REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES ET D'INFORMATIQUE

Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplome de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M$^{\text{lle}}$. BENSAHNOUNE AHLAM

THEME

Sur la croissance des solutions de l'équation différentielle $w^{(n)}+e^{-z}w'+Q(z)\,w=0$ et quelques extensions liées

Soutenu le 26 / 06 / 2012 devant le Jury

Mr. Belaïdi Benharrat	**Président**	**Pr**	**UMAB**
Melle. Berrighi Nacera	**Examinatrice**	**MAA**	**UMAB**
Mr. Hamouda Saâda	**Encadreur**	**M.C.A**	**UMAB**

Année universitaire : 2011-2012

Table des matières

Introduction

Depuis plusieurs siècles, les savants ont pu modéliser des phénomènes naturels sous forme des équations différentielles et depuis ce domaine mathématiques est devenu indisponsables pour résoudre beaucoup de problèmes dans plusieurs disciplines. On sait maintenant que l'analyse complexe est un outil très puissant pour résoudre certains problèmes mathématiques durs dans l'axe réel, comme par exemple le fameux théorème de Cauchy pour les intégrales. Depuis plus de trois déscennies, plusieurs chercheurs utilisent la théorie de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe, fondée par R. Nevanlinna dans l'étude de la croissance et l'oscillations des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes. Pour l'équation différentielle

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f^{'} + A_0(z) f = 0, \qquad (0.0.1)$$

on sait que si les coefficients $A_i(z)$ $(i = 0, ..., n-1)$ sont des fonctions entières, alors toutes les solutions sont aussi des fonctions entières. Frei [12] a démontré que si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante, alors il existe au maximum p solutions indépendantes d'ordre fini de l'équation différentielle $(0.0.1)$. La question qui se pose souvent est la suivante"quels sont les conditions sur les coefficients qui assurent que toutes les solutions sont d'ordre infini. Dans ce mémoire, on vas se baser sur l'équation différentielle

$$w'' + e^{-z} w' + Q(z) w = 0, \qquad (0.0.2)$$

où $Q(z)$ est une fonctions entière, qui a été étudiée par plusieurs chercheurs, voir par exemple ([13], [27], [30], [17], [25]).

Ce mémoire contient deux chapitres. Dans le premier chapitre, on va citer les notions fondamentales de la théorie de Nevanlinna nécessaires pour notre travail et le deuxièmes chapitre est consacré à l'équations différentielle

$$w^{(n)} + e^{-z} w' + Q(z) w = 0,$$

et ses extensions. Ces résultats ont été réalisés par Hamouda et Belaidi [18].

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer seulement les éléments nécessaires à notre travail. Pour plus de détail voir [19].

1.1 Préliminaires

Définition 1.1.1 *Pour touts nombres réels $\alpha > 0$,*

on définit $\ln^+ \alpha = \max(0, \ln \alpha) = .\begin{cases} \ln x & x > 1 \\ 0 & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$
les propriétés de bases du logarithmique tronqué sont contenues dans le lemme suivant

Lemme 1.1.1

$$\ln \alpha \leqslant \ln^+ \alpha \tag{1.1.1}$$

$$\ln^+ \alpha \leqslant \ln^+ \beta, \textit{ pour } \alpha \leqslant \beta \tag{1.1.2}$$

$$\ln \alpha = \ln^+ \alpha - \ln^+ \frac{1}{\alpha} \tag{1.1.3}$$

$$|\ln \alpha| = \ln^+ \alpha + \ln^+ \frac{1}{\alpha} \tag{1.1.4}$$

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i \tag{1.1.5}$$

$$\ln^+ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \leqslant \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ \alpha_i. \tag{1.1.6}$$

1.1.1 Principe de maximun

Théorème 1.1.1 *[11] Soit $f(z) \neq const$, une fonction analytique dans un domaine simplement connexe D et continue sur sa frontière. Si on a $\forall z \in \partial D$, $|f(z)| \leqslant M$ alors $\forall z \in D$, $|f(z)| \leqslant M$.*

1.1.2 Théorème de liouville

Théorème 1.1.2 *[11] Toute fonctions entière bornée dans $\mathbb{C}$ est constante.*

1.2 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.2.1 *[20] Soit f une fonction méromorphe on définit la fonction de proximité de f par :*

$$\begin{aligned} m\left(r,a,f\right) &= m(r, \frac{1}{(f-a)}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{\left|f\left(re^{i\theta}\right)-a\right|} d\theta, \ \ si\ f \not\equiv a \in \mathbb{C} \\ m\left(r,\infty,f\right) &= m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta. \end{aligned}$$

Définition 1.2.2 *[20] Soit f une fonction méromorphe on définit la fonction $a-$ point de f par la fonction*

$$N\left(r,a,f\right) = N(r, \frac{1}{(f-a)}) = \int_0^r \frac{n\left(t,a,f\right)-n\left(0,a,f\right)}{t} dt + n\left(0,a,f\right)\ln r, \ \ si\ f \not\equiv a \in \mathbb{C} \tag{1.2.1}$$

$$N\left(r,\infty,f\right) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n\left(t,\infty,f\right)-n\left(0,\infty,f\right)}{t} dt + n\left(0,\infty,f\right)\ln r \tag{1.2.2}$$

ou $n\left(t,a,f\right)$ désigne le nombre de zéro de l'équation $f\left(z\right)=a$ dans le disque $|z| \leqslant t$, $n\left(t,\infty,f\right)$ désigne le nombre de pôle de f dans le disque $|z| \leqslant t$.

