

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



PROJET
DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse Harmonique et EDP

Existence de solutions faibles pour
les équations de Navier-Stokes
incompressibles en dimension deux

Présenté par
Assia Touil

Soutenu le 26/ 06 / 2012 devant le Jury

M. Sadek GALA	Président	M.C.A	U. MOSTAGANEM
Mme. Naima ABLAOUI	Examineur	M.C	U. MOSTAGANEM
Mme. Amina LAHMAR-BENBERNOU	Encadreur	Prof.	U. MOSTAGANEM

Dédicaces

Milles pages supplémentaires ne seraient suffisantes pour dédier ce petit travail
A mon défunt " FRERE ABDERRAHIM ALLAH YARHMAH " , Mon frère, tu es parti
en silence mais tu seras toujours dans nos pensées, nos prières et nos cœurs ;
A mon père que je ne remercierai jamais assez et à que je dois beaucoup ;
A ma chère mère qui m'a encouragé et soutenu que dieu la protège ;
"Ne vous inquiétez pas maman, mes buts : je vis pour eux et je mourrai pour eux inchalah" ;
A mes soeurs Meriem et Imene ;
A mon petit frère Bilel ;
Une dédicace spéciale à mes chères Imene et Zahira ;
A tous mes collègues ;
Que dieu accepte mon travail.

Assia

Remerciements

Louange à Allah tout puissant qui m'a guidé pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Au terme de mon cycle d'études, il me paraît opportun de me acquitter d'un devoir noble, celui de remercier tous ceux qui ont contribué par leur assistance tant morale que physique à mon cursus universitaire et à la réalisation de ce mémoire.

mes remerciements s'adressent particulièrement à mon encadreur Pr Mme Amina LAHMAR-BENBERNOU pour son aide, ses encouragements jusqu'à la finalisation de ce travail, ainsi que son écoute.

Je remercie les membres du jury d'avoir bien voulu étudier ce travail et participer à la commission d'examen afin de le juger. Qu'ils en soient louablement gratifiés.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement Mlle Djamaïa Bensikadour, qui m'a aidé de près ou de loin pour la réalisation de mon travail.

Table des matières

Historique	i
Introduction	i
1 Notions préliminaires	2
1.1 Espaces fonctionnels	2
1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires	2
1.2 Théorie des équations différentielles ordinaires	10
1.2.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz	10
1.2.2 Explosion en temps fini	10
1.2.3 Lemme de Gronwall	10
2 Existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes	12
2.1 Problème de Navier-Stokes	12
2.1.1 Formulations faibles des équations de Navier-Stokes	13
2.1.2 Enoncé du théorème de Leray	14
2.1.3 Démonstration.	14
3 Régularité et unicité des solutions faibles	22
3.1 Régularité de u	22
3.2 Problème d'unicité	24
3.3 Obtention de la pression	25

4 Applications et simulations	27
4.1 Les différences finies	27
4.2 Les principales méthodes numériques	27
4.3 Décritisation de l'équation de Navier-Stokes	28
Annexe	i
Conclusion	xii
Bibliographie	xiii

HISTORIQUE

La mécanique des fluides est l'étude du comportement de fluides (liquides et gaz). Leur étude remonte à l'Antiquité, avec Archimède (287-212 av.J.-c.), on peut citer aussi Héron d'Alexandrie qui a étudié la pression des gaz.

Après une longue interruption, l'étude des fluides reprend un essor véritable au XVème siècle, avec Leonardo da Vinci (1452-1519).

En 1738 enfin, Daniel Bernoulli étudie les fluides non visqueux. Parallèlement, une nouvelle théorie mathématique est en train de naître qui va entre autres révolutionner la compréhension mathématique du mouvement des corps, solides et liquides. Il s'agit du calcul différentiel, avec d'abord Leibniz, Bernoulli, Newton et d'Alembert.

Jean d'Alembert mathématicien et philosophe français soumet en 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique (dont le manuscrit a aujourd'hui disparu), on doit néanmoins à d'Alembert, dans ce manuscrit, d'avoir introduit dans l'étude de la dynamique des fluides les notions suivantes

- dérivées partielles
- champ de vitesse
- pression interne d'un fluide.

La première mobilisation mathématique de l'écoulement d'un fluide parfait et visqueux remonte à Euler au XVIII siècle. Il publie en 1755 un traité dans lequel apparaissent les équations aux dérivées partielles décrivant les fluides parfaits incompressibles voilà les équations d'Euler

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Par la suite plusieurs approches ont surgi pour donner la naissance aux équations de Navier-Stokes, on doit à Navier (mathématicien et ingénieur français) l'idée, en 1820, d'introduire un terme supplémentaire à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u = 0$$

où ν est un coefficient de viscosité du fluide.

Stokes (mathématicien irlandais) en 1845 propose le modèle suivant pour décrire l'évolution d'un fluide visqueux

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Les chercheurs de l'époque de Navier et de Stokes se sont rapidement convaincus que cette démarche était vouée à l'échec. L'étape suivante a alors consisté de chercher à construire des solutions approchées, par exemple sous forme de série de fonctions polynomiales, à la manière de Cauchy.

INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques se modélisent par des équations aux dérivées partielles non linéaires. L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence de solutions faibles des équations de Navier-Stokes incompressibles, ces équations décrivent l'évolution temporelle d'un fluide incompressible dans un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 . Ce fluide peut être de l'eau, ou de l'air. Diverses variantes de ces équations se retrouvent en météorologie, océanographie, magnétohydrodynamique...

On rappelle que les équations de Navier-Stokes incompressibles sur un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 traduisent le mouvement d'une particule de fluide visqueux incompressibles et s'expriment de la façon suivante

$$N - S \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u(t = 0) = u_0. \end{array} \right.$$

où ν est le coefficient de viscosité du fluide, u est sa vitesse (inconnue), p sa pression (inconnue), f une force extérieure (donnée). Et grâce à l'incompressibilité du fluide $\operatorname{div} u = 0$.

Ces équations doivent être complétées par une donnée initiale u_0 et une donnée au bord $u = 0$.

Pour étudier ce système, il faut déterminer un espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution. Le premier chapitre s'intitule donc naturellement : "Les espaces fonctionnels" et comme premier modèle de telles équations, nous allons revoir brièvement la théorie des équations différentielles ordinaires.

Le deuxième chapitre est consacré à la démonstration du théorème de J. Leray qui, le premier, a établi en 1934 l'existence de solution faibles pour les équations de Navier-

Stokes, pour cela on introduit un problème approché de dimension finie que l'on résout grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, puis on prouve des estimations sur les solutions de ce problème approché. On utilise enfin les théorèmes de compacité pour pouvoir passer à la limite dans la formulation approchée.

Dans le troisième chapitre, on s'intéressera à l'unicité et à la régularité des solutions faibles, et on va récupérer la pression d'après la généralisation du théorème de Rham.

La solution de l'équation de Navier-Stokes en 2D est présentée dans le dernier chapitre par une application et simulation sur le logiciel Matlab pour sa simplicité à la réalisation des programme ainsi que la représentation graphique qu'il apporte.



NOTATIONS

Ω	:	<i>un ouvert borné de \mathbb{R}^n,</i>
$\partial\Omega$:	<i>frontière topologique de Ω (bord de Ω),</i>
$x = (x_1, \dots, x_n)$:	<i>un point générique (vecteur) de \mathbb{R}^n,</i>
∇u	:	<i>vecteur gradient de la fonction u,</i>
Δu	:	<i>opérateur laplacien de la fonction vectorielle u,</i>
$\operatorname{div}(u)$:	<i>opérateur divergence de la fonction u,</i>
$(u \cdot \nabla) u$:	<i>le terme bilinéaire qui apparait dans l'équation de Navier-Stokes,</i>
$\operatorname{supp}(u)$:	<i>support de la fonction u, $\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$</i>
$(\tau_h u)(x) = u(x + h)$:	<i>la translaté de la fonction u,</i>
$\mathcal{C}^k(\Omega)$:	<i>espaces des fonctions k – fois continûment différentiables sur Ω,</i>
$\mathcal{C}_c(\Omega)$:	<i>espaces des fonctions continues à support compact dans Ω,</i>
$\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$:	
<i>E est un espace de Banach</i>		
$\mathcal{C}^k(]0, T[, E)$:	<i>espaces des fonctions k fois continûment différentiables de $]0, T[$ dans E,</i>
$\mathcal{C}_c(]0, T[, E)$:	<i>espaces des fonctions continues à support compact dans $]0, T[$,</i>

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on va déterminer les espaces fonctionnels tels que les espaces de Lebesgue, des distributions et de Sobolev et on va rappeler quelques définitions et résultats sur ces espaces ainsi sur la théorie des équations différentielles ordinaires.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$).

