

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master en Mathématique

Option : **Analyse Harmonique et EDP**

intitulé

Problèmes inverses linéaires et application à la Tomographie à rayons X

présenté par

Melle ARIF Fatima Zohra

Soutenue le : 26/06/2012

Devant les membres de jury :

Melle BEN SIKADDOUR Djemaia	Présidente	MAA	UMAB
Mr GHEZZAR Mohammed Al Amine	Examineur	MAB	UMAB
Mr BAHRI Sidi Mohammed	Encadreur	MCA	UMAB

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	4
1 Notions de bases	6
1.1 Espaces de Hilbert	6
1.1.1 Définitions	6
1.2 Opérateurs linéaires continus	7
1.2.1 Opérateurs compacts	7
1.2.2 Décomposition spectral d'un opérateur compact autoadjoint	8
1.3 Rappel sur les formules de quadrature	9
1.3.1 formule des rectangles	9
1.3.2 Formule des trapezes	9
2 Problèmes inverses linéaires	10
2.1 Opérateurs intégraux et équations intégrales	10
2.1.1 Opérateurs intégraux	10
2.1.2 Equations intégrales	11
2.1.3 Discrétisation des équations intégrales	12
2.2 Problème de moindres carrés et développement en valeurs singulières (DVS)	14
2.2.1 Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés	14
2.2.2 Développement en valeurs singulières (DVS)	17
2.3 Régularisation de Tikhonov	22
2.3.1 Application du DVS aux problème régularisée	23
3 Application aux tomographie à rayons X	25
3.1 Présentation de la Tomographie	25
3.1.1 Principe physique de la tomographie à rayons X	25
3.2 Problème inverse de la tomographie à rayons X	26
3.2.1 Intèrpretation géométrique	26
3.2.2 Matrice de projection (méthode algébrique)	27
3.2.3 Application de méthode de moindres carrés et régularisation de Tikhonov	28
Bibliographie	32

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mon encadreur Monsieur BAHRI Sidi Mohammed qui m'a

guidé dans ce travail, pour son aide continue, ses recommandations et ses orientations.

Je n'oublierai pas de remercier également la présidente du jury, Melle BENSİKADDOUR ainsi

que Mr GHEZAR Amine qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Je remercie mes parents pour leur encouragement pendant mes études.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Je remercie l'équipe du département de Mathématique de l'université de Abdelhamid Ibn Badis-Mostaganem pour les facilités mises à notre disposition pour la soutenance de ce mémoire.

Introduction

En science, un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets. Par exemple, en sismologie, la localisation de l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique.

En mathématiques, un problème inverse linéaire a la forme d'une équation

$$Af = g. \tag{1}$$

Où g représente les mesures effectuées, f représente les valeurs des paramètres du phénomène et A est un opérateur linéaire, d'un espace de Hilbert H dans H , qui représente la relation entre les mesures et les paramètres du modèle.

Les problèmes inverses généralement sont des problèmes mal posés car si l'on cherche à résoudre l'équation (1), cela nécessite l'inversion de l'opérateur A . Cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique. Et d'après Hadamard [6, Ha] un problème est bien posé s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. La solution existe ;
2. Elle est unique ;
3. Elle dépend continûment des données.

Donc, si l'une des trois conditions n'est pas satisfaite, on dit que le problème est mal posé.

Dans ce travail, nous commençons par rassembler quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles, ainsi que des compléments sur les opérateurs linéaires compacts. En suite nous divisons le reste en deux parties.

Dans la première partie, nous introduisons une source importante de problèmes inverses linéaires : les équations de première espèce. Après avoir les principales propriétés des opérateurs intégraux, nous expliquerons en quoi ils sont mal posés. Enfin nous introduirons des méthodes de discrétisation, conduisons à des problèmes de moindres carrés, nous étudierons leur propriétés mathématiques, dans un cadre Hilbertien : l'aspect géométrique, et le lien avec les équations normales, ainsi que les questions d'existence et d'unicité des solutions. Nous

introduirons également l'outil fondamental, tant pour l'analyse théorique que pour l'approximation numérique, qu'est la décomposition en valeurs singulières pour les opérateurs entre espaces de Hilbert. Et ainsi nous aborderons dans cette partie l'étude d'une technique pour les problèmes mal posés, la méthode de régularisation de Tikhonov.

Dans la deuxième partie, nous introduisons un exemple d'application à la tomographie à rayons X.

Chapitre 1

Notions de bases

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R} , possédant les propriétés suivantes

- i) $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$ et $\|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0$,
- ii) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$,
- iii) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$,

Définition 1.2 soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Un produit scalaire sur E est une application de

- $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée (\cdot, \cdot) (ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$) possédant les propriétés suivantes
- $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$;
- $\forall (x, y) \in E^2, (x, y) = (y, x)$;
- $\forall x \in E, (x, x) \geq 0$;
- $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.3 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien, et qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 1.4 (Bases Hilbertiennes) Une base Hilbertienne d'un espace de Hilbert E est une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\|e_n\|_E = 1, \forall n, \text{ et } (e_n, e_m) = 0, \forall n \neq m.$$

Théorème de projection

Théorème 1.1 Soit F un sous ensemble fermé, convexe de E , et $z \in E$ donné. Il existe un unique élément $x_0 \in F$ tel que

$$\|z - x_0\|_E = \inf_{y \in F} \|z - y\|_E.$$

1.2 Opérateurs linéaires continues

Définition 1.5 Un opérateur A d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F est un application linéaire continue de E dans F c'est à dire qui vérifie :

- i) $\forall u \in E, Au \in F$;
- ii) $\forall u, v \in E; \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$;
- iii) $\exists M > 0, \forall u \in E, \|Au\|_F \leq M \|u\|_E$.

On note par $L(E, F)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F .

Théorème 1.2 (Application ouverte) Soit A un opérateur linéaire de E dans F . L'image par A d'un ouvert de E est un ouvert de F .

On particulier l'inverse d'un opérateur linéaire continu et bijectif est continu.

Adjoint d'un opérateur

Définition 1.6 Soit A un opérateur linéaire continu de E dans F . Il existe un unique opérateur de F dans E noté A^* , tel que :

$$\forall u \in E, \forall v \in F; (Au, v) = (u, A^*v).$$

Cette opérateur est appelé l'adjoint de A . Il vérifie de plus :

$$(A^*)^* = A \text{ et } \|A^*\| = \|A\|.$$

Proposition 1.1 Soit A et B deux opérateurs linéaires, α et β deux scalaires, on a :

- i) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ (linéarité);
- ii) $(AB)^* = B^*A^*$ (composition).

Proposition 1.2 On a les deux relations suivantes :

- i) $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$;
- ii) $(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}$.

Définition 1.7 Un opérateur dans E est dit auto-adjoint si, et seulement si,

$$\forall (u, v) \in E \times E, (Au, v) = (u, Av).$$

1.2.1 Opérateurs compacts

Définition 1.8 Soit $A \in L(E, F)$ on dit que A est un opérateur compact si, pour toute suite bornée (x_n) dans E , la suite (Ax_n) contient une sous suite convergente.

