

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA  
NATURE ET DE LA VIE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



**MÉMOIRE**

**Présenté par**

**ARAB AZIZ**

pour obtenir le

**DIPLOME DE MASTER**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Harmonique et EDP

**Sujet**

La théorie des ondelettes dans la multi-résolution  
des objets 3D

Soutenu le 26 /06/2012 devant les Jurys

M. N.LAID.	Président	Prof.	U. MOSTAGANEM
M <sup>em</sup> SAIDANI.K.	Examineur	Prof.	U. MOSTAGANEM
M <sup>em</sup> BENBERNOU.A.	Encadreur	Prof.	U. MOSTAGANEM

2011/2012

## Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute ces années de recherche, c'est grâce à Lui que ce travail de mémoire a vu le jour. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près, à la réalisation de ce mémoire de Master, tout particulièrement :

Mon encadreur ; **M<sup>em</sup>BENBERNOU.A** qui a accepté d'encadrer ce travail et pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Je le remercie tout aussi pour avoir dirigé mes travaux, pour m'avoir écouté et m'encouragé durant cette période. Merci aussi pour toutes les relectures, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie Monsieur **N.LAID** d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire et je remercie également **M<sup>em</sup>.SAIDANI.K.** Pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier le corps enseignant du Département de Mathématiques de l'Université de Mostaganem pour les efforts qu'il ne cesse de déployer afin d'assurer le développement et l'épanouissement de la formation surtout l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement précieux.

Je voudrais également exprimer mes sincères remerciements à ma fiancer **B.Zohra.**

Je voudrais faire, maintenant, **une place toute particulière à mes parents.** Je profite cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profond et ma **très très** grande reconnaissance. Je remercie ma mère qui a attendu, avec patience et sans jamais se lasser, les fruits de son éducation et ses efforts. Aucun terme et aucune langue ne peut exprimer mon amour envers vous. A mon père qui avait autant espéré me voir en ce jour.

Je dédie ce travail à mes frères djilali, fathi, bilal, et surtout **Mohamed Amine**, à mes sœurs Zahia, Saliha, Fatiha et Ouardia.

A mes amis et tout ma familles, en particulier : **Abdellaoui, Sayeh, Achour, Salem(chahata), Mimoun, Mourad,Zerglaine, Ali,...**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1	Notions générales sur les ondelettes et la 3D . . . . .	2
1.1.1	Rappels sur les ondelettes . . . . .	2
1.1.2	Type des ondelettes . . . . .	3
1.1.3	Généralités sur la 3D . . . . .	6
1.2	Analyse multi-résolution et les maillages 3D . . . . .	7
1.2.1	Analyse multi-résolution (AMR) . . . . .	7
1.2.2	Interprétation de l'analyse multi-résolution . . . . .	7
1.2.3	Base de Riez . . . . .	8
1.2.4	Les maillages 3D . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Application de l'AMR par ondelettes pour la compression d'un maillage</b>	<b>13</b>
2.1	Position du problème . . . . .	13
2.2	Méthode de subdivision en $\sqrt{3}$ : . . . . .	14
2.2.1	Principe de subdivision en $\sqrt{3}$ : [6], [4], [5] . . . . .	14
2.3	Application de l'AMR sur les objets 3D : . . . . .	15
2.3.1	Principe de l'analyse multi-résolution globale : . . . . .	15
2.3.2	Principe de l'analyse multi-résolution locale . . . . .	17
2.3.3	Compression . . . . .	19
2.3.4	Remaillage . . . . .	19

**Bibliographie**

**23**

---

# INTRODUCTION

---

Ces dernières années, la notion de multi-résolution, initiée puis nourrie par le développement spectaculaire et rapide de la théorie des ondelettes, a trouvé sa place dans des domaines très variés des mathématiques, surtout infographie.

La transformée en ondelettes fait partie des méthodes qui compressent sans pertes visuelles.

Elles ont fait leurs preuves depuis une décennie dans la compression d'images 2D et la vidéo. Les ondelettes, famille de fonctions déduites d'une même fonction, appelée ondelette mère, par opérations de translations, dilatations et rotations en dimension supérieure à un, ont trouvé, de par la puissance de leur théorie, des applications dans de nombreux domaines aussi variés que les mathématiques (analyse, probabilités, fractales), le traitement du signal (compression, astronomie, sismique), la physique (mécanique quantique, turbulence). Cet outil permet la représentation de fonctions de  $L^2$  dans une base bien localisée en espace et en fréquence offrant les avantages de l'analyse de Fourier et s'affranchissant des inconvénients du manque de localisation de cette dernière. Les ondelettes sont nées de l'analyse des signaux sismiques haute résolution. En 1984, P.Goupillaud, A. Grossmann et J.Morlet poussés par les exigences de croissantes de la recherche d'hydrocarbures proposent une méthode de reconstruction des signaux sismiques permettant une restauration des hautes fréquences à l'aide de la représentation temps-fréquence des signaux. Cet outil puissant a ensuite été très étudié et développé, tant du point de vue pratique que des point de vue théorique, par des personnes telles Y.Meyer, S.Mallat, I.Daubechies, JP.Antoine ou R.Murenzi etc... Pour aboutir à la théorie de l'analyse par ondelettes telle qu'elle existe aujourd'hui.

Le succès des ondelettes vient de son énorme champ d'applications. En effet, une famille d'ondelettes étant une base de la plupart des espaces fonctionnels, son utilisation simple parfois énormément certaines démonstrations mathématiques. De plus, une ondelette est bien localisée en temps et en fréquence. La transformée trouve tout un domaine d'application en traitement du signal. Elle permet, comme la transformée de Fourier,

d'étudier les fréquences d'une fonction tout en conservant la localisation des évènements. Par exemple en musique, la transformée de Fourier permet de dire quelle quantité de do contient un morceau mais la transformée en ondelettes permet d'affirmer qu'un do a été joué à tel moment et que c'était une croche, une noire ou une blanche.

La méthode d'analyse multi-résolution est formalisée par Meyer et Mallat sur l'axe réel infini. En ce sens les ondelettes offrent un outil utile et efficace. L'idée principale de l'analyse multi-résolution est de représenté hiérarchiquement une fonction compliquée par une partie de basse résolution plus simple, avec une collection de perturbations appelées coefficients d'ondelettes qui sont nécessaires pour retrouver la fonction originale.

Cependant, cette théorie classique n'est pas adaptée à la représentation des ensembles de données finies telles que les images, les courbes ouvertes et les surfaces bornées qui s'utilisent en infographie et en imagerie médicale.

Le but de ce travail est de représenter l'importance de la théorie des ondelettes dans la multi-résolution des objets 3D pour la compression d'un maillage.

