

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L' ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

PROJET DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Option : Analyse Harmonique et EDP

Chaos quantique : Application hyperbolique quantique sur le tore

Présenté par
Ines BENADDA

Soutenu le **26 / 06 / 2012** devant le Jury

| | | | |
|-----------------|---------------------|-----------------------|------------------|
| Djillali LAID | Président | Maitre assistant | U.MOSTAGANEM |
| Amina BENBERNOU | Encadreur | Professeur | U.MOSTAGANEM |
| Frédéric FAURE | Co-encadreur | Maître de conférences | U.Joseph Fourier |
| Zoubir DAHMANI | Examineur | Maître de conférences | U.MOSTAGANEM |

Année Universitaire : 2011 / 2012

Remerciements

Tout d'abord je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.

*Un grand remerciement s'adresse à mon encadreur Madame **Amina LAHMAR - BENBERNOU**, Professeur à l'Université de Mostaganem. C'est grâce à elle que j'ai pu découvrir, apprendre et aimer le sujet de mon projet de master. Apprendre et travailler à son contact a été un réel plaisir et je mesure un peu plus chaque jour la chance que j'ai eu. Je remercie Monsieur **Frédéric Faure**, je lui suis aussi sincèrement reconnaissante de s'être toujours montrée disponible et d'avoir partagé ses idées et ses connaissances avec moi, j'aurai jamais pu comprendre ce travail sans son aide.*

Je tiens à remercier

*Monsieur **Djillali LAID** Maître assistant à l'Université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

*Monsieur **Zoubir DAHMANI** Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examineur*

J'ai eu la chance durant le déroulement de mes cinq années d'études supérieures d'avoir des enseignants exceptionnels qui m'ont donné le goût des études et m'ont tant appris. Je suis consciente que c'est en grande partie grâce à eux que j'en suis là. Je les remercie aussi sincèrement pour tous ce qu'ils nous ont appris.

Un spéciale remerciement à mes parents qui étaient toujours à côté de moi pour les sacrifices qu'ils ont consenti pour mon éducation, je remercie aussi mes frères mes amies et surtout Zineb et Djamel Eddine pour leur soutiens durant ce travail

Ines

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | i |
| 1 Priliminère | 1 |
| 2 Un modèle simple de chaos déterministe :une application linéaire hyperbolique sur le tore \mathbb{T}^2 | 3 |
| 2.1 L'application du chat d'Arnold | 3 |
| 2.2 Propriétés chaotiques | 5 |
| 2.3 Espace quantique associé au tore \mathbb{T}^2 | 8 |
| 2.4 Représentation d'un état quantique sur l'espace de phase. Distribution de Husimi, Mesures semi-classiques | 9 |
| 2.5 Quantification de l'application hyperbolique M | 13 |
| 3 Évolution de paquet d'onde | 19 |
| 3.1 Évolution d'un état cohérent sur le point fixe $(0, 0)$ | 19 |
| 3.2 Évolution d'un état cohérent quelconque | 21 |
| 4 L'ergodicité quantique | 23 |
| 4.1 Mesures semi-classiques invariantes | 23 |
| 4.1.1 Théorème d'ergodicité quantique | 25 |
| Conclusion | 27 |

Bibliographie

28

INTRODUCTION

Objectifs de l'étude du chaos quantique

D'après le dictionnaire le terme chaos signifie "confusion", "désordre", "imprévisibilité", et quantique vient de la mécanique quantique qui établit que la matière est de nature ondulatoire, c'est de là que vient le terme chaos quantique qui a été introduit par des physiciens nucléaires ou atomiques qui étudiaient l'évolution complexe de ces ondes quantiques mais maintenant l'étude du chaos quantique concerne des ondes de toute nature, pas seulement quantiques.

L'objectif de l'étude du chaos quantique est de comprendre l'évolution d'une onde piégée dans une cavité. Intuitivement, si à l'instant initial, il y a un paquet d'onde dans une cavité, cette onde se déplace, rebondit sur les parois, et petit à petit se disperse. Après un certain temps, en supposant les effets d'amortissements très faibles, l'onde remplit la cavité entière, et interfère avec elle-même. Son aspect peut être alors compliqué et difficile à prévoir ou à expliquer. L'objectif est justement de décrire cette évolution et ces interférences.

Pour des formes particulières de la cavité, comme un cercle ou un rectangle, l'évolution de l'onde est assez simple, et bien comprise. Pour des formes plus générales, le comportement est plus compliqué et mal compris encore. Cette complexité est due à l'existence des trajectoires chaotiques dans la cavité.

Le billard à deux dimensions

Afin de préciser un peu ce que nous entendons par "chaos quantique", commençons par décrire un modèle simple de cavité : le billard à deux dimensions

1. La limite semi classique

Pour exprimer la limite semi classique on introduit un paramètre sans dimension \hbar appelé constante de Planck qui correspond à

$$\hbar = \frac{l}{L}$$

où l est la longueur d'onde étudiées, et L est la taille typique de la cavité (du domaine).

On supposera dans nos étude que $l \ll L$, autrement dit $\hbar \ll 1$. La limite $\hbar \rightarrow 0$ est précisément appelée limite semi-classique ou limite des petites longueurs d'ondes, et les résultats mathématiques sur le chaos quantiques portent sur cette limite.

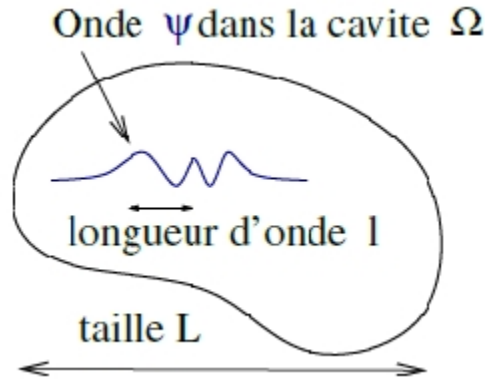


Figure 0.1 : Onde piégée dans une cavité

2. L'équation d'onde et l'équation de schrodinger

Un billard est un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ connexe, dont le bord $\partial\Omega$ est assez régulier – par exemple C^∞ par morceaux. Une particule quantique à l'intérieur du billard est décrite par une fonction d'onde $\psi \in L^2(\Omega)$ qui évolue d'après l'équation d'onde (qui gouverne les ondes acoustiques ou électromagnétiques)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \psi = 0$$

où $\Delta \psi = \partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi$, et c est la vitesse de l'onde. On impose la condition $\psi = 0$ sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine.

Une particule quantique à l'intérieur du billard est décrite par une fonction d'onde $\psi \in L^2(\Omega)$ satisfaisant à l'équation de Schrödinger, avec les conditions de Dirichlet au bord :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi \\ \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou plus généralement une équation linéaire aux dérivées partielles (EDP) comme

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{H} \psi \quad (0.0.1)$$

où $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V(x, y)$ est un opérateur différentiel

Remarque 0.0.1 *plus généralement qu'un opérateur différentiel, on peut considérer un opérateur pseudo-différentiel.*

3. Onde stationnaire et spectre

Comme l'équation (0.0.1) qui modélise le problème d'évolution est linéaire en ψ , on considère le spectre de l'opérateur \widehat{H} . On peut montrer dans le modèle du billard, que ce spectre est discret, i.e. il existe un ensemble de valeurs propres $E_j \in \mathbb{R}$, et fonctions propres associées $\psi_j(x, y)$, $j = 1; 2; \dots$

$$\widehat{H} \psi_j = E_j \psi_j. \quad (0.0.2)$$

L'évolution de ces fonctions est très simple :

$$\widetilde{\psi}_j(x, y, t) = \psi_j(x, y) \exp(-iE_j t / \hbar) \quad (0.0.3)$$

On a $\forall j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \widetilde{\psi}_j}{\partial t} &= i\hbar \frac{(-iE_j)}{\hbar} \psi_j(x, y) \exp(-iE_j t / \hbar) \\ &= E_j \psi_j(x, y) \exp(-iE_j t / \hbar) \\ &= \widehat{H} \psi_j \exp(-iE_j t / \hbar) \\ &= \widehat{H} \widetilde{\psi}_j \end{aligned}$$

donc $\widetilde{\psi}_j$ est une solution de l'équation 0.0.1. Le module $|\widetilde{\psi}_j(x, y, t)|$ est constant au cours du temps, et seule la phase oscille. On dit que c'est une onde stationnaire.

Remarquer que sur le plan \mathbb{R}^2 , et avec $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta$ (onde libre), la fonction

$$\psi(x, y) = \exp i(\xi_x x + \xi_y y) \setminus \hbar \quad (0.0.4)$$

appelée onde plane, est solution de $H\psi = E\psi$, avec $E = \frac{|\xi|^2}{2}$ et $\xi = (\xi_x, \xi_y)$. La longueur d'onde est $l = \frac{2\pi h}{|\xi|}$

Mais attention, une telle onde plane n'est pas une solution stationnaire dans le domaine Ω car elle ne satisfait pas les conditions $\psi = 0$ au bord.

Remarque 0.0.2 Les fonctions propres ψ_j , $j = 1, 2, \dots$, forment une base de l'espace $L^2(\Omega)$, ce qui signifie que toute fonction $\psi(x, y)$ peut se décomposer comme :

$$\psi = \sum_j c_j \psi_j \quad (0.0.5)$$

et la linéarité de l'équation 0.0.1, et de l'équation 0.0.3, donnent la solution au problème d'évolution soulevé dans l'objectif de l'étude du chaos quantique :

$$\psi(t) = \sum_j c_j \psi_j \exp(-iE_j t/h) \quad (0.0.6)$$

Mais cela suppose que l'on connaisse le spectre ψ_j, E_j . En fait, mis à part des cavités spéciales (où les trajectoires classiques ne sont pas chaotiques, mais intégrables) comme l'ellipse, le cercle, le rectangle, cette approche n'est pas très utile. Au contraire, nous verrons que le peu d'information que l'on a sur le spectre, vient d'une compréhension du problème d'évolution de $\psi(t)$ pour les temps courts.

En chaos quantique, les valeurs propres E_j et les ondes stationnaires ψ_j sont des objets aux propriétés qui restent encore mystérieuses.

On mentionnera une propriété d'équidistribution pour presque toutes les ondes stationnaires, **Théorème 4.1.1**,

Deux phénomènes fondamentaux

L'intérêt du chaos quantique vient de la combinaison de deux phénomènes importants, et que l'on explique en détail dans la suite : la correspondance semi-classique et le chaos déterministe.

1. La correspondance semi classique

On peut avoir une correspondance entre la mécanique quantique et la mécanique classique en observant le déplacement d'un paquet d'onde au cours du temps et en évoluent

d'après l'équation (0.0.1) et dans la limite des petites longueurs d'ondes, un paquet d'onde reste sous la forme d'un paquet d'onde localisé et on verra que ce paquet d'onde peut avoir une taille microscopique et à grand échelle, il apparaît comme un point, donc ce paquet d'onde peut être considéré comme une particule dont le mouvement est décrit par l'équation de mouvement classique hamiltonienne.

Ce paquet d'onde (ou ondelettes ou état cohérent) représente des ondes particulières, qui sont des ondes localisées autant que possible dans l'espace des phases, ces ondes jouent un rôle particulier. Un paquet d'onde ψ_{x_0, ξ_0} est localisé autour de sa position $X_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, et possède une structure interne d'onde plane (comme dans l'équation (0.0.4)), paramétrée par une impulsion $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ (plus précisément $\xi_0 \in T_{X_0}^* \Omega$). Voici une expression possible :

$$\psi_{x_0, \xi_0}(X) = \exp\left(\frac{-|X - X_0|^2}{(\Delta x)^2}\right) \exp\left(\frac{i\xi_0 X}{h}\right)$$

où ici $X \in \mathbb{R}^2$, et Δx est la largeur du paquet d'onde.