– **L'espace $L^p(\Omega)$ de Lebesgue**

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeur dans \mathbb{R} . On pose

$$\|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)| dx$$

Définition 1.1.1 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on note

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf \{C, |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Définition 1.1.2 Soit $1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ ou localement intégrable si $u1_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

– **Convergence faible et faible-* dans $L^p(\Omega)$**

Définition 1.1.3 Soit E un espace de Hilbert de dual E' . On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$ si

$$\forall f \in E' \quad f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u)$$

Définition 1.1.4 On dit qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E' converge faiblement-* vers $f \in E'$ si

$$\forall u \in E \quad f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E', E} \rightarrow \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u)$$

Proposition 1.1.1 Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de L^p ($1 < p < \infty$), alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente c'est à dire

$$\exists (u_{n,k})_k, \exists u \in L^p(\Omega) \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{n,k} \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx$$

où $L^{p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.1.2 Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de L^∞ , alors on peut extraire de la suite $(u_n)_n$ une sous-suite faiblement-* convergente c'est à dire

$$\exists (u_{n,k})_k, \exists u \in L^\infty(\Omega) \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{n,k} \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx$$

– **L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions tests**

Définition 1.1.5 On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω dont le support est compact et inclus dans Ω .

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \in C^\infty(\Omega), \quad \text{supp}(u) \text{ compact}\}$$

– **L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions**

Définition 1.1.6 (*Distribution*)

On appelle distribution toute application

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

linéaire et continue.

La variable d'une distribution est donc une fonction test, et $T(\varphi)$ est un nombre complexe.

La valeur de T en φ sera noté

$$T(\varphi) \text{ ou } \langle T, \varphi \rangle.$$

L'ensemble des distributions a manifestement une structure d'espace vectoriel complexe avec l'addition de deux formes linéaires et la multiplication par un scalaire. C'est ce qu'on appelle le dual topologique de \mathcal{D} que nous noterons \mathcal{D}'

– **Convergence d'une suite de distributions**

Définition 1.1.7 On dit que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de distributions converge vers la distribution T si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

On gardera à l'esprit ce qu'on appelle la convergence d'une suite de fonctions au sens des distributions

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \iff \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle.$$

– **L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ de Sobolev**

Définition 1.1.8 Soit $p \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \dots, g_i \in L^p(\Omega) \\ \text{tels que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

– L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.9 Soit $1 \leq p < \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

– L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.1.10 On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Lemme 1.1.1 Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors

$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Théorème 1.1.1 (théorème de Rellich)

L'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

– **Produit scalaire de $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$**

Théorème 1.1.2 Soit E un espace de Banach et soient $u \in H^{-1}(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

L'application \langle, \rangle est bilinéaire continue sur $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, et

$$\left| \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

– **L'espace $L^p(]0, T[, E)$**

Définition 1.1.11 Soit E un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$

On note

$$L^p(]0, T[, E) = \left\{ u :]0, T[\rightarrow E, \text{ mesurable, } \int_0^T \|u\|_E dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(]0, T[, E)} = \left(\int_0^T \|u\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(]0, T[, E) = \{u :]0, T[\rightarrow E, \text{ mesurable, } \exists C > 0 \ \|u\|_E \leq C.p.p\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(]0, T[, E)} = \inf \{C > 0, \|u\|_E \leq C.p.p\}.$$

– **Compacité dans $L^p(]0, T[, E)$**

Soit u une fonction continue dans Ω , pour $h \in R^n$ on définit sa translaté $(\tau_h u)$ dans $\Omega - h = \{x - h : x \in \Omega\}$ par $(\tau_h u) = u(x + h)$

Corollaire 1.1.1 Soient E et F sont des espaces de Banach, $F \subset E$ avec injection compact, et $1 \leq p < q \leq \infty$.

Soit $A \subset L^p(]0, T[, E)$ tel que :

(a) $\forall \omega \subset \subset]0, T[, \sup_{u \in A} \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega, E)} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$,

(b) A est bornée dans $L^p(]0, T[, F) \cap L^q(]0, T[, E)$,

alors A est relativement compact dans $L^p(]0, T[, E)$

– L'espace $\mathcal{D}]0, T[, E)$

Définition 1.1.12 On note $\mathcal{D}]0, T[, E)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de $]0, T[$ dans E dont le support est compact

$$\mathcal{D}]0, T[, E) = \{u :]0, T[\rightarrow E, \quad u \in \mathcal{C}^\infty]0, T[, E), \quad \text{supp}(u) \text{ compact} \}$$

– L'espace $\mathcal{D}']0, T[, E)$

Définition 1.1.13 On note $\mathcal{D}']0, T[, E)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E muni de la semi norme suivante

$$\|u\|_{\mathcal{D}']0, T[, E)} = \|\langle u, \varphi \rangle\|_E \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

– L'espace de Sobolev $W^{1,p}]0, T[, E)$

Définition 1.1.14 Soit E un espace de Banach, et $1 \leq p \leq \infty$

On note

$$W^{1,p}]0, T[, E) = \{u : u \in L^p]0, T[, E), \quad \partial_i u \in L^p]0, T[, E), \quad i = 1, \dots, n\}$$

et, pour $p < \infty$, on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}]0, T[, E)} = \left(\|u\|_{L^p]0, T[, E)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p]0, T[, E)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p = \infty$,

$$\|u\|_{W^{1,\infty}]0, T[, E)} = \sup \left(\|u\|_{L^\infty]0, T[, E)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty]0, T[, E)}, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^\infty]0, T[, E)} \right)$$

Définition 1.1.15 Étant donné $p < \infty$, on note $W_0^{1,p}]0, T[, E)$ l'adhérence de $\mathcal{D}]0, T[, E)$ dans $W^{1,p}]0, T[, E)$.

on munit $W_0^{1,p}]0, T[, E)$ de la norme de $W^{1,p}]0, T[, E)$.

– L'espace $W^{-1,p}]0, T[, E)$

Définition 1.1.16 Soit E un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$.

on définit

$$W^{-1,p}([0, T[, E) = \left\{ u \in \mathcal{D}'([0, T[, E) : u = u_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, u_i \in L^p([0, T[, E), \forall i \right\}$$

si $p < \infty$ on munit cet espace de la norme

$$\|u\|_{W^{-1,p}([0, T[, E)} = \inf \left(\|u_0\|_{L^p([0, T[, E)}^p + \|u_1\|_{L^p([0, T[, E)}^p + \dots + \|u_n\|_{L^p([0, T[, E)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{-1,\infty}([0, T[, E)} = \inf \sup \left(\|u_0\|_{L^\infty([0, T[, E)}, \|u_1\|_{L^\infty([0, T[, E)}, \dots, \|u_n\|_{L^\infty([0, T[, E)} \right)$$

L'infimum étant pris pour toutes les décompositions de u en $u = u_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$

Théorème 1.1.3 (de Rham)

Soit $q \in (\mathcal{D}'([0, T[, E))^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \langle q_i, \varphi_i \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n \quad \text{telle que} \quad \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i = 0$$

Alors, il existe $p \in \mathcal{D}'([0, T[, E)$ telle que $\forall i$,

$$q_i = \partial_i p.$$

Formulation équivalente. Autrement dit, si

$$\langle q, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n \quad \text{telle que} \quad \nabla \cdot \varphi = 0,$$

alors il existe p telle que

$$q = \nabla p.$$

– La généralisation du théorème de Rham dans le cas d'évolution

Théorème 1.1.4 Soit $q \in \mathcal{D}']0, T[, (H^{-1}(\Omega))^n$

Pour tout $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$ tel que $\nabla \cdot \psi = 0$,

$$\langle q, \psi \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^n \times (\mathcal{D}(\Omega))^n} = 0$$

Soit en outre $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} \varphi \neq 0$

(a) Il existe $p \in \mathcal{D}']0, T[, L^2_{loc}(\Omega)$ unique tel que

$$\nabla p = q, \quad \int_{\Omega} p \varphi \, dx = 0.$$

(b) Si $q \in W^{-1,\infty}]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^n$, alors

$$p \in W^{-1,\infty}]0, T[, L^2_{loc}(\Omega)$$

Lemme 1.1.2 Soit E un espace de Banach et $T > 0$. Alors

$$L^1]0, T[, E \subset W^{-1,\infty}]0, T[, E$$

– Les espaces V et H

Définition 1.1.17 On note

$$\mathcal{V} = \{u \in (\mathcal{D}(\Omega))^n : \nabla \cdot u = 0\}.$$

$$V = \text{La fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } (H_0^1(\Omega))^n.$$

$$H = \text{La fermeture de } \mathcal{V} \text{ dans } (L^2(\Omega))^n.$$

Les espaces V et H sont donc munis respectivement des normes de $(H_0^1(\Omega))^n$ et de $(L^2(\Omega))^n$.

