UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

DE MASTER MATHÉMATIQUES

Option : Analyse fonctionelle

Titre :

Équation différentielle abstraite du second ordre à coefficients opérateurs variables vérifiant l'hypothèse de différentiabilité des résolvantes

Présenté par

Bouralia Fatima

Soutenu le 26 / 06 / 2012

Devant le Jury

Melle. KheiraLimam	Président	M.C	U. MOSTAGANEM
Mme. Fatima Bouziani	Examinateur	M.C	U. MOSTAGANEM
Mr. Ahmed Medeghri	Encadreur	PROF	U. MOSTAGANEM

Remerciements

Je remercie **Mr.MEDEGHRI Ahmed** qui a dirigé ce travail, pour son aide et ses encouragements.
Je tiens également à remercier **Melle Limam kheira** et **Mme Bouziani fatima** d'avoir accepté de présider le jury.et d'en faire partie.
Je voudrais aussi, et surtout, remercier **mes parents** pour leur aide continue, et sans oublier mes soeurs, mes frères, et mes amis pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.
Enfin un grand Merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'équation différentielle opérationnelle du second ordre avec conditions aux limites ,de la forme

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)u(t) - \lambda u(t) = f(t) & t \in [0,1] \\ u(0) = d_0 \\ u(1) = d_1 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

f appartenant à $C([0,1];E)$ où E un espace de Banach complexe , d_0, d_1,sont donnés dans $E.\{A(t)\}_{t\in[0,1]}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaines $D(A(t))$ non nécessairement denses dans E ,vérifiant l'hypothèse de différentiabilité des résolvantes de **Da.Prato - Grisvard** [3].

$$(A(t)-z)^{-1}\text{existe pour } z \geq \lambda et \left\|(A(t)-z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{K}{|Z|}. \tag{0.0.2}$$

$$\begin{cases} \text{La fonction } t \mapsto (A(t)-\lambda)^{-1} \in C^2([0,1];L(E)) \ \ \forall\lambda > 0 \ \text{ et} \\ \exists\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right] \ \text{ et } N > 0 \text{ tels que :} \\ \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}(A(t)-z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{N}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{2}}} & \forall\lambda > 0 \\ \left\|\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{N}{\lambda^{\alpha}} & \forall\lambda > 0 \end{cases} \tag{0.0.3}$$

$$\begin{cases} \exists\eta \in \left]0,1\right[\ \text{ tel que :} \\ \left\|\dfrac{\partial}{\partial t}(A(t)-z)^{-1} - \dfrac{\partial}{\partial s}(A(s)-z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{N \ \ |t-s|^{\eta}}{\lambda^{\alpha+\frac{1}{2}}} \ \ \forall\lambda > 0 \\ \left\|\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-z)^{-1} - \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(A(s)-z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \dfrac{N \ \ |t-s|^{\eta}}{\lambda^{\alpha}} \ \forall\lambda > 0. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Dans ce travail, on s'intéresse à l'éxistence, l'unicité et la régularité maximale des solutions strictes dans l'espace $(C[0,1];E)$ lorsque le second membre f est assez régulier i.e $f \in C^{\delta}([0,1];E)$ avec

$$\delta \in \left]0,1\right[.$$

La méthode suivie ici est basée sur une construction explicite de la solution sous forme d'une intégrale de Dunford, pour la régularité on utilisera certains espaces d'interpolation.
Dans le chapitre 1, on rappelle quelques notions et définitions sur les opérateurs, et les espaces d'interpolation.
Au chapitre 2, on considère le cas particulier où A constant (ne dépend pas de t), on utilise dans ce chapitre l'unique hypothèse (0.0.2).
Au chapitre 3, on reprend l'étude de l'équation (0.0.1) avec conditions aux limites non homogènes et sous l'hypothèse de la différentiabilité sur la résolvante de **Da.Prato -Grisvard** [3]. Ce travail est une partie de la thèse de **Rabah Labbas [6]** en suppriment les contraintes $f(0) = f(1) = 0$(comme dans **Da.Prato -Grisvard** [3]) et on ajoutant des conditions nécessaires sur les donneés et le second membre f. Le résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *On suppose vérifieés les hypothèses* (0.0.2), (0.0.3) *et* (0.0.4);*soit* f *dans l'espace*$C^{\delta}\left([0,1]\,;E\right)$ *telle l'espace* $C^{\delta}\left([0,1]\,;E\right)$ *telle que* $f(0) \in D_{A(0)}(\frac{\delta}{2},\infty)$ *et* $f(1) \in D_{A(1)}(\frac{\delta}{2},\infty)$ *;on suppose de plus que* $L_0(g) \in D_{A(0)}(\frac{\delta}{2},\infty)$ *et* $L_1(g) \in D_{A(1)}(\frac{\delta}{2},\infty)$ *alors la solution* u *vérifie :*

$u''(.)$ et $A(.)u(.) \in C^{\beta}\left([0,1]\,;E\right)$ où $\beta \in \left]0, \min(2\alpha,\eta,\delta)\right[$.
avec

$$\begin{aligned}
L_0(g) &= g(0) - \frac{1}{i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}_{t=0}\right]g(s)dsdz \\
L_1(g) &= g(1) - \frac{1}{i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}_{t=1}\right]g(s)dsdz.
\end{aligned}$$

Enfin au chapitre 4, on étudie un exemple concret d'Equation Dériveés Partielle de type elliptique, on l'écrit alors sous forme d'une Equation Différentielle Abstraite pour utiliser les résultats des chapitres précédents.

Chapitre 1

Notations Et Rappels

Soit E un espace de Banach complexe.
On considère les espaces suivants

$$\begin{aligned} C\left([0,1];E\right) &= \{f:[0,1]\longrightarrow E;\ f \text{ continue}\} = C(E). \\ C^{\theta}\left([0,1];E\right) &= \{f\in C(E);\ f \text{ holdérienne d'exposant } \theta\} \end{aligned}$$

munis des normes usuelles suivantes

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{\theta}(E)} &= \max\|f(t)\| + \max_{t,s}\frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^{\theta}}. \\ \|f\|_{C(E)} &= \max_{t}\|f(t)\|_{E}. \end{aligned}$$

Définition 1.0.1 *A est un opérateur linéaire sur E ssi c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ de E à valeurs dans E ($A: D(A)\subset E\longrightarrow E$).*

Définition 1.0.2 *On dit que l'opérateur A est fermé si et seulement si pour tout suite $(x_n)\subset D(A)$ telle que $x_n$converge vers x et Ax_n converge vers y, alors $x\in D(A)$ et $Ax=y$.*

Définition 1.0.3 *A étant un opérateur linéaire fermé sur E définie $\rho(A)$ ensemble résolvant de A par*

$$\rho(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}/(\lambda I-z)^{-1}\in\mathcal{L}(E)\right\},$$

et le spectre de A par

$$\sigma(A)=\mathbb{C}/\rho(A).$$

Définition 1.0.4 *on appelle espace d'interpolation au sens de Lions-Peetre l'espace*

$$D_A\left(\theta,+\infty\right)=\left(D_A;E\right)_{1-\theta,+\infty}=\left\{x\in E;\sup_{t>0}\left\|t^{\theta}A(A-t)^{-1}x\right\|_E\leq K\right\}\ \text{avec } \theta\in\left]0,1\right[.$$

1.0.1 Solution stricte

Le cas constant

$$(P.L.1) \qquad \begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) \\ u(0) = x \\ u(1) = y \end{cases}$$

u est dit solution stricte de le problème $(P.L.1)$ si
i) $u \in C^2\left([0,1]\,;E\right) \cap C\left([0,1]\,;D_A\right)$
ii) u vérifie $(P.L.1)$.

Le cas variable

$$(P.L.2) \qquad \begin{cases} u''(x) + A(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = x \\ u(1) = y \end{cases}$$

u est dit solution stricte de le problème $(P.L.2)$ si
i) $u \in C^2\left(E\right) \cap C\left(D_{A(.)}\right)$
ii) u vérifie $(P.L.2)$.

1.0.2 Intégrale de Dunford

Soit T un opérateur linéaire fermé et $\sigma(T)$ son spectre .Notons $F(T)$ l'espace des fonctions à variable complexe qui sont analytique dans un ensemble fermé contenant $\sigma(T)$ .La formule de Cauchy pour les fonctions analytiques est définie par l'intégrale de Dunford suivant

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\lambda)(\lambda - T)^{-1}d\lambda$$

où $f \in F(T)$ et γ une courbe simple inclue dans $\rho(T)$.