Ce mémoire comporte trois chapitres qui se présentent comme suit : Dans le premier chapitre nous allons présenter une introduction historique sur le développement de la théorie des ondelettes et l'analyse multi-résolution. Le deuxième chapitre est totalement consacré à des notions préliminaires sur la transformée en ondelettes, la 3D, l'analyse multi-résolution, maillages multi-résolutions.

Dans le troisième chapitre nous proposons une méthode de compression du maillage "application" en utilisant les principes de l'analyse multi-résolution.

Enfin, nous terminerons par une conclusion.

# Notions préliminaires

---

## 1.1 Notions générales sur les ondelettes et la 3D

### 1.1.1 Rappels sur les ondelettes

L'analyse en ondelettes consiste à étudier le signal en fonction des différentes résolutions. Pour cela, on définit une fonction, l'ondelette mère, qui est localisée. C'est avec les ondelettes créées à partir de cette fonction par translation et changement d'échelle que le signal est analysé. La base d'ondelette est produite par

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

où  $a$  et  $b$  sont les pas de dilatation et translation avec  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$

**Définition 1.1.1** Une fonction  $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est une ondelette si elle vérifie la condition d'admissibilité :  $C_\psi < +\infty$  avec

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$$

Une ondelette mère est une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  de moyenne nulle.

Nous supposons que l'ondelette mère  $\psi$  est normalisée

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left[ \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = 1.$$

**Définition 1.1.2** Les ondelettes  $\psi_{a,b}(t)$  sont des fonctions générées par la translation et la dilatation d'une fonction génératrice, appelée ondelette mère  $\psi(t)$  tels que :

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

### Exemple 1

**Ondelette de Haar :** L'ondelette de Haar est la plus ancienne (1909) et la plus simple des ondelettes. Elle représente la première base d'ondelettes orthonormées (base de Haar).

On reprend la fonction d'échelle, définie sur  $I = [0; 1]$  telle que :

$$\begin{cases} \phi(x) = 1 & \text{si } x \in I \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

L'ondelette de Haar associée est discrète et à support compact. Le fait qu'elle soit à support compact est une propriété intéressante car elle implique un calcul très rapide de la transformée en ondelettes correspondante. Elle est définie comme suite :

$$\begin{cases} \psi(x) = \phi_{[0, \frac{1}{2}[}(x) - \phi_{[\frac{1}{2}, 1[}(x) \\ \psi(x) = 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

**Remarque 1.1.1** on a :

1.  $\psi$  est de moyenne nulle veut dire  $\psi \in L^1(R)$ .
2.  $\psi$  est une ondelette  $\Rightarrow \psi \in L^1(R) \cap \psi \in L^2(R)$ .

## 1.1.2 Type des ondelettes

**Ondelettes première génération** :[1]

Les ondelettes de première génération sont un outil puissant et les domaines d'application sont nombreux. Elles sont formulées d'une analyse multi-résolution, bien adapté dans un cadre théorique d'analyse fonctionnelle mais trop restrictif dans certaines applications pratiques.

Ces limitations proviennent essentiellement de :

1. L'invariance par translation (uniformité), qui rend difficile ou impossible la création d'ondelettes sur des domaines autres que la droite réelle, comme par exemple la sphère.
2. L'invariance par changement d'échelle, qui revient à utiliser les mêmes filtres tous les niveaux (stationnarité).

**Ondelettes seconde génération :[1]**

La notion d'ondelettes de seconde génération a été introduite pour pallier les problèmes précédents et étendre le domaine d'application des techniques multi-résolution. On ne trouve pas la définition précise de ce que sont les ondelettes de deuxième génération, mais la caractéristique fondamentale est de ne plus supposer que les fonctions d'échelle soient issues d'une seule et même fonction mère. On se retrouve alors avec :

1. Une suite d'espaces fonctionnels emboîtés en nombre fini, infini ( $n \in \mathbb{R}$ ), ou ( $n \in \mathbb{Z}$ ) :

$$\dots \subset V^n \subset V^{n+1} \subset V^{n+2} \subset \dots$$

2. Des bases appelées fonctions d'échelle.
3. Des espaces de détail  $W^n$  tels que

$$V^n + W^n = V^{n+1}$$

4. Des bases des espaces  $W^n$  appelées ondelettes.

L'idée principale que l'on exploite est qu'en écrivant :

$$V^n = V^m \bigoplus_{k=m}^{n-1} W^k$$

et en décomposant une fonction selon cette somme directe en

$$f^n = f^m + \sum_{k=m}^{n-1} g_k$$

on obtient une représentation efficace de la fonction en termes  $f^n$  d'une approximation grossière et de composantes de détail.

L'idée de base pour la construction des ondelettes de deuxième génération est d'utiliser un processus de subdivision (une cascade).

**Transformée en ondelettes**

**Transformée en ondelettes continue** La transformée en ondelettes continue d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en temps  $t$  et à échelle  $a$  est définie par le produit scalaire de  $f$  avec  $\psi_{a,b}$  et on a :

$$Wf(a, b) = \langle f, \psi(a, b) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

où  $\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}$  est le complexe conjugué de  $\psi$ , qui est la transformée de Fourier.

**Théorème 1.1.1** [11] Soit  $\psi \in L^2(R)$  une fonction réelle vérifiant :

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(a\omega)|^2}{|a|} da < +\infty$$

Alors  $\forall f \in L^2(R)$  :

1. Le signal décomposé  $f(x)$  est reconstruit à partir de ses coefficients et les fonctions d'ondelettes utilisées . Cette reconstruction s'effectue par :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

2. La formule de conservation de l'énergie

$$\|f\|_{L^2(R)}^2 = \int_R |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2}.$$

### Transformée en ondelettes discrète

**Définition 1.1.3** [11] Soit  $\psi$  est une ondelette a support compact  $\left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2}\right]$ . L'ondelette discrète est définie par :

$$\psi_{n,j}[m] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{m-n}{a^j}\right) \quad \text{pour } 1 \leq a^j$$

Le paramètre d'échelle est  $a^j$ .

**Définition 1.1.4** [11] La transformée en ondelettes discrète peut être écrit comme convolution circulaire  $\overline{\psi_j[n]}$  :

$$\begin{aligned} W_f[n, a^j] &= (f \otimes \overline{\psi_j})[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \overline{\psi_j}[n-m]. \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.2** La convolution circulaire est calculé par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide.

### 1.1.3 Généralités sur la 3D

#### Qu'est-ce que la 3D :[1]

Les modèles 3D sont de plus en plus répandus grâce au développement des réseaux de télécommunications et l'accroissement de leur rapidité et grâce aussi au succès des scanners 3D qui ont grandement facilité l'acquisition de modèles tridimensionnels très détaillés. Ces objets 3D sont utilisés dans plusieurs domaines tels que la médecine, Conception Assistée par ordinateur (la CAO), les jeux vidéo, le cinéma...