Théorème 1.1.5 Les espaces V et H sont des espaces de Hilbert séparable.

1.2 Théorie des équations différentielles ordinaires

1.2.1 Théorie de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.2.1 (*Cauchy-Lipschitz*)

Soient ω un ouvert d'un espace de Banach E et I un intervalle de \mathbb{R} . On considère une fonction F mesurable de $I \times \omega$ dans E telle que

$$\forall u \in \omega, \|F(t, u)\| \in L_{loc}^1(I)$$

et telle que

$$\forall (u_1, u_2) \in \omega^2, \|F(t, u_1) - F(t, u_2)\| \leq L(t) \|u_1 - u_2\| \text{ avec } L \in L_{loc}^1(I)$$

Alors, pour tout point (t_0, u_0) de $I \times \omega$, il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 et une unique fonction continue telle que

$$EDO \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, u(\tau)) \, d\tau.$$

1.2.2 Explosion en temps fini

Théorème 1.2.2 Soit F une fonction de $\mathbb{R} \times E$ dans E satisfaisant les hypothèses du théorème 1.2.1 au voisinage de tout point de $\mathbb{R} \times E$. On suppose en outre qu'il existe une fonction localement bornée M de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et une fonction localement intégrable β de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ telles que

$$\|F(t, u)\| \leq \beta(t) M(\|u\|).$$

Alors, si l'intervalle maximal de définition de x est $]T_*, T^*[$, on a

$$T_* > -\infty \implies \limsup_{t \rightarrow T_*^+} \|x(t)\| = \infty \quad \text{et} \quad T_* < +\infty \implies \limsup_{t \rightarrow T_*^-} \|x(t)\| = \infty.$$

1.2.3 Lemme de Gronwall

Lemme 1.2.1 (*de Gronwall*)

Soit $[a, b[\subset \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ et z, φ deux fonctions continues sur $[a, b[$ à valeurs réelles. On suppose que φ est positive telle que

l'inégalité suivante est vérifiée

$$z(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s)z(s)ds, \quad \forall a \leq t \leq b.$$

alors, on a l'estimation

$$z(t) \leq C \exp \left(\int_a^t \varphi(s)ds \right), \quad \forall a \leq t \leq b.$$

Existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de la solution faible de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 , pour cela on introduit des solutions approchées, puis on démontre des estimations sur ces solutions et enfin on va passer à la limite pour obtenir l'existence de la vitesse u .

2.1 Problème de Navier-Stokes

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . L'écoulement d'un fluide homogène incompressible dans le domaine Ω soumis à un champ de forces f est bien décrit par les équations de Navier-Stokes. On s'intéresse donc au problème suivant :

$$N - S \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(t = 0) = u_0. \end{array} \right.$$

- f désigne un terme de force extérieure.
- u_0 est la vitesse initiale.

Les champs de vitesse u et de pression p sont les inconnues du système de $N - S$. Ici, $\Delta = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $(u \cdot \nabla) u = \sum_{i,j=1}^2 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

– Propriété sur le terme non linéaire

Définition 2.1.1 Pour tout $u, v, w \in (H_0^1(\Omega))^2$, on définit

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} ((u \cdot \nabla) v) \cdot w dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx$$

Lemme 2.1.1 La forme trilinéaire b est continue sur $(H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$ et vérifie

$$\forall u \in V, \quad \forall v, w \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0,$$

$$\forall u \in V, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad b(u, v, v) = 0.$$

De plus, pour tous $u \in V$ et tous $v, w \in (H_0^1(\Omega))^2$ on a

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H^1}$$

Dans la suite, pour tout $u, v \in V$ on note $B(u, v)$ la forme bilinéaire continue de $V \times V$ à valeurs dans V' définie par

$$\langle B(u, v), w \rangle_{V', V} = b(u, v, w)$$

Lemme 2.1.2 Soit $u \in L^2(]0, T[, (H_0^1(\Omega))^2)$. Alors

$$B(u, u) \in L^1(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$$

2.1.1 Formulations faibles des équations de Navier-Stokes

Parmi les différentes formulations équivalentes possibles des équations de Navier-Stokes, nous avons choisi d'en présenter deux très proches qui nous semblent les plus agréables à manipuler.

– Fonctions tests indépendantes du temps

Dans cette première formulation, on ne considère que des fonctions tests indépendantes du temps.

De façon plus précise, au système $(N - S)$ on associe le problème suivant :

Trouver $u \in L^2(]0, T[, V)$ telle que pour tout $v \in V$ on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \cdot v dx + \int_{\Omega} ((u(t) \cdot \nabla) u(t)) \cdot v dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v dx = \langle f(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \quad (2.1.1)$$

au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]0, T[)$ et telle que $u(0) = u_0$.

Cette première formulation est, en un certain sens, plus simple que la suivante. Malheureusement afin d'établir l'unicité des solutions, on sera amenés à prendre pour fonction test les solutions elles-même ou des différences entre deux solutions. Ceci n'est possible que dans la formulation avec des fonctions test dépendant du temps.

– Fonction test dépendant du temps

Au système $(N - S)$ on associe le problème suivant

Trouver une fonction $u \in L^2(]0, T[, V)$ telle que $\frac{du}{dt} \in L^1(]0, T[, V')$, et vérifiant pour toute fonction v dans $C_c(]0, T[, V)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{du}{dt}, v(t) \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} ((u(t) \cdot \nabla) u(t)) \cdot v(t) dx dt \\ + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) dx dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Enoncé du théorème de Leray

Théorème 2.1.1 (*J. Leray*)

Soient $\nu > 0$, u_0 dans H , et f dans $L^2(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$ alors il existe un couple (u, p) solution de $(N - S)$, tel que pour tout $T > 0$,

$$(u, p) \in (L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)) \times W^{-1, \infty}(]0, T[, L_{loc}^2(\Omega))$$

2.1.3 Démonstration.

– Existence de solutions approchées

On sait que d'après le théorème 1.1.6 que V est un espace de Hilbert séparable, alors il existe une base Hilbertienne $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note V_m l'espace engendré par $\{w_1, \dots, w_m\}$.

On se donne $f_m \in C([0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$ telle que

$$\|f_m\|_{L^2([0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)} \leq \|f\|_{L^2([0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)} \quad (2.1.3)$$

$$f_m \rightarrow f \quad \text{dans } L^2([0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2) \quad \text{quand } m \rightarrow \infty$$

On considère le problème approché suivant

Trouver u_m dans $C^1([0, T], V_m)$ vérifiant : pour $j = 1, \dots, m$,

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_m(t) \cdot w_j \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \cdot \nabla w_j \, dx + \int_{\Omega} (u_m(t) \cdot \nabla) u_m(t) \cdot w_j \, dx = \langle f_m, w_j \rangle_{\Omega} \quad (2.1.4)$$

$$\int_{\Omega} (u_m(x, 0) - u_0(x)) \cdot w_j \, dx = 0 \quad (2.1.5)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ désigne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(H^{-1}(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2}$ et $u_m(t) = u_m(t, \cdot)$

En notant u_{mi} les coordonnées de u_m , c'est-à-dire

$$u_m(t, x) = \sum_{i=1}^m u_{mi}(t) w_i(x)$$

Les équations 2.1.4 et 2.1.5 s'écrivent : pour $j = 1, \dots, m$,

$$\sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} u_{mi}(t) \int_{\Omega} w_i \cdot w_j \, dx + \nu \sum_{i=1}^m u_{mi}(t) \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j \, dx + \sum_{i,k=1}^m u_{mi}(t) u_{mk}(t) \int_{\Omega} (w_i \cdot \nabla) w_k \cdot w_j \, dx = \langle f_m(t), w_j \rangle_{\Omega}$$

$$\sum_{i=1}^m u_{mi}(0) \int_{\Omega} w_i \cdot w_j \, dx = \int_{\Omega} u_0 \cdot w_j \, dx$$

En multipliant ces équations par l'inverse de cette matrice $\{\int_{\Omega} w_i \cdot w_j\}_{i,j=1,\dots,m}$, on obtient un système équivalent qui s'écrit : pour $i = 1, \dots, m$

$$\frac{d}{dt} u_{mi}(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} u_{mj} + \sum_{j,k=1}^m b_{ijk} u_{mj}(t) u_{mk}(t) = \sum_{j=1}^m d_{ij} \langle f_m(t), w_j \rangle_{\Omega}$$

$$u_{mi}(0) = \sum_{j=1}^m d_{ij} \int_{\Omega} u_0 \cdot w_j \, dx$$

D'après le théorème 1.2.1 de Cauchy-Lipschitz, ce système de m équations différentielles ordinaires à m inconnues et de m conditions initiales admet une unique solution de classe C^1 définie sur un intervalle du type $[0, T_m[$ où $0 < T_m \leq T$.

