

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM



FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Pour obtenir le diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse harmonique et EDP

Etude du pseudo spectre de l'oscillateur harmonique  
non auto-adjoint unidimensionnel

Présenté par

*ABDELKARDER HAIDRA*

Soutenu le 26/06/2012 devant le Jury

Djillali BOUAGADA

Amina LAHMAR-BENBERNOU

Mansouria SAIDANI

**Président**

**Encadreur**

**Examineur**

Maître de conférences A

Professeur

Maître assistant

U. MOSTAGANEM

U. MOSTAGANEM

U. MOSTAGANEM

Année Universitaire : 2011 / 2012

# Remerciements

*Tout d'abord, le grand Merci à notre « DIEU » le tout puissant, qui m'a donné la force et la volonté pour finir ce projet.*

*Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près, à la réalisation de ce modeste travail, et en particulier :*

*Mon encadreur Madame **Amina LAHMAR-BENBERNOU** Professeur à l'université de Mostaganem, pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail.*

*Monsieur **Djillali BOUAGADA** Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Madame **Mansouria SAIDANI** Maître assistant à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.*

*Tous les enseignants que j'ai rencontré ou côtoyé durant mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail à*

*Mes très chers parents*

*Mon encadreur* **Madame Amina LAHMAR-BENBRNOU**

*À mes frères Charef et Baghdadi.*

*À mes soeurs Ikram et Hafsa.*

*Mes collègues de la promotion Master "Analyse harmonique et EDP" de l'année 2011/2012*

*Tout mes amis sans exception surtout mes très cher amis Senoussi, Omar, Foad, Boudaoud  
et Amel.*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>1</b>
1.1 Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques . . . . .	1
1.2 Forme quadratique elliptique et image numérique . . . . .	1
1.3 Opérateur normale . . . . .	2
1.4 Espace de Sobolev . . . . .	2
<b>2 Le spectre</b>	<b>3</b>
2.1 Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	3
2.2 Les différents type du spectre . . . . .	4
2.2.1 Spectre discret - spectre essentiel . . . . .	4
2.2.2 Spectre ponctuel . . . . .	4
2.2.3 Spectre continue . . . . .	5
2.2.4 Spectre résiduel . . . . .	5
<b>3 L'oscillateur harmonique</b>	<b>6</b>
3.1 Valeurs propres de l'oscillateur harmonique . . . . .	7
3.2 Quelques résultats sur l'oscillateur harmonique non auto-adjoint . . . . .	10

---

<b>4 Pseudo-spectre semi-classique</b>	<b>13</b>
4.1 Définition du pseudo-spectre semi-classique et du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique . . . . .	13
4.2 Etude du pseudo-spectre semi-classique de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint . . . . .	16
4.2.1 Image numérique et pseudo-spectre . . . . .	16
4.2.2 Etude du pseudo-spectre à la frontière de l'image numérique . . . . .	17
4.3 Forme des ensembles pseudo-spectraux . . . . .	20
<b>Conclusion</b>	<b>24</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>25</b>

---

# NOTATIONS

---

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

$x$	:	la position, $x \in \mathbb{R}^n$ ,
$p$	:	l'impulsion, $p \in \mathbb{R}^n$ ,
$h$	:	la constante de planck,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	:	espace de Schwartz,
$C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $m$ fois continument différentiables,
$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions infiniment dérivable,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ ,
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	$\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \int_{\mathbb{R}^n}  f(x) ^p dx < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
$S^m$	:	espace des symboles d'ordre $m$ ,
$\ f\ _p$	:	la norme de la fonction $f$ dans $L^p$ ,
$H_p$	:	champ Hamiltonien,
$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$	:	opérateur de Laplacien,
$D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, i^2 = -1$	:	la différentielle au point $x$ ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	produit scalaire,
$q(x, y)$	:	forme polaire associée à la forme quadratique $q(x)$ forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ :
$\sigma$	:	$\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi y - x \eta, (x, \xi), (y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ crochet de Poisson des symboles $p$ et $q$ :
$\{p, q\}$	:	$\{p, q\} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial \xi}$
$a(x, \xi)^w$	:	quantification de Wely du symbole $a(x, \xi)$

---

# INTRODUCTION

---

Depuis une dizaine d'années, il ya eu dans le domaine des mathématiques numériques un vif intérêt porté à l'étude de la notion de pseudo-spectre. Le développement de cette notion s'explique par le fait que dans un certain nombre de problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des différences entre d'un coté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale de ces opérateurs et d'un autre coté les résultats obtenus par simulation numérique.

L'idée d'étude le pseudo-spectre d'un operateur est de considérer non seulement le spectre où la résolvante d'opérateur n'est pas définie, mais aussi l'ensemble des points où la résolvante est très grande en norme.

Soit  $A$  un opérateur linéaire sur un espace d'Hilbert  $H$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , le  $\varepsilon$ -pseudo-spectre est définie par :

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ z \in C : \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

---

# Préliminaire

---

## 1.1 Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques

On appelle opérateur différentiel quadratique elliptique tout opérateur pseudo-différentiel  $q(x, \xi)^\omega$  défini par la quantification de Weyl comme suit ([6]) :

$$q(x, \xi)^\omega u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

## 1.2 Forme quadratique elliptique et image numérique

On dit qu'une forme quadratique à valeurs complexes

$$q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  est elliptique si elle vérifie la propriété suivante :

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = (0, 0).$$

A toute forme quadratique  $q$ , on associe le sous ensemble du plan complexe  $\Sigma(q)$  défini par :

$$\Sigma(q) = q(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$$

Le sous ensemble  $\Sigma(q)$  est appelé image numérique de la forme quadratique.([6])



## 1.3 Opérateur normale

Considérons  $q$  une forme quadratique elliptique à valeurs complexes sur  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $H$  un espace de Hilbert. L'opérateur

$$q(x, \xi)^\omega : H \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur normal si et seulement si la forme quadratique  $\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}(x, \xi)$  est identiquement nulle. ([6])