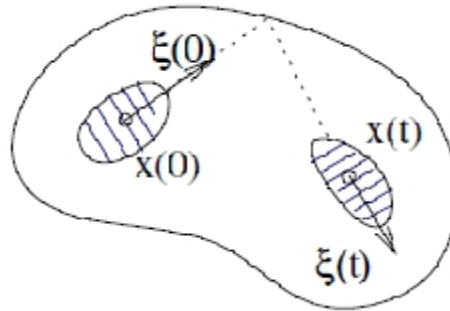


Figure 0.2 : Evolution d'un paquet d'onde (aux temps finis versu $\hbar \ll 1$)

Remarquons dans cette expression que x et ξ/h sont des variables conjuguées de Fourier, et que le principe d'incertitude (propre à la transformée de Fourier) donne $\Delta x (\frac{\Delta \xi}{h}) \geq 1$, soit

$$\Delta x \Delta \xi \geq h \tag{0.0.7}$$

le choix $\Delta x \simeq \sqrt{h}$ et $\Delta \xi \simeq \sqrt{h}$ est possible, et si $h \ll 1$ alors le paquet d'onde peut être très localisé en x et en ξ .

Un résultat fondamental est qu'en évoluant d'après l'équation (0.0.1), et dans la limite des petites longueurs d'ondes, un paquet d'onde reste sous la forme d'un paquet d'onde localisé, avec une position $x(t)$ et une impulsion $\xi(t)$ qui satisfont aux équations du mouvement

de Hamilton classiques :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H(x,\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x,\xi)}{\partial x} \end{cases} \quad (0.0.8)$$

avec $H(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$. cela donne

$$\xi = \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (0.0.9)$$

qui est la vitesse du paquet d'onde.

Un autre résultat fondamental, est que de tels paquets d'ondes forment une base complète de l'espace de Hilbert des fonctions $L^2(\Omega)$, i.e. toute onde peut se décomposer comme superposition de tels paquets d'ondes. Donc, d'après la linéarité de l'équation d'évolution (0.0.1), l'évolution de ψ peut se comprendre comme la superposition de l'évolution des paquets d'ondes qui la composent.

En conclusion au problème d'évolution d'ondes, on associe une loi d'évolution déterministe d'une particule l'équation (0.0.8). C'est à la base des correspondances semi-classique entre ondes et particules, ou entre la mécanique quantique, et la mécanique classique. Cette correspondance est loin d'être simple.

2. Chaos déterministe

Il est difficile de concilier l'idée d'un mouvement régi par des équations déterministes comme l'équation (0.0.8) et l'impossibilité de prévoir l'évolution d'un système chaotique c'est à cause de la sensibilité aux conditions initiales : Deux conditions initiales infiniment proches dans l'espace de phase peuvent donner lieu à des évolutions futures qui divergent après un temps fini, cependant chacune de ces évolutions est strictement gouvernée par les équations du mouvement cette propriété mathématique des équations (0.0.8) interdit de prédire l'évolution future du système sans connaître les conditions initiales avec une précision infinie. la sensibilité aux conditions initiales a aussi pour conséquence que l'évolution récente du système ne détermine en rien son évolution future, cette absence de logique nous donne une impression de chaos

La sensibilité aux conditions initiales se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace de phase du système, hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de Lyapounov positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive

Des lois déterministes comme les équations (0.0.8) peuvent cependant donner lieu à des trajectoires compliquées, aux allures imprévisibles et aléatoires. Cela s'appelle le chaos déterministe, et est dû à une instabilité hyperbolique des trajectoires du système.

On précise cela en introduisant le coefficient de Lyapounov λ qui est le taux caractéristique de la divergence de la distance entre deux trajectoires (tant que $\Delta x(t) \ll L$) :

$$\Delta x(t) \simeq \Delta x(0)e^{\lambda t}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} : \text{temps caractéristique d'amplification} \quad (0.0.10)$$

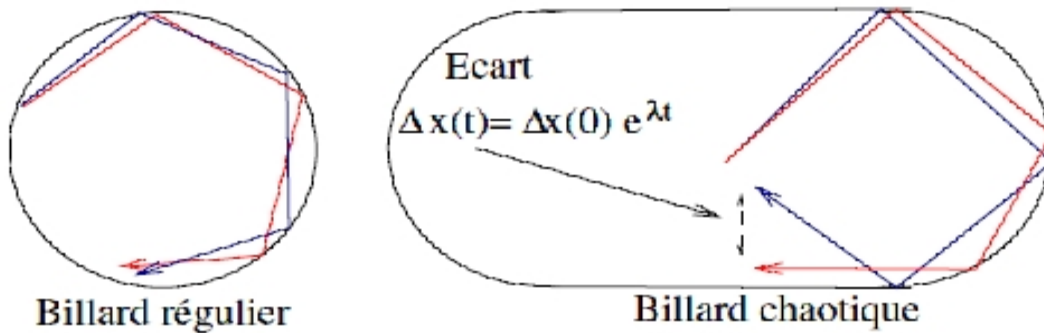


Figure 0.3 : Différence entre le Billard régulier et chaotique

Temps caractéristique en chaos quantique

D'après ce qui précède on a vu que les systèmes dynamiques chaotiques présentent un phénomène fondamental d'instabilité qui est la sensibilité aux conditions initiales, ce qui nous permet de deviner que le comportement d'une onde puisse être complexe dans une cavité chaotique.

Supposons qu'un paquet d'onde évolue dans une cavité chaotique (i.e, où les trajectoires ont une instabilité hyperbolique). Même s'il est très localisé au départ, sa taille croît exponentiellement vite avec le temps, d'après l'équation (0.0.10), et atteint rapidement la taille L de la cavité. Après cela, le paquet d'onde remplit la cavité et interfère avec lui même.

La taille minimale d'un paquet d'onde étant la longueur d'onde l , on estime ainsi un temps caractéristique t_E , appelé temps d'Ehrenfest qui est le temps lorsque la longueur d'onde l est étendue à la taille de la cavité L , défini par :

$$L = l \exp(\lambda t_E) \Leftrightarrow t_E = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{L}{l}\right) \quad : \text{temps d'Ehrenfest}$$

Après le temps d'Ehrenfest, les interférences dominent le comportement d'onde, et ce qui peut se passer est encore peu connu.

Remarque sur la dispersion du paquet d'onde

Dans le cas des ondes quantiques, $\hbar = 6.610^{-34} J.s$ est microscopique dans les unités standard.

D'après les équations (0.0.7) et (0.0.9), le principe d'incertitude s'écrit aussi

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{m}$$

où v est la vitesse du paquet d'onde. Ce principe d'incertitude force le paquet d'onde à se disperser.

Pour un électron (libre) $m = 9 \cdot 10^{-31} kg$, on obtient $\frac{\hbar}{m} = 10 cm^2/s$ qui est une quantité macroscopique. Donc les effets quantique ondulatoires peuvent être de taille macroscopique pour l'électron, après quelques secondes. (si pas de décohérence).

Pour la Lune (libre) $m = 7.10^{22} kg$ donc $\frac{\hbar}{m} = 10^{-56} m^2/s$, qui est extrêmement petit. Les effets ondulatoires ne peuvent pas atteindre une taille macroscopique en des temps raisonnables.

Cette première analyse valable pour des objets libres (i.e. sans force extérieure, $H(x, \xi) = \frac{1}{2m} \xi^2$) laisse penser que la mécanique quantique n'a aucune influence sur les objets macroscopiques. Ce n'est pas le cas si la dynamique est chaotique :

Considérons une boule de Loto, dont le mouvement est supposé chaotique, avec une instabilité hyperbolique des trajectoires de la forme : mais $\Delta x(t) \simeq \Delta x(0) 10^{t/\tau}$ avec $\tau \simeq 1s$. Le principe d'incertitude donne :

$$\Delta x(0) \Delta v(0) \geq \hbar / masse \sim 10^{-36} m^2/s.$$

Alors un paquet d'onde est le plus localisé si $\Delta x(0) \simeq 10^{-18} m$ et $\Delta v(0) \simeq 10^{-18} m/s$.

Mais alors $\Delta x(t) \simeq 1m$ après seulement le temps $t \simeq 18s$ qui est très court, appelé le temps d'Ehrenfest. (En réalité la décohérence intervient bien avant).

Comme la mécanique quantique est de nature probabiliste (lors d'une mesure), cela montre que lorsqu'une dynamique est chaotique, le hasard intrinsèque à la mécanique quantique peut rapidement influencer le monde macroscopique.

Section de Poincaré

Lorsque le nombre de degré de liberté du système est supérieure à un, l'espace de phase à au moins quatre dimensions, la représentation graphique d'une trajectoire dans cet espace multidimensionnel est impossible, et nous aurons recours à une représentation fréquemment utilisée dans l'étude des systèmes dynamiques : la section de Poincaré, on la construit en choisissant un plan de l'espace de phase et en y représentant par un point chaque intersection de la trajectoire avec ce plan dans un sens donné. La suite des points de la section de Poincaré de la trajectoire formera une image qui nous renseignera sur la nature du mouvement, si la dimension de l'espace de phase est n alors la dimension de la section de Poincaré sera $n - 1$.

Le billard constitue un système à deux dimensions et à deux degrés de liberté de ce fait les vecteurs positions et les vecteurs vitesses de notre particule possèdent chacun deux composantes respectivement (x, y) et (v_x, v_y) on voit donc que l'espace de phase associé est à quatre dimensions, ce qui n'est pas commode à représenter et encore moins à analyser !

Une particule évolue en ligne droite à vitesse constante, et se réfléchit de façon parfaite sur le bord (l'angle de réflexion = l'angle d'incidence et la norme de la vitesse est conservé). La dynamique de cette particule est donc déterministe, et l'état d'une particule est caractérisé par (position (x, y) ; vitesse (v_x, v_y)). Il suffit en fait de trois paramètres (x, y, α) , où α est la direction de v , car la norme de la vitesse $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ est fixée cela réduit donc la dimension de notre espace des phases à trois, ce qui reste néanmoins toujours complexe à représenter

Les informations importantes sont d'une part, le point d'impact de la particule sur la paroi représenté par l'abscisse curviligne et d'autre part la direction de propagation après rebond sur le contour déterminé par l'angle de réflexion.

