REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master en Mathématiques

Présenté Par

Melle ADILA Nawel

Option : **Modélisation**, **Contrôle et Optimisation**

intitulé

Stabilité des systèmes linéaires singuliers

Soutenue le 26/06/2012

Devant les membres de jury :

Président : BELHAMITI Omar	Maître de Conférences à Université de Mostaganem.
Examinateur : LAID Djillali	Maître Assistant à Université de Mostaganem.
Encadreur : BOUAGADA Djillali	Maître de Conférences à Université de Mostaganem.

Table des matières

Remerciements

Avant tout, je remercie ***dieu*** *qui m'a donné la volonté et la résignation pour atteindre mon but.*

Mes profonds et sincères remerciements à ***Mr BOUAGADA Djillali*** *qui a accepté et sacrifié du temps et de l'effort pour m'encadrer, merci pour votre aide, vos conseils et vos orientations.*

Ainsi, je remercie du fond du coeur ***le président*** *et les* ***membres du jury*** *d'avoir bien voulu m'honorer en acceptant de participer à l'évaluation de ce mémoire.*

Mes plus vifs remerciements vont aussi à ***mes parents*** *pour leurs encouragements pendant mes études.*

Merci à toute ***personne*** *qui à collaboré a de* ***prés*** *ou de* ***loin*** *à la réalisation de ce travail.*

Acronymes

$SLTI$: Système Linéaire à temps Invariant.

$SLTV$: Système Linéaire à temps Variant.

RL : Résistance et Inductance.

RLC : Résistance, Inductance et Capacité.

$SISO$: Une Seule Entrée une Seule Sortie.

TL : Transformation de Laplace.

TL^{-1} : Transformée Inverse de Laplace.

$Re\ (\lambda)$: Partie Réelle de λ.

Introduction Générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la stabilité des systèmes linéaires. Les modèles envisagés dans le mémoire pour décrire les systèmes de manière temporelle sont dits modèles d'état linéaires invaraints dans le temps. Dans le cas linéaire l'étude de la dynamique passe par la notion de "pôles" du système. La dynamique du système dépend beaucoup de la localisation des pôles dans le plan de Laplace. Ces pôles sont choisis par une lois de commande.

L'objectif du travail est donc de détèrminer une loi garantissant que les pôles sont dans une région du plan complexe de manière à assurer la stabilité du système.

Nombreux auteurs ont affirmé et établis des tests pratiques servant à stabiliter un modèle d'état.

On s'intéresse dans notre étude à ce type de problème tout en developpant des tests pour des modèles d'éspace d'état standards afin de généraliser cela au cas des modèles à espaces d'état généralisé, il s'agit dans notre cas, des systèmes linéaires singuliers.

Des tests à la Lyapunov sont rappelés pour établir enfin des conditions de Lyapunov comme généralisation au cas singulier.

Chapitre 1

Notions de Bases

Ce chapitre est destiné à la présentation des notions préliminaires servant à la réalisation de ce travail. Pour ce faire, nombreuses références sont citées, [1], [2], [5], [8].

1.1 Théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle de premier ordre

On considère le système linéaire en temps fini suivant,

$$\begin{cases} x' = f(t,x,u) \\ y = g(t,x,u) \end{cases} \tag{1.1}$$

on peut de même avoir

$$x' = F(t,x) \tag{1.2}$$

où on pose

$$f(t,x,u) = F(t,x)$$

Si $F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et si J un compact de $\mathbb{R}$ et il existe une constante L_J vérifiant,

$$\forall x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n, |F(t,x) - F(t,\widetilde{x})| \leq L_J |x - \widetilde{x}|, \forall t \in \mathbb{R}$$

tels que :

1. $\forall (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, l'équation (1.2) admet une unique solution $\phi(t, t_{0,} x_0)$ satisfaissant

$$\phi(t, t_{0,} x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$$

2. La solution ϕ est continue en t, t_0 et x_0
3. Si F et x_0 sont continues relativement au paramètre λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, alors la solution ϕ est continue relativement à λ

Sous ces trois conditions et pour tout t_0, x_0 et u l'équation (1.2) admet une et une seule solution $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\phi(t, t_{0,} x_0) = x_0$.

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)B(s)u(s)ds$$

Cependant, sous ces conditions, le système

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x + B(t)u \\ y(t) = C(t)x + D(t)u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

possèdera comme sortie,

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut extraire le système (1.3) à partir de l'équation (1.1), on suppose toujours que $g \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e,u_e,t) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e,u_e,t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e,u_e,t) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e,u_e,t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_e,u_e,t) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_e,u_e,t) \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_e,u_e,t) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_e,u_e,t) \end{bmatrix}, D(t) = \frac{\partial g}{\partial u}(x_e,u_e,t)$$

Où x_e, u_e : sont les variables de point d'équilibre, et

$$A \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times n}), B \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times m}), C \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p\times n}), D \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p\times m})$$

Le théorème d'existence et de l'unicité nous affirme pour tout $x(t_0) = x_0$ et pour tout $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, que le système (1.3) possède une réponse unique pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t)$$

Où $\Phi(t,t_0)$ est dite *matrice de transition* du système d'équation

$$x' = A(t)x$$

1.2 La transformée de Laplace TL

Définition 1.1 *La transformation de Laplace est une application défini d'un espace de temps $f(t)$ vers l'espace de phase $F(\lambda)$ comme suit :*

$$L[f(t)] = F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Objectif de la transformée de Laplace

L'objectif de la transformation de Laplace est le transfert d'un état dynamique à un état statique (algébrique) à fin d'éviter la manipulation des équations différentielles, la transformée de Laplace existe si

$$\exists k > 0, \text{ tel que } |f(t)| \leq ke^{\alpha t}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$$

1.2.1 La linéarité

La transformée de Laplace est linéaire car

$$\begin{aligned} \forall t_1, t_2 &\in \mathbb{R}_+, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, L[\alpha f(t_1) + \beta f(t_2)] = F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\alpha f(t_1) + \beta f(t_2)]dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t_1)dt + \beta \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t_2)dt \\ &= \alpha L[f(t_1)] + \beta L[f(t_2)] \end{aligned}$$

1.2.2 La transformée inverse de Laplace TL^{-1}

Si TL désigne la transformation de Laplace, on note $F = TL(f)$ et alors $f = TL^{-1}\ (F)$. On utilise de même la notation suivante $F \subset f$.

On dit que F est la transformée de f et que f est l'origine de F. Nous rappelons que la transformée inverse de Laplace est aussi linéaire.