**Remarque 1.3.1** *Le symbole  $\{, \}$  représente le crochet de poisson.*

## 1.4 Espace de Sobolev

**Définition 1.4.1** ([2]) *Pour  $1 \leq P \leq +\infty$  on définit l'espace de sobolev  $W^{1,P}(I)$  par :*

$$W^{1,P}(I) = \{u \in L^P(I) : u \text{ à une dérivée faible } u' \in L^P(I)\}.$$

*La norme de  $W^{1,P}$  est donnée par :*

$$\|u\|_{W^{1,P}} = \|u\|_{L^P} + \|u'\|_{L^P}$$

**Définition 1.4.2** ([2]) *On dit que  $u \in L^P(I)$ ,  $1 \leq P \leq +\infty$  à une dérivée faible s'il existe  $v \in L^P(I)$  telle que*

$$\int_I u(t) \varphi'(t) dt = - \int_I v(t) \varphi(t) dt, \forall \varphi \in D'(I),$$

*c'est-à-dire :  $\langle u, \varphi' \rangle = -\langle v, \varphi \rangle$ .*

# Le spectre

---

Le spectre est une image, ce terme apparait pour la première fois en français dans la traduction d'un ouvrage de Newton pour designer l'image formé par la décomposition de la lumière.

On appelle, maintenant, spectre toute trace (en général graphique) de la réponse de la matière à une perturbation extérieure, cette perturbation est souvent une onde électrognétique.

**Définition 2.0.3 (Le spectre)** ([5]) *Soit  $(D, A)$  un opérateur non borné à domaine dense sur  $H$ .*

*On appelle résolvante de  $A$  et on note  $\rho(A)$  l'ensemble des  $z \in \mathbb{K}$  telles que  $(z - A)$  est une bijection de  $D(A)$  sur  $H$ , et  $(z - A)^{-1}$  est borné.*

*L'application*

$$\begin{aligned} R(\cdot, A) &: \rho(A) \longrightarrow B(H) \\ (z - A) &\rightarrow R(z, A) = (z - A)^{-1} \end{aligned}$$

*est appelé la résolvante de  $A$ .*

*Le complémentaire du l'ensemble  $\rho(A)$  est appelé le spectre de  $A$  et on le note  $\sigma(A)$ .*

## 2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Soit  $A$  un opérateur et  $z \in \mathbb{C}$ , si l'application  $z \longrightarrow z - A$  n'est pas injective, on dit que  $z$  est une valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres est appelé spectre ponctuel de  $A$ , et on le note par :  $\sigma_p(A)$ .

Si  $z \in \sigma_p(A)$ ,  $\ker(z - A)$  est appelé sous espace propre associé à la valeur propre  $z$ . Sa dimension est la multiplicité de  $z$ .

Tout vecteur  $X \in H$  non nul vérifiant  $zX = AX$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $z$ .

## 2.2 Les différents type du spectre

Soit  $A : H \longrightarrow H$  un operateur linéaire fermé on a :

### 2.2.1 Spectre discret - spectre essentiel

On défini dans cette partie le spectre discret d'un opérateur fermé  $A$ , on sait qu'on peut former une décomposition de disjonction de  $\sigma(A)$  comme  $\sigma(A)_d \cup \sigma_{ess}(A)$ . Le but principal est de développer une caractérisation commode de  $\sigma(A)$  ([5]).

**Définition 2.2.1** *On appelle spectre discret l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie.*

*Le spectre discret est noté par :  $\sigma(A)_d$ .*

**Théorème 2.2.1** *Soit  $V$  est une fonction continue (où  $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ),  $V \geq 0$  et  $V(x) \longrightarrow \infty$  quand  $\|x\| \longrightarrow \infty$ . Alors*

$$H = -\Delta + V$$

*a un spectre purement discret.*

**Définition 2.2.2** *On appelle spectre essentiel le complémentaire du spectre discret dans  $\sigma(A)$ , on le note  $\sigma_{ess}(A)$ .*

### 2.2.2 Spectre ponctuel

On appelle spectre ponctuel de l'opérateur  $A$  l'ensemble des complexes  $\lambda$  tels que  $\lambda$  est une valeur propre c'est-à-dire  $AX = \lambda x$ . On le note  $\sigma_p(A)$

On a :  $\lambda \in \sigma_p(A)$  si est seulement si :

$$\begin{cases} \text{Im}(A - \lambda I) = H \\ \ker(A - \lambda I) \neq \{0\} \end{cases}$$

$(\exists x \neq 0 / (A - \lambda I)x = 0)$

### 2.2.3 Spectre continue

On appelle spectre continu de l'opérateur  $A$  l'ensemble des complexe  $\lambda$  tels que :

$$\begin{cases} \text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\} \\ \text{Im}(A - \lambda I) \neq H \\ \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H \end{cases}$$

On le note par :  $\sigma_c(A)$ .

### 2.2.4 Spectre résiduel

On appelle spectre résiduel de l'opérateur  $A$  l'ensemble des complexe  $\lambda$  tels que

$$\begin{cases} \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H \\ \ker(A - \lambda I) = \{0\} \end{cases}$$

On le note par :  $\sigma_r(A)$ .

**Remarque 2.2.1** 1.  $\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A)$ .

2.  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$  tels que :

$$\begin{cases} \sigma_p(A) \cap \sigma_c(A) = \emptyset \\ \sigma_c(A) \cap \sigma_r(A) = \emptyset \\ \sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset \end{cases}$$

3. Si  $\dim H < +\infty$ , alors on a  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ , c'est-à-dire,  $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$ .

4. Le spectre discret est inclus dans le spectre ponctuel défini plus haut, mais l'inclusion inverse est fautive en général. De même, le spectre continu est inclus dans le spectre essentiel sans que la réciproque ne soit toujours vraie.