On considère seulement à chaque rebond, la suite des états :

$$(q = \text{position curviligne} , p = \sin(i))$$

La connaissance de $(q, p = \sin(i))$ caractérise la trajectoire et donc la suite des rebonds suivants :

$$(q_1, p_1)(q_2, p_2)(q_3, p_3), \dots$$

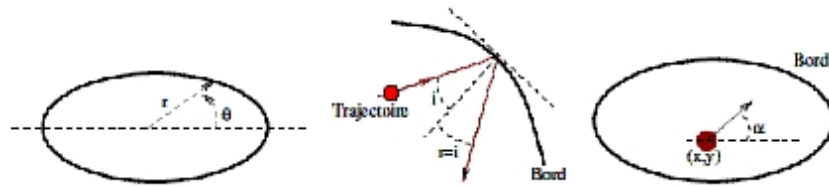


Figure 0.4 : un Billard

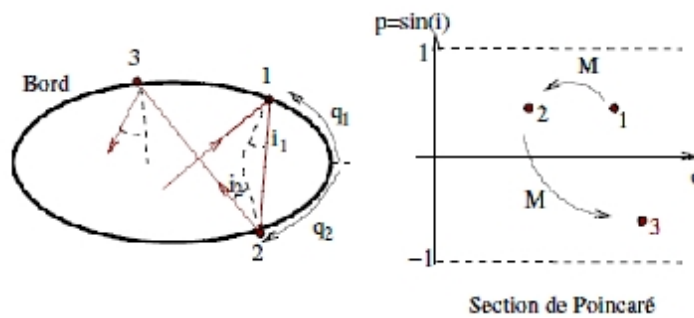


Figure 0.5 : Section de Poincaré

L'application :

$$M : (q_j, p_j) \longrightarrow (q_{j+1}, p_{j+1}) \quad (0.0.11)$$

s'appelle l'application de Poincaré ou Section de Poincaré. C'est une dynamique discrète déterministe, de dimension 2.

Proposition 0.0.1 *L'application de Poincaré conserve l'élément d'aire $dqdp$.*

Étirement et repliement de la dynamique sur la section de Poincaré

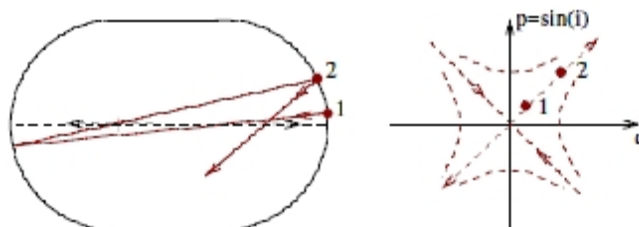


Figure 0.6 : Section de Poincaré de la trajectoire horizontale instable au voisinage de

$$q \simeq 0, p = \sin i \simeq 0$$

On va voir ici un phénomène très important qui a été analysée pour la première fois par Poincaré, on va considérer la section de Poincaré ci-dessus figure 06, possédant une orbite périodique instable qui est représenté par un point fixe hyperbolique (instable).

On note W_s la courbe stable du point fixe $(0, 0)$ qui est supposé hyperbolique, cette courbe stable est formée par un ensemble de points S obtenues de la façon suivante :

on note w_s, w_u les directions des vecteurs propre de $M(0, 0)$ qui correspondent à les directions stable et instable respectivement, on considère une ligne \mathcal{L} proche de $(0, 0)$ transverse à w_u . Par la dynamique de M les points de cette ligne suivent des hyperboles et vont d'un côté ou de l'autre du point fixe, sauf pour un point intermédiaire noté S qui va donc converger vers $(0, 0)$. En variant \mathcal{L} plus ou moins proche de $(0, 0)$ ces points S forment un morceau de courbe issu de $(0, 0)$ qui est la courbe stable W_s du point fixe $(0, 0)$, se sont les points tels que :

$$S \in W_s, M^t(S) \longrightarrow (0, 0) \text{ pour } t \longrightarrow +\infty$$

la courbe W_s est invariante par M : si $S \in W_s$ alors $M(S) \in W_s$, et on a le vecteur w_s est tangent à W_s en $(0, 0)$.

Cette courbe se prolonge en appliquant M^{-1} au bout de la courbe déjà construit.

De la même façon on définit la courbe instable du point fixe $(0, 0)$ qui est une courbe W_u contenant les points :

$$U \in W_u, M^t(U) \longrightarrow (0, 0) \text{ pour } t \longrightarrow -\infty$$

Le vecteur w_u est tangent à W_u . La courbe W_u est invariante par M .

On appelle trajectoires homoclines associées au point fixe $(0, 0)$ les deux trajectoires $(I_t)_{t \in \mathbb{Z}}, (J_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui sont des trajectoires particulières où les points I_t, J_t appelés points d'intersection homoclines doivent vérifier :

$$I_t \in (W_u \cap W_s)$$

où $I_t = M^t(I_0)$, le point I_0 représente le point d'intersections des courbes stables et instables W_s, W_u ,

donc

$$I_0 \in (W_u \cap W_s)$$

et d'après les propriétés des courbes W_s, W_u qu'on a vu, comme $I_0 \in W_s$ alors $I_t \in W_s$ pour tout t et $I_t \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$.

Et la même chose pour $I_t \in W_u$ pour tout t et $I_t \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow -\infty$.

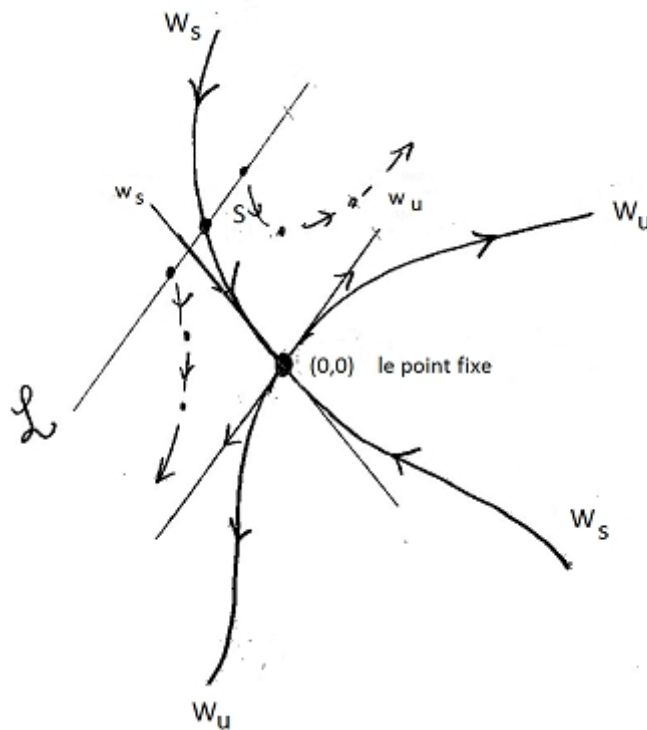
d'où on a $I_t \in (W_u \cap W_s)$

Et comme M préserve l'orientation alors les courbes W_s et W_u doivent se couper transversalement sur tous ces points I_t en gardant la même orientation.

—

$$J_t \in (W_u \cap W_s)$$

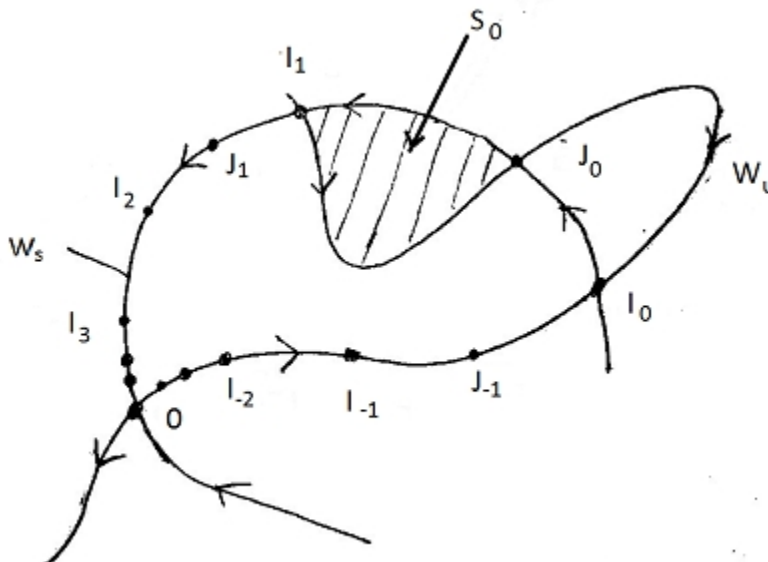
où $J_t = M^t(J_0)$ et J_0 représente le point où W_u a dû couper W_s en passant par I_1



Soit

$$S_t = M^t(S_0).$$

où S_0 est l'ensemble des points bordée par W_u et W_s et limitée par les points J_0 et I_1 comme le montre la figure suivante :



- D'après les propriétés de M qu'on a vu comme M préserve l'aire alors toutes les surfaces S_t ont la même aire
- Le côté $(J_t - I_t + 1)$ devient de plus en plus petit car les points J_t et I_{t+1} s'accroissent exponentiellement en $(0,0)$ pour $t \rightarrow +\infty$ le long de W_s et comme la surface S_t est limitée par ces points alors elle s'étire exponentiellement vite avec t pour garder sa surface constante.

Comme la surface S_t doit appartenir à l'espace de phase qui est limité, elle doit forcément se replier en même temps qu'elle s'étire pour $t \rightarrow \infty$. On a le scénario pour $t \rightarrow -\infty$.

Au final on observe (comme Poincaré) que l'ensemble de points S_0 est étiré et replié par l'application M à chaque instant.

Cette situation a été analysée la première fois par Poincaré

Noter que l'espace de la section de Poincaré (q,p) est compact, et donc l'étirement exponentiel observé dans l'approximation linéaire ne continue pas à l'infini. Nous verrons en **section 2** qu'il y a étirement et repliement de la dynamique sur la section de Poincaré.

Préliminaire

Ensembles hyperboliques :

On se donne une variété riemannienne M , et une application f de M dans M . On se donne une partie A de M . Alors on dit que A est un ensemble (uniformément) hyperbolique pour f si :

- A est compacte ;
- A est f -invariante ;
- $TM|_A$ se décompose en la somme de Whitney :

$$TM|_A = E^s \oplus E^u$$

Système uniformément hyperbolique (Anosov) :

Un système Anosov est un système partout hyperbolique

Groupe général linéaire :

$SL(n, \mathbb{k})$ est le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans \mathbb{k} tel que le déterminant de ces matrices est égale à 1

Définition 1.0.1 *point fixe hyperbolique*

Soit M une variété différentiable et soit f un difféomorphisme de M , un point fixe x de f est hyperbolique si l'application tangente

$$f_x^T : T_x(M) \rightarrow T_x(M)$$

est hyperbolique.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les valeurs propres de f_x^T aient toute un module différent de 1

Exposant de Lyapunov

Dans la théorie du chaos, un système chaotique amplifie les erreurs sur les conditions initiales selon une loi exponentielle : $e^{\frac{t}{\tau}}$, où τ est un temps caractéristique du système chaotique appelé parfois horizon de Lyapunov. L'exposant de Lyapunov est $\frac{1}{\tau}$, soit l'inverse de l'horizon.

Opérateur unitaire :

Un opérateur M est dit unitaire si

$$M^*M = MM^* = I$$

où M^* est l'opérateur adjoint de M et I est l'opérateur identité.

Cette propriété est équivalente à :

$$\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle .$$

c'est à dire que M préserve le produit scalaire \langle , \rangle sur l'espace de Hilbert pour tous vecteurs et de l'espace de Hilbert

Notation :

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \psi \langle A | \psi \rangle$$

Lemme :

N'importe quelle fonction test $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ peut être décomposé en modes de Fourier

$$f_n(x) = \exp[-2i\pi(n_1p - n_2q)]$$

Définition d'ergodicité :

L'application $f : E \rightarrow E$ est dite ergodique pour une mesure donné si et seulement si tout ensemble invariant sous f est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle.

Un modèle simple de chaos déterministe : une application linéaire hyperbolique sur le tore T^2

Les modèles usuels pour étudier le chaos quantique sont les systèmes uniformément hyperbolique ou Anosov (partout hyperbolique). En effet pour ces modèles très simple la dynamique présente de forte caractéristique de chaos comme nous le verrons.