Ou bien : L'image de la boule unité fermée de E est un sous ensemble précompact.

Remarque 1.1 Un ensemble est précompact si sa fermeture est compact de F .

Notation 1.1 On note $K(E, F)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés compacts de E dans F .

Proposition 1.3 Soit E, F, G trois espaces de Hilbert :

- i) L'espace $K(E, F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L(E, F)$.
- ii) Si $A \in K(E, F)$, Alors $A^* \in K(F, E)$ est aussi compact.
- iii) $K(E, F)$ est un idéal bilatère de $L(E, F)$ c'est à dire si $A \in K(E, F)$ et $B \in L(F, G)$, alors AB et BA sont dans $K(E, G)$.

Proposition 1.4 Si E n'est pas de dimension finie, alors l'identité de E n'est jamais inversible.

Corollaire 1.1 Soit A un opérateur compact de E dans F , (E et F ne sont pas de dimension finie), alors A n'est pas inversible.

Preuve. Si A est inversible, son inverse A^{-1} vérifie :

$$AA^{-1} = I.$$

Comme A est compact, et que l'identité ne peut pas l'être d'après la proposition (1.4), nous avons une contradiction. ■

1.2.2 Décomposition spectral d'un opérateur compact autoadjoint

Spectre d'un opérateur compact autoadjoint

Définition 1.9 Soit A un opérateur compact autoadjoint dans $L(E, E)$, le spectre de A est l'ensemble :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} / A - \lambda I \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(E)\}.$$

Définition 1.10 Un nombre $\lambda \in E$ est une valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I$ n'est pas injectif.

Proposition 1.5 Notons Λ l'ensemble des valeurs propres de A .

1. $\sigma(A) = \{0\} \cup \Lambda$;
2. Les valeurs propres de A sont réelles et les vecteur propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux ;
3. L'un des valeurs $\pm \|A\|$ est une valeur propre de A .

Théorème 1.3 [2, BR] Soit A un opérateur linéaire compact et autoadjoint défini sur un espace de Hilbert H . Alors A admet un suite (finie ou infinie) de valeurs propres λ_n tel que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$$

Et $\lim \lambda_n = 0$. Dans ce cas la suite des vecteurs propres $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associés aux valeurs propres λ_n constitue une base Hilbertienne de $(\ker A)^\perp$ tel que :

$$\forall x \in H, x = x_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (x, u_n) u_n.$$

Et

$$Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (x, u_n) u_n \text{ où } x_0 \in \ker A.$$

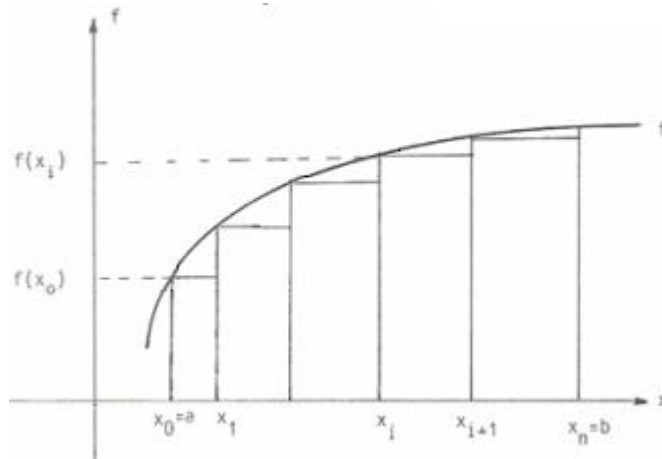
1.3 Rappel sur les formules de quadrature

Les formules de quadrature consistent à approcher une intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

par une somme pondérée des valeurs de f en des points appelés noeud

1.3.1 formule des rectangles



Les noeuds de la formule des rectangles sont les points :

$$x_{i+1} - x_i = h \quad i = 1, \dots, n$$

et les poids sont tous égaux à h . On approche l'intégrale par la somme des aires des rectangles de largeur h , et de hauteur est déterminée par $f(x_i)$

$$I^R = h (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

1.3.2 Formule des trapezes

Les noeuds de la formule des trapezes sont les points $x_i, i = 1, \dots, n$ et $h = \frac{(b-a)}{n}$. Les poids sont $w_i = h, i = 2, \dots, n-1$ ainsi que $w_1 = w_n = \frac{h}{2}$. On approche l'intégrale par la somme des aires des trapezes déterminés par les valeurs de la fonction aux points x_i et x_{i+1} ce qui donne :

$$I^T = h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right).$$

Chapitre 2

Problèmes inverses linéaires

2.1 Opérateurs intégraux et équations intégrales

Nous commençons par une brève introduction aux opérateurs intégraux ainsi qu'aux équations intégrales de première espèce ([8, Ke]). Ces dernières fournissent le principal exemple de problèmes inverses linéaires.

Rappelons que $L^2(a, b)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable, et que cet espace est un espace de Hilbert pour la norme associée au produit scalaire usuel, défini par :

$$(u, v) = \int_a^b u(s) v(s) ds.$$

2.1.1 Opérateurs intégraux

Définition 2.1 Soit k une fonction de l'espace $L^2([a, b] \times [c, d])$. L'opérateur :

$$Au(t) = \int_a^b k(t, s) u(s) ds, t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

est bien défini en tant qu'opérateur de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$. On dira que l'opérateur A est l'opérateur intégral de noyau k .

Proposition 2.1 Soit A l'opérateur intégral de noyau k :

1. L'adjoint A^* (c'est l'unique opérateur de $L^2[c, d]$ dans $L^2[a, b]$ qui vérifi :

$$(Au, v) = (u, A^*v),$$

pour tout $(u; v) \in L^2[a, b] \times L^2[c, d]$ est l'opérateur intégrale de noyau $k^*(t, s) = k(s, t)$.

2. L'opérateur intégrale A de noyau k est autoadjoint si, et seulement si, le noyau k est symétrique c'est à dire :

$$k(t, s) = k(s, t) \quad \forall (s, t) \in [a, b] \times [c, d].$$

3. Soit A_1 et A_2 deux opérateurs intégrals de noyaux, respectivement, $k_1 \in L^2([a, b] \times [c, d])$, $k_2 \in L^2([c, d] \times [e, f])$ alors : $A_1 A_2 \in L(L^2(a, b), L^2(e, f))$ est un opérateur intégral de noyau :

$$k(t, s) = \int_a^b k_1(t, r) k_2(r, s) ds.$$

Exemple 2.1 (*Opérateur de Volterra*)

Il s'agit d'opérateur de la forme :

$$Au(t) = \int_0^t k(t, s) u(s) ds ; \forall t \in [0, 1].$$

avec $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$.

Définition 2.2 (*Opérateurs intégrals à noyaux dégénérés*)

Un opérateur à noyau dégénéré est opérateur de noyau se la forme :

$$k(t, s) = \sum_{j=1}^n a_j(t) b_j(s) \text{ où } j = 1, \dots, m.$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

2.1.2 Equations intégrales

On classe les équations intégrales que l'on peut associer à l'opérateur A en deux catégories :

1. Equation de première espèce : Il s'agit se la forme :

$$Au = f. \tag{2.2}$$

Où $f \in L^2[c, d]$ est donnée.