1.0.3 Inégalité de Hölder

Soit

$$\begin{cases} f \in L^p \\ g \in L^p \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq \infty \\ 1 \leq q \leq \infty \end{cases}$$

alors

$$fg \in L^1$$

et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$$

1.0.4 Les relations

$$
\begin{aligned}
\sinh\sqrt{-z}(a+b) &= \sinh\sqrt{-z}a\cosh\sqrt{-z}b+\cosh\sqrt{-z}a\sinh\sqrt{-z}b\\
\cosh\sqrt{-z}(a+b) &= \cosh\sqrt{-z}a\cosh\sqrt{-z}b+\sinh\sqrt{-z}a\sinh\sqrt{-z}b.
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Cas A constant

2.1 Position du problème et hypothèses

soit A un opérateur linéaire fermé de domaine D_A, on considère alors le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t), & t \in [0,1] \\ u(0) = x \\ u(1) = y. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Où x, $y \in E$, $f \in C([0,\ 1]\,;\, E)$ tq A vérifie l'hypothèse

$$\begin{cases} \exists c_0 \in \mathbb{R}\ ,\ M \geq 0, \text{ tels que :} \rho(A) \supset [-c_0^2, +\infty[\\ \| (\lambda - A)^{-1} \|_{L(E)} \leq \dfrac{M}{1+ \mid \lambda \mid}\ ;\ \forall \lambda \in [-c_0^2, +\infty[\end{cases} \tag{2.1.2}$$

Lemme 2.1.1 $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} / \mid \arg \lambda \mid \leq \delta_0\}$ *où* $\delta_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Preuve Si $x > 0$, Alors $x \in \rho(A)$ tq $\rho(A) \supset [0, +\infty[$
Donc

$$\exists (A - xI)^{-1}$$

On a

$$(A - (x + iy)I)^{-1} = (A - xI)\left[I - iy(A - xI)^{-1}\right]$$

est inversible si et seulement si

$$\| y(A - xI)^{-1} \| < 1$$

On a

$$\| y(A - xI)^{-1} \| \leq \frac{\mid y \mid}{x} < 1$$

$$\begin{cases} x = \mid \lambda \mid \cos \delta_0 \\ y = \mid \lambda \mid \sin \delta_0 \end{cases} \Longrightarrow \tan \delta_0 < 1 \Longrightarrow 0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}$$

Avec $\delta_0 = \arg \lambda$.

1. **Remarque**
2. Si $x = y = 0$.Alors le preblème (2.1.1)est un cas particulier de la théorie des sommes d'opérateurs dévelopées dans Da-Prato-Grisvard[3].
3. L'hypothèse 2.1.2 n'implique pas que A est un générateur infinitésimal de semi groupe analytique mais que $(-A)^{-1/2}$ l'est.(Voir Balakrishnan[1]).

Dans ce chapitre on va étudier l'existence ,l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte de (2.1.1).

2.2 Construction de la solution

on considère le problème :

$$\begin{cases} v''(t) + zv(t) = f(t) \\ v(0) = x \\ v(1) = y \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Où $x, y \in E$, $f \in C(E)$ et $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$.
On résoud l'équation homogène

$$v''(t) + zv(t) = 0$$

La détermination analytique de la racine carreé de $-z$ est choisie de telle sorte que

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z} > 0$$

Il connu que la solution de l'équation homogène est de la forme

$$v(t) = c_1 e^{\sqrt{-z}t} + c_2 e^{-\sqrt{-z}t}.$$

On cherche la solution de l'équation non homogène on utilise la méthode de la variation des constantes i.e :

$$v(t) = c_1(t)e^{\sqrt{-z}t} + c_2(t)e^{-\sqrt{-z}t}$$

telles que C_1 et C_2 sont deux fonctions à déterminer vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{\sqrt{-z}t} + c_2'(t)e^{-\sqrt{-z}t} = 0 \\ \sqrt{-z}c_1'(t)e^{\sqrt{-z}t} - \sqrt{-z}c_2'(t)e^{-\sqrt{-z}t} = f(t). \end{cases}$$

Les déterminants de ce système est

$$D = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{-z}t} & e^{-\sqrt{-z}t} \\ \sqrt{-z}e^{\sqrt{-z}t} & -\sqrt{-z}e^{-\sqrt{-z}t} \end{vmatrix} = -2\sqrt{-z},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\sqrt{-z}t} \\ f(t) & -\sqrt{-z}e^{-\sqrt{-z}t} \end{vmatrix} = -f(t)e^{-\sqrt{-z}t}$$

et

$$D_2 = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{-z}t} & 0 \\ \sqrt{-z}e^{\sqrt{-z}t} & f(t) \end{vmatrix} = f(t)e^{\sqrt{-z}t}.$$

Donc la solution est donnée par

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{2\sqrt{-z}} f(t) e^{-\sqrt{-z}t} \\ c_2'(t) = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{2\sqrt{-z}} e^{\sqrt{-z}t} f(t) \end{cases}$$

en intégrant, on obtient

$$\begin{cases} c_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{-\sqrt{-z}s} f(s)ds + K_1 \\ c_2(t) = \frac{-1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{\sqrt{-z}s} f(s)ds + K_2. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} v_z(t) &= \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{-\sqrt{-z}s} e^{\sqrt{-z}t} f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-z}t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{\sqrt{-z}s} e^{-\sqrt{-z}t} f(s)ds + K_2 e^{-\sqrt{-z}t} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{\sqrt{-z}(t-s)} f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-z}t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^t e^{-\sqrt{-z}(t-s)} f(s)ds + K_2 e^{-\sqrt{-z}t}. \end{aligned}$$

Donc les conditions aux limites nous donnent

$$\begin{cases} v(0) = x \\ v(1) = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = x \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}} f(s)ds + K_1 e^{\sqrt{-z}} + K_2 e^{-\sqrt{-z}} = y \end{cases}$$

On remplace $K_1 = x - K_2$ dans la deuxième équation on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\sinh(1-s)}{\sqrt{-z}} f(s)ds + x e^{\sqrt{-z}} + K_2(e^{-\sqrt{-z}} - e^{\sqrt{-z}}) = y$$

$$\Longrightarrow -2K_2 \sinh\sqrt{-z} = y - x e^{\sqrt{-z}} - \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_0^1 \sinh\sqrt{-z}(1-s) f(s)ds$$

$$\Longrightarrow K_2 = \frac{-y}{2\sinh\sqrt{-z}} + \frac{x e^{\sqrt{-z}}}{2\sinh\sqrt{-z}} + \frac{1}{2\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} \int_0^1 \sinh\sqrt{-z}(1-s) f(s)ds$$

D'où

$$\begin{aligned} K_1 &= x - K_2 = x + \frac{y}{2\sinh\sqrt{-z}} - \frac{x e^{\sqrt{-z}}}{2\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} \int_0^1 \sinh\sqrt{-z}(1-s) f(s)ds. \end{aligned}$$

En reportant ces deux expressions dans $v_z(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
v_z(t) &= \frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_0^t e^{\sqrt{-z}(1-s)}f(s)ds + \left[x + \frac{y}{2\sinh\sqrt{-z}} - \frac{xe^{\sqrt{-z}}}{2\sinh\sqrt{-z}}\right]e^{\sqrt{-z}t} \\
&\quad - \left[\frac{1}{2\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_0^1 \sinh(1-s)f(s)ds\right]e^{\sqrt{-z}t} \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{-z}}\int_0^1 e^{-\sqrt{-z}(t-s)}f(s)ds + \left[\frac{-y}{2\sinh\sqrt{-z}} + \frac{xe^{\sqrt{-z}}}{2\sinh\sqrt{-z}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_0^1 \sinh\sqrt{-z}(1-s)f(s)ds\right]e^{-\sqrt{-z}t} \\
&= \frac{\left[\left(2\sinh\sqrt{-z} - e^{\sqrt{-z}}\right)e^{\sqrt{-z}t} + e^{\sqrt{-z}}e^{-\sqrt{-z}}\right]}{2\sinh\sqrt{-z}}x + \frac{e^{\sqrt{-z}t} - e^{-\sqrt{-z}t}}{2\sinh\sqrt{-z}}y \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^t \sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}tf(s)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ v(t) &= \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}x + \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}y + \frac{1}{\sqrt{-z}}\int_0^t \sinh\sqrt{-z}(t-s)f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_0^t \sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}tf(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_t^1 \sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}tf(s)ds \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_0^t \left[\sinh\sqrt{-z}(t-s)\sinh\sqrt{-z} - \sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t\right]f(s)ds \\
&\quad \sinh\sqrt{-z}(1-t)x + \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}y
\end{aligned}$$

Ona

$$\begin{aligned}
& \sinh\sqrt{-z}(t-s)\sinh\sqrt{-z} - \sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t \\
= & -\sinh\sqrt{-z}\left[\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}s - \cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}s\right] \\
& + \sinh\sqrt{-z}t\left[\sinh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}s - \sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}\right] \\
= & \sinh\sqrt{-z}s\left[\sinh\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}t - \cosh\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}t\right] \\
= & \sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t).
\end{aligned}$$

Alors

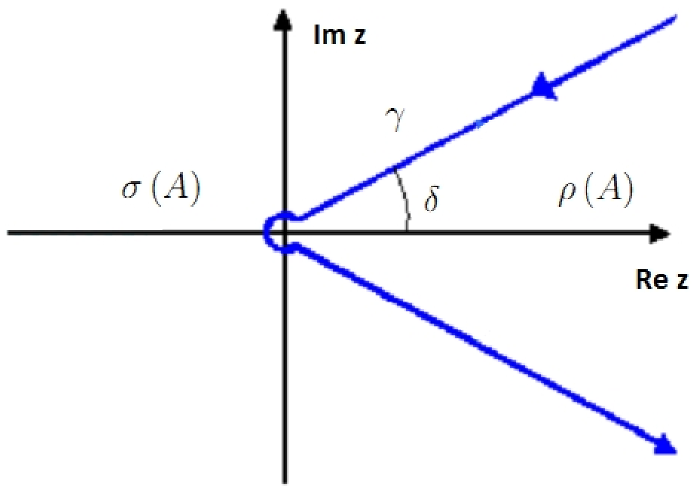
$$\begin{aligned}
v_z(t) &= -\frac{1}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_0^t \sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}sf(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\int_t^1 \sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)f(s)ds \\
&\quad + \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}x + \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}y.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow v_z(t) = \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}x + \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}y - \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\, f(s)ds$$

Où

$$k_{\sqrt{-z}}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} & \text{si } t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Soit γ une courbe simple joignant de $\infty e^{i\delta}$ à $\infty e^{-i\delta}(\delta \in]0,\delta_0[)$ telle que $\gamma \subset \rho(A) - \mathbb{R}^+$. On a $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ alors $-z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.