# L'oscillateur harmonique

---

Le concept de l'oscillateur harmonique joue un rôle majeur dans des nombreuses applications de la physique, notamment en mécanique quantique.

**Définition 3.0.3 (Oscillateur harmonique à une dimension)** On appelle oscillateur harmonique tout système physique à un paramètre  $X(t)$  qui obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0$$

(avec  $\omega$  constant).

**Exemple 3.0.1** 1. Un ressort horizontal.

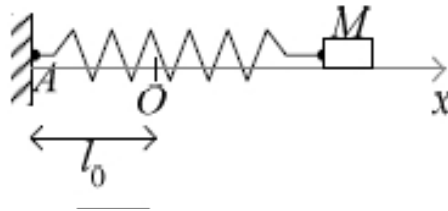


Figure 01 : Un ressort horizontal

$x = \overline{OM} = l - l_0$ . Il obéit à l'équation différentielle

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0.$$

2. Un ressort vertical.

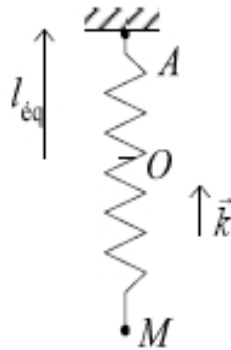


Figure 02 : Un ressort vertical

$Z = l_{\text{eq}} - l$ ;  $\overline{OA} = l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{K}$ ,  $z$  obéit à l'équation

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0.$$

3. Petits mouvements autour d'un équilibre stable : circuit LC :

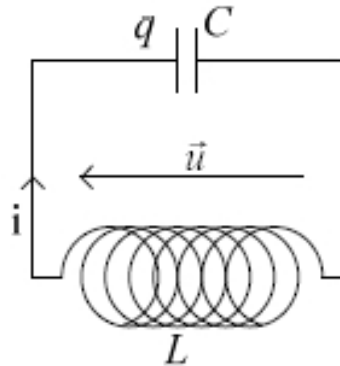


Figure 03 : Circuit LC

$u = \frac{q}{c} = -l \frac{di}{dt}$  et  $i = \frac{dq}{dt}$  donc :

$$\frac{q}{c} + l \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow q + lc\ddot{q} = 0$$

### 3.1 Valeurs propres de l'oscillateur harmonique

Soit  $P$  un opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Cherchons ses valeurs propres, i. e. ; cherchons les  $E \in \mathbb{R}$  pour les quel  $\ker(P - E) \neq \{0\}$  dans  $L^2$ .

On peut chercher des solutions de l'équation  $Pu = Eu$  qui sont à variables séparés, c'est-à-dire, les solutions peuvent s'écrire comme :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1)u(x_2)\dots u(x_n).$$

On obtient un système diagonal d'équation différentielles pour les  $u_j$ .

$$-h^2 \partial_j^2 u_j + \mu_j x_j^2 u_j = E_j u_j,$$

où les  $E_j$  doivent avoir pour somme  $E$ , on considère dans un première temps chacune de ces équations séparément, ou encore l'équation :

$$P_{h,\mu} u = Eu \text{ où } P_{h,\mu} = -h^2 \partial_x^2 + \mu x^2.$$

Le changement de variable  $y(x) = \mu^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{h}}$  transforme d'ailleurs cette équation en :

$$-v''(y) + y^2 v(y) = \frac{E}{h\sqrt{\mu}} v(y) \text{ où } v(y) = u(x).$$

On étudie donc l'opérateur différentiel  $Q$  sur  $\mathbb{R}$  défini par :

$$Q(x, hD) = (D^2 + x^2)$$

et l'équation aux valeurs propres associé :

$$Qu = Eu.$$

Pour résoudre cette équation on utilise les deux remarques suivantes :

1. Pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . On a  $\langle Qu, u \rangle \in \mathbb{R}$  et même  $\langle Qu, u \rangle \geq \|u\|_{L^2}^2$ . En effet, en intégrant par parties, on obtient.

$$\langle Qu, u \rangle = \int (D^2 + x^2) u(x) \overline{u(x)} dx = \|Dx\|^2 + \|xu\|^2 \geq 2 \|Dx\| \|xu\| \geq \|u\|^2.$$

2. En utilisant la densité de  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^2$ , on en déduit que si  $u \in L^2(\mathbb{R})$  est solution de  $Qu = Eu$  avec  $\|u\| = 1$ , on a nécessairement  $E \in [1, +\infty[$ .

Notons que cette propriété n'est vraie que pour les éléments  $u$  de  $L^2$  qui s'écrivent comme limites de suites  $(u_n)$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  telles que  $Qu_n \rightarrow Qu$  dans  $L^2$ .

On peut écrire  $Q = L^+L^- + 1$ , et même  $Q = \frac{1}{2}(L^+L^- + L^-L^+)$ , où  $L^+$  et  $L^-$  sont les opérateurs de création et d'annihilation respectivement :

$$L^+ = -\partial_x + x, \text{ et } L^- = \partial_x + x.$$

Supposons maintenant que  $u_E \in L^2$  un vecteur propre normalisé ( $\|u_E\|_{L^2} = 1$ ) de l'opérateur  $L^+L^-$  pour la valeur propre  $E \geq 0$ , i.e. ;  $L^+L^-u_E = Eu_E$ . On a alors,

$$EL^-u_E = L^-(L^+L^-)u_E = (L^-L^+)L^-u_E = (L^+L^- + 2)L^-u_E.$$

Ce qui montre que  $L^-u_E$  est un vecteur propre de  $L^+L^-$  pour la valeur propre  $E - 2$  sauf si  $L^-u_E = 0$ .

On a d'ailleurs

$$\|L^-u_E\|^2 = \langle u_E, L^+L^-u_E \rangle = E.$$

Au total,  $L^+L^-$  ne peut pas avoir de valeur propre qui n'est pas un entier pair, sinon  $(L^-)^n u_E$  serait pour  $n$  assez grand une fonction propre correspondant à une valeur propre négative. On peut renverser l'argument : l'équation  $L^-u_0 = 0$  admet une unique solution dans  $L^2$ , qui est

$$u_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Du coup  $u_0$  est un vecteur propre de  $L^+L^-$  pour la valeur propre 0.