2. Equation de seconde espèce : Il s'agit se la forme :

$$u - Au = f.$$

Où $f \in L^2[c, d]$ est donnée.

Théorème 2.1 *soit $k \in L^2([a, b] \times [c, d])$. L'opérateur A de noyau k est compact de $L^2(a, b)$ dans $L^2(c, d)$.*

Preuve. Nous admettrons qu'il est possible d'approcher le noyau k dans $k \in L^2([a, b] \times [c, d])$ par une suite de noyaux $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dégénérés. Notons A_n l'opérateur intégrale de noyau k_n . D'après la définition des opérateurs intégrals à noyaux dégénérés, A_n est de rang fini. Montrons que la suite A_n converge vers A .

On a

$$(A_n - A) u(t) = \int_a^b (k_n(t, s) - k(t, s)) u(s) ds.$$

donc :

$$\begin{aligned} \|(A_n - A)u\|_F^2 &= \int_c^d \left(\int_a^b (k_n(t, s) - k(t, s)) u(s) ds \right)^2 dt \\ &\leq \left(\int_{[a,b] \times [c,d]} |k_n(t, s) - k(t, s)|^2 ds dt \right) \|u\|_E^2 \\ &= \|k_n - k\|_{[a,b] \times [c,d]}^2 \|u\|_E^2. \end{aligned}$$

Le première terme $\|k_n - k\|_{[a,b] \times [c,d]}^2 \rightarrow 0$ d'après le choix de k_n ce qui achève la démonstration. ■

Comme l'on sait qu'un opérateur compact n'est jamais inversible (d'après le corollaire (1, 1)), nous voyons que les équations intégrales de première espèce donneront toujours lieu à des problèmes mal posés.

2.1.3 Discrétisation des équations intégrales

Nous allons nous borner à deux méthodes pour discrétiser une équation intégrale : la méthode de quadrature - collocation et la méthode de Galerkin.

Discrétisation par quadrature Cette méthode consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul intégral pour aboutir à un système linéaire.

En générale, une formule de quadrature s'écrit sous la forme :

$$I^Q = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Où x_j sont les noeuds et w_j sont les poids.

Application d'une formule de quadrature à une équation intégrale de première espèce On exprime que l'équation intégrale est vérifiée en un nombre fini de points t_i , $i = 1, \dots, m$,

$$\int_a^b k(t_i, s) u(s) ds = f(t_i).$$

on remplace cette intégrale par une forme quadrature choisie dans l'équation (2.3). On obtient le système :

$$\sum_{j=1}^n w_j k(t_i, s_j) u_j = f(t_i). \quad (2.4)$$

On voit que c'est un système linéaire

$$Ax = b, \quad A = [A_{i,j}], \quad b = [b_i], \quad x = [x_j]$$

avec :

$$A_{i,j} = w_j k(t_i, s_j) \quad b_i = f(t_i) \quad x_j = u_j$$

pour $j = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, m$.

Remarque 2.1 Si $m > n$, on obtient un système sur-déterminé.

Exemple 2.2 Si l'opérateur intégral

$$Au(t) = \int_0^1 u(s) ds, t \in [0, 1]$$

alors la matrice $A_{i,j}$ est triangulaire, avec :

$$A_{i,j} = h, j \geq 1$$

et le système d'équation (2.4) est :

$$h \sum_{j=1} u_j = f_i, i = 1, \dots, m.$$

Par récurrence ,on obtient que la solution s'écrit :

$$u_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h}, j = 2, \dots, n.$$

avec :

$$u_j = \frac{f_1}{h}.$$

Discrétisation par la méthode de Galerkin En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin sont une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu en un problème discret.

On approche les espaces $L^2(a, b)$ et $L^2(c, d)$ par une suite de sous espaces E_n et F_m respectivement, on suppose que $\dim E_n = n$ et $\dim F_m = m$ tel que $E_n \subset L^2(a, b)$ et $F_m \subset L^2(c, d)$.

On projette l'équation (2.2) sur F_m , c'est-à-dire que l'on cherche $u_n \in E_n$ solution de l'équation :

$$(Au_n, v_m) = (u_n, v_m), v_m \in F_m \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) s'appelle équation de Galerkin pour u_n . Pour expliciter cette équation, nous introduisons une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans l'espace E_n et une base $\{f_1, \dots, f_m\}$ dans l'espace F_m . Développons u_n dans cette base sous la forme :

$$u_n = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

et prenons $v_m = f_i$ dans l'équation (2.5), on trouve :

$$\sum_{j=1}^n (Au_j, f_i) u_j = (f, f_i).$$

C'est un système d'équation qu'il admet un traitement numérique.

Les éléments de la matrice de la méthode de Galerkin sont des intégrales doubles et simples tel que :

$$A_{ij} = \iint_{[a,b] \times [c,d]} k(t, s) f_i(t) u_j(s) ds dt, \quad b_i = \int_c^d f(t) f_i(t) dt$$

Exemple 2.3 Nous choisissons la fonction constante par morceaux pour les deux espace d'approximation. Posons :

$$h_s = \frac{(b-a)}{n}, \quad h_t = \frac{(c-d)}{m}.$$

Nous subdivisons l'intervalle $]a, b[$ en n intervalles de taille h_s et l'intervalle $]c, d[$ en m intervalles de taille h_t , notons

$$I_j^s =]a + (j-1)h_s, a + jh_s[\quad , \quad I_i^t =]c + (i-1)h_t, c + ih_t[$$

et nous définissons les fonctions de base par :

$$e_j = \begin{cases} \sqrt{h_s} & s \in I_j^s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_i = \begin{cases} \sqrt{h_t} & s \in I_i^t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$, donc on trouve les éléments de la matrice et du seconde membre se la forme :

$$A_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{h_s h_t}} \int_{I_i^t} \int_{I_j^s} k(s, t) dt ds, \quad b_i = \int_{I_i^t} f(t) dt.$$

2.2 Problème de moindres carrés et développement en valeurs singulières (DVS)

2.2.1 Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés

Nous allons étudier les propriétés des problèmes de moindres carrés en général. Dans ce paragraphe, nous considérons A un opérateur intégral compact de E dans F tel que $E = L^2[a, b]$ et $F = L^2[c, d]$ deux espaces de Hilbert. (ce problème est bien detail dans [8, Mi])

Etant donné $\hat{y} \in F$, cherchons $\hat{x} \in E$ solution de l'équation :

$$A\hat{x} = \hat{y}. \quad (2.6)$$

Le problème (2.6) est dit mal posé si l'un des trois conditions suivantes n'est pas satisfaite :

1. L'opérateur A n'est pas surjectif.
2. L'opérateur A n'est pas injectif.
3. Si l'inverse existe et n'est pas continu.

La première difficulté n'est pas sérieuse : il suffit de se restreindre à $\text{Im } A$. La seconde est plus gênante car il faut sélectionner parmi plusieurs solutions une seule solution. La troisième est fondamentale par ce qu'elle est liée à la fermeture ou non de $\text{Im } A$.