1.2.3 Théorème de dérivation de Laplace

Pour toute fonction f dérivable n fois vérifiant la condition d'existence de Laplace pour chacune de dérivées. Nous rappelons cependant quelques propriétés utiles :

On a,

1. $TL(f'(t)) = \lambda TL(\lambda) - f(0)$
2. $TL(f"(t)) = \lambda^2 TL(\lambda) - \lambda f(0) - f'(t)$
3. $TL(f^{(n)}(t)) = \lambda^n TL(\lambda) - [\lambda^{(n-1)} f(0) + ... + f^{(n-1)}(0)]$

1.3 La transformation en Z

Définition 1.2 *La transformation en Z est une application qui transforme une suite s (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée Z telle que*

$$S(z) = Z(s(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n}, z \in \left\{ z \in C / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \quad \textit{converge} \right\}$$

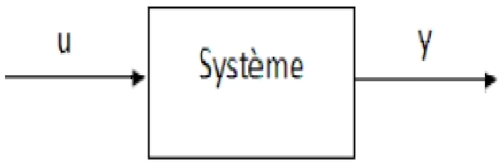
1.4 Convolution

Théorème 1.1 *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, la convolée de f par g notée $f * g$ est définie par,*

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx$$

1.5 Notion de système

Définition 1.3 *Un système est un ensemble de pièces ou objets qui réalisent une opération spécifique, il y donc une notion d'action sur l'environnement en fonction d'excitation extérieure.*



Système monovariable

Un système est ainsi défini par ses entrées et ses sorties qui le relient à l'environnement extérieur.

1.5.1 Comportement dynamique

Définition 1.4 *C'est le comportement des variables de sortie du système au cours du temps relativement à l'évolution des variables d'entrées. Le comportement dynamique met en évidence le fonctionnement temporel du système ainsi que la transformation d'information impliquée par son action, on distingue deux types de comportement :*

1. Le comportement des variables d'entrées.
2. Le comportement des variables de sorties.

1.6 Le modèle

Définition 1.5 *Un modèle est une description mathématique du comportement du système.*

Dans le cadre des modèles linéaires nous allons rencontré essentiellement trois types de modèles :

1. La forme différetielle entrée-sortie
2. La matrice de transfert
3. L'équation d'état

Chapitre 2

Systèmes Linéaires à temps Invariant Standards : Cas Continu

Un rappel et une description exhaustive de la théorie des systèmes différentiels linéaires est proposé. L'analyse des solutions est cependant développée. La représentation d'état dans l'espace d'état est donnée.

Dans cette partie, l'accent est mis sur le problème de solvabilité des systèmes LTI pour pouvoir ensuite, étudier la stabilité de ce type de modèle. On donnera différentes caractérisations.

Tout en traitant le cas à temps continu, puis on adaptera les techniques au cas discret.

2.1 Descripion d'un système LTI standard en temps continu

Définition 2.1 *La représentation d'état d'un système LTI en temps continu est représentée par,*

$$\left\{\begin{array}{c} x'(t) = Ax(t) + Bu(t).....(4.a) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t).....(4.b) \\ x(0) = x_0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice dynamique.

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: la matrice de commande ou d'entrée.

$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: la matrice de mesure ou de sortie.

$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$: la matrice de transmission .

t : le temps.

1. Les équations $(4.a)$ sont dites équations d'états.
2. Les équations $(4.b)$ sont dites équations de mesures.

3. Les équations $(4.a)$ et $(4.b)$ construisent la description d'un système linéaire en temps fini continu.

2.2 Descripion d'un système LTI standard en temps discret

Définition 2.2 *La représentation d'état d'un système LTI à temps discret est de la forme,*

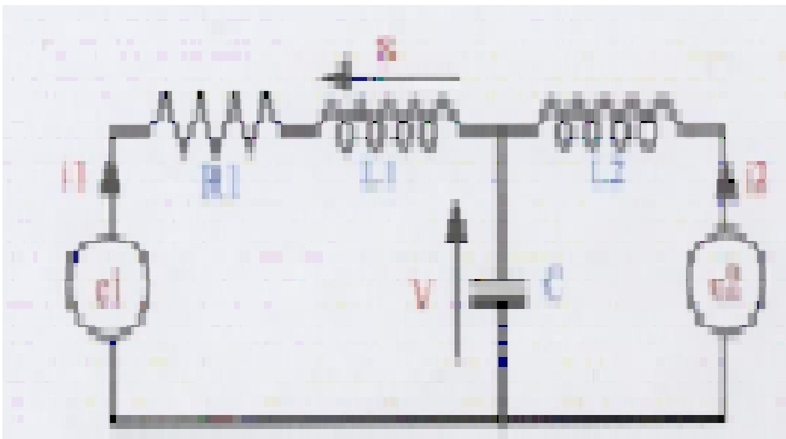
$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.....(5.a) \\ y_k = Cx_k + Du_k.....(5.b) \\ x_k(0) = x_0, \forall k \in \mathbb{R}^+, k \geq k_0 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où :

$x_k(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.
$y_k(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.
$u_k(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice dynamique.
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: la matrice de commande ou d'entrée.
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: la matrice de mesure ou de sortie.
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$: la matrice de transmission.
t : le temps.

1. Les équations $(5.a)$ sont appelées équations d'états.
2. Les équations $(5.b)$ sont appelées équations de mesures.
3. Les équations $(5.a)$ et $(5.b)$ construisent la description d'un système linéaire en temps fini discret.

Exemple 2.1 *(Exemple d'application)*
On s'intéresse au circuit RLC de deux mailles suivant,



circuit RLC

Par l'application de la loi de Kirchoff, "*La somme de toutes les tensions sont nulles sur chaque maille*".

On donne les équations physiques suivantes,

$$\begin{cases} \dfrac{di_1(t)}{dt} = \dfrac{-R}{L_1}i_1(t) - \dfrac{1}{L_1}i_3(t) + \dfrac{1}{L_1}e_1 \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} = \dfrac{-1}{L_2}i_3(t) - \dfrac{1}{L_2}e_1 \\ \dfrac{di_3(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i_1(t) - \dfrac{1}{C}i_2(t) \end{cases}$$

Ce qui peut s'écrire d'après le changement de variable

$$x(t) = i(t)$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{-R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

Remarque 2.1 *En particulier un système linéaire standard peut être considérer comme un système linéaire à temps variant respectives dans le cas discret et continue respectivement, c-a-d,*

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(t)x_k + B(t)u_k \\ y_k = C(t)x_k + D(t)u_k \\ x_k(0) = x_0, \forall k \in \mathbb{R}^+, k \geq k_0 = 0 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ce type d'équation apparaît dans la modélisation de processus de système physique.

Remarque 2.2 ***On s'intéresse par la suite aux cas des systèmes mono-variable*** $(n = p = 1)$, ***ne comportant qu'une seule entrée et une seule sortie, en englais "SISO", et les systèmes linéaires à temps invariant i.e,***

$$A(t) \approxeq A, B(t) \approxeq B, C(t) \approxeq C, D(t) \approxeq D$$

Remarque 2.3 *La représentation d'état n'est pas unique pour le même système physique.*

2.3 Solution des systèmes LTI standards en temps Continu

Plusieurs techniques sont établis pour la recherche de la solution du modèle (2.1). On citera parmi eux, l'utilisation de la transformée de Laplace.