Le modèle présenté dans ce paragraphe et étudié dans la suite est peut être le modèle de dynamique hyperbolique (i.e. fortement chaotique) le plus simple à exprimer, c'est donc un modèle privilégié pour l'étude du chaos quantique. Il est considéré comme l'équivalent d'une section de Poincaré comme celle décrite dans l'équation (0.0.11) et figure 0.5. Sa construction est basée sur l'idée d'étirement et de repliement observé dans les sections de Poincaré de dynamiques chaotiques. La section de Poincaré sera ici l'application M .

2.1 L'application du chat d'Arnold

En général une matrice M définit un automorphisme du tore $T^m = \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Z}^m$ si et seulement si M est un élément de $SL(m, \mathbb{Z})$ qui représente une application de Poincaré, la conservation d'aire impose que $\det(M) = 1$, si toute les valeurs propres ont un module différent de 1 alors on parle d'automorphisme hyperbolique du tore.

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est à coefficients entiers, de déterminant 1. La matrice M agit sur un point de l'espace de phase noté $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$, par $x' = M(x) \in \mathbb{R}^2$. On

note

$$e^{+\lambda} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1, e^{-\lambda} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

les deux valeurs propres de M obtenues en résolvant $\det(M - \lambda I) = 0$ aux quelles correspondent une direction instable $e_+ = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ et stable $e_- = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ respectivement (i.e. $Me_{\pm} = e^{\pm\lambda}e_{\pm}$). M est de type hyperbolique (les valeurs propres sont de module différent de 1), et plus généralement, on peut considérer $M \in SL(2, \mathbb{Z})$, avec $Tr(M) > 2$.

Pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$M(x + n) = M(x) + M(n) \equiv M(x) \text{ mod } 1$$

donc M induit une application sur le tore $T^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ aussi notée M :

$$M : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} q' = 2q + p \text{ mod } 1 \\ p' = q + p \text{ mod } 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

Chaque trajectoire

$$(q_n, p_n) = M^n(q_0, p_0)$$

est une hyperbole

L'effet de la matrice hyperbolique M est d'étirer dans la direction instable avec le coefficient de Lyapounov $e^{+\lambda}$ et de contracter selon la direction stable avec $e^{-\lambda}$.

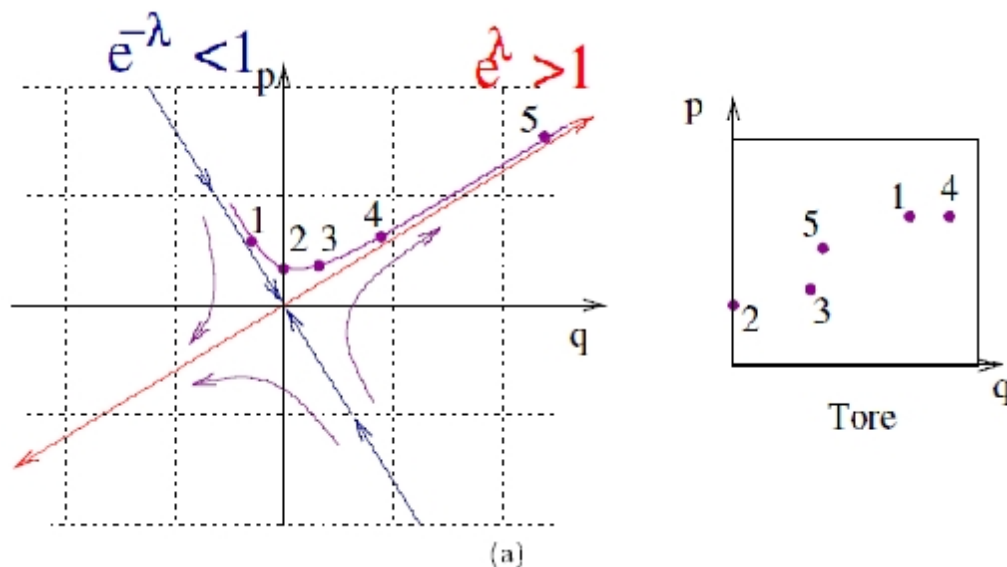
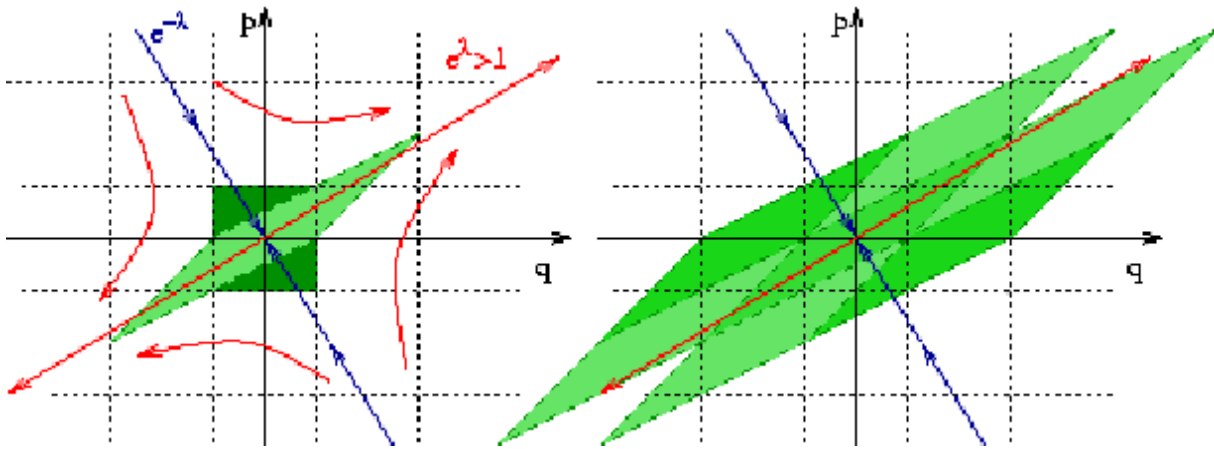


Figure 2.1 : Évolution par l'application (2.1.1) du point 1 : $(-0.3, 0.6)$ sur le plan et le tore



Sur le tore il résulte une dynamique chaotique avec étirement dans la direction instable et “repliement” dans la direction stable tout deux nécessaire pour avoir du chaos.

2.2 Propriétés chaotiques

L'application M correspond à une section de Poincaré comme celle étudiée dans un billard, c'est un modèle de dynamique hyperbolique très simple, on va montrer que pour ce modèle la dynamique est mélangeante c'est à dire que sur la section de Poincaré toute distribution initiale de probabilité va converger vers la distribution uniforme

Définition 2.2.1 *La dynamique est fortement mélangeante si pour tout ensemble mesurable $A, B \subset \mathbb{T}^2$,*

$$\mu(M^t(A) \cap B) \longrightarrow \mu(A) \cdot \mu(B), t \longrightarrow \infty \quad (2.2.1)$$

où $\mu(A)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble A

On remarque que pour t assez grand le produit $\mu(A)\mu(B)$ montre qu'on n'a aucune condition ou propriété pour qu'un point appartient à $M^t(A)$ et B ce qui signifie une perte d'information définitif

Cette propriété traduit bien que la dynamique mélange les ensembles, car $\mu(M^t(A) \cap B)$ ne dépend plus du temps t , pour $t \longrightarrow \infty$, et la limite est indépendante de la forme et position des ensembles.

Proposition 2.2.1 *La dynamique de $M : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ est mélangeante.*

Preuve. Tout d'abord, observons que la propriété de mélange (2.2.1) est équivalente à :

$$\forall f, g \in L^2(T^2), \quad \int f(M^t(x))g(x)dx \longrightarrow \int f(x)dx \int g(x)dx \quad (2.2.2)$$

En effet, si f, g sont les fonctions caractéristiques des ensembles A, B alors la formule (2.2.2) implique (2.2.1), et inversement on approxime les fonctions f, g par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques.

Pour montrer (2.2.2), considérons un mode de Fourier sur le tore :

$$\varphi_n(x) = \exp(2i\pi nx) \quad n \in \mathbb{Z}^2$$

Ces fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}^2}$ forment une base de l'espace $L^2(T^2)$. On observe que :

$$\varphi_n(M^t(x)) = \exp(2i\pi n M^t(x)) = \exp(2i\pi M^t(n)x) = \varphi_{M^t(n)}(x)$$

(car $M^{transp} = M$ dans notre exemple). Or pour tout $n \neq 0, |M^t(n)| \longrightarrow \infty$, car la matrice M est hyperbolique, et n n'appartient pas à la variété stable.

On vérifie maintenant que (2.2.2) est vérifiée pour deux modes de Fourier φ_n, φ_m .

En effet si $m \neq 0$ ou $n \neq 0$, alors d'une part

$$\left(\int \varphi_m(x)dx \right) \left(\int \varphi_n(x)dx \right) = 0$$

et d'autre part

$$\left(\int \varphi_n(M^t(x))\varphi_m(x)dx \right) = \int \varphi_{M^t(n)}(x)\varphi_m(x)dx = 0$$

pour t assez grand.

Si $m = n = 0$, alors

$$\int \varphi_{M^t(n)}(x)\varphi_m(x)dx = \left(\int \varphi_m(x)dx \right) \left(\int \varphi_n(x)dx \right) = 1.$$

On déduit en suite (2.2.2), en décomposant f, g en modes de Fourier :

on a :

$$f = \sum_n a_n \varphi_n \quad \text{et} \quad g = \sum_m b_m \varphi_m$$

donc :

$$\begin{aligned}
 f(M^t(x)) &= \sum_n a_n \varphi_n(M^t(x)) \text{ et } g(x) = \sum_m b_m \varphi_m(x) \\
 \int f(M^t(x))g(x)dx &= \int \sum_n a_n \varphi_n(M^t(x)) \sum_m b_m \varphi_m(x) dx \\
 &= \sum_n a_n \sum_m b_m \int \varphi_n(M^t(x)) \varphi_m(x) dx \\
 &\longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_n a_n \sum_m b_m \left(\int \varphi_m(x) dx \right) \left(\int \varphi_n(x) dx \right)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\int f(M^t(x))g(x)dx \longrightarrow \int f(x)dx \int g(x)dx$$

□

Remarque 2.2.1 *Dans ce modèle on a des propriétés de chaos fort comme le mélange, l'ergodicité, ..., mais pour d'autres modèles comme un système intégrable par exemple la situation est plus compliquée car l'espace des phases contient des régions régulières et des régions où le chaos existe.*

stabilité structurelle : Intuitivement parlant, une situation est structurellement stable quand les situations voisines lui ressemblent. En mathématiques, la stabilité structurelle est étroitement liée au théorème des fonctions implicites.

Un difféomorphisme f de M (variété différentielle compacte et connexe) est structurellement stable si pour tout voisinage u de l'identité dans $H(M)$ (le groupe des homéomorphismes de M) il existe un voisinage v de f dans $D(M)$ (le groupe des difféomorphismes de M) telle que tout difféomorphisme f' de v est conjugué de f par un homéomorphisme h de u : $f \circ h = h \circ f'$

Une autre propriété remarquable de l'application M est la stabilité structurelle : avec une perturbation suffisamment faible (en norme C^1), l'application reste uniformément hyperbolique, et même reste conjuguée topologiquement à M . Cette robustesse de la propriété d'hyperbolicité (et des propriétés de chaos qui en découlent), font l'intérêt principal pour ce type de modèles.