Théorème 2.2 Soit $A \in L(E, F)$, E et F deux espaces de Hilbert. Supposons que A est injectif et notons $A^{-1} : \text{Im } A \rightarrow E$ l'inverse de A , alors

$$\text{Im } A \text{ est fermée} \iff A^{-1} \text{ est continu.}$$

Preuve. \Rightarrow Soit $W = \text{Im } A$ est un espace de Hilbert. L'opérateur $\tilde{A} : E \rightarrow W$,

$$\tilde{A}u = Au$$

pour $u \in E$ est un opérateur linéaire continu et bijectif. Une conséquence classique du théorème de l'application ouverte est que \tilde{A}^{-1} est continu. Il en est donc de même pour A^{-1} .

\Leftarrow Puisque A^{-1} est continu, et que $E = \text{Im } A^{-1}$ est fermée,

$$\text{Im } A = (A^{-1})^{-1}(E)$$

est fermée. ■

La situation générale considérée de cette partie sera que $\text{Im } A$ n'est pas fermé car l'opérateur A est compact et dans ce cas A^{-1} n'est pas continu donc la non fermeture de $\text{Im } A$.

Nous cherchons une autre formulation du problème original, qui permette d'étendre la notion de solution à un sous espace plus grand.

Nous proposons une formulation comme un problème de moindres carrés. C'est à dire on remplace (2.6) par :

$$\min_{x \in E} \frac{1}{2} \| Ax - \hat{y} \|_F^2 \quad (2.7)$$

Proposition 2.2 Soit $A \in L(E, F)$, E et F deux espaces de Hilbert et soit $\hat{y} \in F$. Un élément $\hat{x} \in E$ est solution de (2.7) si, et seulement si,

$$A^*A\hat{x} = A^*\hat{y} \quad (2.8)$$

Preuve. Soit x vérifiant (2.7). On a pour tout $z \in E$

$$\hat{y} - Az = \hat{y} - Ax + A(x - z)$$

L'équation normale (2.8) implique que les deux termes de somme sont orthogonaux (le résidu $\hat{z} - Ax$ est orthogonal à l'image de A). D'après le théorème de Pythagore

$$\| \hat{y} - Az \|_F^2 = \| \hat{y} - Ax \|_F^2 + \| A(x - z) \|_F^2 \geq \| \hat{y} - Ax \|_F^2$$

donc x est bien solution de (2.7).

Réciproquement, soit x tel que :

$$A^*(Ax - z) = w \neq 0.$$

Choisissons $z = x - \varepsilon w$, avec $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$\| \hat{y} - Az \|_F^2 = (\hat{y} - Az, \hat{y} - Az) = \| \hat{y} - Ax \|_F^2 - 2\varepsilon (\hat{y} - Ax, w) + \varepsilon^2 \| w \|_F^2 < \| \hat{y} - Ax \|_F^2$$

si ε est suffisamment petite. x n'est donc pas solution de (2.7). ■

Remarque 2.2 L'équation normale (2.8) s'écrit sous la forme :

$$A^*(A\hat{x} - \hat{y}) = 0.$$

ce qui exprime que le résidu $\hat{y} - Ax$ est dans le noyau de A^* , c'est à dire orthogonal à l'image de A .

Remarque 2.3 *La solution de problème des moindres carrés est telle que Ax est la projection de y sur l'image de A*

Lemme 2.1 *La solution du problème (2.2) est unique si, et seulement si, l'opérateur A est injectif.*

Preuve. Montrons d'abord que $\ker A^*A = \ker A$,

$$A^*Ax = 0 \Leftrightarrow (A^*Ax, x) = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|_F = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

par conséquent A^*A et A sont injectifs en même temps. Supposons que le problème (2.6) admet deux solutions \hat{x} et \check{x} alors :

$$\begin{aligned} A^*A\hat{x} &= \hat{y} \text{ et } A^*A\check{x} = \hat{y} \Rightarrow A^*A(\hat{x} - \check{x}) = 0 \\ &\Rightarrow (\hat{x} - \check{x}) = 0 \text{ (} A^*A \text{ est injectif)} \\ &\Rightarrow \hat{x} = \check{x} \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 2.3 *i) L'équation (2.8) admet une solution si, et seulement si,*

$$\hat{y} \in \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$$

Preuve. Soit $x \in E$ une solution de (2.8). On a

$$Ax - \hat{y} \in \overline{\text{Im } A}^\perp = (\text{Im } A)^\perp.$$

Donc

$$\hat{y} = Ax + (\hat{y} - Ax) \in \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp.$$

Inversement, soit $\hat{y} = y^1 + y^2$, avec $y^1 \in \text{Im } A$, $y^2 \in (\text{Im } A)^\perp$. Il existe donc $x \in E$, tel que

$$Ax = y^1.$$

Evidemment :

$$A^*Ax = A^*y^1.$$

Mais toujours parce que $(\text{Im } A)^\perp = \ker A^*$,

$$A^*y^2 = 0,$$

c'est à dire que :

$$A^*\hat{y} = A^*y^1 = A^*Ax,$$

et \hat{y} est une solution de (2.8). ■

Lemme 2.2 *Si $\hat{y} \in \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$, le problème (2.7) admet une unique solution de norme minimale. Nous noterons x cette solution particulière.*

Preuve. Soit S l'ensemble de solutions (2.7), pour chercher une solution de ce problème de moindres carrés, nous résoudrons le problème :

$$\min_{x \in S} \|x\|, \quad S = \{x \in E : \|Ax - b\|_F \text{ minimal} / b \text{ donné}\}$$

c'est à dire on projete l'origine sur S . D'après la proposition précédente, S est convexe fermé non vide de E . Le théorème de la projection implique que S possède un élément de norme minimale, qui est la solution cherchée.

Nous noterons x cette solution particulière. ■

2.2.2 Développement en valeurs singulières (DVS)

Théorème 2.3 Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur compact non auto adjoint alors il existe une suite $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ et deux familles ortonormales $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset E$ et $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset F$ telles que :

- i) $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = 0$.
- ii) $Au_j = \mu_j v_j$; $A^*v_j = \mu_j u_j$.
- iii) pour tout $x \in E$: on a le développement

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j \quad (2.9)$$

où $x_0 \in \ker A$

- iv) Pour tout $x \in E$ et $y \in F$ on a

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle v_j; A^*y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, v_j \rangle u_j.$$

Preuve. i) On considère l'opérateur $T = A^*A$. L'opérateur T est compact (le produit d'un compact A et un bornée A^*) et aussi T est autoadjoint (i.e) $T = T^*$, car

$$\begin{aligned} T^* &= (A^*A)^* \\ &= A^*(A^*)^* \\ &= A^*A \text{ car } ((A^*)^* = A) \\ &= T. \end{aligned}$$

Alors puisque l'opérateur T est autoadjoint compact et d'après le théorème spectrale autoadjoints (1.3), T admet une suite des valeurs propres non nulles $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ et des vecteur propres $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$Tu_j = \lambda_j u_j; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Et $\forall x \in E$ avec

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j \text{ où } x_0 \in \ker T.$$

avec

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j.$$

Supposons que les $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sont rangées en une suite décroissante et on montre que $\lambda_j \geq 0; \forall j \in \mathbb{N}$.