La solution de (2.1.1) est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma v_z(t)(z-A)^{-1}dz \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}xdz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}ydz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(z-A)^{-1}f(s)dsdz. \end{aligned}$$

Les intégrales sont convergentes d'aprés les lemmes techniques suivants :

Lemme 2.2.1 *soit* $t \in [0,1]$

$$\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\right| \leq K\exp(-|z|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\delta}{2}t)$$

Preuve *On a*

$$\begin{aligned}\left|\sinh\sqrt{-z}(1-t)\right| &\leq \left|e^{\sqrt{-z}(1-t)} - e^{-\sqrt{-z}(1-t)}\right| \\ &\leq \left|e^{-\sqrt{-z}(1-t)}\right|\left|e^{2\sqrt{-z}(1-t)} - 1\right| \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}e^{2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)} \\ &\leq K\ e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}t} \\ &\leq ke^{-|z|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\delta}{2}t}\end{aligned}$$

ceci car :

$$\operatorname{Re}\sqrt{-z}t = |z|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\delta}{2}t$$

Pour minimiser $\left|\sinh\sqrt{-z}\right|$ *on applique le lemme suivant :*

Lemme 2.2.2 *Soit* $b \in [0,1]$ *et* $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors il existe une constante*

$$K_{\theta_0} = \min(1 - e^{-\varepsilon_0\cos\theta_0}, 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\tan\theta_0}) > 0$$

telle que

$$\left|1 \pm be^{-z}\right| \geq K_{\theta_0}$$

pour tout

$$z \in S_{\theta_0,\varepsilon_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0,\varepsilon_0)}.$$

Preuve L'idée de la preuve est inspiré du travail [2].Soit $z \in \partial S_{\theta_0,\varepsilon_0}$(où $\partial\ S_{\theta_0,\varepsilon_0}$ est la frontière de $S_{\theta_0,\varepsilon_0}$).
Pour $|z| = \varepsilon_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|1 - be^{-z}\right| &\geq \left|1 - e^{-\operatorname{Re} z}\right| \\ &\geq 1 - be^{-\varepsilon_0\cos\theta_0} \\ &\geq 1 - be^{-\varepsilon_0\cos(\arg z)},\end{aligned}$$

car $\arg z \in \left]-\theta_0, \theta_0\right[$ et $b \in [0,1]$.
Pour $|z| \geq \varepsilon_0$ et $\arg z = \theta_0$, on a

$$\left|1 - be^{-z}\right|^2 = 1 + b^2e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z).$$

Si $\operatorname{Re} z \leq \dfrac{\pi}{2}\tan\theta_0$, on trouve

$$|\operatorname{Im} z| = \operatorname{Re} z \tan\theta_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

alors

$$0 \leq \cos(\operatorname{Im} z) \leq 1,$$

et

$$\left|1 - be^{-z}\right|^2 \geq 1 + b^2e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z} = (1 - be^{-\operatorname{Re} z})^2,$$

et comme $0 \leq b \leq 1$, on obtient

$$\left|1 - be^{-z}\right| \geq 1 - be^{-\operatorname{Re} z} \geq 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\tan\theta_0}.$$

Si $\operatorname{Re} z \geq \dfrac{\pi}{2}\tan\theta_0$, il vient

$$\left|1 - be^{-z}\right|^2 = 1 + b^2 e^{-2\operatorname{Re} z} - 2be^{-\operatorname{Re} z}\cos(\operatorname{Im} z) \geq 1,$$

ainsi

$$\left|1 - be^{-z}\right| \geq 1 \geq 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\tan\theta_0}.$$

On déduit donc

$$\left|1 - be^{-z}\right| \geq \min(1 - be^{-\varepsilon_0\cos\theta_0}, 1 - be^{-\frac{\pi}{2}\tan\theta_0}),$$

pour tout $z \in \partial S_{\theta_0,\varepsilon_0}$.
De même manière, on montre que

$$\left|1 + be^{-z}\right| \geq \min(1 - be^{-\varepsilon_0\cos\theta_0}, 1 - be^{-\frac{\pi}{2}\tan\theta_0}).$$

D'après le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}
\left|\sinh\sqrt{-z}\right| &= \left|e^{\sqrt{-z}} - e^{-\sqrt{-z}}\right| \\
&= \left|e^{\sqrt{-z}}\right|\left|1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right| \\
&\geq K(\delta)e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}
\end{aligned}$$

avec

$$K(\delta) = \min(1 - e^{-\varepsilon_0\cos\frac{\delta}{2}}, 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\delta}{2}}) > 0$$

Alors

$$\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\right| \leq K(\delta)\frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}} \leq K(\delta)e^{-|z|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\delta}{2}t}.$$

Lemme 2.2.3

$$\left\|\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(z-A)^{-1}f(s)ds\right\|_E \leq K\frac{\|f\|_{C(E)}}{|z|^2}.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(t,s)\right| ds &= \int_0^t \left|k_{\sqrt{-z}}(t,s)\right| ds + \int_t^1 \left|k_{\sqrt{-z}}(t,s)\right| ds \\
&= \int_0^t \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| ds + \int_t^1 \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| ds \\
&= \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| \int_0^t \left|\sinh\sqrt{-z}s\right| ds \\
&\quad + \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right| \int_t^1 \left|\sinh\sqrt{-z}(1-s)\right| ds \\
&\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{|z|^{\frac{1}{2}}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \int_0^t \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}sds \\
&\quad + \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{|z|^{\frac{1}{2}}\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \int_t^1 \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-s)ds \\
&\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{|z|\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} + \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{|z|\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \\
&\leq \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|\left|\sinh\sqrt{-z}\right|} \\
&\leq \frac{K}{|z|}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left\|\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(z-A)^{-1}f(s)ds\right\|_E \leq \frac{K}{|z|^2}\|f\|_{C(E)}.$$

2.3 Résultat principal

Théorème 2.3.1 *Sous l'hypothèse* (2.1.2) *et* $f \in C^{2\theta}([0,1],E)$ *avec* $0 < 2\theta < 1$ *et* $x, y \in D_A$*, alors si* $f(0) - Ax$ *et* $f(1) - Ay \in \overline{D}_A$ *le problème* (2.1.1) *admet une solution* u *vérifiant :*

$$\begin{aligned}
i)u(t) &\in D(A) \\
ii)Au(.) &\in C([0,1],E) \ \ ssi\ f(0)-Ax, f(1)-Ay\ \ et\ f(1) \in \overline{D_A} \\
ii)Au(.) &\in C([0,1],E) \ \ ssi\ f(0)-Ax, f(1)-Ay\ \ et\ f(1) \in \overline{D_A} \\
iii)Au(.) &\in C^{2\theta}([0,1],E) \ \ ssi\ f(0)-Ax, f(1)-Ay\ \ et\ f(1) \in D_A(\theta,+\infty) \\
vi)Au(.)-f(.) &= u''(.) \in B(D_A(\theta,+\infty)) \ \ ssi\ f(0)-Ax, f(1)-Ay\ \ et\ f(1) \in D_A(\theta,+\infty).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Le cas variable $A(x)$

3.1 Position du problème et hypothèses

On considère le problème

$$\begin{cases} v''(t) + A(t)v(t) - \lambda v(t) = h(t) & \forall \lambda > 0 \\ v(0) = x \\ v(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec les hypothèses de Da Prato-Grisvard [2] :

$$(A(t) - z)^{-1} \text{ existe pour } z \geq \lambda \text{ et } \left\|(A(t) - z)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{K}{|z|}. \tag{3.1.2}$$

$$\begin{cases} \text{la fonction } t \longrightarrow (A(t) - \lambda)^{-1} \in C^2\left([0,1]\,; L(E)\right) & \forall \lambda > 0 \text{ et} \\ \exists \alpha \left]0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } N > 0 \text{ tels que :} \\ \left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{N}{\lambda^{\frac{1}{2}+\alpha}} & \forall \lambda > 0 \\ \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t) - \lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{N}{\lambda^{\alpha}} & \forall \lambda > 0 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{cases} \exists \eta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ tel que :} \\ \left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1} - \frac{\partial}{\partial s}(A(s) - \lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{N|t-s|^{\eta}}{\lambda^{\frac{1}{2}+\alpha}} & \forall \lambda > 0 \\ \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t) - \lambda)^{-1} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}(A(s) - \lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq \frac{N|t-s|^{\eta}}{\lambda^{\alpha}} & \forall \lambda > 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

1. Ces hypothèses restent encore valables dans un secteur du plan complexe $\sum\limits_{\delta} \supset \rho(A(t) - \lambda)$ où
$$\sum_{\delta} = \{z \in \mathbb{C} / \left|\arg z\right| \leq \delta\}.$$
2. On utilisera l'hpothèse (3.1.4) uniquement pour la régularité optimale de la solution .On se propose alors de résoudre le problème (3.1.1) en supprimant les contraintes $h(0) = h(1) = 0$ (comme dans Da Prato-Grisvard[3]).