2.3 Espace quantique associé au tore \mathbb{T}^2

L'espace de Hilbert quantique associé à l'espace de phase $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ est formé par les fonctions d'ondes $\varphi(q) \in L^2(\mathbb{R})$, de la variable de position q seulement.

On définit la h -transformée de Fourier par

$$\widehat{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int \varphi(q) \exp\left(\frac{-ipq}{h}\right) dq$$

où on a introduit le paramètre $\hbar > 0$ appelée Constante de Planck. Par commodité, on notera aussi $h = 2\pi\hbar$. D'après $\exp\left(\frac{-ipq}{h}\right) = \exp\left(\frac{-i2\pi q}{l}\right)$ avec la longueur d'onde $l = \frac{h}{p}$, on voit que la limite $h \rightarrow 0$ nous permettra d'étudier la limite semi-classique des petites longueurs d'ondes $l \rightarrow 0$.

Dans la section **3.1**, l'espace de phase tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ a été obtenu en introduisant la périodicité du réseau \mathbb{Z}^2 sur le plan \mathbb{R}^2 , il semble raisonnable de demander que l'espace de Hilbert quantique possède les mêmes propriétés. De la même façon on définit l'espace de Hilbert quantique associé au tore comme étant formé par les fonctions d'ondes périodiques en q et dont la transformée de Fourier est aussi périodique en p (ce sont plus précisément des distributions). Pour cela il est pratique de se servir des opérateurs de translations quantique unitaires

$$\widehat{T}_v = \exp\left(-\frac{i}{h}(v_1 \widehat{p} - v_2 \widehat{q})\right) : \text{translation quantique}$$

Notons

$$\widehat{T}_{(1,0)} : S(\mathbb{R}) \longrightarrow S(\mathbb{R}) \text{ qui translate une fonction de } q \longrightarrow q + 1.$$

Ainsi $\left(\widehat{T}_{(1,0)}\varphi\right)(q) := \varphi(q - 1)$ ce qui correspond à une périodicité 1 en position.

De même si $\widehat{T}_{(0,1)}$ est l'opérateur qui translate la transformée de Fourier de $p \rightarrow p + 1$, on a $\left(\widehat{T}_{(0,1)}\widehat{\varphi}\right)(p) := \widehat{\varphi}(p - 1)$ ce qui correspond à une périodicité 1 en impulsion.

Considérons l'espace (de distributions) défini par les distributions périodiques et de transformée de Fourier périodiques :

$$\mathcal{H}_N := \left\{ \varphi(q) \in S'(\mathbb{R}) / \varphi := \widehat{T}_{(1,0)}\varphi \text{ et } \varphi := \widehat{T}_{(0,1)}\varphi \right\}$$

Afin d'expliciter un peu plus les distributions de cet espace, remarquons que $\hat{\varphi}$ périodique implique $\varphi(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta(q - hn)$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ et δ la distribution de Dirac. Ensuite pour avoir $\varphi(q)$ lui même périodique de période 1, il faut supposer :

$$Nh = 1$$

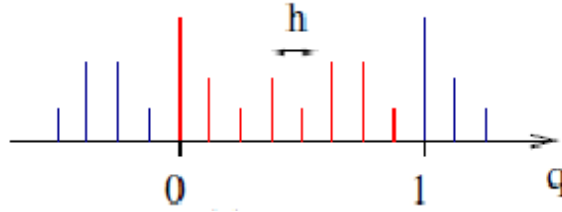


Figure 2.2

Nous supposons cette condition dans la suite. Alors $\varphi(q)$ est déterminée par seulement N composantes $(a_n)_{n=1 \rightarrow N}$. Donc

$$\dim \mathcal{H}_N = N = \frac{1}{h} \in \mathbb{N}^*$$

Le produit scalaire Hermitien sur \mathcal{H}_N est pour $\psi \equiv (a_n)_n$, $\varphi \equiv (b_n)_n \in \mathcal{H}_N$

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^N \overline{a_n} b_n$$

2.4 Représentation d'un état quantique sur l'espace de phase. Distribution de Husimi, Mesures semi-classiques

On va essayer de représenté les états quantiques $\varphi \in \mathcal{H}_N$ comme des distributions sur l'espace de phase \mathbb{T}^2 afin d'étudier la limite semi-classique, pour cela on associe un état cohérent qui est la fonction d'onde Gaussienne $\varphi_{q,p} \in L^2(\mathbb{R})$ et on verra que qu'on peut obtenir l'état cohérent du tore à partir de l'état cohérent $\varphi_{q,p} \in L^2(\mathbb{R})$.

Pour $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ donné, on associe un état cohérent (ou paquet d'onde Gaussien) qui est la fonction d'onde Gaussienne $\varphi_{q,p} \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\varphi_{q,p}(q') = \frac{1}{(\pi h)^{\frac{1}{4}}} \exp(i \frac{pq}{h}) \exp(-\frac{(q' - q)^2}{2(\sqrt{h})^2})$$

Son module

$$|\varphi_{q,p}(q')| = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{(q' - q)^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right)$$

est une Gaussienne localisé près de q , avec une largeur $\Delta q \simeq \sqrt{\hbar}$ ($\Delta q \rightarrow 0$ pour $\hbar \rightarrow 0$)

Sa \hbar -transformée de Fourier est

$$\widehat{\varphi}_{q,p}(p') = \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp(-i\frac{p'q}{\hbar}) \exp(-\frac{(p' - p)^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}) \exp(i\frac{qp}{\hbar}) \quad (2.4.1)$$

localisé de façon similaire près de p :

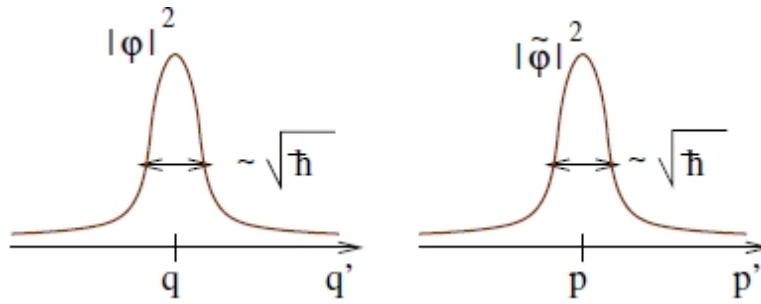


Figure 2.3

Montrons (2.4.1) :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi}_{q,p}(p') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \varphi_{q,p}(q') \exp\left(\frac{-ip'q'}{\hbar}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(i\frac{pq'}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(q'-q)^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) \exp\left(\frac{-ip'q'}{\hbar}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left(i\frac{pq'}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(q'^2 + q^2 - 2q'q)}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) \exp\left(\frac{-ip'q'}{\hbar}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left(-\frac{(q'^2 + q^2 - 2q'q)}{2(\sqrt{\hbar})^2} + i\frac{pq'}{\hbar} + \frac{-ip'q'}{\hbar}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left(\frac{-(q'^2 + q^2 - 2q'q) + 2iq'(p-p')}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left(\frac{-q'^2 - q^2 + 2q'q + 2iq'(p-p')}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \int \exp\left(\frac{-q'^2 - q^2 + 2q'(i(p-p') + q)}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) \int \exp\left(\frac{-q'^2 + 2q'(i(p-p') + q)}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) \int \exp\left(-\frac{q'^2 - 2q'(i(p-p') + q)}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) \int \exp\left(-\frac{(q' - (i(p-p') + q))^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) \exp\left(\frac{(i(p-p') + q)^2}{2\hbar}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-(p-p')^2 + q^2 - 2qi(p-p')}{2\hbar}\right) \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{(q' - (i(p-p') + q))^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{-q^2}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{q^2}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{2qi(p-p')}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{-(p-p')^2}{2\hbar}\right) \int \frac{1}{\sqrt{\hbar}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(q' - (i(p-p') + q))^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) dq' \\
 &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{qi(p-p')}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-(p-p')^2}{2\hbar}\right) \\
 &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{qip}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-(p-p')^2}{2\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{qp'}{\hbar}\right) \\
 &= \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-i\frac{qp'}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{-(p'-p)^2}{2(\sqrt{\hbar})^2}\right) \exp\left(i\frac{qp}{\hbar}\right)
 \end{aligned}$$

pour l'intégral on a utilisé la formule suivante :

$$\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1$$

Un état cohérent du tore $\varphi_{q_0,p_0}^T \in \mathcal{H}_N$ est obtenu à partir de l'état cohérent $\varphi_{q_0,p_0} \in L^2(\mathbb{R})$ en le rendant périodique sur le plan, par $\varphi_{q_0,p_0}^T = \widehat{P}\varphi_{q_0,p_0}$, avec l'opérateur :

$$\widehat{P} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2} \widehat{T}_{(1,0)}^{n_1} \widehat{T}_{(0,1)}^{n_2} : S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_N$$

où $(\widehat{T}_{(1,0)}\varphi)(q) = \varphi(q - 1)$ translate selon q et $(\widehat{T}_{(0,1)}\widehat{\varphi})(p) = \widehat{\varphi}(p - 1)$ translate la transformée de Fourier.

On s'intéresse à la distribution des états quantiques $\psi \in \mathcal{H}_N$ et pour cela on utilise une représentation sur l'espace des phases qui est une mesure de probabilité sur \mathbb{T}^2

Définition 2.4.1 Pour un état quantique donné du tore $\psi \in \mathcal{H}_N$, on définit sa distribution de Husimi Hus_ψ , comme étant la mesure de probabilité sur le tore \mathbb{T}^2 :

$$Hus_\psi(q, p) := \frac{1}{h} |\langle \varphi_{q,p} | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{h} \left| \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi}_{q,p}(x) \psi(x) dx \right|^2$$

Proposition 2.4.1 si $\psi \in \mathcal{H}_N$ est normalisé ($\|\psi\|^2 = 1$) alors :

$$\int_{\mathbb{T}^2} Hus_\psi(q, p) dq dp = \|\psi\|^2 = 1 \tag{2.4.2}$$

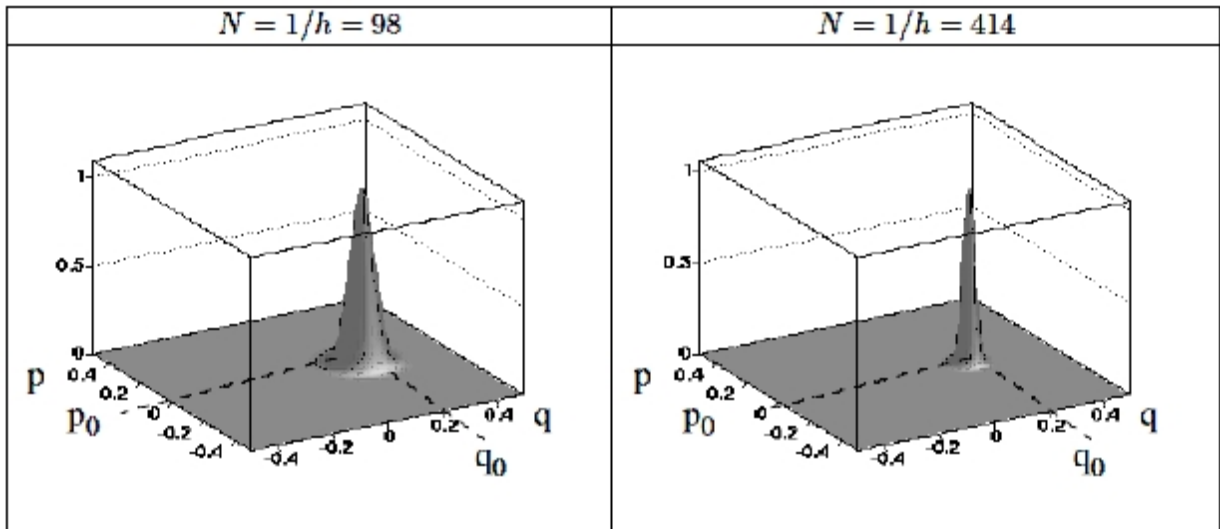


Figure 2.4 : Distribution de Husimi d'état cohérents en $(q_0, p_0) = (0.2, 0)$

Dans la limite semi classique $\hbar \rightarrow 0, N = \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$ on veut avoir la correspondance entre la mécanique quantique et la mécanique classique, et comme on sera intéressé par l'étude des états quantiques dans la limite semi-classique, on introduit :

Définition 2.4.2 Pour une suite d'états quantiques $\psi \in H_N, N = \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$, on appelle mesure semi-classique sur \mathbb{T}^2 la limite :

$$\mu = \lim - \text{faible}_{N \rightarrow \infty} Hus_{\psi_N}$$

(limite au sens des distributions si elle existe).