On sait  $\tilde{u}_2 = L^+u_0$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 2, dont la norme vérifie

$$\|\tilde{u}_2\|^2 = \langle L^+u_0, L^+u_0 \rangle = \langle u_0, (L^+L^- + 2)u_0 \rangle = 2.$$

On obtient donc un vecteur propre normalisé en posant  $u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}L^+u_0$ .

Par récurrence, on conclut que l'ensemble des valeurs propres de  $L^+L^-$  est  $2n$ , et que la fonction propre normalisé associé à  $E = 2n$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n(2n-2)(2n-4)\dots(2)}} (L^+)^n u_0 = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!} \pi^{\frac{1}{4}}} (L^+)^n \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

Finalement, puisque  $Q = L^+L^- + 1$ . Le spectre ponctuel, c'est-à-dire, l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $Q$  est l'ensemble  $2N + 1$ , et  $u_n$  est la fonction associé à  $E = 2n + 1$  au cas général.



Le spectre ponctuel de l'opérateur  $P_{h,\mu}$  est donc l'ensemble :

$$\sigma_p = \{(2n + 1) \bar{h} \sqrt{\mu}, n \in \mathbb{N}\}$$

et la fonction propre associée à  $E = (2n + 1) h \sqrt{\mu}$  est la fonction

$$\Psi_n(x) = c_n(\bar{h}) u_n\left(\mu^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{\bar{h}}}\right), \text{ où } c_n(\bar{h}) = h^{-\frac{1}{4}} \mu^{\frac{1}{8}}$$

est choisie pour que  $\|\Psi_n\| = 1$ .  $\Psi_n$  s'écrit aussi de la forme

$$\Psi_n(x) = h^{-\frac{1}{4}} \mu^{\frac{1}{8}} H_n\left(\mu^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{\bar{h}}}\right) e^{-\frac{\sqrt{\mu} x^2}{2\bar{h}}}$$

où  $H_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

Les  $H_n$  sont les polynômes de Hermit, ces derniers sont donnés par la relation :

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (x - \partial_x)^n \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \partial_x^n \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

([5])

## 3.2 Quelques résultats sur l'oscillateur harmonique non auto-adjoint

L'oscillateur harmonique non auto-adjoint est défini comme suit ([6]) :

$$H_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^2$$

où  $c$  désigne un nombre complexe vérifiant  $\operatorname{Re} c > 0$  et  $\operatorname{Im} c > 0$  avec  $H_c \in L^2(\mathbb{R})$ .

Dans ce qui suit nous allons donner quelques remarques et résultats sur l'opérateur  $H_c$  :

1. L'opérateur  $H_c$  est défini comme la fermeture de l'opérateur  $m$ -sectoriel associé à la forme quadratique  $m$ -sectorielle  $Q_c$

$$Q_c(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \overline{g'(x)} dx + c \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

où  $f, g$  sont des éléments de l'espace

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) \cap \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

2. La norme de la résolvante tend vers l'infini, le long des courbes de la forme

$$\eta \longmapsto b\eta + c\eta^p,$$

où  $b$  et  $p$  sont des constantes strictement positives, indépendants de  $\eta$  vérifiant

$$\frac{1}{3} < p < 3, \text{ i. e. ;}$$

$$\|(H_c - (b\eta + c\eta^p))^{-1}\| \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } \eta \longrightarrow +\infty.$$

3. La résolvante  $(H_c - z)^{-1}$  reste borné en norme lorsque  $|z| \longrightarrow +\infty$  le long de certaines demi-droites parallèle aux demi-droites  $\mathbb{R}^+$  ou  $c\mathbb{R}^+$ .

4. Pour toute valeurs suffisamment petites du paramètre strictement positif  $\varepsilon$ , le  $\varepsilon$ -pseudo-spectre de l'opérateur  $H_c$  est contenu dans l'ensemble grisé de la figure suivante où les valeurs propres de  $H_c$  sont notés par les symboles  $\diamond$ .

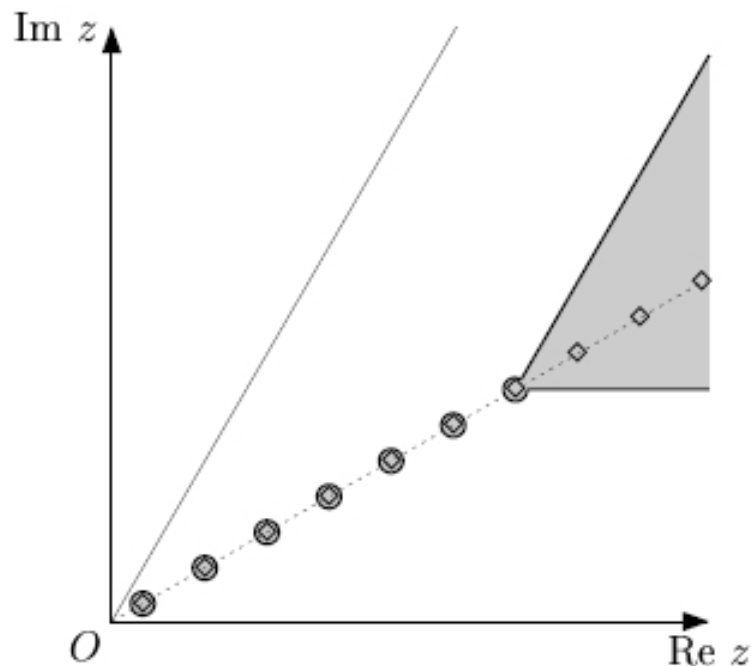


Figure 04 : pseudo-spectre et valeurs propres de  $H_c$

5. Si  $b_{m,p}$  et  $E$  sont constantes strictement positives vérifiant

$$b_{m,p}E + cE^p = \lambda_m \text{ et } \eta > E, \arg z_n < \arg \left( c^{\frac{1}{2}} \right), 0 < \delta < 1,$$

où  $z_n = b_{m,p}\eta + c\eta^p$ , on pose

$$\Omega_{m,p} := \{|z_n| e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \eta \geq E \text{ et } \arg z_n \leq \theta \leq \arg(\overline{z_n}c/|c|)\}$$