Notre système est d'écrit par les équations

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Dans un premier temps, on considère le système autonome ($u = 0$). L'équation d'évolution de l'état x devient,

$$x' = Ax$$

Et considérons que le système est régulier, autrement dit,

$$\det(\lambda I - A) \neq 0 \ , \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

L'application de la transformation de Laplace de cette équation donne,

$$pX(p) - x(0) = AX(p) \tag{2.3}$$

Remarque 2.4 *Ici $X(p)$ représente le vecteur des TL des x_i.*

On aura donc

$$X(p) = (pI - A)^{-1}x(0)$$

Puis on applique la transformation de Laplace inverse sur (2.3) ,

$$TL^{-1}[X(p)] = TL^{-1}[(pI - A)^{-1}]x(0)$$

Ceci implique que,

$$x(t) = TL^{-1}[(pI - A)^{-1}]x(0)$$

Or,

$$e^{At} = TL^{-1}[(pI - A)^{-1}]$$

Qui représente la matrice de transition du système, par conséquent,

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Dans le cas du régime forcé, l'équation d'évolution de x sera,

$$x' = Ax + Bu$$

Et l'application de la transformation de Laplace à cette équation donne,

$$pX(p) - x(0) = AX(p) + BU(p) \Rightarrow X(p) = (pI - A)^{-1}x(0) + (pI - A)^{-1}BU(p)$$

En prenant la transformée inverse TL^{-1}, on trouve,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Et la sortie sera donc,

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

2.4 Solution des systèmes LTI standards en temps discret

Considérons le système LTI standard en temps discret suivant,

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \\ x_k(0) = x_{k_0} \end{cases}$$

La solution du système est,

$$x_k(t) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k} A^{k-(i+1)} Bu_i, k > 0$$

Par suite,

$$y_k(t) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k} CA^{k-(i+1)} Bu_i + Du_i, k > 0.$$

Le premier membre de cette équation correspond au régime libre, le deuxième au régime forcé.

Définition 2.3 *(La réponse libre)*
La réponse libre d'un système est la réponse du système à ses seules conditions initiales. Dans le cas d'un système LTI, elle est donnée par la forme,

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Définition 2.4 *(La réponse forcée)*
La réponse forcée d'un système est la réponse du système au seul signal d'entrée et pour des conditions initiales nulles. Dans le cas d'un système LTI, elle est décrite par :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Cette équation montre que si l'on sait calculer e^{At} , on aura $x(t)$ donc $y(t)$. Avant de passer au calcul proprement dit de e^{At}, on va en voir quelques une de ses propriétés.

2.5 La matrice de transition

Définition 2.5 *La solution de l'équation d'état homogène (non commandée)*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t) = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

où, A est une matrice à coefficients constants. La solution est donnée par,

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0, \forall t \geq t_0$$

avec $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition. La matrice de transition possède les propriétés suivantes.

Propriétés de la matrice de transition

1. $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$
2. $\Phi(t_0, t_0) = I_n$
3. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

Dans le cas du système (2.4), la matrice de transition est,

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

2.6 Quelques méthodes pour calculer la matrice e^{At}

Il nous reste pour connaître $y(t)$ donc $x(t)$, le calcul de e^{At}. Nous donnera trois méthodes pour réaliser le calcul.

2.6.1 Par la transformation inverse de Laplace

On peut utiliser la première définition de la matrice de transition,

$$e^{At} = TL^{-1}[(pI - A)^{-1}]$$

Exemple 2.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(pI - A) &= \begin{pmatrix} p & -1 \\ 0 & 2+p \end{pmatrix} \\ &= p(p+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (pI - A)^{-1} &= \frac{1}{p(p+2)} adj(pI - A) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{P} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{P+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^{At} &= TL^{-1}[(pI - A)^{-1}] \\ &= \begin{pmatrix} L^{-1}(\frac{1}{p}) & L^{-1}(0) \\ L^{-1}(\frac{1}{p(p+2)}) & L^{-1}(\frac{1}{p+2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6.2 Par la diagonalisation

Supposons que nous sommes dans le cas où la matrice A est diagonalisable. Cela veut dire, qu'il existe P une matrice inversible telle que,

$$\widetilde{A} = P^{-1}AP$$

Où encore

$$A = P\widetilde{A}P^{-1}$$

Avec

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i sont les valeurs propres de A.

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exemple 2.3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1,\ \lambda_2 = 1,\ v_1 = (1,0)^T,\ v_2 = (1,1)^T \\ P &= [v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Jt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t} & e^{t} - e^{-t} \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6.3 Par le calcul direct de e^{At} à partir de développement limité

$$e^{At} = I_n + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i$$

Exemple 2.4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = I + At = \begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5 *Il existe d'autres méthodes, citons l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton* ∎

2.6.4 La fonction de transfert

Représente un modèle à comportement entrée-sortie, qui s'obtient à partir d'une équation différentielle à coefficient constant.

Comme, il s'agit de déterminer un modèle, nous considérons les conditions initailes nulles et on applique tous simplement la transformation de Laplace.

Comment l'obtenir ? Considérons le système standard suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

On applique la transformation de Laplace TL, ce qui donne,

$$\begin{cases} TL[x'(t)] = ATL[x(t)] + BTL[u(t)] \\ TL[y(t)] = CTL[x(t)] + DTL[u(t)] \end{cases}$$

On pose,

$$\begin{cases} TL(x) = X(\lambda) \\ TL(u) = U(\lambda) \\ TL(y) = Y(\lambda) \\ \forall\lambda \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.6}$$

Or,

$$TL[x'(t)] = \lambda X(\lambda) - x(0) = \lambda X(\lambda) \tag{2.7}$$

Car la condition initiale est nulle. Maintenant on remplace (2.6) et (2.7) dans (2.5), il s'ensuit,

$$\begin{cases} \lambda X(\lambda) = AX(\lambda) + BU(\lambda) \\ Y(\lambda) = CX(\lambda) + DU(\lambda) \end{cases}$$

Soit alors

$$\begin{cases} (\lambda I - A)X(\lambda) = BU(\lambda) \\ Y(\lambda) = CX(\lambda) + DU(\lambda) \end{cases}$$

Le faisceau $(\lambda I - A)$ est régulier donc inversible, par conséquent,

$$\begin{cases} X(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} B U(\lambda) \\ Y(\lambda) = (C(\lambda I - A)^{-1} B + D) U(\lambda) \end{cases}$$

Posons,

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B + D = C \frac{1}{\det(\lambda I - A)} adj(\lambda I - A) B + D$$

et on écrit

$$Y(\lambda) = H(\lambda) U(\lambda)$$

$H(\lambda)$ est appelée la matrice de transfert.