On s'intéressera aux solutions strictes ce qui suppose que $x \in D_{A(0)}$.On réduit alors le problème (3.1.1) à un problème homogène en posant :
$u(t) = v(t) - \varphi(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x$ où $\varphi \in D(\mathbb{R}_+)$ avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 0$ alors u vérifie :

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)u(t) - \lambda u(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Où

$$\begin{aligned} f(t) &= h(t) - \varphi(t)(A(0) - \lambda I) - \varphi(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x - 2\varphi'(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\varphi''(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x. \end{aligned}$$

Preuve Ona :

$$\begin{cases} u(0) = x - (A(0) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

En dérivant $u(t)$ deux fois on obtient

$$u'(t) = v'(t) - \varphi'(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x - \varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x$$

et

$$\begin{aligned} u''(t) &= v''(t) - \varphi''(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -2\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\varphi(t)\frac{\partial^2}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u''(t) + A(t)u(t) - \lambda u(t) &= v''(t) - \varphi''(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -2\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\varphi(t)\frac{\partial^2}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x + A(t)v(t) \\ &\quad -A(t)\varphi(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\lambda\varphi(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &= v''(t) + (A(t) - \lambda I)v(t) - \varphi(t)(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\varphi(t)\frac{\partial^2}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -2\varphi'(t)\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &\quad -\varphi''(t)(A(t) - \lambda I)^{-1}(A(0) - \lambda I)x \\ &= f(t) \end{aligned}$$

3.2 Construction de la solution

En s'inspirant de Da.Prato-Grisvard [3] on cherche solution de (3.1.5) sous forme d'intégrale de Dunford

$$u(t)=\frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz$$

où $\phi(t)=(A(t)-\lambda)$; γ étant une courbe simple définie comme dans le chapitre (2) et g est une fonction à chercher en fonction de la donnée f dans un espace à préciser .

Remarque Si $A(t)=A$ (cas constant) alors $g=f$.

Proposition 3.2.1 *On suppose que* $g\in C^{\beta}([0,1]\,;E)$ *avec* $0<\beta<1$ *alors :*

i) $u(t)\in D_{A(t)}$, $\forall t\in[0,1]$.

ii) g vérifie l'équation $g(t)-p_{\lambda}g(t)=f(t)$ pour $t\in[0,1]$ où :

$$p_{\lambda}g(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz$$
$$-\frac{2}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{t}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz$$
$$+\frac{2}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{t}^{1}\frac{\cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz$$

Preuve. *i)*Si $t=0$ ou $t=1$,$u(0)=u(1)=0$ grâce à la représentation de u et donc $u(0)\in D_{A(0)}$ et $u(1)\in D_{A(1)}$. □ *i)* Si $t=0$ ou $t=1$, $u(0)=u(1)=0$ grâce à la représentation de u et donc $u(0)\in D_{A(0)}$ et $u(1)\in D_{A(1)}$.

soit $0<t<1$;on peut écrire que

$$\begin{aligned}u(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(t,s)(A(t)-\lambda-z)^{-1}\left[g(s)-g(t)\right]dsdz\\ &\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{(A(t)-\lambda-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\ &\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{(A(t)-\lambda-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\ &\quad+(A(t)-\lambda)^{-1}g(t).\end{aligned}$$

En appliquant $(A(t)-\lambda)$ et utilisant le fait que $g\in C^{\beta}\left([0,1]\,;E\right)$, on montre que les intégrales sont absolûment convergentes .Pour la première intégrale on a :

$$\begin{aligned}\triangle &= \left\|\int_{0}^{1}k_{\sqrt{-z}}(t,s)\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\|\\ &\leq K\sup_{t}\int_{0}^{1}\left|k_{\sqrt{-z}}(t,s)(t-s)^{2\theta}\right|ds\\ &\leq K\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}\int_{0}^{t}(t-s)^{2\theta}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}sds\\ &\quad+K\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}\int_{t}^{1}(s-t)^{2\theta}\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-s)ds\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder ona :

$$\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s = (\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s)^{1-2\theta} (\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s)^{2\theta}$$

$$\Longrightarrow (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s = (\operatorname{Re} \cosh \sqrt{-z}s)^{1-2\theta} ((t-s) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s)^{2\theta}.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds \\ \leq \quad & (\int_0^t \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds)^{1-2\theta} (\int_0^t \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(t-s)ds)^{2\theta} \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{p} = 1 - 2\theta \text{ et } \frac{1}{q} = 2\theta$$

$$\int_0^t \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds = \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}$$

$$\int_0^t \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(t-s)ds = \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2}$$

Alors

$$\int_0^t (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds \leq (\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}})^{1-2\theta} (\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2})^{2\theta}$$

Doù

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\right|} \int_0^t (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds \\ \leq \quad & \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\right|} (\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}})^{1-2\theta} (\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}t - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2})^{2\theta} \end{aligned}$$

Dautre part on a

$$(s-t)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s) = (\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s))^{1-2\theta} ((s-t) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s))^{2\theta}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_t^1 (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}sds \\ \leq \quad & (\int_t^1 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s)ds)^{1-2\theta} (\int_t^1 (s-t) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s)ds)^{2\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} . \int_t^1 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s)ds &= \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-t)}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\ . \int_t^1 (s-t) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-s)ds &= \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-t) - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2} \end{aligned}$$

Alors

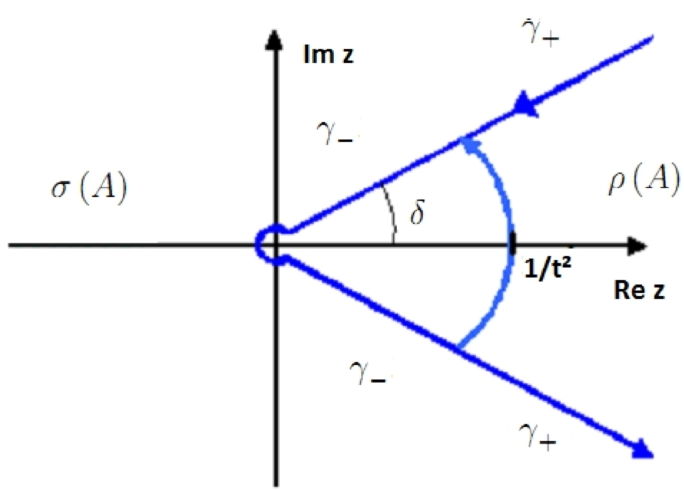
$$\int_t^1 (t-s)^{2\theta} \cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-s)ds \leq (\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}})^{1-2\theta}(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)-1}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^2})^{2\theta}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\triangle &\leq K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}(\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}})^{1-2\theta}(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t-1}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^2})^{2\theta} \\
&+K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}(\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}})^{1-2\theta}(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)-1}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^2})^{2\theta} \\
&\leq K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}(\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}})^{1-2\theta}(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t-1}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^2})^{2\theta} \\
&+K\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|}\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^{1+2\theta}}(\frac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)})^{2\theta} \\
&\leq K\frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\left|\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}\right|(\operatorname{Re}\sqrt{-z})^{1+2\theta}} \\
&\leq \frac{K}{|z|^{1+\theta}}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième et la troixième intégrale ona :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z}g(t)dz \\
=\ &\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma+} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z}g(t)dz \\
&\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z}g(t)dz.
\end{aligned}$$



Où $\gamma_+ = \left\{z \in \gamma; |z| \geq \frac{1}{t^2}\right\}$ et $\gamma_- = \left\{z \in \gamma; |z| \leq \frac{1}{t^2}\right\}$

En désignant par I_+et I_- les deux dernières intégrales ona

$$\|I_+\|_E \leq K \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}}{|z|} |dz| \, \|g\|_{C^\beta(E)}$$

d'aprés le lemme (2.1.3) ona

$$\begin{aligned} \|I_+\|_E &\leq K \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \cos\frac{\delta}{2}}}{t^2 \frac{\sigma^2}{t^2}} 2\sigma d\sigma \, \|g\|_{C^\beta(E)} \\ &\leq K \|g\|_{C^\beta(E)} . \end{aligned}$$

On a posé : $\sigma = |-z|^{\frac{1}{2}} t$.
Pour I_- on écrit que

$$\begin{aligned} I_- &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t) - \sinh\sqrt{-z}}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z} g(t) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z} g(t) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t) - \sinh\sqrt{-z}}{\sinh\sqrt{-z}} \frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z} g(t) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_t} \frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z} g(t) dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{c_t} \frac{\phi(t)(z-\phi(t))^{-1}}{z} g(t) dz. \end{aligned}$$

Où $\gamma_t = \gamma_- \cup c_t$ et $c_t = \left\{ z; |\arg z| \leq \delta \text{ et } |z| = \frac{1}{t^2} \right\}$.
L'intégrale sur γ_t est nulle.Pour les deux autres intégrales on pose :

$$I_- = I'_- + I''_-.$$

Ona

$$\begin{aligned} \left\| I'_- \right\|_E &\leq K \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{t^2}} \frac{|z|^{\frac{1}{2}} t}{|z|} |dz| \, \|g\|_{C^\beta(E)} \\ &\leq K \|g\|_{C^\beta(E)} . \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \left\| I''_- \right\|_E &\leq K \int_{-\delta}^{+\delta} \left\| \left(\frac{1}{t^2} e^{i\theta} - \phi(t)\right)^{-1} \right\| . \frac{1}{t^2} d\theta \, \|g\|_{C^\beta(E)} \\ &\leq K \|g\|_{C^\beta(E)} . \end{aligned}$$

D'où la convegence de l'intégrale.