Il s'agit maintenant d'établir des estimations d'énergie sur u_m indépendantes de m qui nous assureront tout d'abord que $T_m = T$.

– **Majoration des solutions approchées**

Soit $t \in]0, T_m[$, en multipliant l'équation 2.1.4 par $u_{mj}(t)$ et sommant en j , de 1 à m , il vient

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_m(t) \cdot u_m(t) \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 \, dx + \int_{\Omega} (u_m(t) \cdot \nabla) u_m(t) \cdot u_m(t) \, dx = \langle f_m(t), u_m(t) \rangle_{\Omega} \quad (2.1.6)$$

On a

$$\left\langle \frac{d}{dt} u_m, u_m \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m|^2$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 \, dx = \langle f_m(t), u_m(t) \rangle_{\Omega} \quad (2.1.7)$$

On majore le second membre, en utilisant le lemme 1.1.1 et l'inégalité de Young ($2ab \leq a^2 + b^2$)

$$\begin{aligned} |\langle f_m(t), u_m(t) \rangle_{\Omega}| &\leq \|f_m\|_{H^{-1}} \|u_m(t)\|_{H_0^1} \\ &\leq \|f_m\|_{H^{-1}} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\nu} \|f_m\|_{H^{-1}}^2 \end{aligned}$$

Il en résulte que, $\forall t \in]0, T_m[$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 \, dx + \nu \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^2 \, dx \leq \frac{1}{\nu} \|f_m\|_{H^{-1}}^2 \quad (2.1.8)$$

D'autre part : en multipliant l'équation 2.1.5 par $u_{mj}(0)$ et en sommant en j , de 1 à m , il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(x, 0)|^2 dx &= \int_{\Omega} u_0(x) \cdot u_m(x, 0) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_m(x, 0)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx \end{aligned}$$

En intégrant 2.1.8 de 0 à t on en déduit, $\forall t \leq T_m$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_m(\tau)|^2 dx d\tau &\leq \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f_m\|_{H^{-1}}^2 d\tau \\ &= \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

En prenant d'une part le supremum en t , et d'autre part $t = T_m$ et grâce à 2.1.3, on a donc démontré

Lemme 2.1.3 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a les majorations*

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T_m} \|u_m\|_{L^2}^2 &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \|f\|_{L^2}^2 \\ \int_0^{T_m} \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 d\tau &\leq \frac{1}{\nu} \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu^2} \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

La première conséquence de ce lemme est que, pour m fixé la solution u_m est bornée sur $[0, T_m]$ indépendamment de T_m , ce qui prouve par le théorème d'explosion en temps fini pour les équations différentielles ordinaires que $T_m = T$. En conséquence, les estimations sont valables avec $T_m = T$.

– **Majoration des variations par translation**

Pour $h \geq 0$, on note $(\tau_h u_m)(t) = u_m(t + h)$. La translaté $\tau_h u_m$ est définie dans $] -h, T - h[$ donc la variation vérifie $\tau_h u_m - u_m \in C^1(]0, T - h[, V)$

On va montrer qu'il existe un réel $C > 0$ indépendant de m et de h tel que

$$\forall m, \quad \forall h \geq 0, \quad \|\tau_h u_m - u_m\|_{L^2([0, T-h], (L^2(\Omega))^2)} \leq C h^{\frac{1}{4}} \quad (2.1.9)$$

En intégrant l'équation 2.1.4 de t à $t+h$, où $0 \leq t \leq T-h$, on obtient

$$\int_{\Omega} u_m(t+h) - u_m(t) \cdot w_j \, dx = \int_t^{t+h} \langle f_m, w_j \rangle_{\Omega} \, d\tau - \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \nu \nabla u_m \cdot \nabla w_j + (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot w_j \, dx \, d\tau$$

Multiplions cette équation par $u_{mj}(t+h) - u_{mj}(t)$ et sommons en j de 1 à m . Il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 \, dx &= \int_t^{t+h} \langle f_m(\tau), u_m(t+h) - u_m(t) \rangle_{\Omega} \, d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+h} \int_{\Omega} \nu \nabla u_m(s) \cdot \nabla (u_m(t+h) - u_m(t)) \, dx \, d\tau \\ &\quad - \int_t^{t+h} \int_{\Omega} (u_m(s) \cdot \nabla u_m(s)) \cdot (u_m(t+h) - u_m(t)) \, dx \, d\tau \end{aligned}$$

En majorant les termes de second membre, il vient

$$\int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 \leq \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L^2} \int_t^{t+h} g_m(\tau) \, d\tau$$

où

$$g_m(\tau) = c_0 (\|f_m(\tau)\|_{H^{-1}} + \nu \|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2} + \|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2}^2)$$

En intégrant de 0 à $T-h$, on obtient

$$\int_0^{T-h} dt \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 \, dx \leq \int_0^{T-h} dt \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L^2} \int_t^{t+h} g_m(\tau) \, d\tau$$

En utilisant Fubini, le second membre vaut

$$\int_t^{t+h} g_m(\tau) \, d\tau \int_0^{T-h} \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L^2} \, dt$$

D'après l'inégalité de Hölder et le lemme 2.1.4

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-h} \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L^2} dt &\leq \left(\int_0^{T-h} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T-h} \|\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_m(t+h) - \nabla u_m(t)|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_2
\end{aligned}$$

De plus, grâce à l'équation 2.1.3

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+h} g_m(\tau) d\tau &= \int_t^{t+h} \|f_m(\tau)\|_{H^{-1}} d\tau + \int_t^{t+h} \nu \|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2} d\tau + \int_t^{t+h} \|\nabla u_m(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
&\leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|f_m\|_{H^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \nu h^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T \|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \\
&\leq c_2 h^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{T-h} dt \int_{\Omega} |u_m(t+h) - u_m(t)|^2 dx \leq c_1 c_2 h^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui établit la majoration.

– Passage à la limite

Nous avons établi dans le lemme 2.1.4 que la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[, H)$ et dans $L^2(]0, T[, V)$

D'après les propositions 1.1.1 et 1.1.2, il existe une fonction u et une sous-suite de $(u_m)_m$ toujours notée $(u_m)_m$ pour simplifier les notations, vérifiant

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(]0, T[, H) \text{ faiblement} - * \\ u_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(]0, T[, V) \text{ faiblement} \end{cases}$$

D'autre part pour tout $0 \leq a \leq b \leq T$, l'équation 2.1.9 entraine que

$$\sup_m \|\tau_h u_m - u_m\|_{L^2(]a,b[, (L^2(\Omega))^2)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0$$

En outre, $(u_m)_m$ est bornée dans $L^2(]0, T[, (H_0^1(\Omega))^2)$ et l'injection de $(H_0^1(\Omega))^2$ dans $(L^2(\Omega))^2$ est compacte d'après le théorème 1.1.1 de Rellich. Donc, d'après la caractérisation des compacts donnée au corollaire 1.1.1, la suite des u_m est relativement compacte dans $L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$.