- La limite faible signifie que les fluctuations des distributions de Husimi à l'échelle microscopique $\sqrt{\hbar}$ (ou supérieure) sont effacées. Il ne reste que les variations à une échelle finie lorsque $\hbar \rightarrow 0$.
- Par exemple, pour $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la distribution de Husimi de l'état cohérent du tore φ_{q_0, p_0}^T est localisée près de (q_0, p_0) avec une largeur $\simeq \sqrt{\hbar}$. Par conséquent la mesure semi-classique de la suite d'états cohérents $(\varphi_{q_0, p_0}^T)_{\hbar \rightarrow 0}$ est la distribution de Dirac $\mu = \delta_{(q_0, p_0)}$. Cette suite est donc localisée au point $x_0 = (q_0, p_0)$.
- Cas particuliers que l'on pose en définitions : une suite d'états est dite localisée au point $x \in T^2$ si $\mu = \delta_x$, la mesure de Dirac au point x . Une suite d'états est dite équidistribuée sur le tore si au contraire $\mu = \mu_{Lebesgue} = dqdp$.

2.5 Quantification de l'application hyperbolique M

L'application classique M , l'équation (2.1.1) définit l'évolution des points sur l'espace de phase. Dans cette section, on montre comment définir une application notée \widehat{M} qui lui est associé, et qui fait évoluer les fonctions d'ondes $\psi(q) \in \mathcal{H}_N$. La procédure qui à partir de la dynamique classique associe une dynamique quantique s'appelle la quantification.

Dans le cas où l'espace de phase est de dimensions ≥ 4 le flot Hamiltonien peut être complexe, une couche d'énergie est de dimension $2n - 1 \geq 3$ il est difficile de représenter graphiquement un tel flot, pour cela on utilise une section de Poincaré et on observe seulement les intersections du flot avec la section de Poincaré.

Il y a des procédures standard pour quantifier un flot Hamiltonien mais pas une application.

Afin d'étudier la version quantique de l'application M , nous devons donc exprimer M comme étant la section de Poincaré d'un flot Hamiltonien.

Dynamique sur le plan : On considère le Hamiltonien quadratique suivant sur l'espace de phase \mathbb{R}^2 :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta p^2 + \gamma qp \quad (2.5.1)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. D'après les équations de mouvement de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \gamma q + \beta p \\ \frac{dp(t)}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\alpha q - \gamma p \end{aligned}$$

H génère des trajectoires $x(t) = (q(t), p(t))$ sur \mathbb{R}^2 , données par $x(t) = M(t)x(0)$ ($t \in \mathbb{R}$), où $M(t)$ est une matrice de déterminant 1 ($M(t) \in SL(2, \mathbb{R})$) et explicitement pour $t = 1$:

$$M(1) = \exp \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \quad (2.5.2)$$

On suppose que $\gamma^2 > \alpha\beta$, alors $M(1)$ est une application hyperbolique avec deux valeurs propres réelles $e^{\pm\lambda}$ où $\lambda = \sqrt{\gamma^2 + \alpha\beta}$ est appelé exposant de Lyapounov et deux vecteurs propres réels associés, correspondent aux directions instable et stable de la dynamique

C'est à dire qu'on peut choisir les paramètres α, β, γ tels que $M(1) = M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ soit la matrice considérée plus haut.

L'espace de **Hilbert quantique** associé à l'espace de phase plan \mathbb{R}^2 est $H_{plan} = L^2(\mathbb{R})$. On rappelle les opérateurs de position et impulsion habituels agissant dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\widehat{q}\varphi)(q) = q\varphi(q), \quad (\widehat{p}\varphi)(q) = -ih\frac{d\varphi}{dq}(q), \quad [\widehat{q}, \widehat{p}] = ih\widehat{I}.$$

Ce sont des opérateurs auto-adjoints. L'opérateur Hamiltonien \widehat{H} qui génère l'évolution d'une fonction d'onde est aussi auto-adjoint, et s'obtient par la quantification de Weyl de H .(2.5.1) :

$$\widehat{H} = Opw_{eyl}(H) = \frac{\alpha}{2}\widehat{q}^2 + \frac{\beta}{2}\widehat{p}^2 + \frac{\gamma}{2}(\widehat{q}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{q}) \quad (2.5.3)$$

Montrons(2.5.3), on veut faire la quantification de H avec :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta p^2 + \gamma qp \\ \widehat{H} &= op^w(H) \\ &= \frac{1}{2}\alpha op^w(q^2) + \frac{1}{2}\beta op^w(p^2) + \gamma op^w(qp) \end{aligned}$$

D'une façon générale, si on suppose que $\sigma \in S'(\mathbb{R}^{2n})$ une fonction qui ne dépend que de x ou que de ξ c'est à dire que :

$$\sigma(x, \xi) = \sigma_0(x), \text{ ou } \sigma(x, \xi) = \sigma_1(\xi)$$

donc :

$$\sigma(X, D) = \sigma_0(X), \text{ ou } \sigma(X, D) = \sigma_1(D)$$

où x correspond à X et ξ correspond à D , on a :

1. Si $\sigma(x, \xi) = \sigma_0(x)$ alors $\sigma(X, D)\varphi(x) = \sigma_0(x)\varphi(x)$.
2. Si $\sigma(x, \xi) = \sigma_1(\xi)$ alors $\sigma(X, D)\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\sigma\mathcal{F}\varphi)(x)$

En appliquant ce résultat pour notre cas on aura :

$$\begin{aligned} op^w(q^2) &= q^2\varphi(q) \\ &= q(q\varphi(q)) \\ &= \widehat{q}^2 \end{aligned}$$

où $(\widehat{q}\varphi)(q) = q\varphi(q)$, et

$$\begin{aligned} op^w(p^2) &= \mathcal{F}^{-1}p^2\mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1}p\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}p\mathcal{F} \\ &= \widehat{p}^2 \end{aligned}$$

où $\widehat{p} = \mathcal{F}^{-1}p\mathcal{F}$. Soit $\sigma(x, \xi) = x\xi$, on a :

$$(ax + b\xi)^2 = a^2x^2 + b^2\xi^2 + 2abx\xi.$$

donc : $2\sigma(\xi, x)$ est le coefficient de ab . Et on a :

$$\begin{aligned} (aD + bX)^2 &= (aD + bX)(aD + bX) \\ &= a^2D^2 + abDX + baXD + b^2X^2 \\ &= a^2D^2 + b^2X^2 + ab(XD + DX). \end{aligned}$$

le coefficient de ab est $(XD + DX)$, d'où :

$$\sigma(D, X) = \frac{1}{2}(XD + DX)$$

En fin on a :

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= op^w(H) \\ &= \frac{1}{2}\alpha op^w(q^2) + \frac{1}{2}\beta op^w(p^2) + \gamma op^w(qp) \\ &= \frac{1}{2}\alpha\widehat{q}^2 + \frac{1}{2}\beta\widehat{p}^2 + \frac{\gamma}{2}(\widehat{p}\widehat{q} + \widehat{q}\widehat{p}).\end{aligned}$$

y L'équation de Schrödinger dans $H_{plan} = L^2(\mathbb{R})$ gouverne l'évolution temporelle des états quantiques $\varphi(t) \in H_{plan}$:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{i}{h}\widehat{H}\varphi(t) \quad (2.5.4)$$

et génère un opérateur d'évolution noté \widehat{M} entre les temps $t = 0 \rightarrow 1$, et donné par :

$$\varphi(1) = \widehat{M}\varphi(0), \quad \widehat{M} = \exp\left(-\frac{i}{h}\widehat{H}\right) \quad (2.5.5)$$

Proposition 2.5.1 *l'opérateur d'évolution :*

$$\widehat{M}_t = \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)$$

est unitaire

Preuve. Montrons que

$$\varphi(t) = \widehat{M}_t\varphi(0) = \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\varphi(0)$$

En effet

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\widehat{M}_t\varphi(0)) = -\frac{i}{h}\widehat{H}\widehat{M}_t\varphi(0) = -\frac{i}{h}\widehat{H}\varphi(t)$$

L'équation (2.5.3) est bien satisfaite. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\langle \widehat{M}_t\varphi, \widehat{M}_t\psi \rangle &= \left\langle \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\varphi, \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\psi \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, (\exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right))^* \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\psi \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \exp\left(\frac{i}{h}t\widehat{H}^*\right) \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\psi \right\rangle \\ &= \left\langle \varphi, \exp\left(\frac{i}{h}t\widehat{H}\right) \exp\left(-\frac{i}{h}t\widehat{H}\right)\psi \right\rangle \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle\end{aligned}$$

car $\widehat{H}^* = \widehat{H}$, et donc \widehat{M}_t est unitaire. □

Remarque 2.5.1 On a vu que \widehat{M} préserve le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ et donc l'unitarité de \widehat{M} a comme conséquence importante que la norme de $\varphi(t)$ est conservée au cours du temps, et donc la distribution de Husimi $Hus_{\varphi(t)}$ reste une mesure de probabilité au cours du temps.

Dynamique sur le tore : Grâce au fait que l'application classique $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ est une matrice à coefficients entiers, nous avons vu qu'elle induit une application sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

Il en est de même pour l'opérateur quantique \widehat{M} .