Il est tout d'abord nécessaire de distinguer deux types de création en 3 dimensions :

1. La 3D pré-calculée : elle permet de réaliser des images et de la vidéo,, la qualité de l'image peut être très bonne, très réaliste. Mais ce type de création nécessite un temps de calcul très long de la part de l'ordinateur et ne permet aucune interaction.
2. La 3D temps réel :elle permet de créer des animations interactives en temps réel, avec des technologies comme le VRML.

#### La création en 3 dimensions :[1]

On va distinguer cinq étapes dans la création en 3 dimensions :

1. La modélisation : il s'agit de la manière dont l'objets est construit, représenté. Un objet est d'abord défini par des points dans un espace tridimensionnel  $(x, y, z)$ . Quand ces points sont reliés entre eux par des lignes, on obtient la structure. Cet objet va avoir une orientation, définie par rapport è des rotations autour des axes  $x, y, z$ .
2. Le texture : quand ce maillage a été créé, une surface ou peau est appliquée à l'objet. Cette surface peut avoir différentes qualités : couleur, texture, brillance,...
3. L'éclairage : on peut considérer que soit un objet est éclairé soit il émet de la lumière.
4. L'animation : on peut animer les objets créés en introduisant des clefs dans le temps.
5. Le rendu : cette phase n'intervient que dans le cas de création en 3 dimensions pré-calculée car elle nécessite un temps de calcul très important et l'ordinateur doit être très puissant pour la réaliser.

## 1.2 Analyse multi-résolution et les maillages 3D

### 1.2.1 Analyse multi-résolution (AMR)

L'analyse multi-résolution a été introduite par Mallat (1989), Wald (1999) et Ranchin (1993). Cet outil mathématique permet de calculer des approximations successives d'une fonction à des résolutions spatiales de plus en plus grossières. L'approximation d'une fonction est sa projection sur une base analogue à celle des ondelettes mais régie par une fonction d'échelle  $\phi$  vérifiant l'équation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 = \widehat{\phi}(0)$$

où  $\widehat{\phi}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $\phi$  et la famille  $[\phi(x - k)]_{k \in \mathbb{Z}}$ , forme une base orthonormée. On définit les bases de fonctions d'échelle de manière similaire

**Définition 1.2.1** [10] *Une analyse multi-résolution est une suite  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant*

1. Il existe  $\varphi \in v_0$  tel que  $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $v_0$ .
2. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$f(t) \in v_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in v_{j+1},$$

3. Pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  :

$$f(t) \in v_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in v_j,$$

4. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :  $v_{j+1} \subset v_j$ .

### 1.2.2 Interprétation de l'analyse multi-résolution

1. On a

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} v_j = \{0\}, \quad \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} v_j = L^2(\mathbb{R}).$$

2. Si  $f \in v_0$  alors :

$$f(t) = \sum_n a[n] \varphi(t - n) \in v_0$$

3. On a  $\lim_{j \rightarrow +\infty} v_j = \{0\}$ , et  $\lim_{j \rightarrow -\infty} v_j = L^2(\mathbb{R})$ .

4.  $v_j$  est un espace d'approximation à l'échelle  $2^j$  (résolution  $2^{-j}$ ) et on a

$$f(t) \in v_0 \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2^j}\right) = f(2^{-j}t) \in v_j.$$

### 1.2.3 Base de Riez

**Définition 1.2.2** [9] Une famille de vecteur  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est appelé une base de Riez d'un espace de Hilbert  $H$  si :

1. Elle est linéairement independent.
2. S'il existe deux constantes  $A, B > 0$  tel que :

$$\forall f \in H : A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

### Fonction d'échelle

**Définition 1.2.3** [10] La fonction  $\varphi \in v_0$  est appelé fonction d'échelle et on a :

$$\varphi_{n,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \in v_j.$$

1. Pour tout  $J \in \mathbb{Z}$  les fonctions  $\{\varphi_{n,j}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de sous-espace vectoriel  $v_j$ .
2. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{n,1}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - 2n}{2}\right) \in v_1 \Rightarrow \varphi_{n,1}(t) \in v_0 \\ \text{si } f \in v_0 &\Rightarrow f(t) = \sum_n a[n] \varphi(t - n), \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{n,1}(t) = \sum_n h[n] \varphi(t - n) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^j}} \varphi\left(\frac{t - 2n}{2}\right) \simeq \sum_n h[n] \varphi(t - n),$$

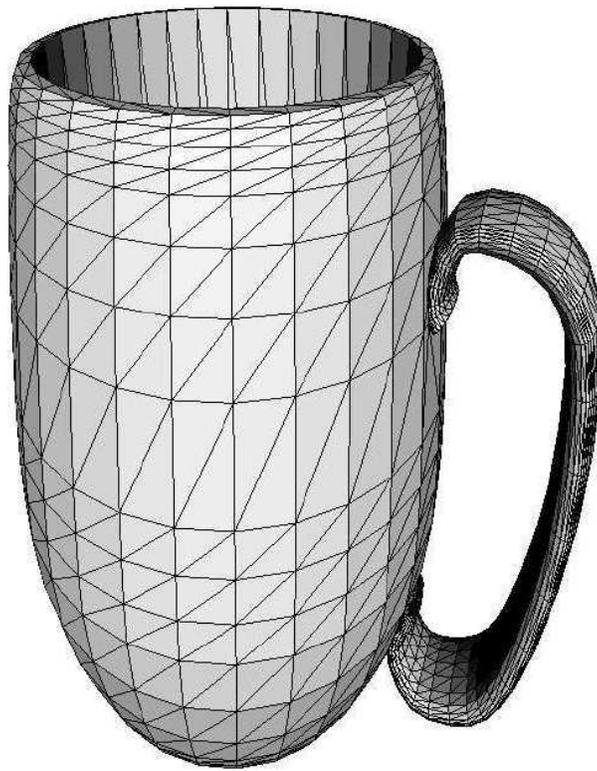
qui est l'équation d'échelle et les coefficients  $(h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  sont uniques.

### 1.2.4 Les maillages 3D

Un maillage est une représentation de la surface de l'objet. Ce contour est partitionné en un ensemble d'éléments polygonaux. Les polygones composants le maillage peuvent être des triangles, des quadrangles, des polygones quelconques. Dans le cadre de ce travail, un maillage

triangulaire est décrit à l'aide d'un ensemble de triangles représentant l'enveloppe de l'objet qu'ils représentent. Les points des triangles sont appelés sommets (ou noeuds), et sont reliés entre eux par les arêtes (ou arcs), qui forment les triangles. Les sommets correspondent à l'information géométrique du maillage, et les arêtes correspondent à l'information topologique.