D'où

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$$

Et par conséquent

$$u_m \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(]0, T[, H)$$

– Obtention de l'équation faible et la condition initiale

Etant donnée $v \in V$, on le décompose en $v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j w_j$ et soit ψ une fonction continue différentiable dans $[0, T]$ avec $\psi(T) = 0$ et $\psi(0) \neq 0$. On multiplie l'équation 2.1.4 par $\psi(T)$ et on intègre par parties de 0 à T , on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle u_m(t), \psi'(T) w_j \rangle dt + \nu \int_0^T \langle u_m(t), w_j \psi(T) \rangle dt \\ & + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j \psi(T)) dt = \langle u_{0m}, w_j \rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), w_j \psi(T) \rangle dt \end{aligned}$$

En passant à la limite dans chaque terme de l'équation, pour le terme non linéaire on fait appel au lemme suivant

Lemme 2.1.4 *Si la suite u_m converge vers u dans $L^2(]0, T[, V)$ faiblement et dans $L^2(]0, T[, H)$ fortement alors pour toute fonction w dont les composants de classe $C^1([0, T])$*

$$\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w(T)) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), w(T)) dt$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \langle u(t), \psi'(T)v \rangle dt + \nu \int_0^T \langle u(t), v\psi(T) \rangle dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v\psi(T)) \\
 & = \langle u_0, v \rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v\psi(T) \rangle dt
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

D'autre part, on multiplie l'équation 2.1.1 par ψ , et on intègre le premier terme par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \langle u(t), \psi'(T)v \rangle dt + \nu \int_0^T \langle u(t), v\psi(T) \rangle dt + \int_0^T b(u(t), u(t), v\psi(T)) \\
 & = \langle u(0), v \rangle \psi(0) + \int_0^T \langle f(t), v\psi(T) \rangle dt
 \end{aligned}$$

Par une comparaison avec 2.1.10, on obtient :

$$\langle u(0) - u_0, v \rangle \psi(0) = 0$$

donc

$$u(0) = u_0$$

d'où, il vient dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t) \cdot v \, dx + \int_{\Omega} ((u(t) \cdot \nabla) u(t)) \cdot v \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = \langle f(t), v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \tag{2.1.11}$$

Régularité et unicité des solutions faibles

Dans ce chapitre on va étudier l'unicité et la régularité de la solution obtenue dans le chapitre précédent ainsi l'existence de la pression en utilisant la généralisation du théorème de Rham.

3.1 Régularité de u

Lemme 3.1.1 *Soient E un espace de Banach et $u, g \in L^1(]0, T[, E)$. On note E' le dual topologique de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est égale presque partout à une primitive de g : pour presque tout $t \in [0, T]$ et pour $\zeta \in E$, on a*

$$u(t) = \zeta + \int_0^t g(\tau) \, d\tau.$$

2. *Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[)$*

$$\int_0^T u(t) \psi'(t) \, dt = - \int_0^T g(t) \psi(t) \, dt$$

3. *Pour tout $\eta \in E'$, on a au sens des distributions*

$$\frac{d}{dt} \langle u, \eta \rangle = \langle g, \eta \rangle$$

Théorème 3.1.1 Soit V un espace de Hilbert séparable et soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue dans $V \times V$ et coercive, i.e, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

Alors, pour tout l dans V' , le dual topologique de V , il existe une et une seule $u \in V$, tel que

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Lemme 3.1.2 Il existe une constante $K(T, u_0, f) > 0$ telle que pour tout m

On a

$$\left\| \frac{du_m}{dt} \right\|_{L^2(]0, T[, V')} \leq K(T, u_0, f)$$

Démonstration.

D'après le théorème 3.1.1, on a pour tout $u \in V$, la forme $v \mapsto \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ est linéaire et continue dans V , donc il existe un élément de V' , on le note par Au tel que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle Au, v \rangle$$

D'autre part, d'après l'équation 2.1.4 on a :

$$\left\langle \frac{du_m}{dt} - \nu Au_m + (u_m \cdot \nabla) u_m - f_m, v \right\rangle_{V', V} = 0$$

En utilisant la majoration du lemme 2.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du_m}{dt} \right\|_{V'} &\leq \nu \|Au_m\|_{V'} + \|B(u_m, u_m)\|_{V'} + \|f_m\|_{V'} \\ &\leq C \|u_m\|_V + \|u_m\|_{L^2} \|u_m\|_{H^1} + \|f_m\|_{V'} \\ &\leq h_m(t) \end{aligned}$$

où h_m est une suite de fonctions bornée dans $L^2(]0, T[)$, d'après 2.1.3 et les estimations fournies par le lemme 2.1.3. Ainsi

$$\left\| \frac{du_m}{dt} \right\|_{L^2(]0, T[, V')} \leq \left(\int_0^T h_m^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc d'après la proposition 1.1.1 et le lemme 3.1.1, on obtient

$$u' \in L^2(]0, T[, V')$$

Lemme 3.1.3 Soient V , H et V' tels que V' et le dual de V avec $V \subset H \subset V'$

Si une fonction $u \in L^2(]0, T[, V)$ et sa dérivée $u' \in L^2(]0, T[, V')$, alors u est égal presque partout à une fonction continue de $[0, T]$ dans H .

Théorème 3.1.2 (régularité) la solution u de problème de $(N - S)$ vérifie

$$u \in C([0, T], H)$$

Démonstration.

Les deux lemmes 3.1.2 et 3.1.3 précédents permettent alors de conclure.

3.2 Problème d'unicité

Théorème 3.2.1 La solution u de problème de $(N - S)$ est unique.

Démonstration.

On considère u_1 et u_2 deux solutions faibles de 2.1.2 et on introduit $u = u_1 - u_2$. La fonction u vérifie donc pour toute fonction $v \in L^2(]0, T[, V)$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} u(\tau), v(\tau) \right\rangle_{V', V} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} ((u(\tau) \cdot \nabla) u(\tau)) \cdot v(\tau) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} ((u(\tau) \cdot \nabla) u_2(\tau)) \cdot v(\tau) dx d\tau \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} ((u_2(\tau) \cdot \nabla) u(\tau)) \cdot v(\tau) dx d\tau + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u(\tau) \cdot \nabla v(\tau) dx d\tau = 0 \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $v(\tau) = 1_{[0, t]}(\tau) u(\tau)$ est dans $L^2(]0, T[, V)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \nu |\nabla u(\tau)|^2 dx d\tau + \int_0^t b(u(\tau), u_2(\tau)) \cdot u(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2}^2$$

En utilisant l'estimation du lemme 2.1.1, et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t |b(u(\tau), u_2(\tau) \cdot u(\tau))| d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u_2(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2} \|\nabla u(t)\|_{L^2} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\nu \int_0^t \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2\nu} \int_0^t \|\nabla u_2(t)\|_{L^2}^2 \|u(t)\|_{L^2}^2 d\tau
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|\nabla u_2(t)\|_{L^2}^2 \|u(t)\|_{L^2}^2 d\tau$$

On peut donc appliquer le lemme 1.2.1 de Gronwall et obtenir

$$\forall t \in [0, T], \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(\frac{1}{\nu} \int_0^t \|\nabla u_2(t)\|_{L^2}^2 d\tau\right)$$

Or, $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ et donc $u(0) = 0$, et ainsi pour tout $t \in [0, T]$, on obtient $u(t) = 0$ ce qui prouve l'unicité des solutions faibles.

3.3 Obtention de la pression

Si $v \in \mathcal{V}$, l'équation faible 2.1.11 peut s'écrire, dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$,

$$\left\langle -\frac{du}{dt} + \nu \Delta u - (u \cdot \nabla) u + f, v \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0.$$

D'autre part, on a

$$-\frac{du}{dt} + \nu \Delta u - (u \cdot \nabla) u + f \in W^{-1, \infty}(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$$

En effet,

$u \in L^\infty(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$ ce qui entraîne, par définition 1.1.17 de $W^{-1, \infty}(]0, T[, E)$ que

$\frac{du}{dt} \in W^{-1, \infty}(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$, d'après le lemme 2.1.2 le terme non linéaire

appartient à $L^1(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$ et les autres termes appartiennent à l'espace $L^1(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$

qui est inclus dans $W^{-1, \infty}(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^2)$ d'après le lemme 1.1.2

La généralisation du théorème Rham donnée au théorème 1.1.4 montre alors qu'il existe $p \in \mathcal{D}']0, T[, L^2_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\nabla p = -\frac{du}{dt} + \nu \Delta u - (u \cdot \nabla) u + f$$

et par conséquent,

$$p \in W^{-1, \infty}]0, T[, L^2_{loc}(\Omega)$$

Applications et simulations

Dans ce chapitre, On va utiliser un maillage (grille) rectangulaire pour discrétiser dans l'espace le système de Navier-Stokes par la méthode des différences finies et dans le temps par la méthode d'Adams-Bashforth à deux pas.

4.1 Les différences finies

La méthode des différences finies propose une approche pour évaluer en pratique des valeurs exactes, elle consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées.