Puisque $Tu_j = \lambda_j u_j$ cela signifie que λ_j est la composante du vecteur Tu_j par rapport à u_j et représente les coefficient de Fourier, alors

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (Tu_j, u_j) \\ &= (A^*Au_j, u_j) \\ &= (Au_j, Au_j) \\ &= \|Au_j\|_2^2 \end{aligned}$$

et puisque la suite $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\{\lambda_j\}$ est bornée par le zéro, elle est convergente et $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0$.

ii) puisque $\lambda_j \geq 0$ d'après (i); nous pouvons donc poser

$$\mu_j = \sqrt{\lambda_j} = (\lambda_j)^{-1} > 0; \forall j \in \mathbb{N}.$$

et soit $v_j = A \begin{pmatrix} u_j \\ \mu_j \end{pmatrix}; \forall j \in \mathbb{N}$ car $\mu_j \neq 0$. Il est clair que $v_j \in \text{Im } A \subset F$, on calcule

$$\begin{aligned} A^* v_j &= A^* A \begin{pmatrix} u_j \\ \mu_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu_j} A^* A (u_j) \\ &= \frac{1}{\mu_j} T(u_j) \\ &= \frac{1}{\mu_j} \lambda_j u_j = \mu_j u_j \end{aligned}$$

d'où

$$A^* v_j = \mu_j u_j$$

et puisque $v_j = A \begin{pmatrix} u_j \\ \mu_j \end{pmatrix}$ cela implique

$$A u_j = \mu_j v_j$$

iii) Comme $\ker A$ est un sous espace fermé de E , alors d'après le théorème de la projection orthogonale $E = \ker A \oplus (\ker A)^\perp$ donc $\forall x \in E$

$$x = x_0 + \hat{x}$$

où $x_0 \in \ker A$ et $\hat{x} \in (\ker A)^\perp$ et comme $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de $(\ker A)^\perp$ alors \hat{x} s'écrit se la forme :

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{x}, u_j \rangle u_j.$$

On déduit alors le développement x de E par :

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle \hat{x}, u_j \rangle u_j$$

Ce développement est unique car la somme est directe. ■

Remarque 2.4 dans ce cas on a $\ker T = \ker A$ car :

$$\ker T = \ker A^* A = \ker A.$$

iv) Montrons que $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale dans F . Le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \left\langle A \left(\frac{u_i}{\mu_i} \right), A \left(\frac{u_j}{\mu_j} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle A(u_i), A(u_j) \rangle \\ &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle u_i, A^* A(u_j) \rangle \\ &= \frac{1}{\mu_i \mu_j} \langle u_i, T(u_j) \rangle \\ &= \frac{\lambda_j}{\mu_i \mu_j} \langle u_i, u_j \rangle = \frac{\mu_j}{\mu_i} \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} . \end{aligned}$$

Finalement

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker, d'où $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est bien une base orthonormale dans F . Et pour le premier développement (2.4) pour $x \in E$, posons

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x, u_j \rangle v_j.$$

Cette série est convergente dans E avec :

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j \langle x, u_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\langle x, u_j \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1^2 |\langle x, u_j \rangle|^2 \quad (\text{car } \mu_1 \geq \mu_j) \\ &\leq \mu_1^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, u_j \rangle|^2 = \mu_1^2 \|x\|_2^2 \\ &\Rightarrow \|\hat{x}\| \leq \mu_1 \|x\|_2 . \end{aligned}$$

Et $\hat{x} \in \overline{\text{Im } A}$ car pour

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j$$

on a

$$\begin{aligned}
 Ax &= A \left(x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j \right) \\
 &= Ax_0 + A \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} A \langle x, u_j \rangle u_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle Au_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle \mu_j v_j \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x, u_j \rangle v_j
 \end{aligned}$$

et la même idée pour

$$A^*y = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x, v_j \rangle u_j$$

seulement $\forall y \in F$

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, v_j \rangle v_j$$

ce qui prouve que $\hat{x} \in \overline{\text{Im } A}$.

Définition 2.3 Les nombres μ_j sont appelés les valeurs singulières de A et le développement obtenu (2.9) s'appelle le développement en valeurs singulières (DVS) de l'opérateur compact A .

Exemple 2.4 On considère l'opérateur intégral $A : L^2[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$, qui est défini comme :

$$(Af)(t) = \int_0^\pi h(t, u) f(u) du$$

où

$$h(t, u) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{si } t \leq u \leq \pi \end{cases}.$$

A est un opérateur compact non autoadjoint. Le système singulier $\{u_j, v_j; \mu_j\}$ pour A est donné par

$$u_j(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{2j+1}{2}t\right), \quad v_j(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2j+1}{2}s\right)$$

et

$$\mu_j = \frac{2}{2j+1}.$$

Application du DVS aux problèmes de moindres carrés

Théorème 2.4 Soit $y \in F$, l'équation (2.6) possède une solution si, et seulement si $y \in \overline{\text{Im } A}$, de plus si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle y, v_j \rangle|^2}{\mu_j^2} < \infty \quad (2.10)$$

dans ce cas l'ensemble des solutions de (2.6)

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\mu_j} u_j + x_0, \quad x_0 \in \ker A \quad (2.11)$$

Preuve. Le développement de y sur la base Hilbertienne $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset F$ est

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, v_j \rangle v_j$$

De la même pour x sur la base Hilbertienne $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset E$ est

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j = x_j u_j.$$

Avec $x_j = \langle x, u_j \rangle$. $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Ax &= A \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle Au_j \quad (\text{car } A \text{ est compact} \Rightarrow A \text{ est continue}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \mu_j v_j \end{aligned}$$

x est la solution de l'équation (2.6) équivalente à

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle \mu_j v_j &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, v_j \rangle v_j \\ \Leftrightarrow \langle x, u_j \rangle \mu_j &= \langle y, v_j \rangle \\ \Leftrightarrow \langle x, u_j \rangle &= \frac{\langle y, v_j \rangle}{\mu_j} \\ \Leftrightarrow x &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\mu_j} u_j. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble de solutions de l'équation (2.6) est x tel que :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\mu_j} u_j + \ker A.$$

■

Remarque 2.5 La condition (2.10) s'obtient simplement en exprimant que la série des coefficients du développement de x doit être de carré intégrable est lui même la norme minimale de x , et cette condition s'appelle la condition de Picard [5]. La solution de norme minimale s'obtient quand $\ker A = \{o\}$, en effet la série est orthogonale à $\ker A$. Puisque $v_j \in \text{Im } A$; $\forall j \in \mathbb{N}$ et donc la somme est dans $\overline{\text{Im } A}$ (car si $y_n \in \text{Im } A \Rightarrow \lim y_n \in \overline{\text{Im } A}$).