**Exemple 2** Dans la figure suivante on donne une représentation d'une tasse par un maillage triangulaire



*Figure 1 : 1 : Représentation d'une tasse par un maillage triangulaire niveau  $k$*

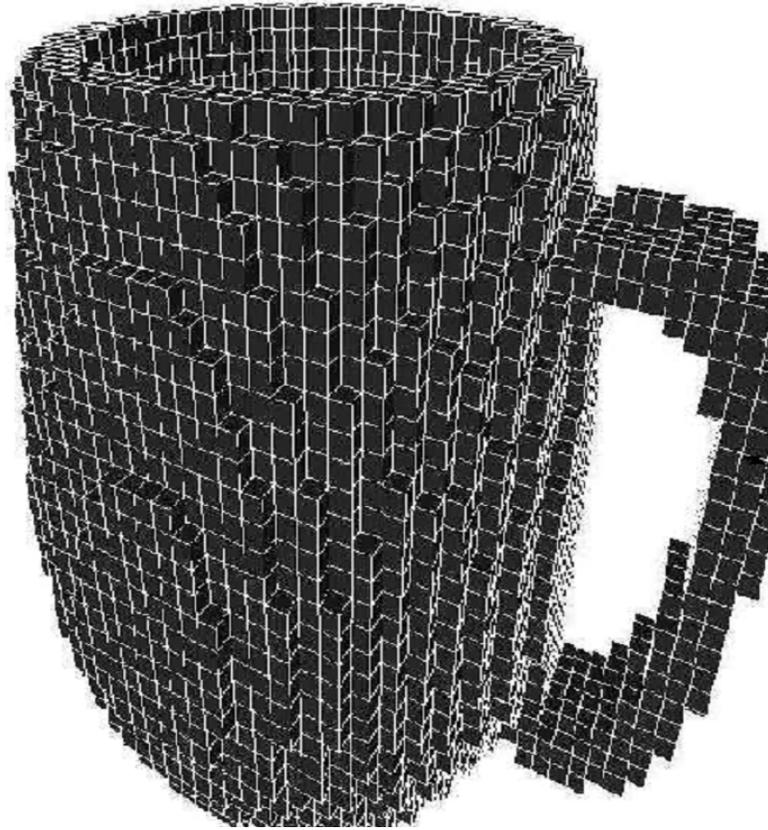


Figure 1 : 2 : Représentation d'une tasse par un maillage triangulaire niveau  $k + n$

### Types de maillages : [2]

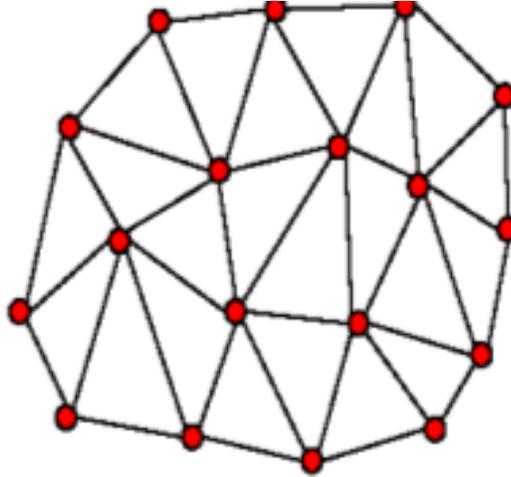
Un maillage peut être mono-résolution ou multi-résolution. Dans le cas des maillages mono-résolution, l'objet 3D est représenté par un seul niveau de résolution. Tous les polygones ont la même importance. De ce fait, pour pouvoir afficher l'objet il faut le charger en totalité. Dans le cas des maillages multi-résolutions (appelés aussi maillages hiérarchiques), l'objet 3D est représenté à différents niveaux de détails, il peut être modélisé de façon grossière par un maillage lâche ou de façon détaillée par un maillage fin lorsque l'application le demande. Un maillage multi-échelle est composé d'un maillage grossier et de plusieurs niveaux d'informations permettant de raffiner le maillage grossier jusqu'à sa version finale, la plus fine. Cette représentation multi-résolution des maillages possède plusieurs intérêts :

1. la stabilité des résolutions, permettant la progressivité de l'affichage, de la compression, de la décompression, ou de la transmission .
2. En cas de rupture lors de la compression, de la transmission ou de la décompression des détails, l'objet peut quand même être globalement visualisé, contrairement aux

maillages mono-résolutions.

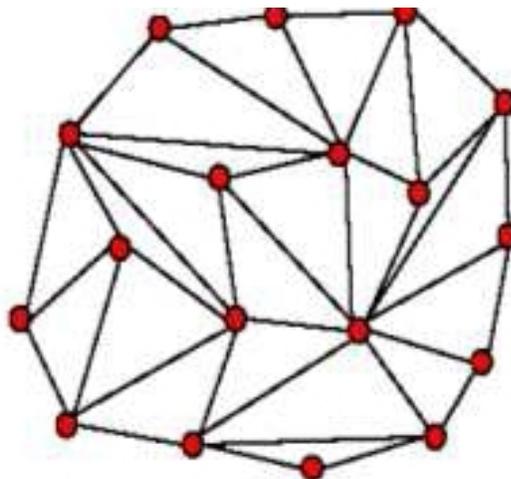
Ils y a trois types de maillages

1. Maillage régulier : tous les sommets ont la même valence, qui a, en général, une valeur de 6 (six sommets incidents) : Voir la figure suivant :



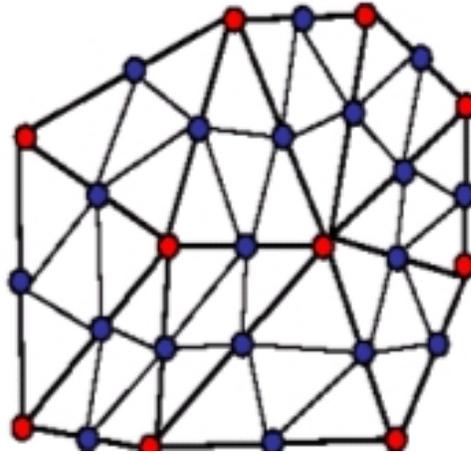
*Figure1.3 : Maillage régulier*

2. Maillage irrégulier : dans ces maillages, il n'y a aucune cohérence dans la manière de connecter les sommets. Par conséquent, tous les sommets ont une valence différente.