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

– **Approximation des dérivées**

Dérivées premières

$$(u_x)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \quad (4.1.1)$$

Dérivées seconds

$$\Delta u_{i,j} \approx (u_{xx})_{i,j} + (u_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \quad (4.1.2)$$

4.2 Les principales méthodes numériques

Les principales méthodes de résolution numérique sont séparées en deux grands types

– **Les méthodes à un pas**

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète u_{n+1} au noeud t_{n+1} fait intervenir la valeur u_n obtenue à l'abscisse précédente. Et parmi les méthode principales les plus utilisées en choisissant la méthode d'Euler explicite, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + hF(t_n, u_n) \end{cases}$$

– **Les méthodes à pas multiples**

La méthode d'Adams-Bashforth à deux pas

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_1 \text{ calculé avec une méthode à un pas (dans notre cas méthode d'Euler explicite)} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (3F(t_n, u_n) - F(t_{n-1}, u_{n-1})) \end{cases}$$

où h désigne le pas de temps.

4.3 Décritisation de l'équation de Navier-Stokes

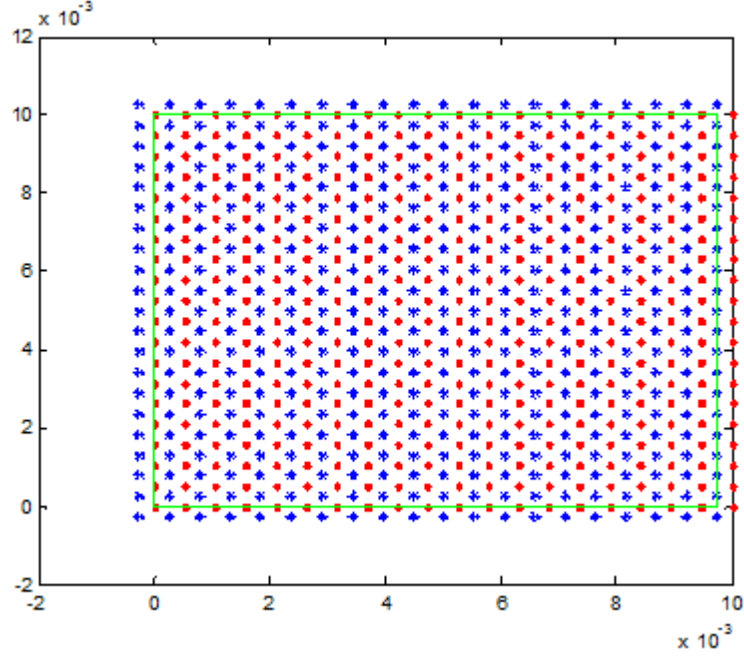
On considère l'équation de Navier-Stokes incompressibles en deux dimensions d'espace dans un domaine rectangulaire $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{\rho} p_x = -(u^2)_x - (uv)_y + \nu (u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t + \frac{1}{\rho} p_y = -(v^2)_y - (uv)_x + \nu (v_{xx} + v_{yy}) \\ u_x + v_y = 0 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Les conditions au bord sont :

$$\begin{array}{ll} u(x, l_y) = u_N(x) & v(x, l_y) = 0 \\ u(x, 0) = u_S(x) & v(x, 0) = 0 \\ u(0, y) = 0 & v(0, y) = v_O(y) \\ u(l_x, y) = 0 & v(l_x, y) = v_E(y) \end{array}$$

Les équations seront discrétisées sur un maillage de type différences finies en utilisant n_x points de discrétisation suivant la direction x et n_y points suivant la direction y



Figure(1)

On remplace les dérivées partielles de u (En éliminant la pression) dans 4.3.1 par 4.1.1 et 4.1.2

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}, & u_y &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \\
 v_x &= \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_x}, & v_y &= \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_y} \\
 u_{xx} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, & u_{yy} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\
 v_{xx} &= \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2}, & v_{yy} &= \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_y^2}
 \end{aligned}$$

donc les équations 4.3.1 deviennent

$$\begin{aligned}
 &u_{ij,t} + u_{ij} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + v_{ij} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \\
 &= \nu \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \\
 &v_{ij,t} + u_{ij} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_x} + v_{ij} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_y}
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_y^2} \right) \quad (4.3.3) \\
&\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} = 0
\end{aligned}$$

On écrit les équations 4.3.2 et 4.3.3 sous la forme suivante

$$u_{i,j,t} = F_u(u, v)$$

$$v_{i,j,t} = F_v(u, v)$$

On discrétise ces équations en temps et en espace, en utilisant la méthode d'adams-Bashforth2

$$u^* = u^n + \frac{h}{2} (3F_u(u^n, v^n) - F_u(u^{n-1}, v^{n-1}))$$

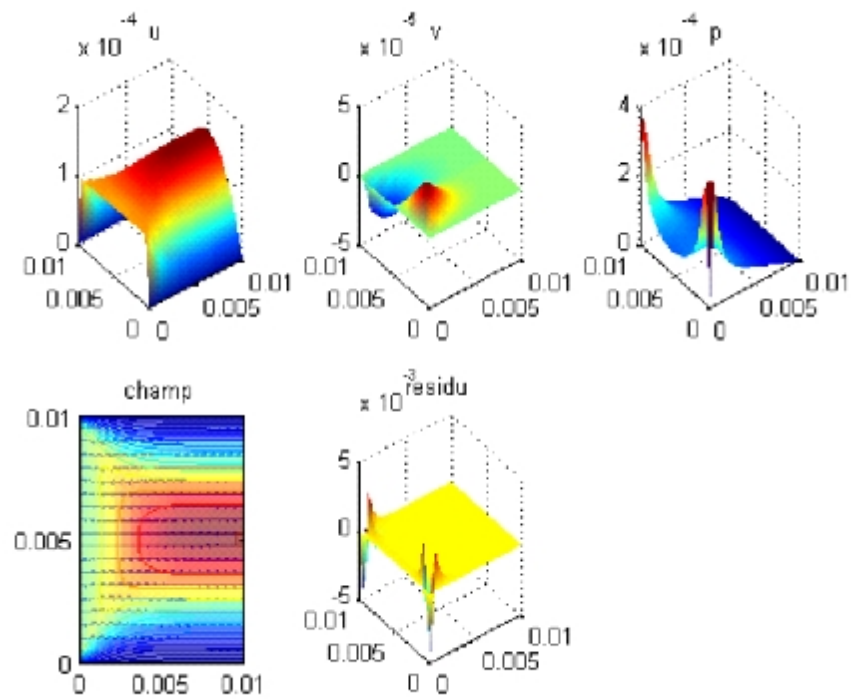
$$v^* = v^n + \frac{h}{2} (3F_v(u^n, v^n) - F_v(u^{n-1}, v^{n-1}))$$

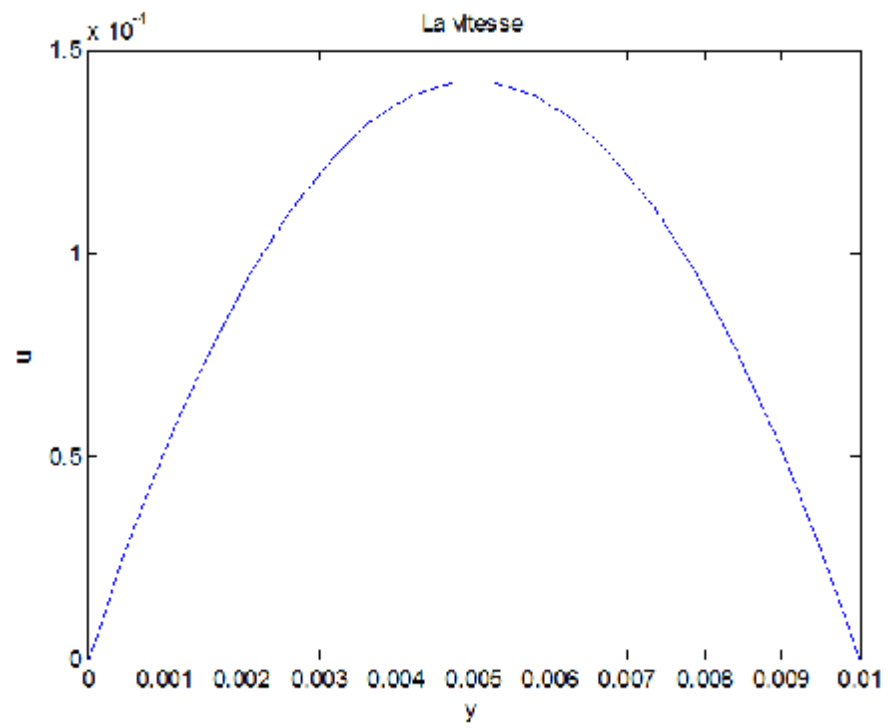
On corrige maintenant les champs u^* , v^* pour obtenir les champ de vitesse u^{n+1} et v^{n+1}
l'équation de la correction est

$$\begin{aligned}
u^{n+1} - u^* &= -h \frac{\partial p}{\partial x} \\
v^{n+1} - v^* &= -h \frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}$$