La conjecture de boultou s'énonce comme suite :

## Conjecture de boultou

Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  ([6]),

$$\sigma_\varepsilon(H_c) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| \prec \delta\} \cup \Omega_{m,p}.$$

On étudie le pseudo-spectre semi-classique de l'opérateur

$$-h^2 (\partial_x)^2 + r e^{i\alpha} x^2, r > 0, 0 < \alpha < \pi.$$

# Pseudo-spectre semi-classique

---

## 4.1 Définition du pseudo-spectre semi-classique et du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique

Dans un cadre semi-classique, on définit deux notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques.

**Définition 4.1.1** ([6]) *Considérons  $(P_h)_{0 < h \leq 1}$  une famille semi-classique d'opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  définis un domaine  $D$ . Pour tout  $\mu \geq 0$ , l'ensemble*

$$\Lambda_\mu^{sc}(P_h) = \{Z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0 : \|(P_h - Z)^{-1}\| \geq Ch^{-\mu}\},$$

*est appelé pseudo-spectre semi-classique d'indice  $\mu$  de la famille  $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ .*

*Le pseudo spectre semi-classique d'indice infini est défini par :*

$$\Lambda_\infty^{sc}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \Lambda_\mu^{sc}(P_h).$$

*L'ensemble complémentaire de  $\Lambda_\mu^{sc}(P_h)$  est*

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0 : \|(P_h - Z)^{-1}\| < Ch^{-\mu}.$$

Pour  $h$  est suffisamment petite, il est également intéressant d'introduire une autre notion qui est celle de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique.

**Définition 4.1.2** ([6]) *Considérons  $(P_h)_{0 < h \leq 1}$  une famille semi-classique d'opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  définis un domaine  $D$ . Pour tout  $\mu \geq 0$ , l'ensemble*

$$\lambda_\mu^{sc}(P_h) = \{Z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \exists u \in D : \|u\|_{L^2} = 1, \|(P_h - Z)^{-1}u\|_{L^2} \leq Ch^\mu\}$$

*est appelé pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice  $\mu$  de la famille  $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ .*

**Remarque 4.1.1** 1. *Si  $Z$  appartient au spectre de l'opérateur  $P_h$  alors*

$$\|(P_h - Z)^{-1}\| = +\infty.$$

2. *Les ensembles pseudo-spectre d'injectivité semi-classique et les ensembles pseudo-spectre semi-classique sont décroissants par rapport à l'indice.*

3. *Il n'y a pas de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice  $\mu$  au point  $z$  si et seulement si, on a :*

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in D, \|(P_h - z)u\|_{L^2} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2} \quad (4.1.1)$$

4. *En toute généralité, les inclusions suivantes sont vérifiées*

$$\forall \mu \geq 0, \lambda_\mu^{sc}(P_h) \subseteq \Lambda_\mu^{sc}(P_h). \quad (4.1.2)$$

5. *Si l'image numérique  $\sum(q)$  est distincte de  $\mathbb{C}$  alors  $\forall \mu \in [0, +\infty[$ ,*

$$\lambda_\mu^{sc}(q(x, h\xi)^\omega) = \Lambda_\mu^{sc}(q(x, h\xi)^\omega).$$

**Exemple 4.1.1** *Le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'oscillateur harmonique semi classique,*

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2,$$

*est exactement  $\mathbb{R}_+^*$  puisque son spectre est composé des valeurs propres de multiplicité un,*

$$\{h(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\},$$

*et que l'on peut vérifier sur l'ensemble complémentaire de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{C}$ .*

Les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \left\| -h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq h \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \forall z \notin \mathbb{R}_+, \forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \left\| -h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x^2 u - zu \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq d(z, \mathbb{R}_+) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où  $d(z, \mathbb{R}_+)$  désigne la distance entre le point  $z$  et l'ensemble  $\mathbb{R}_+$ . Concernant l'oscillateur harmonique non auto-adjoint, la description de son spectre évoquée précédemment implique que les deux notions de pseudo-spectre semi-classique coïncident. En effet, au regard de (4.1.2) il suffit de démontrer les inclusions suivantes,

$$\forall \mu \geq 0, \Lambda_\mu^{sc}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2) \subset \lambda_x^{sc}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2),$$

si  $r > 0$  et  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ . Si  $z \notin \lambda_x^{sc}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2)$ , on peut trouver d'après l'inégalité (4.1.1) des constantes strictement positives  $C$  et  $h_0$  telles que,

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \left\| (-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 - z)u \right\| \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (4.1.3)$$

Utilisant le changement de variables  $y = h^{\frac{1}{2}}x$  avec  $h > 0$ , on a :

$$-(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 = \frac{1}{h}(-h^2(\partial_y)^2 + re^{i\alpha}y^2).$$

Il résulte de cette identité que le spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique

$$-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2,$$

est composé uniquement des valeurs propres de multiplicité un,

$$(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2)\varphi_n(x) = h(2n+1)r^{\frac{1}{2}}e^{i\alpha/2}\varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

où

$$\varphi_n(x) = r^{1/8}e^{i\alpha/8}H_n(r^{1/4}e^{i\alpha/4}h^{-1/2}x)\exp(-2^{-1}h^{-1}r^{1/2}e^{i\alpha/2}x^2) \in S(\mathbb{R}),$$

si  $H_n$  désigne le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Hermite. Ce dernier fait induit au regard de l'estimation (4.1.3) que  $z$  n'appartient pas au spectre de l'opérateur,

$$(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2),$$

et que

$$\forall 0 < h < h_0, \left\| \left( -h^2 (\partial_x)^2 + r e^{i\alpha} x^2 - z \right)^{-1} \right\| \leq C^{-1} h^{-\mu}.$$