On a,

$$Y(\lambda) = H(\lambda) U(\lambda)$$

et si on applique l'inverse de Laplace TL^{-1}

$$TL^{-1}[Y(\lambda)] = TL^{-1}[H(\lambda) U(\lambda)]$$

On trouve la solution du système (2.5)

$$y(t) = h(t) * u(t), \text{ tel que } TL^{-1}[H(\lambda)] = h(t)$$

La matrice de transfert s'écrit donc autrement,

$$H(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

Remarque 2.6 *Voici quelques remarques caractérisant la matrice de transfert :*

1. *Le concept de matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algébrique.*
2. *La matrice de transfert est une caractérisation du système indépendante de l'amplitude et de la nature de l'entée du système.*
3. *La transformée de Laplace permet de relier la matrice d'entée et la matrice de réponse par :*

$$Y(\lambda) = H(\lambda) U(\lambda)$$

Chapitre 3

Systèmes Linéaires à temps Invariant Singuliers : Cas Continu

Dans ce chapitre, le problème de la recherche de la solution des systèmes linéaires singuliers est traité par l'utilisation de la transformation de Laplace comme généralisation du cas standard.

Les modèles de la forme

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.
$y(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.
$u(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).
$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice d'évolution.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice dynamique.
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: la matrice de commande ou d'entrée.
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: la matrice de mesure ou de sortie.
$D \in \mathbb{R}^{p\times m}$: la matrice de transmission.
$x(0)$ est la condition initiale.

Qui sont appelés systèmes linéaires singuliers sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques comme par exemple les circuits RLC, l'automatique, la robotique, la cinétique chimique etc,..., ces systèmes se rencontrent de même dans l'étude des systèmes interconnectés, les réseaux électriques et plus généralement dans les structures mécaniques.

3.1 Description d'un système linéaire singulier

Définition 3.1 *On dit que le système linéaire à temps continue* (3.1) *est singulier si la matrice E est singulière, c-à-d* $\det E = 0$

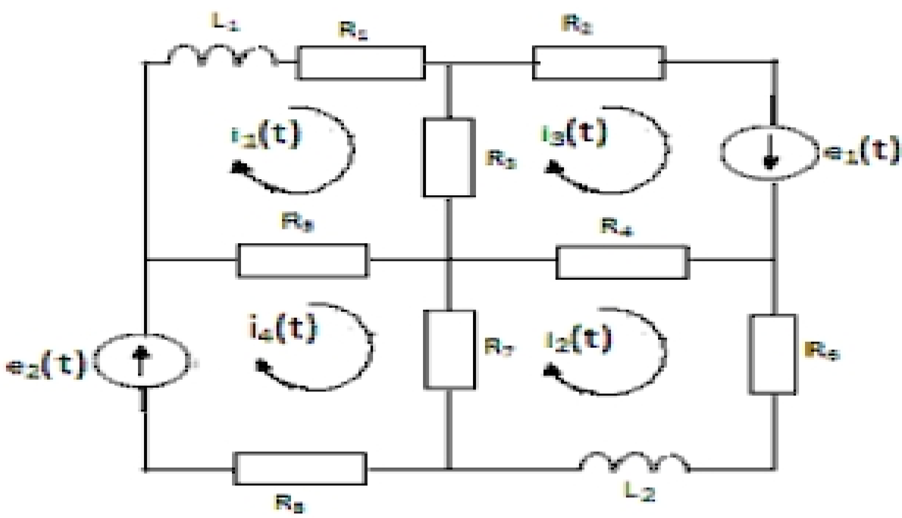
Définition 3.2 *Un sysème linéaire à temps invariant singulier à temps discret est de la* *forme,*

$$\begin{cases} Ex_{k+1}(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + Du_k(t) \\ x_k(0) = x_{k_0} \end{cases}$$

avec : $\det E = 0$

$x_k(t) \in \mathbb{R}^n$: e vecteur d'état.
$y_k(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur de sortie.
$u_k(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur de commande (entrée).
$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice d'évolution.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: la matrice dynamique.
$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: la matrice de commande ou d'entrée.
$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$: la matrice de mesure ou de sortie.

Exemple d'appliquation On dispose dans cette application de quatres circuits RL interconnectés, entre eux,



Soit alors un circuit à quatre mailles et nous allons vous montrer que la modélisation à travers les lois de l'électricité aboutit à un système singulier, on utilise, alors les lois de Kirchoff pour cela la méthode des mailles sur le circuit donne les équations physiques suivantes,

$$\begin{cases} L_1\frac{di_1(t)}{dt} = -(R_1 + R_3 + R_5)i_1(t) + R_3i_3(t) + R_5i_4(t) \\ L_2\frac{di_2(t)}{dt} = -(R_4 + R_6 + R_7)i_2(t) + R_4i_3(t) + R_7i_4(t) \\ 0 = R_3i_1(t) + R_4i_2(t) - (R_2 + R_3 + R_4)i_3(t) + e_1 \\ 0 = R_5i_1(t) + R_4i_2(t) - (R_5 + R_7 + R_8)i_3(t) + e_{21} \end{cases}$$

Si on pose,

$$\begin{cases} x_1(t) = i_1(t) \\ x_2(t) = i_2(t) \\ x_3(t) = i_3(t) \\ x_4(t) = i_4(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_3 + R_5, R_{13} = R_{31} = R_3, R_{14} = R_{41} = R_5 \\ R_{22} &= R_4 + R_6 + R_7, R_{23} = R_{32} = R_4, R_{42} = R_{24} = R_7 \\ R_{33} &= R_2 + R_3 + R_4, R_{44} = R_5 + R_7 + R_8 \end{aligned}$$

Donc on peut écrire les équations précédentes sous forme d'un système de type

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ + \\ \text{Conditions initiales} \end{cases}$$

tels que :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & \frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{24}}{L_2} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & R_{44} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système (3.1), on distingue deux cas.

1. Premier cas : Si la matrice E est non singulière donc le système (3.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} x'(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

   et on obtient un système LTI standard à temps continu, en appliquant la transformée de Laplace, on trouve la solution,

$$x(t) = e^{E^{-1}At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

   La réponse donnée par,

$$y(t) = Ce^{E^{-1}At}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{E^{-1}A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du$$

2. Deuxième cas : Si la matrice E est singulière ($\det E = 0$), pour cela on va considérer la définition suivante.

Définition 3.3 *On dit que le système* (3.1) *est régulier si et seulement si*

$$\det(\lambda E - A) \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

3.2 Solution d'un système LTI singulier à temps continu

Pour un système singulier, nous allons supposés dans toute la suite que pour un certain

$$\lambda \in \mathbb{C}, \ \det(\lambda E - A) \neq 0$$

Définition 3.4 *Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de L'aurent au voisinage de l'infini*

$$(\lambda E - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}$$

où, μ c'est l'indice de nilpotence du faisceau $(\lambda E - A)$

μ est décrite par

$$\mu = rgE - \deg[(\lambda E - A)] + 1$$

et ϕ_i est la matrice fondamentale de (3.1), qui satisffait les équations suivantes,

$$\begin{cases} E\phi_i - A\phi_{i-1} = \delta_{0i} I_n \\ \phi_i E - \phi_{i-1} A = \delta_{0i} I_n \\ \forall i \leq -\mu, \phi_i = 0 \end{cases}$$

où

$$\delta_{0i} = \begin{cases} I \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est le symbole de kronecker.