En passant à la divergence, on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u^* &= \frac{h}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\
\operatorname{div} v^* &= \frac{h}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

*figure(2)*



figure(3)

ANNEXE

Le programme principal

% Résolution de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine rectangulaire par la méthode
% des différences finies et les schémas d'Euler explicite à un pas et d'Adams-Bashforth à
deux pas

% 06/2012

clc; close all; clear all; format compact

global dens vis dt nX nY nXp nYp lx ly boundU boundV boundP N hx hy

% initialisation des variables et le grille

initVar;

[x, y, xp, yp, u, v, p] = gridInit;

%1 = Explicit Euler

%2 = Adam Bashforth 2

firstStep = 1;

solver = 2;

nMaxCycles = 1000;

nSave = 20;

% Conditions aux bords

% [les murs de grille]

% Mur = 1 (u,v)

% Mur = 2 (p)

Uin=0.0001

boundU = [1 0; %right

2 Uin; %left

3 0; %bottom

4 0]; %rop

```
boundV = [1 0;
          2 0;
          3 0;
          4 0];
% Condition initiale
u( :, :) = Uin;
% initialisation de la matrice
[A,f]=PresProjInit();
t=0; dtStart=dt;nCycles = 1; firstIterate=1;
while nCycles<nMaxCycles
nCycles
% Calculer uStar, vStar
    if solver == 1
% Euler explicite
[uStar,vStar,fu,fv] = explicitEuler(u,v);
        elseif solver == 2
% Adams bashforth2
            if firstIterate==1
[uStar,vStar,fu1,fv1] = explicitEuler(u,v);
                firstIterate = firstIterate + 1;
            else
[uStar,vStar,fu1,fv1] = adamsBashforth2(u,v,fu1,fv1);
            end
        end
% Conditions aux bords pour uStar et vStar
for i=1 :4
uStar = boundaryConditions(uStar,boundU(i,1),boundU(i,2));
vStar = boundaryConditions(vStar,boundV(i,1),boundV(i,2));
end
% Obtention de la pression
```

```

[u,v,p] = PresProj(x,y,uStar,vStar,A,f);
% Calculer la continuité (résidu)
res=zeros(nX,nY);
%res(2 :nX-1,2 :nY-1)=(u(3 :nX,2 :nY-1)-u(1 :nX-2,2 :nY-1))/(2*hx)+(v(2 :nX-1,3 :nY)-
v(2 :nX-1,1 :nY-2))/(2*hy);
for i=2 :nXp-1
for j=2 :nYp-1
res(i,j)=1/2*(u(i,j)-u(i-1,j)+u(i,j-1)-u(i-1,j-1))/hx+...
1/2*(v(i,j)-v(i,j-1)+v(i-1,j)-v(i-1,j-1))/hy;
end
end
if mod(nCycles,nSave)==0
figure(2)
render(u,v,p,res,x,y,xp,yp,t,dt,nCycles);
pause(0.2);
end
if mod(nCycles,100)==0
firstIterate = 1;
end
if nCycles==10
firstIterate = 1;
dt = dtStart*10;
[A,f]=PresProjInit();
nCycles
end
if nCycles==20
firstIterate = 1;
dt = dtStart*20;
[A,f]=PresProjInit();
nCycles

```

```

end
if nCycles==40
firstIterate = 1;
dt = dtStart*100;
[A,f]=PresProjInit();
nCycles
end
if nCycles==80
firstIterate = 1;
dt = dtStart*200;
[A,f]=PresProjInit();
nCycles
end
t=t+dt;
nCycles = nCycles+1;
end
figure(3)
plot(y(nY-1, :),u(nX-1, :),'b'); title('La vitesse u')
xlabel('y'), ylabel('u')
%-----

```

Les fonctions

```

function initVar()
global dens vis dt nX nY lx ly hx hy
%dens = densité du fluide
%vis = viscosité du fluide
%dt = le pas de temps
%nX = le nombre des points de grille dans la direction x
%nY = le nombre des points de grille dans la direction y
%lx = la largeur du grille
%ly = la longueur du grille

```

```

dens = 1000;
vis = 1e-6;
dt = 5e-5;
% Les variables du grille(maille)
nX = 20;
nY = 20;
lx = 0.01;
ly = 0.01;
% -----
function [x, y, xp, yp, u, v, p]=gridInit()
% la matrice de la pression
global dens vis dt nX nY nXp nYp lx ly N hx hy
nYp=nY+1;
nXp=nX;
x=zeros(nX,nY);
y=zeros(nX,nY);
xp=zeros(nXp,nYp);
yp=zeros(nXp,nYp);
u=zeros(nX,nY);
v=zeros(nX,nY);
p=zeros(nX,nY);
for i=1 :nX;
x(i, :)=lx*(i-1)/(nX-1);
end
for j=1 :nY;
y( :,j)=ly*(j-1)/(nY-1);
end
for i=1 :nXp;
xp(i, :)=lx*(i-1.5)/(nXp-1);
end

```

```

for j=1 :nYp
yp( :j)=ly*(j-1.5)/(nYp-2);
end
hx = 0.5*(x(3,2)-x(1,2));
hy = 0.5*(y(2,3)-y(2,1));
figure(2)
plot(x,y,'.','color','r','markersize',5), hold on
plot(xp,yp,'*','color','b','markersize',5)
plot([0 0 lx-1/2*hx lx-1/2*hx 0],[0 h h 0 0],'color','g')
N=zeros(nXp,nYp);
for i=1 :nXp
for j=1 :nYp
N(i,j)=i+(j-1)*nXp;
end
end
%-----
function [u] = boundaryConditions(u,direction,value)
global nX nY split ;
if direction == 1
%right
u(nX, :) = u(nX-1, :);
elseif direction == 2
%left
u(1, :) = value;
elseif direction == 3
%bottom
u( :,1) = 0;
elseif direction == 4
%rop
u( :,nY) = 0;

```

```

end
%-----
function [A,f]=PresProjInit()
global dens vis g dt nX nY nXp nYp lx ly boundU boundV boundP N split hx hy
A=sparse(nXp*nYp);
f=sparse(nXp*nYp,1);
for i=2 :nXp-1
for j=2 :nYp-1
A(N(i,j),N(i-1,j))=dt/dens/hx^2;
A(N(i,j),N(i+1,j))=dt/dens/hx^2;
A(N(i,j),N(i,j))=-2*dt/dens/hx^2-2*dt/dens/hy^2;
A(N(i,j),N(i,j-1))=dt/dens/hy^2;
A(N(i,j),N(i,j+1))=dt/dens/hy^2;
end
end
% Conditions aux bord
%right boundary
i=nXp;
for j=2 :nYp-1
A(N(i,j),[N(i,j)])=[1];
end
%left boundary
i=1;
for j=2 :nYp-1
A(N(i,j),[N(i,j) N(i+1,j)])=[1 -1];
end
%lower boundary
j=1;
for i=2 :nXp-1
A(N(i,j),[N(i,j) N(i,j+1)])=[1 -1];