Ceci implique que :

$$z \notin \Lambda_x^{sc} \left( -h^2 (\partial_x)^2 + r e^{i\alpha} x^2 \right).$$

## 4.2 Etude du pseudo-spectre semi-classique de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint

### 4.2.1 Image numérique et pseudo-spectre

Considérons  $p(x, \xi)$  un hamiltonien classique défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pour  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  et  $r > 0$ , le symbole

$$p_\alpha(x, h\xi) = h^2 \xi^2 + r e^{i\alpha} x^2$$

définit en quantification de Weyl l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique

$$p_\alpha(x, h\xi)^\omega = (hD_x)^2 + r e^{i\alpha} x^2$$

où  $D_x$  désigne l'opérateur  $\partial_x / (2i\pi)$ . L'image numérique de ce symbole est donné par :

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \alpha\} \cup \{0\} & \text{ si } \alpha > 0, \\ \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha \leq \arg z \leq 0\} \cup \{0\} & \text{ si } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Le spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi classique est composé uniquement des valeurs propres suivantes :

$$\left\{ h r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} (2n + 1) : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (4.2.1)$$

**Théorème 4.2.1** ([7]) *Si l'opérateur différentiel quadratique elliptique*

$$q(x, \xi)^\omega : X \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}^*$$

*est non normal et vérifie  $\sum(q) \neq \mathbb{C}$ . Alors pour tout  $z \in \sum(q)$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $h_0 > 0$  et une famille semi-classique  $(P_h)_{0 < h \leq h_0} \in S(\mathbb{R}^n)$  telles que :*

$$\|P_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et } \|q(x, h\xi)^\omega P_h - z P_h\| = O(h^N) \text{ lorsque } h \longrightarrow 0^+.$$

La preuve de ce théorème est très technique, elle se base sur plusieurs résultats (pour plus de détaille voir ([4]))

Ce résultat induit l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique  $\sum(q)$

$$\forall z \in \sum(q), \forall N \in \mathbb{N}, \forall c > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \left\| (q(x, \xi)^\omega - z\eta)^{-1} \right\| \geq c\eta^N.$$

### 4.2.2 Etude du pseudo-spectre à la frontière de l'image numérique

#### Etude de l'existence de pseudo-spectre semi-classique en 0

Soient  $u \in S(\mathbb{R})$ ,  $r > 0$ ,  $h > 0$  et  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ . On a :

$$\left( (hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u, u \right) = \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + re^{i\alpha} \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve que :

$$\begin{aligned} 2 \left\| (hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \operatorname{Re} \left( (hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u, u \right) + \operatorname{Re} \left( (hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u, e^{i\alpha} u \right) \\ &= (1 + \cos \alpha) \left( \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + r \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité  $\left[ hD_x, ir^{\frac{1}{2}} x \right] = hr^{\frac{1}{2}} / (2\pi) I$  et le fait que les opérateurs  $hD_x$  et  $ir^{\frac{1}{2}} x$  sont respectivement auto-adjoint et anti-auto-adjoint on obtient que :

$$\begin{aligned} h \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \left( \left[ hD_x, ir^{\frac{1}{2}} x \right] u, u \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left( hD_x u, ir^{\frac{1}{2}} x u \right), \end{aligned}$$

où  $[P, Q]$  désigne le commutateur des opérateurs  $P$  et  $Q$ . On en déduit alors une nouvelle utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que pour tout  $h > 0$  et  $u \in S(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + r \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq 2r^{\frac{1}{2}} \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\geq hr^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Ce qui induit au regard de ce qui précède que  $\forall h > 0, \forall u \in S(\mathbb{R})$

$$\left\| (hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq (1 + \cos \alpha) \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4\pi} h \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$



En utilisant la description du spectre rappelé en (4.2.1) et cette dernière estimation, on en déduit que 0 n'appartient pas au pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique si  $\alpha \in ]-\pi, \pi[$ .

Considérons maintenant le cas où  $\alpha$  appartient à l'ensemble  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  et étudions s'il existe du pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur les demi droits  $\mathbb{R}_+^*$  et  $e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$ .

**Etude de l'existence de pseudo-spectre semi-classique sur  $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$**

On démontre qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique sur  $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$ . Plus précisément, qu'il n'y a pas de pseudo spectre semi classique d'indice  $\frac{2}{3}$  sur cet ensemble, i. e. ; qu'il y a une perte d'au plus  $h^{\frac{2}{3}}$  sur  $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$ .

**Lemme 4.2.1** ([6]) *Considérons  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ ,  $r > 0$  et  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ . On a pour tout  $h > 0$  et  $u \in S(\mathbb{R})$  l'estimation a priori suivante :*

$$\|hD_x u + Vu + ir \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \left(8\pi + (r |\sin \alpha|^{-1}) h^{\frac{2}{3}}\right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

*En particulier, il ya une perte d'au plus  $h^{\frac{2}{3}}$  en 0 pour l'opérateur semi-classique*

$$hD_x + V + ir \sin \alpha x^2$$

**Preuve.** On commence par étudier le cas où  $0 < \alpha < \pi$ . Considérons  $u \in S(\mathbb{R})$ ,  $X \in \mathbb{R}$  et  $\Lambda$  un paramètre strictement positif. On a,

$$\begin{aligned} (D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u, iH(x - X)u) &= - \int_X^{+\infty} D_x u(x) \overline{i u(x)} dx - i \int_X^{+\infty} \Lambda V(x) |u(x)|^2 dx \\ &\quad + r \sin \alpha \int_X^{+\infty} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Si on note  $H$  la fonction de Heaviside. Comme

$$\begin{aligned} - \int_X^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx &= |u(X)|^2 + \overline{\int_X^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx}, \\ |u(X)|^2 &= -2 \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} (D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u, i H(x - X) u) &= \frac{|u(X)|^2}{2\pi} + 2r \sin \alpha \int_X^{+\infty} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx \\ &\geq \frac{|u(X)|^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Puisque  $0 < \alpha < \pi$ . On en déduit les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}, \frac{|u(X)|^2}{2\pi} &\leq 2 \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 &\leq 4\pi \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