Remarque 2.6 On peut appliquer la formule d'inversion (2.11) $\left(x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y, v_j)}{\mu_j} u_j + \ker A.\right)$ pour les problèmes inverses mal posés (dans le cas où A est compact par exemple) montrons que la solution de (2.6) ne dépend pas continument du second membre, et pour cela. Il suffit de montrer son instabilité. Supposons que $(y, v_j) = y_j$ du second membre soit perturbé :

$$\tilde{y}_j = y_j + \delta$$

par linéarité, on voit facilement que la seule composante de la solution \tilde{x} qui est modifiée

$$\tilde{x}_j = x_j + \frac{\delta}{\mu_j}.$$

En passant aux normes, on a donc :

$$\|\tilde{x}_j - x_j\| = \frac{\|\delta\|}{\mu_j}.$$

Comme $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j \rightarrow 0$, la norme $\|\tilde{x}_j - x_j\| \rightarrow \infty$ n'est pas borné donc la solution

$$\|\tilde{y}_j - y_j\| < c, \|\tilde{x}_j - x_j\| \rightarrow \infty.$$

2.3 Régularisation de Tikhonov

La régularisation Tikhonov est la méthode de régularisation la plus utilisée pour la résolution des problèmes qui ne sont pas bien posés ainsi que pour les problèmes inverses. Elle a été imaginée par le mathématicien russe Andreï Nikolaïevitch Tikhonov.

Cette méthode est expliquée bien dans ([3], [4]).

L'idée générale de la méthode de régularisation est remplacé l'équation intégrale de première espèce mal posé :

$$\int_0^1 k(x, t) x(t) = y(t) \quad (2.12)$$

par une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce bien posé. Nous écrivons l'équation (2.12) se la forme :

$$Ax = y. \quad (2.13)$$

Où A est un opérateur linéaire compact d'un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 . Nous voyons que l'équation générale (2.13) n'a pas une solution unique, alors nous cherchons une solution particulière, s'appelle solution de moindres carrés de norme minimale. C'est à dire, nous supposons que $y \in D(A^+)$ (A^+ est l'inverse généralisé de A) et notre but est d'approximer A^+y . nous savons que si l'on ignore le cas trivial pour lequel le noyau $k(.,.)$ est dégénéré, la solution généralisée A^+y dépend de façon discontinue de y . Ainsi, nous remplaçons le problème mal posé de la solution exacte par un problème bien posé de la solution approchée.

La solution générale

$$x = A^+y$$

de(2.13) est une solution de moindre carré et alors elle satisfait l'équation normale

$$A^*Ax = A^*y \quad (2.14)$$

où A^* est l'adjoint de A , l'opérateur compact autoadjoint A^*A a des valeurs propres non négatives et donc, pour toute fixe $\alpha > 0$ l'opérateur $A^*A + \alpha I$ tel que I l'opérateur identité dans H_1 a des valeurs propres strictement positives

En particulier, l'opérateur $A^*A + \alpha I$ a un inverse borné (continu), donc ce problème de résolution de l'équation :

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha = A^*y \quad (2.15)$$

est bien posé. L'équation (2.15) est définit la forme régulariser de l'équation (2.14), et l'unique solution

$$x_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y.$$

est définit l'approximation de Tikhonov ver A^+y , la norme minimale de la solution de l'équation (2.14) et α est définit le paramètre de régularisation de Tikhonov.

2.3.1 Application du DVS aux problème régularisée

Soit le système singulière $\{u_j, v_j; \mu_j\}$ pour A , $\{u_j\}$ est une base orthonormale complète dans $\ker A^\perp$, $\{v_j\}$ est une base orthonormale complète dans $\overline{\text{Im}(A)}$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j = 0$ tel que :

$$Au_j = \mu_j v_j \text{ et } A^*v_j = \mu_j u_j.$$

D'après la forme (2.15)

$$\alpha x_\alpha = A^*y - A^*Ax_\alpha$$

implique que $x_\alpha \in \text{Im } A^* \subseteq \ker(A)^\perp$ et donc on peut écrire x_α en terme des valeurs singulières

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \quad (2.16)$$

de la même façon

$$\begin{aligned} A^*y &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*y, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, Au_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle y, v_j \rangle u_j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^*Ax_\alpha + \alpha x_\alpha &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle A^*Ax_\alpha, u_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ax_\alpha, Au_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle Ax_\alpha, v_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle x_\alpha, A^*v_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j^2 + \alpha) \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j \end{aligned}$$

Nous remplaçons ces résultats dans (2.15), nous trouvons :

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j^2 + \alpha) \langle x_\alpha, u_j \rangle u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle y, v_j \rangle u_j$$

alors :

$$\langle x_\alpha, u_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j^2 + \alpha} \langle y, v_j \rangle$$

et donc

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j^2 + \alpha} \langle y, v_j \rangle u_j$$

La solution de moindres carrés de norme minimale est donnée par :

$$A^+ y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} \langle y, v_j \rangle u_j$$

alors si on calcule la norme $\|x_\alpha - A^+ y\|$, on obtient :

$$\|x_\alpha - A^+ y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_j}{\mu_j^2 + \alpha} \langle y, v_j \rangle u_j - \frac{1}{\mu_j} \langle y, v_j \rangle u_j \right|^2$$

c'est à dire :

$$\|x_\alpha - A^+ y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu_j (\mu_j^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle y, v_j \rangle|^2. \quad (2.17)$$

Maintenant lorsque

$$\left(\frac{\alpha}{\mu_j (\mu_j^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle y, v_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{\mu_j^2} |\langle y, v_j \rangle|^2$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2} |\langle y, v_j \rangle|^2 = \|A^+ y\|^2 < \infty.$$

On passe à la limite de (2.17) tel que $\alpha \rightarrow 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x_\alpha - A^+ y\|^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu_j (\mu_j^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle y, v_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\mu_j (\mu_j^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle y, v_j \rangle|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors les vecteurs $\{x_\alpha\}$ sont des meilleurs approximations ver $A^+ y$ et

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = A^+ y.$$

D'ailleurs, pour toute $\alpha > 0$, l'opérateur $(A^* A + \alpha I)^{-1} A^*$ est borné et par conséquent l'approximation de Tikhonov x_α dépend continument de y .

Conclusion 2.1 Dans la régularisation de Tikhonov, nous approximons la solution de norme minimale de moindres carrés $A^+ y$ qui dépend de façon discontinue de y par un vecteur x_α (α le paramètre de régularisation) tel que x_α est une fonction continue de y c'est à dire un problème mal posé est approximé par une famille des problèmes bien posés

Chapitre 3

Application aux tomographie à rayons X

3.1 Présentation de la Tomographie

La tomographie est une technique d'imagerie qui consiste à reconstruire le volume d'un objet (le corps humain dans le cas de l'imagerie médicale, une structure géologique dans le cas de la géophysique) à partir d'une série de mesures déportées à l'extérieur de l'objet.