Pour le point *ii)* on a

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_t^1 \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(t)dz\\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^t \frac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_t^1 \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz
\end{aligned}$$

Les deux premières (jumeleés) sont convergentes grâce à l'hypothèse (3.1.3) et les deux deuxièmes (jumeleés)le sont aussi. Pour dériver $u'(t)$ on considère $u'_\varepsilon(t)$ définie par :

$$\begin{aligned}
u'_\varepsilon(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_O^{t+\varepsilon} \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon} \frac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)\right\}ds\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^1 \frac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz
\end{aligned}$$

et $u'_\varepsilon(t) \longrightarrow u'(t)$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$; on a alors

$$\begin{aligned}
u''_\varepsilon(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)dsdz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{-\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(t-\varepsilon)\right\}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\sqrt{-z}\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(t+\varepsilon)\right\}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
= \quad & -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& +\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
& -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz
\end{aligned}
$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon''(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad +\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz\\
&= I_1^\varepsilon+I_2^\varepsilon+I_3^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothése (3.1.4) les deux premières intégrales sont convergentes et tendent vers :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&+\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^t \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)dsdz\\
&-\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_t^1 \sqrt{-z}\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)dsdz\\
=\ &-p_\lambda g(t).
\end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale on developpe

$$\begin{aligned}
I_3^\varepsilon &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(t-\varepsilon)\right\}dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(t+\varepsilon)\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\sqrt{-z}(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}g(s)ds\right\}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right]g(t-\varepsilon)\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\right]g(t+\varepsilon)\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz \\
&\quad +-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}g(t)-\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}g(t)\right]dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}g(t)-\frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}g(t)\right]dz\\
=\;&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\right]g(t-\varepsilon)\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\right]g(t+\varepsilon)\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left\{\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[g(s)-g(t)\right]ds\right\}dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)+\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}\right]\\
&g(t)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz
\end{aligned}
$$

Et donc :

$$
\begin{aligned}
u''_\varepsilon(t)+\phi(t)u(t) &= -p_\lambda g(t)+g(t)\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t-\varepsilon)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t+\varepsilon)dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)+\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\right].\\
&\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma\int\limits_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left[g(s)-g(t)\right]dsdz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz\\
&= g(t)-p_\lambda g(t)+A_\varepsilon-B_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Avec :

$$
\begin{aligned}
A_\varepsilon &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t-\varepsilon)dz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t+\varepsilon)dz
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)+\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\right].\\
&\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz
\end{aligned}
$$

Il suffit de voir que $A_\varepsilon - B_\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.
On écrit que

$$\begin{aligned}
& A_\varepsilon - B_\varepsilon \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}} g(t-\varepsilon) - \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}} g(t)\right]. \\
& \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z} dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}} g(t+\varepsilon) - \frac{\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}} g(t)\right]. \\
& \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z} dz \\
= \; & \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\left[g(t-\varepsilon)-g(t)\right] dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon) - \cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t\ \right]. \\
& \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} g(t) dz + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon) \\
& .\left[g(t+\varepsilon)-g(t)\right] dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} \left[\cosh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\right. \\
& \left. - \cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}(1-t)\right] g(t) dz \\
= \; & \sum_{i=1}^{4} I_i
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de démontrer que $(I_1 + I_2) \longrightarrow 0$; $(I_3 + I_4) \longrightarrow 0$ pour $\varepsilon \longrightarrow 0$.On décompose I_1 en écrivant que :

$$\begin{aligned}
I_1 \;=\; & \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\geq \frac{1}{\varepsilon^2}}} \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\left[g(t-\varepsilon)-g(t)\right] dz \\
& + \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq \frac{1}{\varepsilon^2}}} \frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}} \cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\left[g(t-\varepsilon)-g(t)\right] dz \\
=\; & I_1' + I_1''.
\end{aligned}$$

On a la majoration suivante :

$$\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\right| \leq K e^{-|z|^{\frac{1}{2}}\varepsilon}.$$

Car

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}{\sinh\sqrt{-z}}\right| &= \left|\frac{\left(e^{\sqrt{-z}(1-t)}+e^{-\sqrt{-z}(1-t)}\right)\left(e^{\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}-e^{-\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}\right)}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}-e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}}\right| \\
&\leq \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}\left|1+e^{-2\sqrt{-z}(1-t)}\right| e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}\left|1-e^{-2\sqrt{-z}(t-\varepsilon)}\right|}{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\left|1-e^{-2\sqrt{-z}}\right|} \\
&\leq Ke^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}(1-e^{-|z|^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\delta}{2}}) \\
&\leq Ke^{-|z|^{\frac{1}{2}}\varepsilon\cos\frac{\delta}{2}} \\
&\leq Ke^{-|z|^{\frac{1}{2}}\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\|I_1'\|_E &\leq K\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\geq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}\varepsilon}}{|z|}\varepsilon^\beta\,|dz|\,\|g\|_{C^\beta(E)} \\
&\leq K\varepsilon^\beta\,\|g\|_{C^\beta(E)}\longrightarrow 0 \quad\text{quand } \varepsilon\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Pour I_1'' on a

$$\begin{aligned}
I_1'' &= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\,[g(t-\varepsilon)-g(t)]\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\big[\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon) \\
&\quad -\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}t\big]\,[g(t-\varepsilon)-g(t)]\,dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}t\,[g(t-\varepsilon)-g(t)]\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_t^{t-\varepsilon}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}s\,[g(t-\varepsilon)-g(t)]\,dzds \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}t\,[g(t-\varepsilon)-g(t)]\,dz \\
&= I_1'''+I_2'''.
\end{aligned}$$

On majore enfin chacune de ces intégrales :

$$\begin{aligned}
\|I_1'''\|_E &\leq K\int_t^{t-\varepsilon}\int_{K_0}^{\frac{1}{\varepsilon^2}}\frac{|dz|}{|z|^{\frac{1}{2}}}\|g\|_{C^\beta(E)}\,ds \\
&\leq K\varepsilon.\varepsilon^\beta\int_{K_0}^{\frac{1}{\varepsilon^2}}\frac{d\rho}{\rho^{\frac{1}{2}}}\|g\|_{C^\beta(E)} \\
&\leq K\varepsilon^\beta\|g\|_{C^\beta(E)}\longrightarrow 0 \\
&\quad\text{quand } \varepsilon\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ceci car

$$\left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}\right|\leq Ke^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}\leq K.$$

$$\begin{aligned}
\|I_2'''\|_E &\leq K\varepsilon^\beta\int\limits_{\substack{\gamma\\|z|\leq\frac{1}{\varepsilon^2}}}\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{|z|}\|g\|_{C^\beta(E)} \\
&\leq K\varepsilon^\beta\int_{K_0}^{\frac{1}{\varepsilon^2}}\frac{d\sigma}{\sigma}\|g\|_{C^\beta(E)} \\
&\leq K\varepsilon^\beta|\lg\varepsilon|\,\|g\|_{C^\beta(E)}\longrightarrow 0 \\
&\quad\text{pour }\ \varepsilon\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Il reste encore à montrer que $I_2\longrightarrow 0$ avec $\varepsilon\longrightarrow 0$
On rappelle que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left[\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t\right]. \\
&\quad\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}g(t)dz \\
&= \frac{1}{4i\pi}\int_\gamma\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\left[\sinh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)-\sinh\sqrt{-z}(1-2t+\varepsilon)\right]g(t)dz
\end{aligned}$$

Car ona

$$\begin{aligned}
\sinh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon) &= \sinh\sqrt{-z}\left[(1-t-\varepsilon)-t\right] \\
&= \sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t-\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\sinh\sqrt{-z}(1-2t+\varepsilon) &= -\sinh\sqrt{-z}\left[(1-t)-(t-\varepsilon)\right] \\
&= -\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)+\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}(1-t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\sinh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)-\sinh\sqrt{-z}(1-2t+\varepsilon)\\
=\ &\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t-\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\\
&+\sinh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t-\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)
\end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
&\sinh\sqrt{-z}((1-t)-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t\\
=\ &\left[\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}\varepsilon-\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\cosh\sqrt{-z}(1-t)\right]\cosh\sqrt{-z}t
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&-\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\\
=\ &\left[-\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}\varepsilon+\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\sinh\sqrt{-z}t\right]\sinh\sqrt{-z}(1-t).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\sinh\sqrt{-z}((1-t)-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}t-\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\\
=\ &\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t)-\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}t
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)\cosh\sqrt{-z}(1-t)\\
=\ &\left[\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}\varepsilon-\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\cosh\sqrt{-z}t\right]\cosh\sqrt{-z}(1-t)\\
&-\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\\
=\ &-\sinh\sqrt{-z}(1-t)\left[\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}\varepsilon-\sinh\sqrt{-z}\varepsilon\sinh\sqrt{-z}(1-t)\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sinh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)-\sinh\sqrt{-z}(1-2t+\varepsilon)\\
=\ &2\left[\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\varepsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-t-\varepsilon)\sinh\sqrt{-z}t\right].
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4i\pi}\int_\gamma\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z\sinh\sqrt{-z}}\left[\sinh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)-\sinh\sqrt{-z}(1-2t+\varepsilon)\right]g(t)dz\\
&= -\frac{1}{4i\pi}\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\int_\gamma\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}\sqrt{-z}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}g(t)dzds.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\int_\gamma\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}s}}{|z|^{\frac{1}{2}}}|dz|\,ds\,\|g\|_{C^\beta(E)}\\
&\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\int_{K_0^{\frac{1}{2}}}^{+\infty}\frac{e^{-\sigma}}{s.\sigma}2.\sigma d\sigma ds\,\|g\|_{C^\beta(E)}\\
&\leq K\left|\lg\frac{2t+\varepsilon}{2t-\varepsilon}\right|\|g\|_{C^\beta(E)}\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

La proposition (3.2.1) est alors complètement démontrée.
En conclusion on vient de voir que pour g dans l'espace $C^{\beta}([0,1];E)$ on l'équation intégrale :

$$g(t) - p_{\lambda}g(t) = f(t).$$

Proposition 3.2.2 *Sous l'hypothèses* (3.1.2) *et* (3.1.3) *et pour* $f \in L^{\infty}([0,1];E)$ *alors il existe* λ^* *tel que pour tout*$\lambda \geq \lambda^*$ *l'équation*

$$g - p_{\lambda} = f$$

admet une unique solution g *dans l'espace* $L^{\infty}([0,1];E)$.