Proposition 2.5.2 Pour $N = \frac{1}{h}$ pair, l'opérateur \widehat{M} induit un opérateur unitaire dans l'espace quantique du tore \mathcal{H}_N noté aussi :

$$\widehat{M} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_N$$

Cet opérateur est la quantification de l'application $M : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$

Preuve. Pour $v = (v_q, v_p) \in \mathbb{R}^2, x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$, posons

$$T_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_v(x) = x + v : \text{translation classique} \quad (2.5.6)$$

qui est la translation par v sur l'espace de phase. L'application T_v peut être exprimée comme le flot en temps 1 généré par la fonction de Hamilton linéaire $f(q, p) = (v_1 q - v_2 p)$. L'opérateur quantique unitaire dans $H_{plan} = L^2(\mathbb{R})$ correspondant est défini par :

$$\widehat{T}_v = \exp\left(-\frac{i}{h}(v_1 \widehat{p} - v_2 \widehat{q})\right) : \text{translation quantique} \quad (2.5.7)$$

Ces opérateurs de translation quantique satisfont les relations algébriques :

$$\widehat{T}_v \widehat{T}_{v'} = \exp\left(-\frac{iS}{h}\right) \widehat{T}_{v+v'} \quad (2.5.8)$$

avec $S = \frac{1}{2}(v_1 v'_2 - v_2 v'_1) = \frac{1}{2}v \wedge v'$

Cela découle de $[\widehat{q}, \widehat{p}] = ih\widehat{I}$ et en utilisant la propriété : .

$$e^A e^B = e^{[A, B]} e^B e^A$$

où les deux opérateurs A et B vérifient :

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

appliquée ici à

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{h}(v_1\widehat{p} - v_2\widehat{q}) \\ B &= -\frac{i}{h}(v'_1\widehat{p} - v'_2\widehat{q}) \end{aligned}$$

Pour une matrice $M \in SL(2, \mathbb{R})$ linéaire, on a trivialement $MT_v = T_{Mv}M$ (car $M(x+v) = M(x) + M(v)$). Cette relation persiste au niveau quantique :

$$\widehat{M}\widehat{T}_v = \widehat{T}_{Mv}\widehat{M} \quad (2.5.9)$$

D'après

$$\widehat{P} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \widehat{T}_{(1,0)}^{n_1} \widehat{T}_{(0,1)}^{n_2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \widehat{T}_n \quad (2.5.10)$$

Cette dernière égalité découle de l'équation (2.5.9) et n'est valable que si N est pair. Avec l'équation (2.5.10), on déduit $\widehat{M}\widehat{P} = \widehat{P}\widehat{M}$ ce qui se traduit par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\widehat{M}} & S(\mathbb{R}) \\ \downarrow \widehat{P} & & \downarrow \widehat{P} \\ \mathcal{H}_n & \xrightarrow{\widehat{M}} & \mathcal{H}_n \end{array}$$

On a donc un endomorphisme induit $\widehat{M} : H_N \longrightarrow H_N$. □

Évolution de paquet d'onde

3.1 Évolution d'un état cohérent sur le point fixe $(0, 0)$

Un paquet d'onde $\varphi_{(0,0)}$ est lancé en $t = 0$, et a comme position le point fixe $x = (0, 0) \in \mathbb{T}^2$ de l'application M . Son évolution sur le tore est définie par :

$$\psi(t) = \widehat{M}^t \varphi_{0,0} \in \mathcal{H}_N \quad (3.1.1)$$

On rappelle que la distribution de Husimi de l'état initial $\varphi_{(0,0)}$ a une largeur de l'ordre de $\Delta_0 \simeq \hbar^{\frac{1}{2}}$ dûe au principe d'incertitude $\Delta q \Delta p \simeq \hbar$ et du choix spécifique $\Delta q = \Delta p = \Delta_0$. Pour les temps t positifs, la distribution de Husimi de $\psi(t)$ s'étire le long de la variété instable à cause du facteur d'expansion $e^{\lambda t}$, et a une longueur $\Delta_t \simeq \hbar^{\frac{1}{2}} e^{\lambda t}$ (cette longueur est en fait mesurée sur \mathbb{R}^2 , le recouvrement du tore), c'est-à-dire qu'au cours de l'évolution du temps le centre du paquet d'onde se déplace et sa distribution se disperse à cause de l'instabilité des trajectoires

Cette longueur Δ_t est encore microscopique, i.e. $\Delta_t \ll 1$ pour $\hbar \ll 1$, si $|t| \ll \frac{1}{2} t_E$ avec le temps d'Ehrenfest défini par :

$$t_E = \frac{\log N}{\lambda} = \frac{\log(1/\hbar)}{\lambda} \quad (3.1.2)$$

Autrement dit, pour $|t| \ll \frac{1}{2} t_E$ la mesure semi classique est la mesure de Dirac c'est à dire la suite d'état $(\psi(t))_{\hbar}$ est localisée en $(0, 0)$ pour $\hbar \rightarrow 0$.

Pour $t \gg \frac{1}{2}t_E$, la distribution a une longueur plus grande que 1, et donc s'enroule sur le tore le long de la variété instable qui remplit le tore de façon dense. Les branches se rapprochent de plus en plus lorsque le temps augmente. Par conséquent on s'attend à ce que la suite d'états $(\psi(t))_{\hbar}$ soit équidistribuée sur le tore pour $\hbar \rightarrow 0$ (Voir figure suivante). C'est ce qu'énonce le théorème qui suit

Théorème 3.1.1 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, et $|t_h| < \frac{1}{2}t_E(1 - \varepsilon)$ la suite $(\psi(t_h))_{\hbar}$ est localisé en

$$0 : \mu = \delta_{(0,0)}$$

2. Pour $\frac{1}{2}t_E(1 + \varepsilon) < |t_h| < \frac{3}{2}t_E(1 - \varepsilon)$ la suite $(\psi(t_h))_{\hbar}$ est équidistribuée : $\mu = \mu_{Lebesgue}$

Le point (1) est assez évident d'après la description de la distribution de Husimi que nous avons donnée.

Le théorème suivant est un résultat plus général qui montre que (2) est une conséquence de (1). Pour $|t_h| > \frac{3}{2}t_E$ il n'est possible de montrer que l'état reste équidistribué, puisqu'il existe certains cas, où l'état se relocalise

Théorème 3.1.2 Pour toute suite d'états initialement localisés $(\psi_{\hbar})_{\hbar}$ (i.e. $\mu = \delta_0$), la suite $\psi'_{\hbar} = \widehat{M}^{t_E} \psi_{\hbar}$ est équidistribuée (i.e. $\mu' = \mu_{Lebesgue}$) à la date $t = t_E$.

La preuve qui suit repose sur la relation (2.5.9) qui est très spécifique au cas d'une application M linéaire.

Preuve. Pour montrer que la mesure semi-classique μ' est Lebesgue, il faut montrer que pour tout mode de Fourier sur le tore \mathbb{T}^2 ,

$$f_n(q, p) = \exp(-i2(n_1p - n_2q))$$

avec $n \in \mathbb{Z}^2$, $n \neq 0$, on a :

$$\mu'_{\hbar}(f_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^2} f_n dx = 0, \hbar \longrightarrow \infty$$

D'abord on utilise le fait que :

$$\mu'_{\hbar}(f_n) = \langle \psi'_{\hbar} | f_n | \psi'_{\hbar} \rangle + O(\hbar)$$

On calcule avec (2.5.9)

$$\begin{aligned}
 \mu'_h(f_n) + O(\hbar) &= \langle \psi'_h | \exp(-i2(n_1p - n_2q)) | \psi'_h \rangle \\
 &= \langle \psi_h | \widehat{M}^{-t_E} \widehat{T}_{hn} \widehat{M}^{t_E} | \psi_h \rangle \\
 &= \langle \psi_h | \widehat{T}_{hM^{-t_E}n} | \psi_h \rangle
 \end{aligned}$$

Considérons la décomposition du vecteur $n = (n_u, n_s)$ dans le repère des directions instables/stables (e_+, e_-) . Alors

$$hM^{-t_E}n = h(e^{-\lambda t_E}n_u, e^{\lambda t_E}n_s) = (h^2n_u, n_s) \simeq (0, n_s)$$

Or ψ_h est localisé au point 0, alors que $\widehat{T}_{hM^{-t_E}n} \psi_h$ est localisé au point $(0, n_s) \neq (0, 0)$, donc

$$\langle \psi_h | \widehat{T}_{hM^{-t_E}n} | \psi_h \rangle \rightarrow 0 \text{ pour } \hbar \rightarrow 0.$$

□

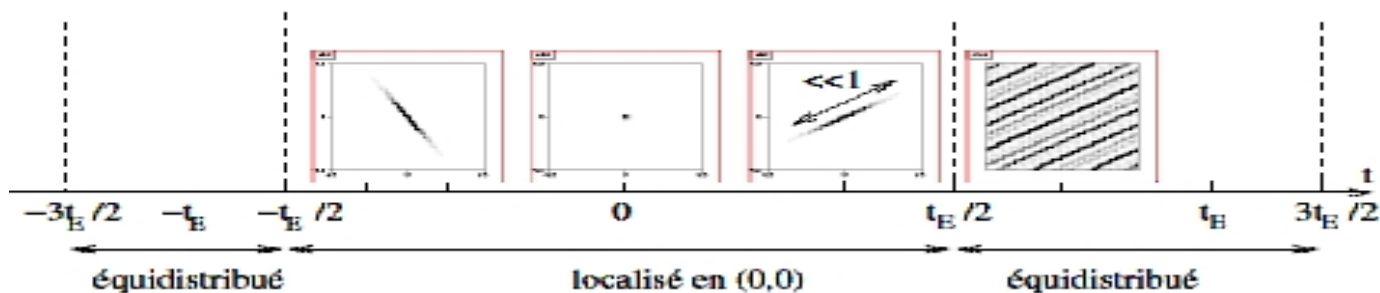


Figure 3.1 : Évolution d'un état cohérent en $(0,0)$

3.2 Évolution d'un état cohérent quelconque

Pour généraliser la section précédente, si $\varphi_{(q_0, p_0)}$ est un état cohérent localisé en $x_0 = (q_0, p_0)$, et si $\varphi(t) = \widehat{M}^t \varphi_{(q_0, p_0)}$, alors la distribution de Husimi de $\varphi(t)$ est centrée au point $x(t) = M^t x_0$ de la trajectoire classique, mais se disperse dans la direction instable, comme décrit dans la section 3.1.

En effet :

$$\varphi_{(q_0, p_0)} = \widehat{T}_{x_0} \varphi_{(0,0)}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \widehat{M}^t \varphi_{q_0, p_0} \\ &= \widehat{M}^t \widehat{T}_{x_0} \varphi_{0,0} \\ &= \widehat{T}_{M^t(x_0)} (\widehat{M}^t \varphi_{0,0})\end{aligned}$$

d'après (2.5.9), et remarquer que $(\widehat{M}^t \varphi_{0,0})$ est l'état (3.1) déjà décrit.

L'ergodicité quantique

La théorie ergodique s'intéresse aux systèmes dynamique du point de vue de la théorie de la mesure, lorsque l'on étudie les applications quantique du tore, un problème usuel est d'étudier la mesure semi classique invariante qui nous permet de savoir la distribution des vecteurs propres de l'opérateur \widehat{M} sur \mathcal{H}_N sur l'espace de phase dans la limite semi-classique, ces vecteurs propres sont des états quantiques particuliers, car ils sont invariants par la dynamique quantique (on les appelle aussi ondes stationnaires).

4.1 Mesures semi-classiques invariantes

Définition 4.1.1 *Si $(\psi_{\hbar})_{\hbar \rightarrow 0}$ est une suite d'états propres de \widehat{M} (i.e. $\widehat{M} \psi_{\hbar} = e^{i\varphi_{\hbar}} \psi_{\hbar}$), alors leur mesure semi-classique est appelée une mesure semi-classique invariante.*

Une question importante en chaos quantique est de déterminer l'ensemble des mesures semi-classiques invariantes possibles, noté $M_{inv. semi-class}$. Autrement dit, à quoi ressemblent les ondes stationnaires ψ_{\hbar} dans la limite de petite longueurs d'ondes ? Sont-elles uniformément réparties ?