3.1.1 Principe physique de la tomographie à rayons X

Atténuation

L'atténuation est la variation d'énergie subite par un faisceau monochromatique de rayons X traversant des tissus biologiques. De manière plus précise, l'atténuation linéaire f dans un volume élémentaire dv est définie par :

$$\log \left(\frac{I + dI}{I} \right) = -f dv. \quad (3.1)$$

Où I l'intensité du faisceau à l'entrée du volume dv et $I + dI$ l'intensité à la sortie de ce volume.

En intégrant cette équation sur une droite D représentant la traject des rayons, on obtient l'intensité transmise I en fonction de l'intensité incidente I_0 par :

$$\begin{aligned} I &= I_0 \exp \left(- \int_D f(x, y) dv \right); \\ \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} &= \exp \left(- \int_D f(x, y) dv \right). \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$-\ln \frac{I}{I_0} = \int_D f(x, y) dv. \quad (3.2)$$

où $f(x, y)$ représente l'atténuation au point (x, y) du volume traversé. C'est la fonction à reconstruire en tout point de l'espace.

3.2 Problème inverse de la tomographie à rayons X

Le problème directe de la tomographie à rayons X consiste à déterminer l'intensité mesurée au détecteur connaissant celle à l'émetteur ainsi que la fonction d'atténuation f . Le problème inverse est donc de déterminer la fonction f connaissant les deux intensités.

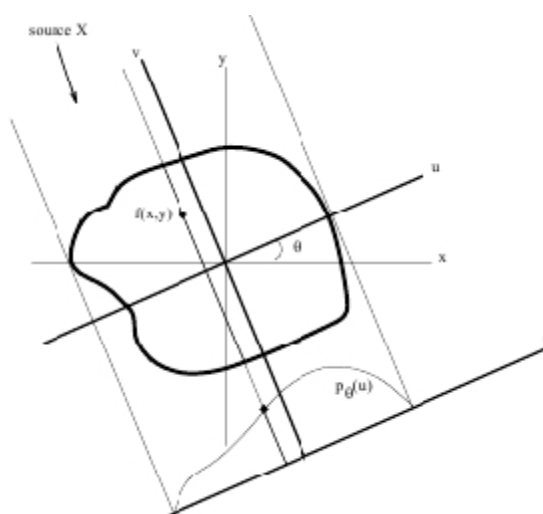
L'opérateur intégral intervenant à droite l'équation (3.2) s'appelle la transformation de Radon de f d'après le mathématicien autrichien J.Radon, qui a d'ailleurs donné (en 1917) la formule d'inversion permettant en principe de reconstruire la fonction d'atténuation f à partir de la connaissance des transformées sur toute les lignes du plan.

3.2.1 Interprétation géométrique

Théorème de la projection de Radon

Le théorème de la projection de Radon ([7], [1]) établit la possibilité de reconstruire la fonction d'atténuation f à l'aide de la totalité de ses projections selon des droites concourantes.

Ce théorème est expliqué par la figure suivante



Principe de projection

Les axes x et y sont les axes du repère cartésien de la coupe du patient observée, et donc l'image à reconstruire, les axes u et v sont liés à une direction du faisceau de rayons X : un faisceau envoyé dans la direction v fournit une suite de points données (valeurs de projections) sur la droite u d'angle θ . En chaque point de cette droite la valeur mesurée $P_\theta(u)$ correspond à l'intégrale du coefficient d'atténuation le long d'une droite parallèle à l'axe v , en faisant varier θ , on acquiert des projections tout autour du patient.

L'opérateur intégral qui exprime les projections de f est la transformation de Radon, il est noté R .

Formulation mathématique de la transformée de Radon La transformée de Radon est la formulation mathématique d'une projection. De manière plus précise, il s'exprime au

point (u, θ) par :

$$R[f](u, \theta) = P_\theta(u) = \int_D f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv. \quad (3.3)$$

Le problème de la reconstruction s'exprime de la manière suivante :
étant donné un ensemble de mesures de projections

$$\{P_\theta(u), \theta \in [0, \pi], u \in \mathbb{R}\}.$$

retrouver f en tout point de l'espace, c'est à dire calculer

$$\{f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Rétroprojection (opérateur adjoint) Une manière simple de retrouver en tout point du plan une valeur d'atténuation consiste à attribuer la valeur $P_\theta(u)$ à tout point placé sur le rayon de projection ayant donné cette valeur, puis à sommer toute les contributions issues de toutes les projection. Ce principe, est appelé la rétroprojection en (x, y)

Définition 3.1 *La rétroprojection en (x, y) d'une projection est la valeur de la projection d'angle θ au point sur lequel se projette (x, y) , et vaut :*

$$h_\theta(x, y) = P_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta). \quad (3.4)$$

Définition 3.2 *(Opérateur de rétroprojection) La rétroprojection de toutes les projections définit l'opérateur B dit opérateur de rétroprojection, obtenu en sommant sur tous les angles donnés par l'équation (3.4) :*

$$\begin{aligned} B[P](x, y) &= \int_0^\pi h_\theta(x, y) d\theta \\ &= \int_0^\pi P_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'image obtenue n'est pas l'image cherchée f , mais une version floue de f . Nous verrons plus loins l'expression mathématique de ce flou. L'opérateur de rétroprojection n'est donc pas l'inverse de l'opérateur de Radon. La reconstruction ainsi obtenue n'est donc pas exacte.

Remarque 3.1 *L'opérateur de rétroprojection peut en fait s'interpréter comme l'adjoint de l'opérateur de Radon, c'est à dire R^* .*

3.2.2 Matrice de projection (méthode algébrique)

Le principe de méthode algébrique consiste à rechercher f dans espace de dimension finie, sous la forme d'une combinaison linéaire de fonction de base φ_i :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(x, y).$$

La base la plus utilisée est celle des fonctions caractéristiques des pixels, définies par :

$$\varphi_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = \text{pixel } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La valeur d'une projection en un point vaut alors :

$$P_j = \sum_{i=1}^n R_{j,i} f_i.$$

Avec :

$$R_{j,i} = \int \varphi_i(u_j \cos \theta_k - v \sin \theta_k, u_j \sin \theta_k + v \cos \theta_k) dv.$$

Où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$

Si P_j désigne la valeur de projection d'angle θ_k au point u_j .

Le problème s'exprime donc se la forme matricielle suivante :

$$P = Rf \tag{3.6}$$

où R est appelée matrice de projection.

3.2.3 Application de méthode de moindres carrés et régularisation de Tikhonov

Pour qu'un problème soit bien posé il faut que trois conditions soient remplies :

1. Il y a au moins une solution pour tout ensemble de données ;
2. La solution est unique ;
3. La solution dépend continument des données.

Les deux premières conditions ne sont pas toujours satisfaites en tomographie, en particulier lorsque les données sont incomplètes ou bruitées.

Methode de moindres carrés

Deux problèmes peuvent se poser lors de l'inversion du système d'équation (3.6)

1. R^{-1} n'existe pas.
2. R^{-1} n'est pas continu.

Application de la méthode de moindres carrés

Dans cette partie, nous nous attachons à résoudre le premier problème. Le second sera résolu dans la partie suivante.