3.3 Estimation à priori pour la solution stricte

On se propose ici de donner une estimation à priori pour les solutions strictes .

Proposition 3.3.1 *On suppose que le problème* (3.1.5) *admet une solution stricte* $u(t)$ *(i.eu* $\in C^2([0,1];E) \cap C\left([0,1];D_{A(.)}\right)$*)alors sous les hypothèses*(3.1.2) *et* (3.1.3) *il existe* λ^* *tel que pour tout* $\lambda \geq \lambda^*$ *on a :*

$$\max_t \|u(t)\|_E \leq K \int_0^1 \|f(s)\| \, ds.$$

Preuve. □
De l'équation

$$u''(s) + \phi(s)u(s) = f(s)$$

On déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1} f(s) ds dz \\ = & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1} \left[u''(s) + \phi(s)u(s)\right] ds dz \end{aligned}$$

Et on explicite cette dernière intégrale .En faisant une première intégration par parties il vient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}u''(s)ds &= \int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u''(s)ds \\
&+ \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u''(s)ds \\
&= \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)\right]_0^t \\
&- \int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&- \int_0^t \frac{\cosh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&+ \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)\right]_t^1 \\
&- \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&- \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&= -\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&- \int_0^t \frac{\cosh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&- \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds \\
&- \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u'(s)ds
\end{aligned}
$$

En faisant une deuxième intégration par parties il vient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}u''(s)ds \;=\; & -\left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)\right]_0^t \\
& + \int_0^t \frac{\cosh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& + \int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& - \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)\right]_0^t \\
& + \int_0^t \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& + \int_0^t \frac{\cosh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& - \left[\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)\right]_t^1 \\
& - \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& + \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& + \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)\right]_t^1 \\
& + \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& + \left[\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)\right]_t^1 \\
& + \int_t^1 \frac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}(1-s)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
& - \int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds
\end{aligned}
$$

D'autre part ona :

$$\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}\phi(s)u(s)ds = \int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)u(s)ds + z\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds$$

Or par hypothèse $u(t) \in D_{\phi(t)}$ et donc

$$(\phi(t)-z)^{-1}u(t) = \frac{(\phi(t)-z)^{-1}\phi(t)u(t)}{z} - \frac{u(t)}{z}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}\left[u''(s)+\phi(s)u(s)\right]dsdz \\
=\ &\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial S}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds+2\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds \\
&-2\int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds-\frac{(\phi(t)-z)^{-1}\phi(t)u(t)}{z} \\
&+\left[\frac{u(t)}{z}+\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)u(s)ds\right]
\end{aligned}$$

u est une solution stricte donc $u(0)=u(1)=0$ et $u''\in C(E)$ alors :

$$\frac{u(t)}{z}+\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)u(s)ds=\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{u''(s)}{z}ds$$

Passant aux intégrales sur γ il vient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}f(s)ds \\
=\ &-u(t)+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\left[\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds+\int_0^1 k'_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial}{\partial s}(\phi(s)-z)^{-1}u(s)ds\right]dz \\
=\ &\left\{\left(-I+\overline{p_\lambda}\right)u\right\}(t)\,.
\end{aligned}$$

D'aprés l'hypothése (3.1.4) on vérifie que

$$\|\overline{p_\lambda}\|_{L(L^\infty(E))}\leq\frac{K}{\lambda^\alpha}$$

On déduit que'il existe un λ^* tel que pour $\lambda\geq\lambda^*$

$$\begin{aligned}
\max_t\|u(t)\|_E\ &\leq\ K\max_t\left\|\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}f(s)dsdz\right\|_E \\
&\leq\ K\int_0^1\|f(s)\|_E\,ds.
\end{aligned}$$

Car on a

$$\max_t\left\|k_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(s)-z)^{-1}\right\|_{L(E)}\leq\frac{K}{|z|^{\frac{1}{2}+1}}.$$

3.4 Régularité de la solution

On part de l'équation $g - p_\lambda g = f$ et on sait que $\exists \lambda^* / \forall \lambda \geq \lambda^*$ il existe une unique solution g, de cette équation dans l'espace $L^\infty(E)$.On s'intéresse à la régularité de g.On la proposition suivante

Proposition 3.4.1 *On suppose*(3.1.2),(3.1.3) *et* (3.1.4) *et* $f \in C^\delta([0,1];E)$ *alors il existe un* λ^* *tel que pour* $\lambda \geq \lambda^*, g$ *est dans l'espace* $C^\beta([0,1];E)$ *où* $\beta \leq \min(2\alpha, \eta, \delta)$.

Preuve Pour montrer que $g \in C^\beta([0,1];E)$ il suffit de démontrer que $p_\lambda g$ est aussi dans l'espace $C^\beta([0,1];E)$ pour $g \in L^\infty(E)$. On a

$$\begin{aligned}
p_\lambda g(t) - p_\lambda g(\tau) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&+\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&+\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&-\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&+\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_t^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&-\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&= A+B.
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&-\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^t \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&+\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&-\frac{2}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^1 \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)\cosh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz
\end{aligned}$$

On va majorer $\|A\|$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Où

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^t k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
A_3 - A_4 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_t^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(A(t)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(A(\tau)-\lambda-z)^{-1}g(s)dsdz
\end{aligned}$$

Pour $\tau < t$ on a

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\sinh\sqrt{-z}(1-t)-\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^\tau \frac{\sinh\sqrt{-z}s\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\phi(\tau)-z)^{-1}\right]g(s)dsdz\\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_\tau^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz\\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Pour $\tau < t$ on a
Pour I_1on a

$$I_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\tau}\int_{\gamma}\int_t^{\tau}\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-\zeta)}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)d\zeta dzds$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_E &\leq K\int_0^{\tau}\int_{\gamma}\int_{\tau}^{t}\frac{e^{-|z|\frac{1}{2}(\zeta-s)}}{|z|^{\alpha}}d\zeta\,|dz|\,ds\,\|g\|_{L(E)} \\
&\leq K\int_0^{\tau}\int_{\gamma}\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{e^{-|z|\frac{1}{2}m}}{|z|^{\alpha}}dm\,|dz|\,ds\,\|g\|_{L(E)} \\
&\leq K\int_0^{\tau}\int_{\tau-s}^{t-s}\int_0^{+\infty}\frac{2.\sigma e^{-\sigma}}{m^2(\frac{\sigma^2}{m^2})^{\alpha}}dmd\sigma ds\,\|g\|_{L(E)} \\
&\leq K\int_0^{\tau}\int_{\tau-s}^{t-s}m^{2\alpha-2}dmds\,\|g\|_{L(E)} \\
&\leq K(t-s)^{2\alpha}\,\|g\|_{L(E)}\,.
\end{aligned}$$

Pour I_2 ona :

$$\begin{aligned}
I_2 \;=\; & \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\gamma \\ |z|\geq\frac{1}{(\tau-s)^2}}}\int_0^{\tau}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\phi(\tau)-z)^{-1}\right]g(s)dsdz \\
& +\frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\gamma \\ |z|\leq\frac{1}{(\tau-s)^2}}}\int_0^{\tau}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(\phi(\tau)-z)^{-1}\right]g(s)dsdz
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &\le K\int_0^\tau \int_{\substack{\gamma\\ |z|\ge \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(\tau-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} \frac{|t-\tau|^\eta}{|z|^\alpha} |dz|\, ds \, \|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\quad + K\int_0^\tau \int_{\substack{\gamma\\ |z|\le \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(\tau-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}} \frac{|t-\tau|^\eta}{|z|^\alpha} |dz|\, ds \, \|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\le K\int_0^\tau \int_1^{+\infty} \frac{2.\sigma e^{-\sigma}}{(\tau-s)^2\left(\frac{\sigma^2}{(\tau-s)^2}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}} d\sigma ds\, |t-\tau|^\eta \, \|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\quad + K\int_0^\tau \int_{K_0}^{\frac{1}{(\tau-s)^2}} \frac{1}{\rho^{\alpha+\frac{1}{2}}} |t-\tau|^\eta \, d\rho ds\, \|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\le K\,|t-\tau|^\eta\, \|g\|_{L^\infty(E)}\,.
\end{aligned}$$

Pour I_3 on a

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\gamma\\ |z|\ge \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \int_\tau^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1} g(s) ds dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\substack{\gamma\\ |z|\le \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \int_\tau^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1} g(s) ds dz
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_\tau^t \int_{\substack{\gamma \\ |z|\geq \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|z|^\alpha}\,|dz|\,ds\,\|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\quad +K\int_\tau^t \int_{\substack{\gamma \\ |z|\leq \frac{1}{(\tau-s)^2}}} \frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|z|^\alpha}\,|dz|\,ds\,\|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\leq K\int_\tau^t\int_1^\infty \frac{2\sigma e^{-\sigma}}{(t-s)^2(\frac{\sigma^2}{(t-s)^2})^{\alpha+\frac{1}{2}}}d\sigma ds\,\|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\quad +K\int_\tau^t\int_{K_0}^{\frac{1}{(t-s)^2}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\frac{1}{2}}}ds\,\|g\|_{L^\infty(E)} \\
&\leq K\,|t-\tau|^{2\alpha}\,\|g\|_{L^\infty(E)}\,.
\end{aligned}$$