*Figure1.4 : Maillage irrégulier*

1. 3 . Les maillages semi-réguliers : c'est un maillage irrégulier où chacun des triangles le constituant possède un maillage régulier



*Figure 1.5 : Maillage semi – régulier*

# Application de l'AMR par ondelettes pour la compression d'un maillage

---

Les surfaces des objets 3D jouent un rôle central dans beaucoup d'applications graphiques actuelles. La surface d'un objet 3D est représentée naturellement par un maillage polyédrique. Le maillage est une surface linéaire par morceaux qui compose généralement de faces triangulaires. La représentation des surfaces par un maillage triangulaire permet de compresser, d'éditer, de visualiser et de transformer efficacement les objets 3D. Le maillage multi-résolution permet de représenter la surface à différents niveaux de détails. La caractéristique des maillages multi-résolution est qu'il existe des équations d'affinement capable de passer d'un niveau de détail à un autre sans perte de l'information. Il est donc possible de subdiviser un maillage grossière de départ. Les méthodes de maillage multi-résolution consistent à subdiviser la surface d'un polyèdre en éléments raccordés entre eux. Il existe plusieurs méthodes des maillages multi-résolution comme :

- Le maillage triangulaire qui utilise exclusivement des éléments triangulaires plans.
- Le maillage polygonaire qui utilise des éléments polygonaux.

## 2.1 Position du problème

La taille actuelle des maillages triangulaires de surfaces 3D obtenus par différentes techniques d'acquisitions (scanner, laser, IRM,..) et beaucoup trop volumineuse pour que ces objets soient stockés, transmis ou manipulés aisément. De plus ces triangulations sont irrégulières.

A cause de cette structure complexe, des nombreuses recherches sont effectuées sur la manière de restructurer ces maillages de manière plus simple et homogène pour faciliter le traitement de ces données sans perdre de l'information sur la forme de ces objets. Nous avons choisi une méthode efficace pour la compression d'un maillage en utilisant l'analyse multi-résolution par ondelettes.

## 2.2 Méthode de subdivision en $\sqrt{3}$ :

Une subdivision permet de synthétiser une surface. Elle permet d'augmenter la résolution d'un maillage grossier appelé maillage de contrôle, et converge vers une surface limite. Il existe deux catégories de subdivision d'un maillage : les subdivisions par insertion de sommets sur les arêtes et les subdivisions par insertion de sommets sur les faces. Dans cette méthode on utilise la subdivision par insertion de sommets sur les faces car la complexité du maillage croît moins vite qu'avec la subdivision par insertion de sommets sur les arêtes.

### 2.2.1 Principe de subdivision en $\sqrt{3}$ : [6], [4], [5]

La subdivision en  $\sqrt{3}$  consiste à insérer un nouveau sommet dans chaque face. Puis de nouvelles faces sont créées en joignant le nouveau sommet aux sommets initiaux de la face et aux nouveaux sommets des faces voisines. Donc chaque nouveau sommet est 6-connecté.

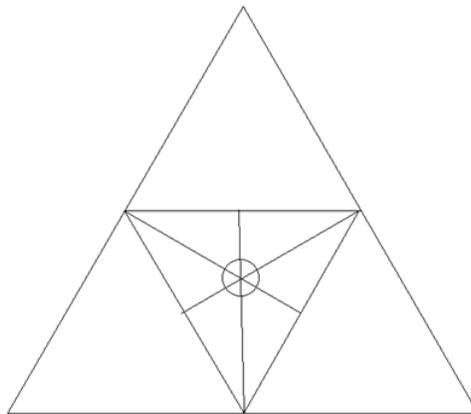


Figure 2.1 : principe de subdivision en  $\sqrt{3}$

### Notations

1. Le maillage résultant de la subdivision de niveau  $j$  est appelée maillage de niveau  $j + 1$ .
2.  $M^j$  = maillage de niveau  $j$  est constitué de  $n_j$  sommets et de  $f_j$  faces.
3.  $Y^j$  = l'ensemble des sommets de niveau  $j$ .
4.  $K^j$  = la connectivité de  $Y^j$ .
5.  $M^j = (K^j, Y^j)$ .

**Remarque 2.2.1** *Les niveaux successifs sont liés par la relation :*

$$n_{j+1} - n_j = f_j = 3f_{j-1} = \dots = 3^j f_0 .$$

## 2.3 Application de l'AMR sur les objets 3D :

Pour pouvoir appliquer une analyse multi-résolution sur les objets 3D, nous devons passer au trois étapes nécessaires qui sont :

1. Remaillage.
2. Analyse multi-résolution.
3. Compression.

La théorie de l'AMR assure que le maillage analysé est la meilleure approximation du maillage original à un niveau donné pour un produit scalaire que l'on se donne au sens des moindres carrés. De plus, l'analyse multi-résolution calcule les erreurs (détails) qui sont nécessaires pour la reconstruction du maillage original. On va utiliser une analyse multi-résolution capable de fonctionner dans un  $K$ -disque. Un  $K$ -disque est un sous-maillage contenant les sommets situés dans une distance topologique  $K$ . Dans notre méthode on va utiliser les deux principes de l'AMR.

### 2.3.1 Principe de l'analyse multi-résolution globale :

Dans notre méthode d'AMR, supposons que  $K=K^j$  c-à-dire que la connectivité du maillage original soit le résultat de subdivision récursive. Dans ce cas, les sommets sont en majorité

6-connecté. Les sommets extraordinaire (sommets de bases) sont définis dans  $M^0$  et se retrouvent à tous les niveaux de subdivision. L'analyse d'un niveau  $j + 2$  donne un niveau  $j + 1$  et un ensemble de détails  $Z^{j+1}$ . Le niveau  $j + 1$  peut être analysé pour donner le niveau  $j$  (voir la figure 2.2).