Si R n'est pas inversible, le système d'équation (3.6) n'a pas de solution au sens stricte. On applique alors la methode de moindres carrés pour chercher une solution approchée de ce problème. C'est à dire on résoud le problème :

$$R^t Rf = R^t P. \tag{3.7}$$

Cette fois la matrice $R^t R$ est de taille $n \times n$. Deux cas doivent être distingués.

–Si $R^t R$ est de rang n , la solution de système d'équation linéaire (3.7) est unique et est donné par :

$$f = (R^t R)^{-1} R^t P. \quad (3.8)$$

et la matrice $(R^* R)^{-1} R^*$ est l'inverse généralisé de R .

–Sino le système (3.7) a une infinité de solutions, parmi lesquelles on choisit en général celle de norme minimale.

L'instabilité de l'inverse généralisé Le problème d'existence d'un inverse étant résolu, l'inverse généralisée peut être instable (n'est pas continue). Pour expliquer cette instabilité, on applique la décomposition en valeurs singulières.

Soit σ_k^2 les valeurs propres de $R^t R$ et de RR^t , classées par ordre décroissante où $k \in \mathbb{N}$.

Soit p_k les vecteurs propres de RR^t et f_k les vecteurs propres de $R^t R$:

$$RR^t p_k = \sigma_k^2 p_k \text{ et } R^t R f_k = \sigma_k^2 f_k.$$

On a, pour $\sigma_k \neq 0$

$$p_k = \sigma_k^{-1} R f_k \text{ et } f_k = \sigma_k^{-1} R^t p_k.$$

En décomposant P sur la base p_k , on obtient :

$$\begin{aligned} f &= (R^t R)^{-1} R^t P \\ &= (R^t R)^{-1} R^t \left(\sum_{k=1}^n \langle P, p_k \rangle p_k \right) \\ &= (R^t R)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \langle P, p_k \rangle f_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \langle P, p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k. \end{aligned}$$

Ce qui exprime f comme combinaison linéaire des vecteur propres de $R^t R$.

Dans le cas de données bruitées, où les mesures (mesures ne sont pas faible) prennent la forme :

$$P + b.$$

Où P représente les projections exactes et b le bruit, la décomposition de f est donnée par :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle P, p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k + \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle b, p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k.$$

Cette expression permet maintenant de bien comprendre le problème d'instabilité.

Pour résoudre cette instabilité, on applique la méthode de régularisation de Tikhonov.

Application de régularisation de Tikhonov

Comme le problème (3.7) est mal posé car l'inverse généralisé n'est pas continue, on cherche une solution approchée qui est continue et converge vers la solution de norme minimale (3.8). c'est à dire on résout le problème de système d'équation :

$$(R^t R + \alpha I) f_\alpha = R^t P. \quad (3.9)$$

Où α est un réel strictement positif (le paramètre de régularisation de Tikhonov) et I la matrice identité.

La matrice $R^t R + \alpha I$ a des valeurs propres strictement positives en particulier, elle est inversible, donc le problème (3.9) est bien posé et il admet une solution unique de forme :

$$f_\alpha = (R^t R + \alpha I)^{-1} R^t P. \quad (3.10)$$

La solution (3.10) est continue par rapport à P , donc elle est stable.

Application du décomposition en valeurs singulières Soit le système singulière $\{f_k, p_k, \sigma_k\}$ pour la matrice R tel que :

$$R f_k = \sigma_k p_k \text{ et } R^t p_k = \sigma_k f_k.$$

On a

$$\begin{aligned} (R^t R + \alpha I) f_\alpha &= R^t P \\ \Leftrightarrow R^t R f_\alpha + \alpha f_\alpha &= R^t P \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \langle R^t R f_\alpha, f_k \rangle f_k + \alpha \sum_{k=1}^n \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \langle R^t P, f_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \langle R f_\alpha, R f_k \rangle f_k + \alpha \sum_{k=1}^n \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \langle P, R f_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle R f_\alpha, p_k \rangle f_k + \alpha \sum_{k=1}^n \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle P, p_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle f_\alpha, R^t p_k \rangle f_k + \alpha \sum_{k=1}^n \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle P, p_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k + \alpha \sum_{k=1}^n \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle P, p_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (\sigma_k^2 + \alpha) \langle f_\alpha, f_k \rangle f_k &= \sum_{k=1}^n \sigma_k \langle P, p_k \rangle f_k \\ \Leftrightarrow \langle f_\alpha, f_k \rangle &= \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} \langle P, p_k \rangle. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$f_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} \langle P, p_k \rangle f_k. \quad (3.11)$$

Et comme

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f_\alpha - f\|_{\mathbb{R}^2}^2 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} \langle P, p_k \rangle - \sum_{k=1}^n \langle P, p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k \right\|_{\mathbb{R}^2}^2 \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} \langle P, p_k \rangle - \langle P, p_k \rangle \sigma_k^{-1} f_k \right|^2 \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} - \sigma_k^{-1} \right)^2 |\langle P, p_k \rangle|^2 \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha}{\sigma_k (\sigma_k^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle P, p_k \rangle|^2.
\end{aligned}$$

Et

$$\left(\frac{\alpha}{\sigma_k (\sigma_k^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle P, p_k \rangle|^2 \leq \frac{1}{\sigma_k^2} |\langle P, p_k \rangle|^2.$$

Où

$$\frac{1}{\sigma_k^2} |\langle P, p_k \rangle|^2 = \|f\|_{\mathbb{R}^2}^2 \langle \infty \rangle.$$

Alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|f_\alpha - f\|_{\mathbb{R}^2}^2 = \sum_{k=1}^n \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\sigma_k (\sigma_k^2 + \alpha)} \right)^2 |\langle P, p_k \rangle|^2 = 0.$$

Donc f_α est une solution approchée de (3.1).

Bibliographie

- [1] **LS.BLOCH** : Reconstruction d'images de tomographie, Télécom paris Tech, département TSI, CNRSUMR 5141, Paris Cedex 13.
- [2] **H.BREZIS** : Analyse fonctionnelle : théorie et application, université Pierre et Marie Curie et Ecole polytechnique, 1987.
- [3] **H.W.ENGL**. Regularization methods for the stable solution of inverse problems. Surveys Math. Indust, 3 : 71-143, 1993.
- [4] **C.W.Grotsch**. Inverse problems in the Mathematical sciences-Vieng, Weisbaden, 1993.
- [5] **P.C.Hansen** : The discrete Picard condition for discrete ill posed problems. BIT 30 : 658-672, 1990.
- [6] **J. Hadamard**. Lectures on Cauchy's problem in linear partial Differential Equation. Yale University press. 1923.
- [7] **GT.Herman**. editor. Image reconstruction from projections : The fundamentals of computerized Tomography. Academic Press. New York. 1980.
- [8] **R.Keress** : Linear Integral Equation, Volume 82 of Applied Mathematical sciences. Springer, 1989. ■
- [9] **Mi. KERN** : *Problèmes inverses*. INRIA, ROCQUEN COURT, BP105, 78153 LE CHESNAY (2002-2003).