Une première information sur les mesure semi-classique invariantes est donnée par :

Proposition 4.1.1 *Une mesure semi-classique invariante est invariante par la dynamique classique $M\mu = \mu$, (où l'on définit l'évolué M d'une mesure par : si μ est une mesure, et φ une fonction, alors $\langle M\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \circ M^{-1} \rangle$).*

Preuve. N'importe quelle fonction test $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ peut être décomposée en mode de fourier :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \exp[-2i\pi(n_1p - n_2q)] \\ &= \exp[-2i\pi(n \wedge x)] \end{aligned}$$

avec $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. La quantification de Weyl donne :

$$\widehat{f}_n(x) = \exp[-2i\pi(n_1\widehat{p} - n_2\widehat{q})]$$

et d'après (2.5.9) on a :

$$\widehat{f}_n = \widehat{T}_{\frac{n}{N}}$$

de plus :

$$\begin{aligned} \widehat{M}^{-1}\widehat{f}_n\widehat{M} &= \widehat{M}^{-1}\widehat{T}_{\frac{n}{N}}\widehat{M} \\ &= \widehat{T}_{M^{-1}n/N} \\ &= \widehat{f}_{M^{-1}n} \\ &= op_w(\exp[-2i\pi(M^{-1}n \wedge x)]) \\ &= op_w(f_n \circ M) \end{aligned}$$

En utilisant :

$$M^{-1}n \wedge x = n \wedge Mx$$

car M préserve l'aire. Soit μ une mesure semi classique invariante on a :

$$\mu_h(f_n) = \langle \psi_h | \widehat{f}_n | \psi_h \rangle + o(h)$$

donc

$$\begin{aligned} \mu_h(f_n) + o(h) &= \langle \psi_h | \widehat{f}_n | \psi_h \rangle \\ &= \langle \psi_h | \widehat{M}^{-1}\widehat{f}_n\widehat{M} | \psi_h \rangle \\ &= \langle \psi_h | op_w(f_n \circ M) | \psi_h \rangle \\ &= \mu_h(f_n \circ M) \\ &= (M\mu_h)(f_n) \end{aligned}$$

D'où :

$$\mu = M\mu$$

□

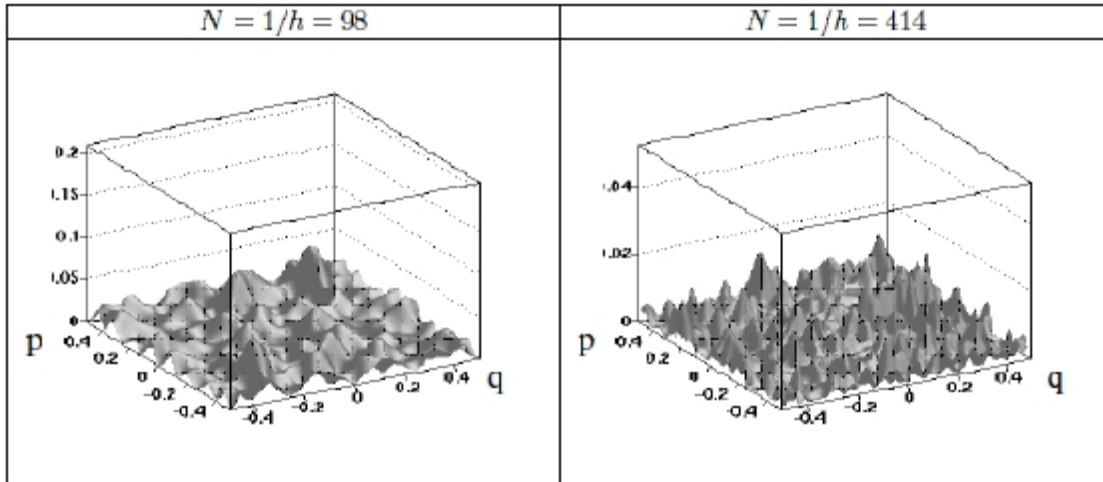


Figure 4.1 :Distribution de Husimi de deux états stationnaires($\widehat{M}\psi_h = e^{i\phi h}\psi_h$) à deux valeurs différente de h

On observe que ces états ne sont pas localisés sur le tore. Bien au contraire, comme pour la plupart des états on s'attend à ce qu'ils soient équidistribués, i.e. que leur distribution de Husimi tende (au sens des distributions) vers la mesure uniforme.

4.1.1 Théorème d'ergodicité quantique

Théorème 4.1.1 (Le théorème d'ergodicité quantique de Schnirelman) *Pour une dynamique ergodique, presque toutes les mesures semi-classiques invariantes sont équidistribuées.*

Remarque 4.1.1 *La mesure semi-classique invariante est la mesure semi-classique des états stationnaires et donc $M_{inv,semi-class}$ peut être égale à la mesure de Lebesgue comme elle peut être égale à la mesure de Dirac sur une orbite périodique (ou une autre mesure singulière), et le théorème d'ergodicité quantique précédent nous affirme que dans la limite des petites longueurs, presque toutes les ondes stationnaires deviennent équidistribuées sur l'espace de phase c'est à dire que la mesure semi-classique de ces ondes stationnaires est la mesure de lebesgue*

mais il faut faire attention au terme *presque toutes* qui signifie qu'il peut exister des états stationnaires ayant une mesure semi-classique différente de la mesure de Lebesgue : $\mu \neq \mu_{\text{Lebesgue}}$ effectivement il existe une suite d'états stationnaires dont la distribution de Husimi se concentrerait sur une orbite périodique dans la limite semi-classique. Ces états ont été appelés des **états cicatrisés**, **scars** par E. Heller suite à des observations numériques dans des billards).

Intuitivement, l'existence d'une telle mesure localisée est inattendue car le principe d'incertitude $\Delta q \Delta p \geq h$, implique que à h fixé, une distribution de Husimi ne peut pas être pas une distribution de Dirac sur l'espace de phase

CONCLUSION

Le but de ce travail était de présenter les problématiques générales du chaos quantique, en s'appuyant sur un modèle particulier : une application linéaire hyperbolique sur le tore. Quelques résultats présentés ici se généralisent pour d'autres dynamiques chaotiques plus complexes (comme le théorème d'ergodicité quantique).

Cependant, il faut reconnaître que beaucoup de phénomènes observés en chaos quantique restent incompris. Pour les temps courts $|t| \ll t_E$ plus court que le temps d'Ehrenfest où il n'y a pas d'interférences, l'analyse semi-classique permet de bien décrire la densité spectrale et l'évolution des ondes. Mais cet intervalle de temps est extrêmement court et pour $t \gg t_E$ il n'y a encore que des conjectures.

Enfin, nous pouvons dire que les mathématiques sont partout : elles sont au cœur de la science contemporaine, mais aussi à la base d'innombrables réalisations technologiques et processus industriels, elles fournissent des outils de modélisation et de prévision qui jouent un rôle croissant dans la conduite des affaires du monde. Pourtant, cette discipline reste méconnue.

Bibliographie

- [1] Frédéric Faure. *Introduction au chaos quantique* .Cours pour l'ECOLE D'ETUDE DE PHYSIQUE NON-LINEAIRE de Peyresq 16 septembre 2007.
- [2] Frédéric Faure. *Semi-classical formula beyond the Ehrenfest time in quantum chaos. Trace formula* Annales de l'institut Fourier 2007.
- [3] Frédéric Faure. *Cours de mécanique analytique, en Licence 3 de physique*. Université Joseph Fourier 25 novembre 2010.
- [4] Gabriel Rivière. *Délocalisation des mesures semi classiques pour des systèmes dynamiques chaotiques*. Thèse de doctorat de l'école polytechnique, spécialité mathématique 25 Novembre 2009.
- [5] M. Emmanuel Schenk. *Systèmes quantiques ouverts et méthodes semi classiques*. Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, spécialité Physique mathématique 2009.
- [6] Arnoldi Jean François. *chaos quantique : Résonances de Ruelle et quantification géométrique*. Stage M2 de L'ENS Lyon, Champ particules et matière condensée.
- [7] A. Bouzouina, S. De Bièvre. *Equipartition of the Eigenfunctions of Quantized Ergodic Maps on the Torus*. Springer-Verlag 1996.
- [8] Stéphane Nonnenmacher. *Filtrage Transformations chaotiques quantifiées "un laboratoire" pour le chaos quantique*. Bordeaux 15 Novembre 2007.
- [9] Stéphane Nonnenmacher. *Spectral Theory of Damped Quantum Chaotic systems*. Springer 2011.

-
- [10] Ze'ev Rudnick. *What is Quantum Chaos*.
- [11] Stéphane Nonnenmacher. *Spectral Problems in Open Quantum Chaos* . springer 2011.
- [12] Y.Colin De Verdière. *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*. Séminaire Equations aux dérivées partielles Polytechnique (1984 – 1985).
- [13] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*. Springer-Verlag .
- [14] A. Michael E. Taylor. *Optimizing Partial Differential Equations* .Springer.
- [15] JGerald B.Folland. *Harmonic Analysis in Phase space*. Princeton, New Jersey 1989.
- [16] GLawrence C.Evans and Maciej Zworski. *semiclassical Analysis*, University of California, Berkeley .
- [17] André Martinez . *An introduction to semi classical and microlocal Analysis*. Université de Bologna 6 Février 2001.
- [18] Claude God Billon L. *Travaux de D. Anosov et S. Smale sur les difféomorphisme*. Séminaire N.Bour Baki (1968 – 1969).

Résumé

La mécanique quantique est une théorie physique qui décrit les particules élémentaires comme des ondes leur évolution est gouvernée par l'équation de Schrödinger au cours du temps, il arrive que le comportement des ondes dans la limite semi-classique (qui permet le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique) soit chaotique c'est à cause de la forte sensibilité aux conditions initiales on parle de chaos quantique ou bien on peut dire chaos ondulatoire car l'étude ne concerne pas juste les ondes quantiques

Exemple : En physique, ces études peuvent concerner :

- Une onde sismique piégée dans une vallée sédimentaire de montagne, entourée de massifs montagneux. $L \sim 10km$, $l \sim 100m$, $\hbar \sim 0,01$.
- Une onde de vibration (ultra-son) d'un cristal. $L \simeq 10cm$, $l \simeq 3mm$, $\hbar \simeq 0,03$.
- Une onde quantique d'un électron piégé dans un atome (par les forces électrostatiques), ou l'onde d'un atome dans une molécule. $L \simeq 10^{-10}m$, $l \simeq 10^{-11}m$, $\hbar \simeq 0,1$.
- Une onde de surface dans un bassin d'eau.
- Une onde électromagnétique dans un guide d'onde. l' 1 m (lumière) ou l' 1cm (microondes)

En mathématique l'objet d'étude est l'équation d'onde sur des variétés riemanniennes à courbure négative qui est responsable de la divergence des trajectoires et l'hyperbolicité du flot

Dans ce travail on va donner une introduction au chaos quantique à travers des exemples physiques et des modèles mathématiques très simples qui sont les applications sur le tore plus exactement on va présenter l'application du chat d'Arnold qui est un automorphisme linéaire hyperbolique du tore et on présentera sa version quantifiée, on introduira un temps caractéristique important en chaos quantique le temps d'Erhenfest et on étudiera l'évolution temporelle du paquet d'onde.

Un résultat important en chaos quantique est le théorème d'ergodicité quantique de Schnirelman qui précise que pour une dynamique ergodique, dans la limite des petites longueurs, presque toutes les fonctions propres sont équidistribuées on verra ce théorème dans la dernière partie.