Pour I_3 on a

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\gamma \\ |z|\geq \frac{1}{(\tau-s)^2}}}\int_\tau^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi}\int_{\substack{\gamma \\ |z|\leq \frac{1}{(\tau-s)^2}}}\int_\tau^t \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz
\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\|I_3\|_E &\leq K\int_{\tau}^{t}\int_{\substack{\gamma\\ |z|\geq\frac{1}{(\tau-s)^2}}}\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|z|^{\alpha}}|dz|\,ds\,\|g\|_{L^\infty(E)}\\
&\quad +K\int_{\tau}^{t}\int_{\substack{\gamma\\ |z|\leq\frac{1}{(\tau-s)^2}}}\frac{e^{-|z|^{\frac{1}{2}}(t-s)}}{|z|^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{|z|^{\alpha}}|dz|\,ds\,\|g\|_{L^\infty(E)}\\
&\leq K\int_{\tau}^{t}\int_{1}^{\infty}\frac{2\sigma e^{-\sigma}}{(t-s)^2(\frac{\sigma^2}{(t-s)^2})^{\alpha+\frac{1}{2}}}d\sigma ds\,\|g\|_{L^\infty(E)}\\
&\quad +K\int_{\tau}^{t}\int_{K_0}^{\frac{1}{(t-s)^2}}\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\frac{1}{2}}}ds\,\|g\|_{L^\infty(E)}\\
&\leq K\,|t-\tau|^{2\alpha}\,\|g\|_{L^\infty(E)}\,.
\end{aligned}
$$

Alors la proposition (3.2.4) est démontrée.
Connaissant la régularité de g on peut étudier celle de u on rappele que la représentation de u est donnée par

$$u(t)=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}K_{\sqrt{-z}}(t,s)(\phi(t)-z)^{-1}g(s)dsdz.$$

D'autre part de l'équation $g-P_\lambda g=f$ on tire :

$$
\begin{aligned}
g(0)-\frac{1}{i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)-z)^{-1}_{t=0}\right]g(s)dsdz &= f(0)\\
g(1)-\frac{1}{i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}s}{\sinh\sqrt{-z}}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(t)-z)^{-1}_{t=1}\right]g(s)dsdz &= f(1)
\end{aligned}
$$

On rappelera respectivement ces deux opérateurs $L_0(g)$ et $L_1(g)$.On a alors la proposition suivante

Proposition 3.4.2 *On suppose les hypothèses* (3.1.2),(3.1.3) *et* (3.1.4) *et soit f dans l'espace $C^{\delta}([0,1];E)$ tel que $f(0)\in\overline{D}_{A(0)}$ et $f(1)\in\overline{D}_{A(1)}$.On suppose de plus que $L_0(g)\in\overline{D}_{A(0)}$ et $L_1(g)\in\overline{D}_{A(1)}$ alors donnée par la représentation ci -dessus est l'unique solution stricte du problème* (4) *;de plus $u\in C^{2,\min(\delta,2\alpha,\eta)}(]0,1[;E)$.*

Preuve grâce à l'éstimation de la proposition (3.2.3) on obtient l'unicité de la solution stricte du problème (3.1.5).D'aprés la proposition (3.2.2) on a $u(t) \in D_{A(t)}$ $\forall t \in [0,1]$
Si $t \in]0,1[$ alors u vérifie :

$$u''(t) + \varphi(t)u(t) = f(t)$$

grâce à la proposition (3.2.2) .
Il suffit donc de démontrer que :
$i)$ $\varphi(.)u(.)$ est continue en 0 et en 1.
$ii)\varphi(.)u(.) \in C^{\min(\delta,2\alpha,\eta)}(]0,1[\,;E)$.
Pour $i)$ or on a

$$\begin{aligned}
\varphi(t)u(t) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\int_{0}^{1} K_{\sqrt{-z}}(t,s)\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}\left[g(t)-g(s)\right]dsdz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz \\
&\quad +g(t) \\
&= I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+g(t)
\end{aligned}$$

Remarque
Toutes ces intégrales sont absolûment covergentes grâce à la proposition (3.2.2).
I_1 est continue en 0 et en $1(I_1(0) = I_1(1) = 0)$ de même I_2 est continue en $1(I_2(1) = 0)$ et I_3 est continue en $0(I_3(0) = 0)$.
Il suffit de démontrer que I_2 est continue en 0 et I_3 en 1.Pour démontrer que I_2 est continue en 0 en utilisant le fait que $g(0) \in \overline{D}_{A(0)}$ car $L_0(g) \in \overline{D}_{A(0)}$ et pour la majoration des intégrales en utilisant l'hypothèse (3.1.3) et l'hypothèse $g \in C^{\beta}(E)$.
Pour $ii)$ on va démontrer que $\varphi(.)u(.) \in C^{\min(\delta,2\alpha,\eta)}(]0,1[\,;E)$.

Pour $\tau > t$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(t)u(t) - \varphi(\tau)u(\tau) &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(t,s)\varphi(t)(\varphi(t)-z)^{-1}\left[g(s)-g(t)\right]dsdz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^1 k_{\sqrt{-z}}(\tau,s)(\varphi(\tau)-z)^{-1}\left[g(s)-g(\tau)\right]dsdz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(\tau)(\phi(\tau)-z)^{-1}}{z}g(\tau)dz \\
&-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(t)(\phi(t)-z)^{-1}}{z}g(t)dz \\
&+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}\frac{\phi(\tau)(\phi(\tau)-z)^{-1}}{z}g(\tau)dz \\
&+(g(t)-g(\tau)) \\
&= -(\triangle_1-\triangle_2)-(\triangle_3-\triangle_4)-(\triangle_5-\triangle_6)+(g(t)-g(\tau)).
\end{aligned}$$

On va majorer chaque terme et en utilisant le fait que $g \in L^\infty(E)$ et $g \in C^\beta(E)$ et les lemmes (2.1.2) et(2.1.4) du chapitre (2) de plus les hypothèses (3.1.2),(3.1.3) et(3.1.4).
On remarque que $\varphi(.)u(.)$ est holdérinne jusqu'en 0 et 1 si et seulement si les deux intégrales suivantes le sont

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)-\sinh\sqrt{-z}(1-\tau)}{\sinh\sqrt{-z}}(\varphi(0)-z)^{-1}g(0)dz$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t-\sinh\sqrt{-z}\tau}{\sinh\sqrt{-z}}(\varphi(1)-z)^{-1}g(1)dz$$

Or ces deux intégrales sont en $\bigcirc\left(|t-\tau|^\theta\right)$ pour $\theta \leq \min(2\alpha,\eta,\delta)$ si et seulement si

$$g(0) \in D_{A(0)}(\frac{\theta}{2},\infty) \text{ et } g(1) \in D_{A(1)}(\frac{\theta}{2},\infty).$$

Ces deux conditions sont vérifiées dès que $f(0)$ et $L_0(g)$ sont dans $D_{A(0)}(\frac{\theta}{2},\infty)$ et $f(1)$, $L_0(g)$ dans $D_{A(1)}(\frac{\theta}{2},\infty)$ d'autre part on déduit la proposition suivante :

Proposition 3.4.3 *On suppose vérifieés les hypothèses*0.0.2,0.0.3 *et* 0.0.4 *;soit f dans l'espace $C^\delta([0,1];E)$ telle que*

$f(0) \in D_{A(0)}(\frac{\delta}{2}, \infty)$ et $f(1) \in D_{A(1)}(\frac{\delta}{2}, \infty)$; on suppose de plus que $L_0(g) \in D_{A(0)}(\frac{\delta}{2}, \infty)$ et $L_1(g) \in D_{A(1)}(\frac{\delta}{2}, \infty)$ alors la solution stricte u vérifie :

$$u''(.) \ et \ A(.)u(.) \in C^{\beta}\left([0,1]\,; E\right) où \beta \in \left]0, \min(2\alpha, \eta, \delta)\right[.$$

Chapitre 4

Exemple :cas d'un intervalle

On considère le problème concret suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u(1,x) = \psi(x) \\ u(t,1) = 0 \\ a(t)u(t,0) - b(t)u_x^{'}(t,0) = 0 \end{cases} \tag{4.0.1}$$

avec

$$\begin{cases} a, b \in C^{2,\theta}([0,1]) \text{ et} \\ a(t) \geq 0 \\ \min_t b(t) > 0. \end{cases}$$

Soit $E = C([0,1] \times [0,1])$ muni de la norme du maximum et $f(t,x) \in C([0,1] \times [0,1])$.

La forme d'équation différentielle abstraite

On écrit le problème (4.0.1) sous forme d'équation d'équation différentielle abstraite

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = \varphi \\ u(1) = \psi. \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} D_{A(t)} = \{u \in C^2([0,1]) / a(t)u(0) - b(t)u'(0) = 0 \text{ et } u(1) = 0\} \\ A(t)u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \end{cases}$$

On peut en déduire alors que

$$\overline{D}_{A(t)} = \{u \in E / u(1) = 0\}.$$

Et donc $D_{A(t)}$ n'est pas dense dans E .Pour appliquer les résultat du chapitre (3) on doit donc vérifier les hypothèses (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4).