La solution du système (3.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$, et le contrôle $u(t)$ est donnée par,

$$x(t) = e^{\phi_0 A t}\phi_0 E x_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}[Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}]$$

où

$$u^j = \frac{d^j u}{dt^j}, j = 1, ..., \mu - 1$$

et

$$y(t) = Ce^{\phi_0 A t}\phi_0 E x_0 + \int_0^t Ce^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 u(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}[Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}] + Du(t)$$

Preuve. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation

$$Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

on obtient

$$(E\lambda - A)X(\lambda) = Ex_0 + BU(\lambda)$$

Le système est régulier, donc $(E\lambda - A)^{-1}$ existe pour un certain nombre $\lambda \in \mathbb{C}$, par suite,

$$X(\lambda) = (E\lambda - A)^{-1}(Ex_0 + BU(\lambda))$$

de la relation, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
X(\lambda) &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}[Ex_0 + BU(\lambda)] \\
X(\lambda) &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} BU(\lambda) \\
X(\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} BU(\lambda) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} \lambda^{(i-1)} BU(\lambda)
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant la transformé inverse de Laplace TL^{-1},

$$\begin{aligned}
TL^{-1}[X(\lambda)] &= Ex_0 TL^{-1}[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}] + BTL^{-1}[\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)} U(\lambda)] \\
&\quad + Ex_0 TL^{-1}[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i \lambda^{(i-1)}] + BTL^{-1}[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i \lambda^{(i-1)} U(\lambda)]
\end{aligned}$$

On a

$$L[e^{\phi_0 At}\phi_i] = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}$$

d'après le théorème de convolution

$$\begin{aligned}
TL^{-1}[X(t)] &= Ex_0 TL^{-1}[L(e^{\phi_0 At}\phi_0)] + BTL^{-1}[L(e^{\phi_0 At}\phi_0) \times L(u(t))] \\
&\quad + Ex_0 TL^{-1}[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i \lambda^{(i-1)}] + BTL^{-1}[\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i \lambda^{(i-1)} U(\lambda)]
\end{aligned}$$

de l'application de la transformée inverse de Laplace, on abouti à,

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + (e^{\phi_0 At}\phi_0 * Bu(t)) + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i} u^{(i-1)}(t) \\
&= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t_-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}[Ex_0\delta^{(i-1)} + Bu^{(i-1)}(t)]
\end{aligned}$$

donc, la sortie est,

$$y(t) = CEx_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + C\int_0^t e^{\phi_0 A(t_-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + C\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}[Ex_0\delta^{(i-1)} + Bu^{(i-1)}(t)] + Du(t)$$

■

Exemple 3.1 *Soit le système suivant,*

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0, t_0 = 0 \end{cases}$$

où,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = 3$$

donc,

$$\det(E\lambda - A) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = -1$$

tels que

$$\begin{aligned} \mu &= rgE - \deg[\det(E\lambda - A)] + 1 \\ &= 1 - 0 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

on a d'après la définition,

$$(E\lambda - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i \lambda^{-(i+1)}$$

implique,

$$\frac{adj(E\lambda - A)}{\det(E\lambda - A)} = \phi_{-2}\lambda^1 + \phi_{-1}\lambda^0 + \phi_0\lambda^{-1} + \phi_1\lambda^{-2} + ...$$

donc

$$(E\lambda - A)^{-1} = \frac{adj(E\lambda - A)}{\det(E\lambda - A)} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -2\lambda \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices fondamentales sont,

$$\phi_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\phi_0 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{\phi_0 At}\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + [\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 BU(\tau)d\tau] + \sum_{i=1}^{2} \phi_{-i}[Ex_0\delta^{(i-1)} + Bu^{(i-1)}(t)] \\ &= \phi_{-1}Ex_0\delta(t) + \phi_{-1}Bu(t) + \phi_{-2}Ex_0\delta^{(1)}(t) + \phi_{-2}Bu^{(1)}(t) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi_{-1}Ex_0\delta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_0\delta(t) \\
\phi_{-1}Bu(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\
\phi_{-2}Ex_0\delta^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_0\delta^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_0\delta^{(1)}(t) \\
\phi_{-2}Bu^{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u^{(1)}(t)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_0\delta(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u^{(1)}(t) \\
&= \begin{pmatrix} (x_{2,0}+x_{3,0})\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -u(t) \\ \grave{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^{(1)}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_{2,0}+x_{3,0})\delta(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{2,0}+x_{3,0})\delta(t) - u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ 0 \end{pmatrix} + 3u(t) \\
&= 3u(t)
\end{aligned}$$

où

$$x(0) = \begin{pmatrix} (x_{2,0}(0)+x_{3,0}(0))\delta(0) - u^{(1)}(0) \\ -u(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1 *On peut utiliser une autre méthode pour résoudre le système* (3.1), *c'est la méthode de la décomposition de la matrice singulière.*

L'aidée est de,

1. Multiplier l'équation
$$Ex' = Ax + Bu$$
par une matrice inversible Q, on trouve
$$\begin{cases} QEx' = QAx + QBu \\ y(t) = Cx \end{cases} \tag{3.3}$$
2. Posons,
$$x = Pz \Rightarrow x' = Pz'' \tag{3.4}$$
tel que P une matrice inversible
3. Remplaçons l'équation (3.4) dans le système (3.3), on obtient cependant le système,
$$\begin{cases} QEPz' = QAPz + QBu(t) \\ y(t) = CPz \end{cases} \tag{3.5}$$
Posons que : $\widetilde{E} = QEP$, $\widetilde{A} = QAP$, $\widetilde{B} = QB$, donc
$$(3.5) \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{E}z' = \widetilde{A}z + \widetilde{B}u(t) \\ y(t) = \widetilde{C}z \end{cases} \tag{3.6}$$
tels que :
$$\begin{cases} \widetilde{E} = diag(I_{n_1}, N) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \\ \widetilde{A} = diag(A, I_{n_2}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \\ \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \\ n_1 + n_2 = n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$
4. Résoudre le système
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\widetilde{C}_1, \widetilde{C_2}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$
implique,
$$\begin{cases} z_1' = \widetilde{A_1}z_1 + \widetilde{B_1}u \\ y_1 = \widetilde{C_1}z_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} Nz_2' = \widetilde{A_2}z_2 + \widetilde{B_2}u \\ y_2 = \widetilde{C_2}z_2 \end{cases}$$
$$y(t) = \widetilde{C_1}z_1 + \widetilde{C_2}z_2 = C_1x_1 + C_2x_2, x_1 \in \mathbb{R}^q, x_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$$
Si N est inversible, on va obtenir deux systèmes standards, sinon, nous sommes obligés de décomposer la matrice N en deux matrices inversibles et ainsi de suite jusqu'à avoir des systèmes standards facile à résoudre.