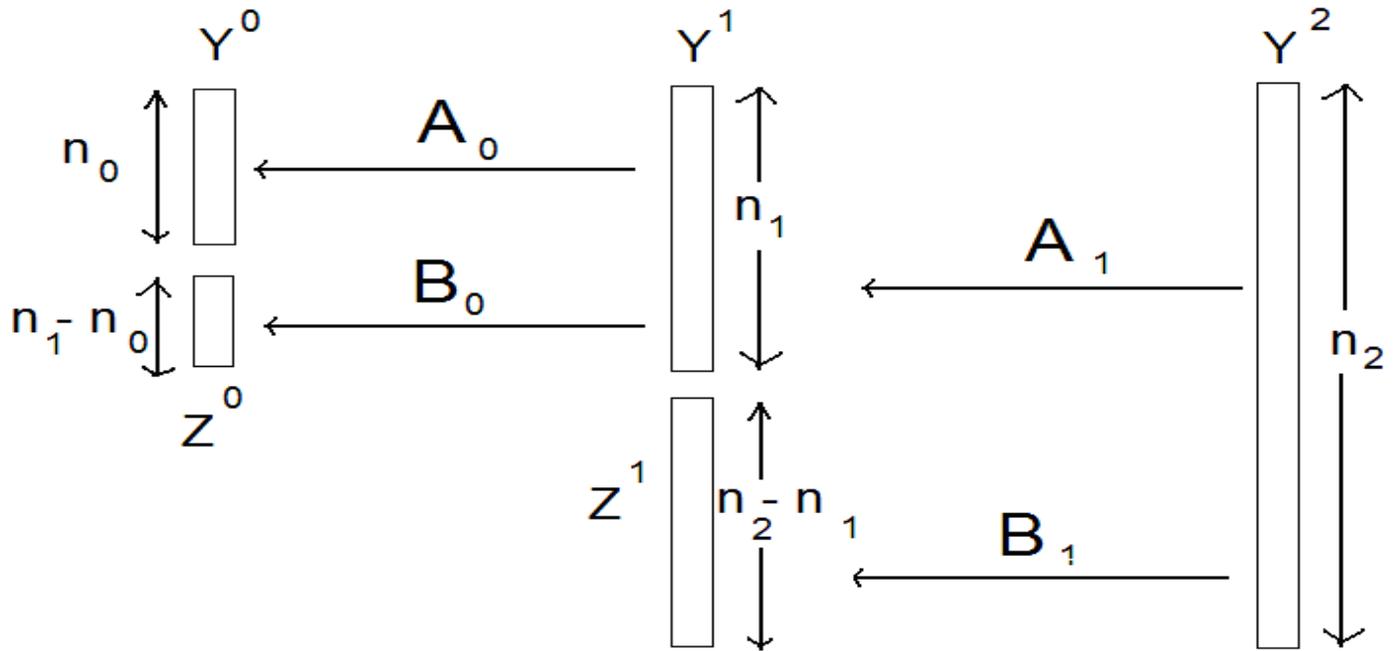


Figure 2.2 : Analyse du niveau 2 vers le niveau 0

Le synthèse consiste à reconstruire le niveau  $j + 1$  à partir de niveau  $j$  et du détails  $Z^j$  et le niveau  $j + 2$  peut être obtenu à partir du niveau  $j$  et  $Z^j$  et  $Z^{j+1}$ .

Posons :  $P^j$  la matrice qui subdivise  $Y^j$ .

$Q^j$  la matrice qui traite le détail  $Z^j$ .

Voir la figure suivante :

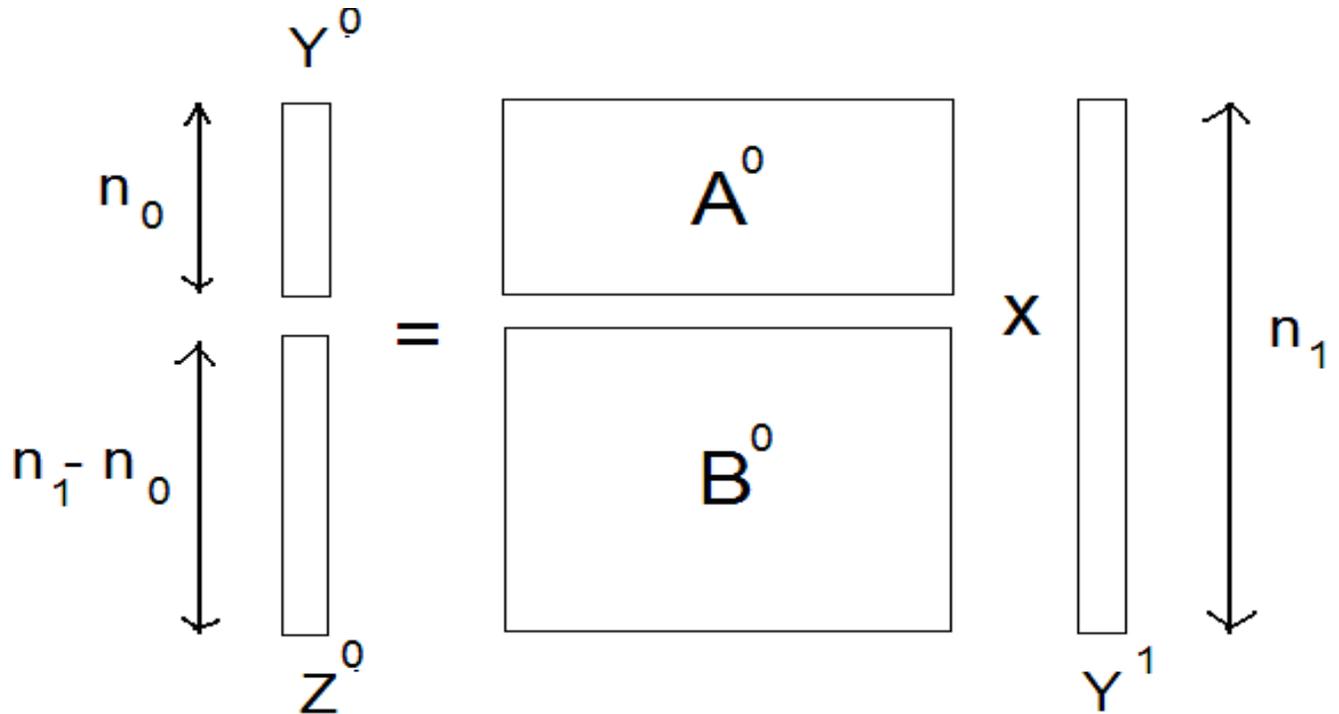


Figure 2.3 : représentation matricielle

### 2.3.2 Principe de l'analyse multi-résolution locale

Pour réaliser une analyse multi-résolution, on doit disposer d'une fonction d'échelle  $\varphi$  et d'une ondelette  $\psi$ . Ces fonctions définissent les matrices globales  $P^j$  et  $Q^j$ .

1. Les matrices globales ne sont jamais écrites car ils ont de très grande taille.
2. Les matrices globales ne sont pas locales mais seulement le calcul est local.

#### Le calcul de $\varphi^j$

Le calcul de  $\varphi^j$  est lié à la subdivision, la fonction  $\varphi^j$  est calculée localement à l'intérieur d'un masque centré sur le nouveau sommet. Si  $i \in [1, n_j]$ , alors  $\varphi^j$  représente l'influence du som-

met  $V_i$  dans le calcul des nouveaux sommets au niveau supérieure  $j + 1$ . (voir la figure 2.4).