En utilisant ensuite le découpage suivant de la norme  $L^2$  de  $u$ , on obtient que :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\{x \in \mathbb{R}, \Lambda^{\frac{1}{3}} \leq x^2 \Lambda\}} \Lambda^{\frac{1}{3}} |u(x)|^2 dx + \int_{\{x \in \mathbb{R}, \Lambda^{\frac{1}{3}} > x^2 \Lambda\}} \Lambda^{\frac{1}{3}} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx + \Lambda^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 m \left( \left\{ x \in \mathbb{R}, \Lambda^{\frac{1}{3}} > x^2 \Lambda \right\} \right), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

où  $m$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . En suite, comme  $[D_x, i] = 0$  et que les opérateurs  $D_x$  et  $i$  sont respectivement auto-adjoint et anti-auto-adjoint, on obtient que :

$$\operatorname{Re} (D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u, i u) = r \sin \alpha \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx \quad (4.2.4)$$

Il s'ensuit, en utilisant (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) et l'identité

$$\Lambda^{\frac{1}{3}} m \left( \left\{ x \in \mathbb{R}, \Lambda^{\frac{1}{3}} > x^2 \Lambda \right\} \right) = 2,$$

que :

$$\begin{aligned} \Lambda^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx + 2 \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \frac{1}{r \sin \alpha} \operatorname{Re} (D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u, i u) + 2 \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq (8\pi + (r \sin \alpha)^{-1}) \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir l'estimation

$$\forall \Lambda > 0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq (8\pi + (r \sin \alpha)^{-1})^{-1} \Lambda^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Considérons maintenant le paramètre  $h = \Lambda^{-1}$  pour revenir à un cadre semi-classique, on obtient l'estimation a priori,

$$\forall h > 0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \|hD_x u + Vu + ir \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq (8\pi + |r \sin \alpha|^{-1})^{-1} h^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Cette dernière estimation montre qu'il y a une perte d'au plus  $h^{\frac{2}{3}}$  en 0 pour l'opérateur semi-classique

$$hD_x + V + ir \sin \alpha x^2.$$

Pour obtenir la même estimation dans le cas où  $-\pi < \alpha < 0$ , il suffit d'appliquer l'estimation que nous verrons de démontrer à la fonction  $\tilde{u}$  définie par  $\tilde{u}(x) = u(-x)$ .  $\square$

Considérons  $\eta$  une constante strictement positive. Nous allons maintenant démontrer qu'il y a une perte d'au plus  $h^{\frac{2}{3}}$  en  $\eta$  pour l'opérateur semi-classique

$$(hD_x)^2 + re^{i\alpha} x^2.$$

**Proposition 4.2.1** ([6]) *Considérons  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ ,  $r > 0$  et  $\eta \in \mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha} \mathbb{R}_+^*$ . Il existe alors des constantes strictement positives  $C$  et  $h_0$  telles que,*

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \|(hD_x)^2 u + re^{i\alpha} x^2 u - \eta u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq Ch^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

La preuve de cette proposition est donnée dans ([6]).

Cette proposition démontre qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice  $\frac{2}{3}$  en tout point de l'ensemble  $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha} \mathbb{R}_+^*$  pour l'opérateur semi-classique

$$(hD_x)^2 + re^{i\alpha} x^2.$$

Lorsque  $\alpha \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  et  $r > 0$ . Ces résultats achèvent la description des ensembles pseudo-spectraux semi-classique de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique.

### 4.3 Forme des ensembles pseudo-spectraux

On démontre la conjecture de Boulton. Considérons l'opérateur semi-classique

$$(hD_x)^2 + c/(4\pi^2) x^2 \text{ où } c \in \mathbb{C},$$

telles que  $\operatorname{Re} c > 0$  et  $\operatorname{Im} c > 0$ . Soit  $T_h$  une isométrie de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par :

$$T_h u(x) := h^{\frac{1}{4}} u\left(h^{\frac{1}{2}} x\right).$$

Montrons que :

$$\forall v > 0, \forall h > 0, h^{-1} \left( (hD_x)^2 + c/(4\pi^2) x^2 - v \right) = T_h^{-1} \left( D_x^2 + c/(4\pi^2) x^2 - v h^{-1} \right) T_h.$$

On déduit d'après l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice  $\frac{2}{3}$  en 1 et en  $c$  pour cet opérateur qu'il existe des constantes strictement positives  $v_0$  et  $C$  telles que,

$$\begin{aligned} \forall v \geq v_0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \left\| -\frac{d^2}{dx^2} u + cx^2 u - vu \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq C v^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \forall v \geq v_0, \forall u \in S(\mathbb{R}), \left\| -\frac{d^2}{dx^2} u + cx^2 u - vcu \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq C v^{\frac{1}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Ces estimations a priori impliquent que si  $v_0$  est choisi suffisamment grand, on a pour tout  $z_0$  dans l'ensemble,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq v_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{3}} - \varepsilon \right\} \cup S_c \left( \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq v_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{3}} - \varepsilon \right\} \right),$$

que  $z_0 \notin \sigma(H_c)$  et,

$$\forall u \in S(\mathbb{R}), \left\| \left( -\frac{d^2}{dx^2} + cx^2 - z_0 \right)^{-1} u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

si  $S_c$  désigne la symétrie axiale par rapport à la droite  $e^{i \arg c/2} \mathbb{R}$ . Il s'ensuit que,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq v_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{3}} - \varepsilon \right\} \cup S_c \left( \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq v_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C (\operatorname{Re} z)^{\frac{1}{3}} - \varepsilon \right\} \right)$$