Vérification de l'hypothèse (3.1.2) **:**

On résoud le problème :

$$\begin{cases} u'' - zu = g \\ a(t)u(0) - b(t)u'(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour Re $\sqrt{-z} > 0$,la solution de l'équation homogène est

$$u(t) = c_1 e^{\sqrt{z}t} + c_2 e^{-\sqrt{z}t}.$$

Pour déteminer c_1 et c_2 on utilise la méthode de la variation de la constante :
Soit le systeme

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{\sqrt{z}x} + c_2'(x)e^{-\sqrt{z}x} = 0 \\ \sqrt{z}c_1'(x)e^{\sqrt{z}x} - \sqrt{z}c_2'(x)e^{-\sqrt{z}x} = g(x). \end{cases}$$

Alors on trouve

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} g(x)e^{-\sqrt{z}x} \\ c_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{z}} g(x)e^{\sqrt{z}x} \end{cases}$$

en intégrant, on obtient

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x e^{-\sqrt{z}x} g(s)ds + K_1 \\ c_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{z}} \int_x^1 e^{\sqrt{z}x} g(s)ds + K_2 \end{cases}$$

où K_1, K_2 deux constantes.
D'où la solution est donée par

$$u(t) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^x \sinh\sqrt{z}(x-s)g(s)ds + K_1 e^{\sqrt{z}x} + K_2 e^{-\sqrt{z}x}.$$

Pour déterminer K_1 et K_2 ,on remplace l'éxpression de la solution dans les conditions aux limites

$$\begin{cases} a(t)u(0) - b(t)u'(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Enfin on obtient

$$u_t(x) = \int_0^1 K_t(x,s)g(s)ds.$$

Où

$$K_t(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-x)}{\sqrt{z}} \dfrac{a(t)\sinh\sqrt{z}s + b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}s}{a(t)\sinh\sqrt{z} + b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}} & \text{si } 0 \le s \le x \\ \dfrac{\sinh\sqrt{z}(1-s)}{\sqrt{z}} \dfrac{a(t)\sinh\sqrt{z}x + b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}x}{a(t)\sinh\sqrt{z} + b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}} & \text{si } x \le s \le 1 \end{cases}$$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_E &= \left\|(A(t)-z)^{-1}g\right\|_E = \left\|\int_0^1 K_t(x,s)g(s)ds\right\|_E \\
&\le \sup_x \int_0^1 |K_t(x,s)|\,ds\,\|g\|_E \\
&\le \frac{K}{|z|}\|g\|_E .
\end{aligned}$$

Car on a

$$|K_t(x,s)| \le \begin{cases} \dfrac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{z}(1-x)\cosh \operatorname{Re}\sqrt{z}s}{|\sqrt{z}|}\dfrac{a(t)+b(t)\,|\sqrt{z}|}{|a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}|} & s\le x \\ \dfrac{\cosh \operatorname{Re}\sqrt{z}x\cosh \operatorname{Re}\sqrt{z}(1-s)}{|\sqrt{z}|}\dfrac{a(t)+b(t)\,|\sqrt{z}|}{|a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}|} & x\le s \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_t(x,s)|\,ds &\le \left[\sinh \operatorname{Re}\sqrt{z}x\cosh \operatorname{Re}\sqrt{z}(1-s)\right]\frac{a(t)+b(t)\,|\sqrt{z}|}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\,|\sqrt{z}|\,|a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}|} \\
&= \frac{\sinh \operatorname{Re}\sqrt{z}(a(t)+b(t)\,|\sqrt{z}|)}{\operatorname{Re}\sqrt{z}\,|\sqrt{z}|\,|a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}|}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\left|a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}\right| \ge \sinh \operatorname{Re}\sqrt{z}\left[a(t)+\operatorname{Re}\sqrt{z}b(t)\right].$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\|u_t\|_E &= \left\|(A(t)-z)^{-1}g\right\|_E \le \|g\|_E \sup_x \int_0^1 |K_t(x,s)|\,ds \\
&\le \frac{K}{|z|}\|g\|_E .
\end{aligned}$$

Vérification de l'hypothèse (3.1.3) **:**
On a

$$\left[(A(t)-z)^{-1}g\right](x) = \int_0^1 K_t(x,s)g(s)ds.$$

On utilise les hypothèses de différentiabilité des fonctions a et b pour calculer la différentiabilité de la résolvante on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-z)^{-1} = -\sinh\sqrt{z}(1-x)\frac{a(t)b'(t)+a'(t)b(t)}{a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}}\int_0^1 \sinh\sqrt{z}(1-s)g(s)ds$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-z)^{-1}g\right\|_E &\leq K\frac{\left|\sinh\sqrt{z}(1-x)\right|}{\left|\operatorname{Re}\sqrt{z}\right|^2\left|a(t)+b(t)\operatorname{Re}\sqrt{z}\right|}\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z}}{\operatorname{Re}\sqrt{z}}\left\|g\right\|_E \\
&\leq \frac{K}{(\operatorname{Re}\sqrt{z})^2\operatorname{Re}\sqrt{z}}\left\|g\right\|_E \\
&\leq \frac{K}{|z|^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left\|g\right\|_E.
\end{aligned}$$

Pour tout $\alpha\in[0,1]$;De plus on vérifie de même la condition de fermeture :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(A(t)-z\right)_{t=0,1}^{-1}g\right](x)\in\overline{D}_{A(0)}=\overline{D}_{A(1)}$$

Car

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(A(t)-z\right)_{t=0,1}^{-1}g\right](1)=0.$$

En dérivant une deuxième fois la résolvante on obtient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A(t)-z\right)^{-1}g\right](x)=\left[-\sinh\sqrt{z}(1-x)\int_0^1\sinh\sqrt{z}(1-s)g(s)ds\right]H(t).$$

Où

$$\begin{aligned}
H(t) &= \frac{(a(t)b''(t)-a''(t)b(t))(a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z})}{(a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z})^3} \\
&\quad -\frac{2(a'(t)\sinh\sqrt{z}+b'(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z})(a(t)b'(t)-a'(t)b(t))}{(a(t)\sinh\sqrt{z}+b(t)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z})^3}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A(t)-z\right)^{-1}g\right\|_E &\leq \frac{K}{|z|}\left\|g\right\|_E \\
&\leq \frac{K}{|z|^{\alpha}}\left\|g\right\|_E
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha\in[0,1]$ .L'hypothèse 0.0.3 est vérifiée.
Les mêmes calculs et les mêmes majorations pour vérifier l'hypothèse0.0.4où cette fois on utilise la régularité holdérienne des dérivées secondes des fonctions a et b .
Pour avoir la régularité maximale de u'' et de $A(.)u(.)$ on doit vérifier que :

$$L_0(g)\in D_{A(0)}(\frac{\delta}{2},\infty)etL_1(g)\in D_{A(1)}(\frac{\delta}{2},\infty)$$

où

$$L_j(g)=\frac{1}{i\pi}\int_\gamma\int_0^1\frac{\sinh\sqrt{z}(1-s)}{\sinh\sqrt{z}}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-z)_{t=j}^{-1}g(s)dsdz\qquad j=0,1$$

pour tout $g \in L^\infty(E)$.
Si $\delta \in \left]0,1\right[$ on a

$$D_{A(0)}(\frac{\delta}{2},\infty) = \left\{u \in C^\delta\left([0,1]\right)/u(1) = 0\right\}$$

Si $\delta \in \left]1,2\right[$ on a

$$D_{A(0)}(\frac{\delta}{2},\infty) = \left\{u \in C^{1,\delta-1}\left([0,1]\right)/u(1) = 0 \text{ et } a(0)u(0) - b(0)u(0) = 0\right\}$$

Supposons que $\delta \in \left]0,1\right[$, on doit vérifier que la fonction V_g définie par :

$$\begin{aligned} V_g &= \frac{1}{i\pi}\int\limits_\gamma \int\limits_0^1 \frac{\sinh\sqrt{z}(1-s)}{\sinh\sqrt{z}} \sinh\sqrt{z}(1-x)\frac{a(0)b'(0)-a'(0)b(0)}{a(0)\sinh\sqrt{z}+b(0)\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}} \\ &\quad .\int\limits_0^1 \sinh\sqrt{z}(1-\tau)g(\tau,s)d\tau ds dz \end{aligned}$$

est dans l'espace $C^\delta\left([0,1]\right) \cap \overline{D}_{A(0)}$.
On a

$$V_g(1) = 0 \in \overline{D}_{A(0)}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left|V_g(x) - V_g(y)\right| &\leq K\int\limits_\gamma \frac{\left|\sinh\sqrt{z}(1-x) - \sinh\sqrt{z}(1-y)\right|}{\left|\sinh\sqrt{z}\right|(\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z})^2\left|z\right|}\frac{(\sinh\operatorname{Re}\sqrt{z})^2}{(\operatorname{Re}\sqrt{z})}\left|dz\right|\left\|g\right\|_{C([0,1]\times[0,1])} \\ &\leq K\left|x-y\right|^\delta \left\|g\right\|_{C([0,1]\times[0,1])} \qquad\qquad \forall\delta \in \left]0,1\right[. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Balakrishnan A.V :fractional powers of closed operators and the semi groups generated by them.Pacific.J.Math.10(1960),pp.419-437.

[2] Belhamiti. O. : Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couch mince, p. 49. thèse de doctorat (2008).

[3] Daprato. G, Grisvard. P. : Sommes d'Opérateurs Linéaires et Équations Différentielles Opérationnelles, J. Math. Pures et appli. 54 (1975) ; 305-387.

[4] Haase M. :The functional calculs for sectorial operateurs and similarity methods.Thesis ,universität UIM,Germany, (2003).

[5] Krein. S. G. : Linear Differential Equations in Banach Spaces, Moscou, 1967.

[6] Labbas. R. : Problèmes aux limites pour une Équation Différentielle Abstraite de Type Elliptique, Thèse d'état ; Nice 1987.

[7] Lions. J. L et Peetre. J. : Sur une classe d'espace d'interpolation. Publ Math de D'I. H. É. S, 19 (1964), 5-68.