3.3 Solution d'un système LTI singulier à temps discret

Remarque 3.2 *Pour résoudre un système LTI singulier à temps discret, on va utiliser la transformée en Z, et comme on s'intéresse dans ce mémoire au cas continu nous allons donner directement la représentation de la solution de système,*

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \phi_n E x_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} \phi_{n-i-1} + B u_i \\ y_n(t) &= C\phi_n E x_0 + \sum_{i=0}^{n+\mu-1} C\phi_{n-i-1} + CBu_i + Du_n \end{aligned}$$

Chapitre 4

Stabilité des Systèmes LTI à temps Continu

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème de la stabilité asymptotique d'un système linéaire standard et à temps continu. Des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité seront donc établis.

Objectif

Connaissance des tests de stabilité et familiarisation avec les méthodes de Lyapunov.

Position du problème

Soit le système linéaire d'écrit par son modèle d'état,

$$x' = f(x, u) \tag{4.1}$$

d'après le théorème d'existence et d'unicité, cette équation admet une et une seule solution. Supposons que (4.1) possède un point d'équilibre en $(\overline{x}, \overline{u})$. On s'intéresse au comportement de ce système au voisinage de cet équilibre. Plus précisément, on se pose les deux questions suivantes :

1. Si l'entrée est maintenue égale à sa valeur d'équilibre $\overline{u}$ et si l'état initial $x(t_0)$ est dans le voisinage en valeur d'équilibre $\overline{x}$, comment vont se comporter les trajectoires du système ?
2. Si l'entrée $u(t)$ est proche de $\overline{u}$ (mais pas nécessairement constante), que peut-on dire des trajectoires du système ?

Réponse à la question

Définition 4.1 *L'équilibre* $(\overline{x}, \overline{u})$ *est un équilibre* stable *du système* (4.1) *si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tel que : } \|x(t_0) - \overline{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0), \overline{u}) - \overline{x}\| < \varepsilon, \forall t, t \geq t_0$$

dans le cas contraire l'équilibre est instable.

Interprétation de la définition

On souhaite caractériser le fait que le trajectoire $x(t)$ reste proche du point d'équilibre $\overline{x}$ pour tout $t \geq t_0$, lorsque l'entrée est constante ($u(t) = \overline{u}, \forall t, t \geq t_0$). Pour cela, on mesure la proximité avec la norme $\|.\|$ et on impose que les solutions $x(t)$ restent à intérieur de la région délimitée par $\|x(t) - \overline{x}\| < \varepsilon$.

Si cet objectif est réalisable avec une condition initiale $x(t_0)$ proche de l'équilibre, alors on dit que l'équilibre est stable, sinon il est dit instable.

Remarque 4.1 *Cette définition est la forme la plus faible de stabilité. En particulier, elle n'implique pas que les trajectoires $x(t)$ convergent vers le point d'équilibre.*

4.1 Stabilité des systèmes LTI standard continu

Une notion qui est principale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

4.1.1 Les définitions de la stabilité

Soit le système (4.1). Un point d'équilibre noté par $x_e \in \mathbb{R}^n$ est la solution de l'équation $f(x) = 0$, et on note par $D = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}$.

1. **Attracteur :** S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t, x(t_0), u_e) - x_e\| = 0$$

Un équilibre attracteur x_e est donc un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ lorsqu'elles démarrent suffisamment prés de x_e.

2. **Asymptotiquement stable :** S'il est stable et attracteur.

Remarque 4.2 *(a) La stabilité asymptotique est la propriété qui est généralement recherchée en pratique.*

(b) La définition ci-dessus ne nous dit rien sur la vitesse à laquelle $x(t)$ converge vers l'équilibre.

d'où la raison pour lequel la notion de stabilité exponentielle est introduite, ce qui permet de caractériser cette vitesse.

1. **Stabilité exponentielle :** Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ autour de x_e, et pour tout $t \in [t_0, \infty[$

$$\|x(t_0 - x)\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t), u_e)\| \leq M \|x(t_0) - x_e\| e^{-\alpha t}$$

Remarque 4.3 *(La stabilité exponentielle)$\Rightarrow$(La stabilité asymptotique), et l'inverse n'est pas vrai.*

4.1.2 Méthodes de Lyapunov

La première méthode de Lyapunov (indirecte)

Cette méthode est basée sur l'examen de la linéarisation du système suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

autour de l'équilibre (x_e, u_e). De façon précise, on examine les valeurs propres $\lambda_i(A)$ de la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre, la solution est,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de (x_e, u_e) s'expriment comme suit,

Théorème 4.1 *1. Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne ont une partie réelle strictement négative* $(\forall i, \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0)$*, l'équilibre* (x_e, u_e) *est exponentiellement stable.*

2. Si la matrice Jacobienne possède au mois une valeur propre à partie réelle strictement positive $(\exists i, \mathrm{Re}(\lambda_i > 0))$*, l'équilibre est instable.*

Exemple 4.1 *Soit le système standard suivant,*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 - x_1^2 \\ x_2' = x_1(1 + x_1 - 2x_2) \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité il faut d'abord trouver le point d'équilibre, autrement dit résoudre le problème

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_1^2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases}$$

donc l'ensemble des points d'équilibres est,

$$X_e = \{x_e = (x_1, x_2)/(0,0), (1,1), (-1,0)\}$$

on calcule la matrice Jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - 2x_1 & 1 + 2x_1 - 2x_2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

au point $x_e = (1,1)$*, la matrice Jacobienne*

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique est,

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$$

donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$*, dans ce cas le point d'équilibre* $x_e = (1,1)$ *est asymptotiquement stable.*

Remarque 4.4 *Le théorème ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle et aucune valeur propre à partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous espace dont la dimension est le nombre de valeur propre nulles de la matrice Jacobienne et la stabilité de l'équilibre peut être dans ce sous l'espace par la seconde méthode.*

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Remarque 4.5 (*Pour la première méthode*)

1. Simplicité de l'application.
2. Analyse des équilibres très partielle.

Remarque 4.6 (*Pour la deuxième méthode*)

1. Plus difficile à mettre en oeuvre mais d'une portée beaucoup plus générale.
2. Basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée *fonction de Lyapunov*

Soit le système

$$x'(t) = Ax(t)$$

à temps continu.

Le système homogène est stable, s'il existe une norme $\|x(t)\|$ qui décroisse strictement avec le temps.

Prenons

$$\|x(t)\| = V(x(t)) = x^*(t)Px(t), P > 0 \tag{4.2}$$

On veut donc que

$$V'(x(t)) < 0, \forall t, \forall x(0) \tag{4.3}$$

Ce qui permet d'imposer une condition à la matrice P.