La figure ci-dessous nous montre la forme des ensembles  $\varepsilon$ -pseudo-spectraux d'après la

conjecture de Boulton,

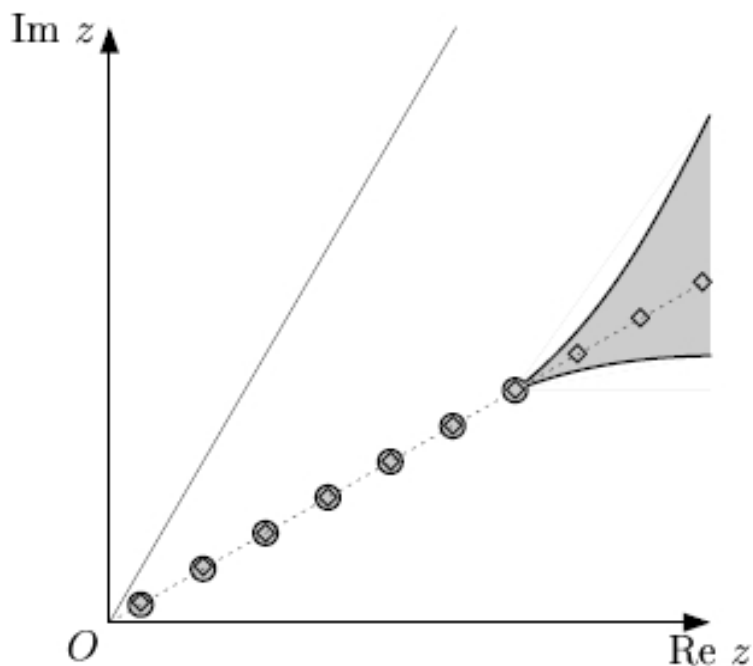


Figure 05 : forme des ensembles  $\varepsilon$ -pseudo-spectraux d'après la conjecture de Boulton ([6])

tandis-que la figure 06 monte le calcul de quelques lignes de niveau  $\{z \in \mathbb{C} : \|(zI - H_c)^{-1}\| = \varepsilon^{-1}\}$  de la norme de la résolvante de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint  $H_c$  avec  $c = e^{i\pi/4}$ . La colonne de droite donne les valeurs correspondantes de  $\log_{10} \varepsilon$ .

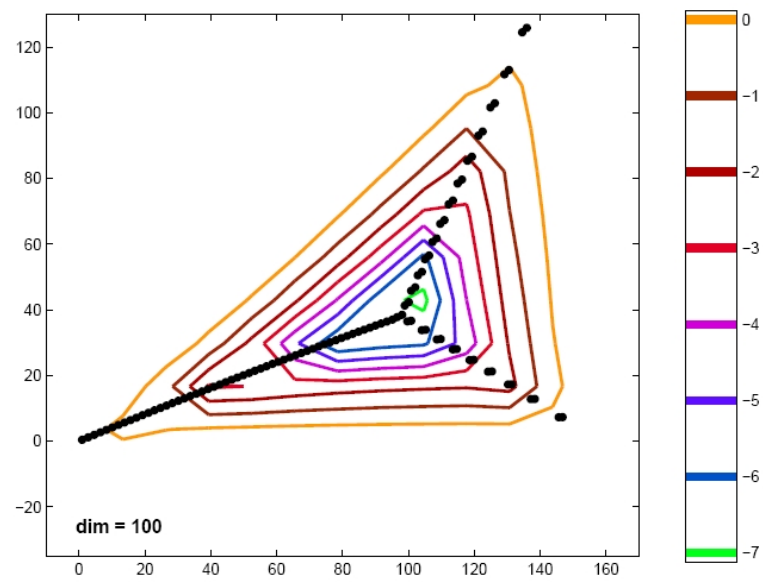


Figure 06 : calcul de quelques lignes de niveau ([6])

---

# CONCLUSION

---

L'étude de l'instabilité spectrale des opérateurs non auto-adjoints est un domaine de recherche qui suscite depuis quelques années beaucoup d'intérêt.

Les grandes chercheuses dans ce domaine sont : L.S.BOULTON, E.B.Davies, N.Dencker, M.Hager, J.Sjostrand, L.N Trefethen et M. Zworski.

Si les modèles unidimensionnels comme l'oscillateur harmonique non auto-adjoint étaient essentiellement bien compris, ce n'était pas le cas avant notre étude, des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension supérieure dont l'étude est plus riche et plus compliquée.

---

# Bibliographie

- [1] L.S.Boullton. *Non-self-adjoint harmonic oscillator semigroups and pseudo-spectre*. Operator Theory, 47, 413 – 429 (2002).
- [2] L. Daniel. *Espaces de sobolev, chapitre 9*. Cours d'analyse fonctionnelle, Master 1, Université d'Artois.
- [3] W. Deng. *Etude de pseudo spectre d'opérateurs non auto-adjoints liés à la mécanique de fluides*. Thèse de doctorat, Université de Pierre et Marie curie.
- [4] L. Hormander. *A Class of Hypoliptic pseudo differential Operators with double chracteristics*. Math, 217, 165 – 188 (1975).
- [5] T. Ramond. *Analyse semi-classique -Resonances et controle de l'équation de schrodinger*. Université de Paris Sud, 2005.
- [6] K. P. Starov. *Etude de pseudo spectre d'opérateurs non auto-adjoints*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2006.
- [7] K. P. Starov. *Sur le pseudo-spectre de certaines classes d'opérateurs pseudo-différentiels non auto adjoints*. Séminaire EDP, Exposé n° XV, p 33. (2006 – 2007)