```



```

end
%upper boundary
j=nYp;
for i=2 :nXp-1
A(N(i,j),[N(i,j) N(i,j-1)])=[1 -1];
end
%-----
function [u_f] = NS_fu(u,v)
global vis nX nY hx hy;
u_f = u;
%u_f = -B-C-D+vis*(E+F)
B = u(2 :nX-1,2 :nY-1).*((u(3 :nX,2 :nY-1)-u(1 :nX-2,2 :nY-1))/(2*hx));
C = v(2 :nX-1,2 :nY-1).*((u(2 :nX-1,3 :nY) - u(2 :nX-1,1 :nY-2))/(2*hy));
E = (u(3 :nX,2 :nY-1) - 2*u(2 :nX-1,2 :nY-1) + u(1 :nX-2,2 :nY-1))/(hx*hx);
F = (u(2 :nX-1,3 :nY) - 2*u(2 :nX-1,2 :nY-1) + u(2 :nX-1,1 :nY-2))/(hy*hy);
u_f(2 :nX-1,2 :nY-1) = - B - C + vis*(E + F);
%-----
function [v_f] = NS_fv(u,v)
global vis nX nY hx hy;
v_f = v;
%v_f = -B-C-D+vis*(E+F)
B = u(2 :nX-1,2 :nY-1).*((v(3 :nX,2 :nY-1)-v(1 :nX-2,2 :nY-1))/(2*hx));
C = v(2 :nX-1,2 :nY-1).*((v(2 :nX-1,3 :nY) - v(2 :nX-1,1 :nY-2))/(2*hy));
E = (v(3 :nX,2 :nY-1) - 2*v(2 :nX-1,2 :nY-1) + v(1 :nX-2,2 :nY-1))/(hx*hx);
F = (v(2 :nX-1,3 :nY) - 2*v(2 :nX-1,2 :nY-1) + v(2 :nX-1,1 :nY-2))/(hy*hy);
v_f(2 :nX-1,2 :nY-1) = - B - C + vis*(E + F);
%-----
function [uStar,vStar,fu,fv] = explicitEuler(u,v)
global dt hx hy;
fu = dt*NS_fu(u,v);

```

```

fv = dt*NS_fv(u,v);
uStar = u + fu;
vStar = v + fv;
%-----
function [uStar,vStar,fu,fv] = adamBashforth2(u,v,fu1,fv1)
global dt hx hy
fu = dt*NS_fu(u,v);
fv = dt*NS_fv(u,v);
uStar = u + 3/2*fu-1/2*fu1;
vStar = v + 3/2*fv-1/2*fv1;
%-----
function [u,v,p]=PresProj(x,y,uStar,vStar,A,f)
global dens vis dt nX nY nXp nYp lx ly boundU boundV boundP N hx hy
for i=2 :nXp-1
for j=2 :nYp-1
f(N(i,j))=1/2*(uStar(i,j)-uStar(i-1,j)+uStar(i,j-1)-uStar(i-1,j-1))/hx+...
1/2*(vStar(i,j)-vStar(i,j-1)+vStar(i-1,j)-vStar(i-1,j-1))/hy;
end
end
corner=[1 nXp nXp*nYp-nXp+1 nXp*nYp];
fixed = logical(zeros(1,nXp*nYp));
fixed(corner)= 1;
free = ~fixed;
% resoudre l'equation de la pression
pt=sparse(nXp*nYp,1);
pt(free)=A(free,free)\f(free);
p=zeros(nXp,nYp);
for i=1 :nXp
for j=1 :nYp
p(i,j)=pt(N(i,j));

```

```

end
end
% Calculer nouveau u, v
u(2 :nX-1,2 :nY-1) = uStar(2 :nX-1,2 :nY-1) - dt/(2*rho*hx)*(p(3 :nX,3 :nY)-p(2 :nX-1,3 :nY)+p(3 :nX,2 :nY-1)-p(2 :nX-1,2 :nY-1));
v(2 :nX-1,2 :nY-1) = vStar(2 :nX-1,2 :nY-1) - dt/(2*rho*hy)*(p(3 :nX,3 :nY)-p(3 :nX,2 :nY-1)+p(2 :nX-1,3 :nY)-p(2 :nX-1,2 :nY-1));
% Conditions aux bord
for i=1 :4
u = boundaryConditions(u,boundU(i,1),boundU(i,2));
v = boundaryConditions(v,boundV(i,1),boundV(i,2));
end
%-----
function render(u,v,p,res,x,y,xp,yp,t,dt,nCycles)
global vis lx ly hx hy
clf;
subplot(2,3,1), surf(x,y,u);title('u vitesse'), axis([0 lx 0 ly]), view(3)
shading interp;
subplot(2,3,2), surf(x,y,v);title('v vitesse'), axis([0 lx 0 ly]), view(3)
shading interp;
subplot(2,3,3), surf(xp,yp,p);title('pression'), axis([0 lx 0 ly]), view(3)
shading interp;
ax4 = subplot(2,3,4),quiver(x,y,u,v), hold on, surf(x,y,(u.^2+v.^2),'FaceAlpha',0.6),shading
flat;title('champ'), hold on, axis([0 lx 0 ly]);
% axis equal
set(ax4,'CLim',[min(min((u.^2+v.^2))) max(max((u.^2+v.^2)))]);
lgmax = (max(max((u.^2+v.^2))));
lgmin = (min(min((u.^2+v.^2))));
lgsp = linspace(lgmin,lgmax,20).^3/lgmax^2;
contour(x,y,(u.^2+v.^2),lgsp);

```

```
hold off,axis([0 lx 0 ly]);
subplot(2,3,5), surf(x,y,res); title(['residual']), axis([0 lx 0 h]), view(3)
shading interp;
rey = sprintf('max reynolds number Re : %f', max(max(u*max(w,h)/mu)));
couU = sprintf('max Courant number U : %f', max(max(u*dt/hx)));
couV = sprintf('max Courant number V : %f', max(max(v*dt/hy)));
pec = sprintf('max Peclet number : %f', max(max(u*hx/mu)));
resmax = sprintf('max residual : %f', max(max(abs(res))));
resavg = sprintf('sum residual : %f', sum(sum(res)));
prdt = sprintf('dt : %f', dt);
prt = sprintf('t : %f', t);
precycles = sprintf('# Cycles : %f', nCycles);
uicontrol('Style', 'text', 'String',rey,'Position', [900 200 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',couU,'Position', [900 180 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',couV,'Position', [900 160 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',pec,'Position', [900 140 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',resmax,'Position', [900 120 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',resavg,'Position', [900 100 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',prdt,'Position', [900 80 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',precycles,'Position', [900 60 200 70]);
uicontrol('Style', 'text', 'String',prt,'Position', [900 40 200 70]);
```

CONCLUSION

D'après les travaux fondamentaux de J.Leray en 1934, on dispose d'une bonne théorie d'existence et d'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes dans le cas bidimensionnelle, ainsi on remarque que la solution que l'on construit vérifie $\frac{du}{dt} \in L^2(]0, T[, V')$ et que l'on peut donc prendre des fonctions test qui appartiennent à $L^2(]0, T[, V)$, En particulier, on peut prendre la solution u elle-même comme fonction test.

Ces équations ont une grande utilisations dans la mécanique des fluides malgré que leur étude mathématique est loin d'être totalement achevée, et de nombreuses choses restent à comprendre!

Depuis 1934, on sait que le problème de Navier-Stokes est bien posé en deux dimensions d'espace. En dimensions trois en revanche la situation est beaucoup moins claire car l'unicité est encore un problème non résolu. Si on veut étendre ce problème à l'analyse semi classique, est-ce-qu' on peut l'expliquer et avoir une unique solution?.

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [1] C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et Applications*, Dunod 1990.
- [2] A. Munnier, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*.
Université Henré poincaré, Nancy 1, 2007-2008.
- [3] F. Boyer, *Equations différentielles ordinaires, Equations aux dérivées partielles, Analyse théorique et numérique*, cours master mathématiques et applications, Université de prevence-Université de paul cézanne. 2010.
- [4] R. Temam, *Navier stokes equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holand, Amsterdam 1984.
- [5] F. Boyer, P.Fabrie, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Springer 2006.
- [6] J. Simon, *Equations de Navier-Stokes*, cours DEA février 2003. Université Clermont-Ferrand.
- [7] R. Danchin et I. Gallagher, *Analyse non linéaire*, juillet 2006.
- [8] E. Goncalvèr, *Résolution numérique. Discrétisation des EDP et EDO*, cours institut national polytechnique de Grenoble, 2005.
- [9] F.Dubois, *Introduction aux différences et aux éléments finies*, 1995-1996.
- [10] I. Danaila, P. Joly, S.M. Kaber, M. Postel, *Introduction au calcul scientifique par la méthode pratique*, Dunod, Paris, 2005.

- [11] J.T.B.Overvelde, *CFD Matlab, Navier-Stokes Solver*, Mai 2011.

Résumé

Les équations de la mécanique des fluides occupent une grande place privilégiée dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Ce travail est consacré donc à l'étude d'une équation de l'hydrodynamique. Nous avons limité ce travail à l'exposé des résultats d'existence, d'unicité et de régularité dans un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Donc notre travail est consacré en grande partie à la démonstration du théorème de J.Leray.

Mots clés

Équations de Navier-Stokes incompressibles, pression du fluide, vitesse du fluide, fluide homogène, solutions faibles.