Pour cela il suffit d'insérer (4.2) et (4.3),

$$\begin{aligned} V'(x(t)) &= x'^*(t)Px(t) + x^*(t)Px'(t) \\ &= x^*[A^*P + PA]x(t) \\ &= x^*(t)[-Q]x(t) \end{aligned}$$

Puisque $V'(x(t))$ doit être strictement négatif pour tout t, il faut donc que Q soit une matrice définie positive, ceci implique que,

$$\begin{aligned} A^*P + PA &= -Q \text{.......équation de Lyapunov} \\ &\Rightarrow \text{ si } P \text{ et } Q \text{ sont définis positives} \end{aligned}$$

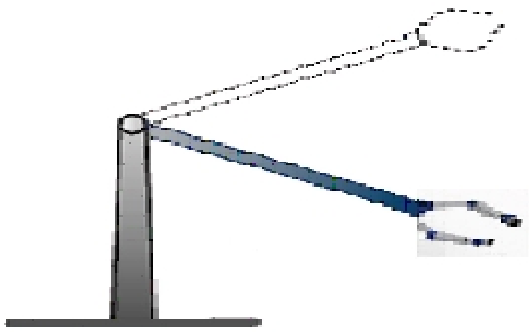
Théorème 4.2 *Si A satisfait l'équation de Lyapunov avec $P > 0, Q > 0$, alors* $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$ *pour toute valeur propre de A.*

Preuve. Soit x_i un vecteur propre correspondant à λ_i, alors

$$-x_i^*Qx_i = x_i^*(A^*P + PA)x_i = x_i^*Px_i(\lambda_i + \overline{\lambda})$$

Puisque $x_i^*Qx_i$ et $x_i^*Px_i$ sont strictement positifs, on a $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ ■

Exemple 4.2 *Bras d'un robot à un degré de liberté*



$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = J^{-1}(-mgh\sin x_1 - kx_2 + u_e) \end{cases}$$

où, x_1 : *Position angulaire.*

x_2 : Vitesse angulaire.
J : L'inertie.
m : masse.
b : distance entre le point d'ancrage et le centre de masse.
k : coefficient de frottement.
u_e : couple constant appliqué au bras de robot.

Considérons le cas où $0 < u_e < mgh$. Le système possède deux équilibres vérifiant les relations suivantes,

$$\overline{x}_1 = \arcsin(\frac{u_e}{mgh}), \overline{x}_2 = 0$$

Il y a un équilibre asymptotiquement stable en position basse et un équilibre instable en position haute **(par un examen des valeurs propres de la matrice Jacobienne)**.

Soit la fonction suivante,

$$V(x_1, x_2) = \frac{J}{2}x_2^2 + mgh(1 - \cos x_1) - u_e x_1$$

où V est la dimension d'une énergie car

$$\begin{aligned} \frac{J}{2}x_2^2 &: \text{ Energie cinétique.} \\ mgh(1-\cos x_1) &: \text{ Energie dépensée par le couple.} \\ u_e x_1 &: \text{ Energie dépensée par le couple } u_e \text{ pour élever le bras jusqu'à la position angulaire} \end{aligned}$$

L'équilibre en position"basse"appartient au domaine.

$$D = \left\{(x_1, x_2), -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}, -a < x_2 < a\right\}$$

où a : Réel positif quelconque.

Dans ce domaine la fonction $V(x_1, x_2)$ est une fonction qui satisfait les conditions suivantes :

1. $V(x_1, x_2) : D \to R$ est continument dérivable.
2. $V(x_1, x_2) > V(\overline{x}_1, \overline{x}_2), \forall (x_1, x_2) \neq (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ dans D.
   (i.e, V est minimum à l'équilibre)
3. $V'(x_1, x_2) \leq 0$ en dehors de l'équilibre dans D car

$$\begin{aligned} V'(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' \\ &= [mgh \sin x_1 - \overline{u}][x_2] + [J x_2][J^{-1}(-mgh \sin x_1 - k x_2 + \overline{u})] \\ &= -k x_2^2 \end{aligned}$$

L'équilibre est donc stable au sens de la définition.

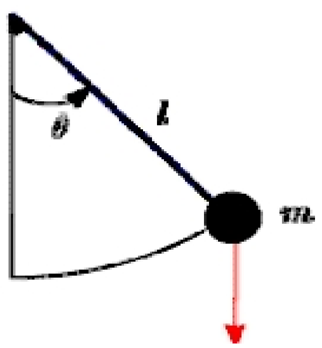
Théorème 4.3 ***(Stabilité à la Lyapunov)***
L'équilibre $(\overline{x}, \overline{u})$ du système $x' = f(x, \overline{u})$ est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \to \mathbb{R}$ continument différentiable ayant les propriétés suivantes :

1. *D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{x} \in D$*
2. *$V(x) > V(\overline{x}), \forall x, x \neq \overline{x}$ dans $D, (V(x)$ est minimum en $\overline{x})$*
3. *$V'(x) \leq 0, \forall x, x \neq \overline{x}$ dans D*

Ce qui veut dire qu'une condition suffisante pour la stabilité de l'équilibre $(\overline{x}, \overline{u})$ est qu'il existe une fonction défini positive $V(x) - V(\overline{x})$ dont la dérivée temporelle $V'(x)$ est semi-définie négative dans un voisinage de $\overline{x}$. La dérivée temporelle $V'(x)$ se calcule comme suit,

$$V'(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} x' = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \overline{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x, \overline{u})$$

Exemple 4.3 ***Pendule en mouvement libre***



On considère le mouvement du pendule représenté par le schéma ci-dessus. L'application de la relation fondamentale de la dynamique

$$\theta" = \frac{-g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \theta' \tag{4.4}$$

où :

g : est le constante gravitationnelle.

l : le longueur du pendule.

m : la masse, et k raideur.

si on pose : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$, (4.4) sera donc l'équivalente au système suivante :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = f(x_1, x_2) \\ x_2' = \frac{-g}{l}\sin\ x_1 - \frac{k}{m}x_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Le point de fonctionnement considéré est le seul des deux points d'équilibres ($i.e$, $x' = 0$) physiquement atteignable, à savoir $x_2' = [0, 0]$, et l'autre point est $x_2' = [\pi, 0]$.

Il s'ensuit,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) = \frac{-g}{l}\cos\ (x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) = \frac{-k}{m} \end{pmatrix}$$

Cette approximation conduit à la représentation LTI du système autonome

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & \frac{-k}{m} \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Application Numérique, on prend comme exemple

$$\begin{cases} g = 9,80 \\ l = 1,96\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{g}{l} = 5(N/m^2)$$

$$\begin{cases} k = 0,8 \\ m = 400g \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{m} = 2(N/m.kg)$$

donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

et le polynôme caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

implique

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-2-4i}{2} \Rightarrow \text{Re}\ (\lambda_1) = -1 < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-2+4i}{2} \Rightarrow \text{Re}\ (\lambda_2) = -1 < 0 \end{aligned}$$

Alors, le pendule est stable d'après la première méthode de Lyapunov.

