} |z|^{d_k + k(\beta - 1) + \epsilon}, \tag{3.4.4}$$

où $|z|$ assez grand ($|z| \notin E_0$) et $d_n = 0$.
D'après (3.4.1),(3.4.2) et (3.4.4) on obtient

$$|p_0(z)| < \sum_{k=1}^{n} |z|^{d_0 - k\tau + \epsilon} < n\,|z|^{d_0 - \tau + \epsilon},$$

où $|z|$ est suffisamment grand ($|z| \notin E_0$). Ce n'est pas possible si nous choisissons $0 < \epsilon < \tau$. Donc, $\rho(f) \geq 1 + \frac{d_0}{n}$.

3.5 Preuve du Théorème 3.1.3

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution polynômiale de (3.1.1).
De (3.1.1), on a

$$-p_0(z) = e^{-z}\frac{f^{(n)}}{f} + p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + p_1(z)\frac{f'}{f}. \tag{3.5.1}$$

Ce qui implique f doit être de degré au plus $n-1$. On obtient aussi

$$-p_0(z) = p_{n-1}(z)\frac{f^{(n-1)}}{f} + ... + p_1(z)\frac{f'}{f}. \tag{3.5.2}$$

Il résulte de (3.5.2) que

$$d_0 \leq \max_{1\leq k\leq n-1} \{d_k - k\}. \tag{3.5.3}$$

Par le lemme 2.2.7, on a

$$d_k \leq d_{s_{p-1}} + (s_{p-1} - k)(\alpha_p - 1). \tag{3.5.4}$$

pour tout $k = 1, ..., n-1$, puis que $s_p = 0$. Donc, d'après (3.5.4), α_p définit dans (2.1.7), et le fait que $s_p = 0$, on obtient pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} d_k - k &\leq d_{s_{p-1}} - k + (s_{p-1} - k)(\alpha_p - 1) \\ &\leq d_0 + \frac{k}{s_{p-1}}(d_{s_{p-1}} - d_0 - s_{p-1}). \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Puisque $\alpha_p > 0$ et $s_p = 0$, d'après la définition de α_p dans (2.1.7) que $d_{s_{p-1}} < s_{p-1} + d_0$. D'où d'après (3.5.5), on obtient $d_k - k < d_0$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$. Mais cela contredit (3.5.3). D'où la démonstration du Théorème 3.1.3 est achevée.

Bibliographie

[1] **B. Belaïdi,** Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order. Electronic. J. Differ Equations 2009, No. 70, 10 pp.

[2] **B. Belaïdi and K. Hamani,** On the comlexe oscillation theory of differenial equation with polynomial coefficients, international Workshop on Potential Theory and Free Boundary Flows, Ukraine, Kiev 19-27 August, 2003 :Abstract-Kiev :Institute of Mathematics of the national Academy of Siences of Ukraine, 2003.-p.5,6.

[3] **A.S.Besicovitch,** On integral functions of order<1, Math.ANN.,97(1927),pp677-695.

[4] **B. Belaïdi and K. Hamani,** Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients, Electronic J. Differ. Equations, No. 17, (2003), pp 1-12.

[5] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients, Electronic J. Differ. Equations, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[6] **Z.-X.Chen and C.-C.Yang,** Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differiential equations, Kodai.Math.J.,22(1999),273-285.

[7] **Z.-X.Chen and G. Zongsheng,** The complex oscillation solutions of non-homogeneous linear differential equations Acte Math, 1992, 35(2), 196-203 (in Chinesse).

[8] **J. B. Conway,** Functions of one complex variable, Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin 1978.

[9] **M. Frei**, *S*ur l'ordre des solutions entiers d'une équation différentielle linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[10] **S.-A. Gao, Z.-X. Chen, T.-W. Chen**, Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Huazhong University Science and Technology Press, Wuhan, 1998 (in Chinese)

[11] **G. Gundersen,**, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function , plus similar estimates J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), 88-104.

[12] **G. G. Gundersen**, **M. Steinbart and S. Wang,** The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[13] **G. Gundersen,** Finite order solutions of second order linear differential equations, Trans.Amer.Math.Soc., 305.(1988),415-429.

[14] **S. Hamouda**, Growth of solutions of a class of linear differential equations with entire coefficients, New York J. Math. 16 (2010) 737-747.

[15] **S. Hamouda,** Finite and infinite order solutions of a class of higher order linear differential equations. Austral.J.Math. Analysis and Applications, Vol 9 (2012), No 1, pp 1-9.

[16] **W. Helmrath and J. Nicolaus**, Ein elementarer Beweis bei der Anwendung der Zentralindexmethode auf Differentialgleichungen, comolex Variables **3** (1984),387-396.

[17] **E.Hille,** Ordinary differiential equations in the Wiley, New-York, 1976.

[18] **W. K. Hayman,** The local growth of power series :a survey of the Wiman-Valiron method, Canad. Math. Bull, 17, 1974, 317-358.

[19] **W. K. Hayman,** Meromorphic functions, Clrarendon Press, Oxford, 1964.

[20] **G. Jank, and Volkmann, L.,** Einführung, in die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgrart, 1985.

[21] **L.Kinnunen**, Linear differential equations with solutions of finite iterated order, Southeast. Asian. Bull of Mth., 22(1998), 385-405.

[22] **K.-H. Kwon**, On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equations,Bull.Korean Math. Soc.,33(1996),No.3,pp.487-496.

[23] **l. Laine**, complex differential equations, Handbook of differential equations, Ordinary differential equations, Volume 4, Elsevier, 2008.

[24] **I. Laine and R. Yang,** Finite order solutions of complex linear differential equations, Electronic J. Differ. Equations, No. 65, (2004), pp 1-8.

[25] **l. Laine**, Nevanlinna theory and complex differential equations, W. de Gruyter, Berlin-New York, 1993.

[26] **A. I. Markushevich**, Theory of functions of a complexe variable, Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[27] **R. Nevanlinna**, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[28] **R. Nevanlinna**, Eindeutige analytische Funktionen, Zweite Auflage. Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 46. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

[29] **J. Rossi**, Second order differential equations with transcendental coeffcients, Proc.Amer.Math.Soc.,97,No.1(1986),61-66.

[30] **M.Tsuji**, Potential théory in modern function theory, reprinting of the 1959 edition, (chelsea, New York, 1957).

[31] **J. Tu, C-F. Yi,** On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coeffcients having the same order, J. Math. Analysis and Applications, 340, (2008), 487-497.

[32] **G.Valiron**, Lectures on the general theory of integral functions, translated by E.F.Collingwood,Chelsea,New York,1949.

[33] **A.Wiman**, $\ddot{U}$ber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und derm gröβten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion, Acta Math.41 (1916),1-28.

[34] **H. Wittich**, Neuere Untersuchungen $\ddot{u}$ber eindeutige analytishe Funktionen, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[35] **H.Wittich,** $\ddot{U}$ber das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen, Math.Ann.124 (1952),277-288.

[36] **L.Yang**, Value distribution theory, Springer-Verlag, Berlin, 1993/ Sience Press, Beijing, 1982.

[37] **C.-C . Yang, and Yi, H.-X.,** Uniqueness Theory of meromorphic functions, Science Press / Kluwer, Beijing 2003.

[38] **H.-X.Yi and C.-C.Yang**, The uniqueness theory of meromorohic functions, Sience Press, Beijing, 1995(in Chinese).