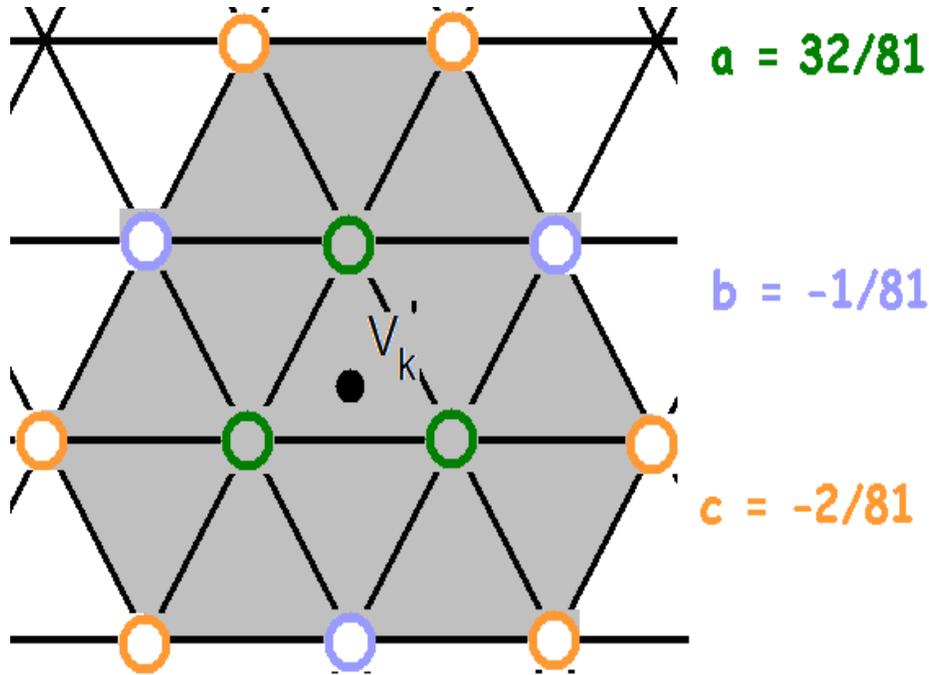


Figure 2.4 : Masque de calcul.

**Le calcul de  $\psi^j$  :**

La fonction  $\psi^j$  est calculée localement à l'intérieure constitué de la superposition de plusieurs disques. Si  $K \in [1, n_{j+1} - n_j]$ , alors  $\psi^j$  est l'ondelettes associée au point virtuel  $W_k$  tels que :

$$W_k = Z^j (k - n_j).$$

Nous devons construire la fonction  $\psi^j$  en utilisant la condition d'orthogonalité entre  $\varphi^j$  et  $\psi^j$  :

$$\forall i \in [1, n_j], \forall k \in [1, n_{j+1} - n_j] : \langle \varphi^j, \psi^j \rangle = 0.$$

### Exemple 2

On limite un voisinage aux trois sommets d'un triangle de niveau  $j$ , on écrit :

$$\psi_k^j = \psi_\Delta^j + \alpha \psi_a^j + \beta \psi_b^j + \gamma \psi_c^j, \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \psi_\Delta^j \text{ est l'ondelettes de Dirac.}$$

Avec  $\alpha, \beta, \gamma$  son calculées à partir de ces trois équations :

$$\langle \varphi_a^j, \psi_k^j \rangle = 0,$$

$$\langle \varphi_b^j, \psi_k^j \rangle = 0,$$

$$\langle \varphi_c^j, \psi_k^j \rangle = 0.$$

Pour calculer  $\langle \varphi_a^j, \psi_k^j \rangle$ , on utilise le produit scalaire de  $\varphi_a^j$  et  $\psi_k^j$  vecteurs de  $\mathbb{R}^{nj+1}$ .

D'après le calcul des fonctions échelles et ondelettes locales, le système informatique effectue une synthèse locale en utilisant la relation

$$Y^{j+1} = P^j Y^j + Q^j Z^j.$$

De même il effectue une analyse locale en utilisant des relations identiques aux relations globales :

$$Y^j = A^j Y^{j+1} \quad \text{et} \quad Z^j = B^j Y^{j+1}.$$

### 2.3.3 Compression

Après l'analyse, un maillage  $(K^j, Y^j)$  est transformé en un maillage  $(K^0, Y^0)$  et en des détails  $Z^0, Z^1, Z^2, \dots, Z^{j-1}$ . Donc le fait de remplacer un maillage par son maillage multi-résolution, permet un gain de place lors du stockage puisque cela revient à remplacer  $K^j$  par  $K^0$ . En général  $K^0$  est très petit devant  $K^j$  et on peut considérer que l'analyse permet de gagner l'espace de stockage de  $K^j$ .

**Remarque 2.3.1** *Pour obtenir une meilleure approximation en modifiant les détails  $Z^j$ .*

### 2.3.4 Remaillage

Afin de pouvoir compresser un maillage  $(K^j, Y^j)$ , nous devons le remailler. C'est à dire construire un maillage  $(K^{j'}, Y^{j'})$  ayant environ le même nombre de sommets et de facettes que  $(K^j, Y^j)$ .