Remarque 4.7 *On peut prolonger le théorème au cas discret comme suit,* Soit le système discret suivant,

$$x_{k+1} = Ax_k$$

qui est dit stable si les valeurs propres de A sont de modules inférieurs à 1. L'équivalence de l'équation de Lyapunov est l'équation de Stein :

$$P - A^*PA = Q \tag{4.5}$$

Le théorème suivant analyse la stabilité" discrète"de A

Théorème 4.4 *Si A satisfait l'équation* (4.5) *avec $P > 0$ et $Q > 0$, alors*

$$\|\lambda_i(A)\| < 1$$

pour toute valeur propre λ_i de A.

Soit x_i un vecteur propre de λ_i, alors

$$x_i^*Qx_i = x_i^*(P - A^*PA)x_i = x_i^*Px_i(1 - \lambda_i\overline{\lambda}_i)$$

On a

$$\begin{aligned} x_i^*Qx_i &> 0 \\ x_i^*Px_i &> 0 \end{aligned}$$

Donc

$$|\lambda_i| < 1$$

4.2 Stabilité des Systèmes LTI Singuliers à temps Continu

Soit le système suivant,

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $\det E = 0$, (i.e, E non inversible)

On traite d'abord le cas où E est inversible, dans le cas (4.6) sera de la forme,

$$x'(t) = E^{-1}Ax(t) = \widehat{A}x(t) \tag{4.7}$$

Nous adaptons les mêmes caractérisations et nous aurons un premier résultat comme généralisation du théorème.

Théorème 4.5 *Le système* (4.7) *est stable avec E inversible s'il existe une matrice P définie positive vérifiant $P^* = P$ et qui est solution de l'équation*

$$\widehat{A}P + P\widehat{A} = -Q \tag{4.8}$$

Pour toute matrice Q définie positive et où $E^{-1}A = \widehat{A}$

L'équation (4.8) *peut être écrire comme suit : il existe une matrice P définie positive solution de l'équation*

$$\widehat{A}^*P + P\widehat{A} < 0$$

Où

$$\widehat{A} = E^{-1}A.$$

Cas ou E n'est pas inversible.

Définition 4.2 *Le système singulier à temps continu s'écrire comme :*

$$\begin{cases} Ex'(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.9}$$

où :
$x(t) \in \mathbb{R}^n$ *: est la variable d'état.*
$x(t_0) = x_0$ *: est la condition initiale du système autonome.*
$E \in \mathbb{R}^n$ *: est une matrice singulière et* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

4.2.1 Les définitions de stabilité

Remarque 4.8 *Les mêmes définitions de la stabilité au cas standard restent valables pour le cas singulier.*

Dans cette dernière partie, nous caractérisons des extensions des tests pour le cas des systèmes singulires.

4.2.2 Méthodes de Lyapunov

La première méthode de Lyapunov

Théorème 4.6 (*Analyse des valeurs propres*)

Le système donné par (4.9) est asymptotiquement stable si et seulement si toute les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, ..., n$ de la matrice $(\lambda E - A)$ sont à parties réelles négatives

$$\sigma(E, A) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$$

Théorème 4.7 *On dit que le système* (4.9) *est exponentiellement stable si et seulement si les valeurs propres de* E *sont à partie réelles négatives*

$$\sigma(E) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$$

La deuxième méthode de Lyapunov : généralisation

Théorème 4.8 *On dit que le système* (4.9) *est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une matrice* P *tel que*

$$P^T A + A^T P = -Q$$

où

$$E^T P = P^T E \geq 0$$

pour une matrice Q *définie positive.*

Preuve. On considère comme fonction condidate la fonction,

$$V(x(t)) = x^T(PE)x$$

Pour assurer la stabilité, il suffit que,

$$V'(x(t)) = x'^T(PE^T)x + x^T(PE)x' < 0 \tag{4.10}$$

implique :

$$V'(x(t)) = x'^T PE^T x + x^T PEx' \tag{4.11}$$

si de plus,

$$P^T E = E^T P \tag{4.12}$$

on remplaçe (4.11) dans l'équation (4.12) on trouve,

On a

$$\begin{aligned} V'(x(t)) &< 0 \Rightarrow x^T(A^T P + PA)x < 0 \\ &\Rightarrow (A^T P + PA) < 0 \quad \text{C.Q.F.D} \end{aligned}$$

■

Remarque 4.9 *Si $E = I$, on trouve la condition da Lyapunov établis pour le cas standard.*

Exemple 4.4 *On considère comme système* (4.9), *où*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc,

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2P_2 & P_1 - P_2 - P_3 \\ P_1 - P_2 - P_3 & 2(P_2 - P_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par l'identification, on trouve,

$$\begin{cases} -2P_2 = -4 \\ P_1 - P_2 - P_3 = 0 \\ 2(P_2 - P_3) = -2 \end{cases}$$

Ceci implique que,

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice P est existe, il reste à montrer qu'elle est définie positive, *On a* $P_3 > 0$ *, et*

$$P_1 - \frac{p_2^2}{P_3} = 5 - \frac{(2)^2}{3} > 0 \tag{4.13}$$

De plus, il faut montrer que

$$E^T P = P^T E \geq 0$$

Alors

$$E^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et

$$P^T E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq E^T P \tag{4.14}$$

De (4.14), on conclut que le système (4.9) n'est pas stable d'après Lyapunov.

Conclusion Générale

Dans notre travail, notre intérêt a porté sur l'extension des résultats et tests de stabilité aux systèmes linéaires singulires.

L'analyse des pôles et test de Lyapunov ont été cependant généralisé à cette classe de systèmes, des applications et exemples numérques ont été mis en évidence.

Bibliographie

[1] **D. Arzelier :** Représentation et analyse des systèmes linéaires. Notes de cours. version 5.2. LAAS-CNRS. France.

[2] **D. Bouagada :** Système et représentation d'état. Cours de Master (2) 2012. Modélisation, Contrôle et Optimisation.

[3] **D. Bouagada :** Théorie de contrôle. Cours de Master(2) 2012. Modélisation, Contrôle et Optimisation.

[4] **Dail-L :** Singular Control System. Springer New York 1989.

[5] **Edourd Laroche :** Identification et commande robuste de systèmes élecromécaniques. Université Louis Pasteur de Strasbourg.

[6] **Hua Xu and Koichi Mizukami :** On Lyapunov Theorem for Descriptor Systems. Faculty of integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima 739, Japan.

[7] **Jury E. L :** Inners and Stability of Dynamic Systems. J. Wiley & Sons. New York-London, Sydney, Toronto 1973.

[8] **Panos Ansaklis and Anthonyv Michel :** A Linear Systems Primer. Birchauser-Library of congress control.

[9] **W. J. Rugh :** *Mathematical Description of Linear Systems.* Marcel Dekker. New York 1975.