**Exemple4** Dans la figure suivante on donne un maillage triangulaire d'une tête en utilisant

la subdivision en  $\sqrt{3}$

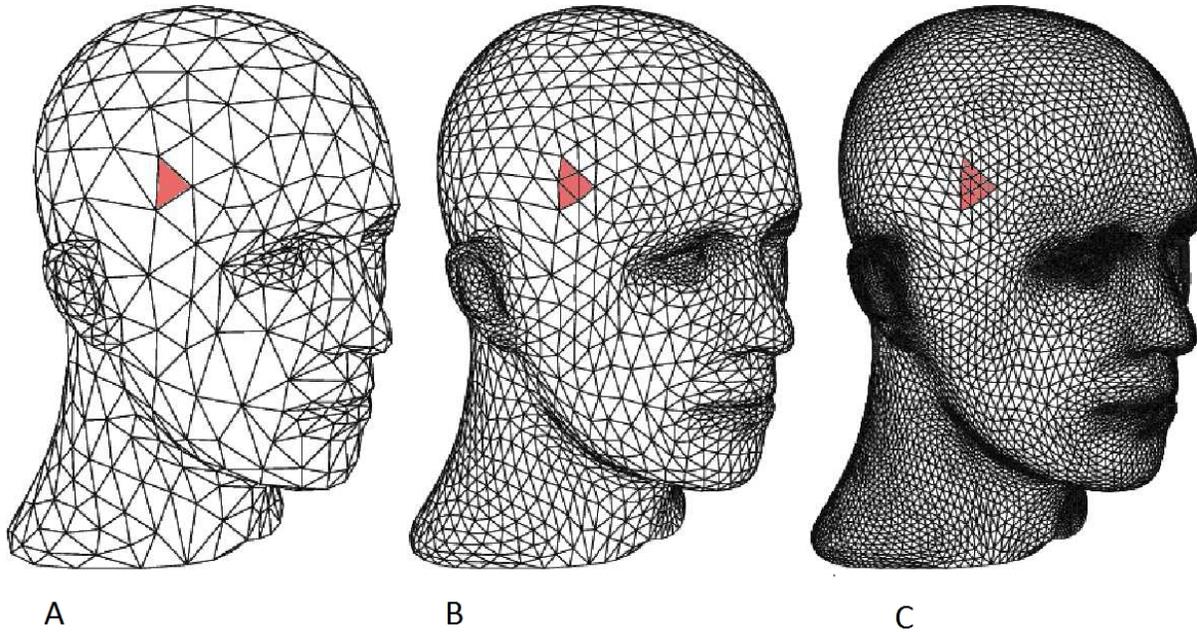


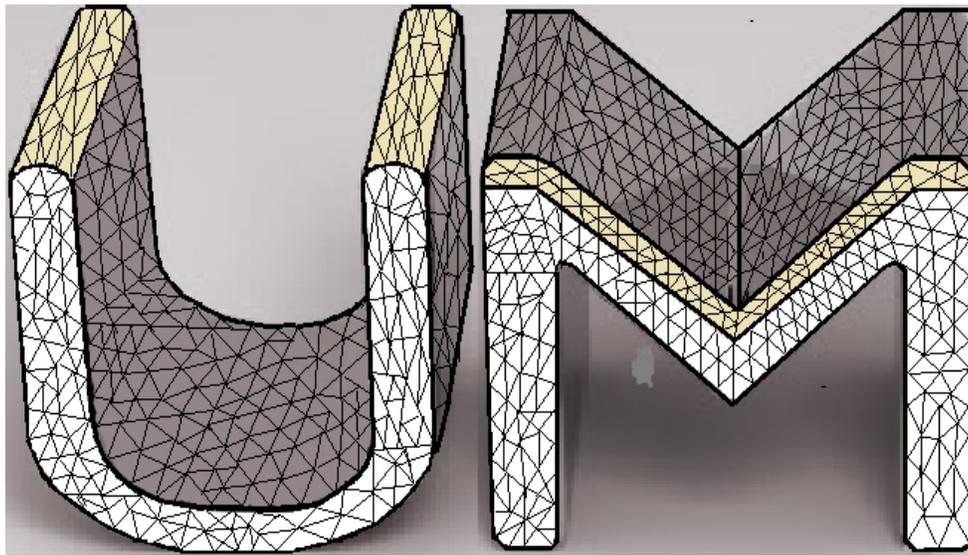
Figure 2.5 : Subdivision en  $\sqrt{3}$  d'un maillage triangulaire

A : Maillage de contrôle

B : Maillage de niveau 2

C : Maillage de niveau 4

**Exemple5 :** Dans cet exemple, on va représenter un objet 3D par son maillage triangulaire



*Figure 2.6 : Representation d'une image 3D par un maillage triangulaire*



*Figure 2.7 : Objet 3D*

---

## CONCLUSION

---

Ce mémoire a été consacré à l'étude théorique et appliquée de la transformée en ondelettes sur les maillages multi-résolution 3D. Nous avons appliquées la transformée en ondelette pour la compression d'un maillage 3D considérons une méthode de subdivision en  $\sqrt{3}$ . La méthode d'analyse multi-résolution associée à la subdivision en  $\sqrt{3}$  exposée dans ce travail permet d'obtenir un fort taux de compression sans altération visuelle. De plus, elle permet de traiter des objets 3D de très grandes tailles que nous ne pouvions pas traiter avant avec l'approche classique car la transformée en ondelettes classique nécessite le chargement de tout l'objet en mémoire avant de le traiter ce qui n'est pas possible car les objets que nous traitons sont très détaillés et possèdent des tailles énormes. La principale application est la transmission rapide de formes sur un réseau informatique.

Cette méthode de subdivision est très utilisée dans plusieurs systèmes logiciels. Par exemple, le système logiciel *MEFP3C* (Maillage Évolutif de Formes avec Pavage par Polygones à sommets 3-connexes). Ce système est utilisé pour soigner son interactivité, et pour qu'il soit facilement utilisable par des non spécialistes de la programmation, afin de leur permettre d'expérimenter dans leur domaine.

---

## Bibliographie

- [1] A. Elkefi, M. Antonin, "Compression de maillages 3D multi-résolution, transformée en ondelettes 2ème génération.", Novembre 2003.
- [2] A. Elkefi, S. Abbadi, M. Antonini, and C. Ben Amar, "Compression de maillages 3D de grandes résolutions par transformée en ondelettes au fil de l'eau", 20ième colloque GRETSI sur le Traitement du signal et des images, Louvain-la-Neuve, Belgique, 6-9 september 2005.
- [3] C. Roudet, F. Dupont, A. Baskurt "Comparaison de schémas de décomposition en ondelettes pour un traitement local des maillages surfaciques triangulaires". Lyon 2008.
- [4] Gourret J.P, Guillot O. "Maillage déformable multi-résolution et implantation dans le système logiciel MEFP3C", Journée Modélisation de la tête humaine. Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Paris V MAP5 UMR-CNRS, (Juin 2007b).
- [5] Guillot O, Gourret J.P, " $\sqrt{3}$  subdivision and 3 connected meshes with creases, boundaries and holes ". Computer Graphics Visualization and Computer Vision WSCG, Plzen (CZ), Feb.2006a.
- [6] Guillot O, Gourret J.P. "Local Multiresolution of a mesh based on  $\sqrt{3}$  subdivision and surface discontinuities » Proc. of International Conference on Computer Graphics Theory and Applications, GRAPP'07, pp.180-187, Barcelone (mars 2007a)
- [7] Khamlichi J, Gourret J.P. « MEFP3C : Un système logiciel pour le maillage évolutif de formes avec pavage par polygones à sommets 3-connexes», CNRIUT 2004. Tome 1 Sciences et techniques pour l'ingénieur, Nice-Sophia Antipolis, p.87 et Annexe au tome 1, p.81-88.
- [8] Kobbelt L. «  $\sqrt{3}$  subdivision », Proc. SIGGRAPH., 2000, P.103-112.
- [9] Labsik U., Greiner G. « interpolatory  $\sqrt{3}$  subdivision », EUROGRAPHIC., Vol 19(3), 2000.
- [10] Olivier Guillot, Jean-Paul Gourret "Analyse multirésolution par ondelettes pour la compression d'un maillage dans le système logiciel MEFP3C". Lyon, 29-30 mai 2008.
- [11] Valérie Perrier "Application de la théorie des ondelettes" Institut National Polytechnique de Grenoble. Mars 2005.