Définition 1.2.3 *[20] Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna par*

$$T\left(r,f\right) = m\left(r,f\right) + N\left(r,f\right).$$

Elle joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, notamment dans le premier théorème fondamentale de R Nevanlinna

Exemple

Pour la fonction $f(z) = e^{az}$ $(a \neq 0)$, on a

$$m\left(r,f\right) = \frac{|a|\,r}{\pi}, \ \ N\left(r,f\right) = 0,$$

d'où

$$T\left(r,f\right) = \frac{|a|\,r}{\pi}.$$

1.3 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.3.1 *[20] Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour toute nombre complexe $a \neq \infty$, on a*

$$m\left(r,a,f\right)+N\left(r,a,f\right)=T\left(r,f\right)+\varepsilon\left(r,a\right),$$

où $\varepsilon\left(r,a\right)=O\left(1\right)$, quand $r\rightarrow+\infty$.

Proposition 1.3.1 *Soit f_0, f_1, f_2.....f_n des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telle que $ad-cb\neq 0$, alors*

1. $$T\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}T\left(r,f_k\right),\ (n\geqslant 1).$$

2. $$T(r,f^n)=nT\left(r,f\right),\ (\text{ si } n\in\mathbb{N}^*).$$

3. $$T\left(r,\sum_{k=1}^{n}f_k\right)\leqslant\sum_{K=1}^{n}T\left(r,f_k\right)+\ln n.$$

4. $$T(r,\frac{af+b}{cf+d})=T(r,f)+O(1),\ f\not\equiv\frac{-d}{c}.$$

Preuve

1. On a par définition

$$T\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)=m\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)+N\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right)$$

et comme

$$\begin{aligned}m\left(r,\prod_{k=1}^{n}f_k\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\prod_{k=1}^{n}f_k\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|f_k\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\\ &\leqslant \sum_{K=1}^{n}m(r,f_k),\end{aligned}$$

et on a

$$N(r,\prod_{k=1}^{n}f_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}N(r,f_k)$$

donc

$$T(r,\prod_{k=1}^{n}f_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}T(r,f_k)$$

2. on a $|f|^n \leqslant 1 \Longleftrightarrow |f| \leqslant 1$

   i Si $|f| \leqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nN(r, f) = nT(r, f). \end{aligned}$$

   ii Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) = nT(r, f). \end{aligned}$$

3.
$$T(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) = m(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) + N(r, \sum_{k=1}^{n} f_k).$$

   On a

$$\begin{aligned} m(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \sum_{k=1}^{n} f_k \left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f_k(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + \ln n \\ &= \sum_{k=1}^{n} m(r, f) + \ln n. \end{aligned}$$

   et comme

$$N(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N(r, f_k);$$

   donc

$$T(r, \sum_{k=1}^{n} f_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} T(r, f_k) + \ln n.$$

4. On pose que

$$\begin{aligned} g &= \frac{af + b}{cf + d} = \frac{af + \frac{b}{a}}{c\left(f + \frac{d}{c}\right)} \\ &= \frac{a}{c} \times \frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \left[1 + (\frac{bc - ad}{ac}) \times (\frac{1}{f + \frac{d}{c}}) \right] \\ &= \frac{a}{c} + (\frac{bc - ad}{c^2}) \times (\frac{1}{f + \frac{d}{c}}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T(r,g) &= T(r, \frac{a}{c} + (\frac{bc-ad}{c^2}) \times (\frac{1}{f+\frac{d}{c}})) \\ &= T(r, (\frac{bc-ad}{c^2}) \times (\frac{1}{f+\frac{d}{c}})) + O(1) \qquad (1.3.1) \\ &= T(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}) + O(1) \\ &= T(r,f) + O(1). \end{aligned}$$

Exemple
Soit $f(z) = c\frac{z^p + a_{p-1}z^{p-1} + \ldots + a_p}{z^q + a_{q-1}z^{q-1} + \ldots + a_q}$, $(c \neq 0)$.
Supposons que $p > q$ alors $f(z) \to \infty$, $z \to \infty$, et donc $m(r,a,f) = o(1)$, pour $r > r_0$, si $a \neq \infty$.
L'équation $f(z) = a$ admet p racines, d'où $n(t,a,f) = p$, pour $t > t_0$. Donc

$$\begin{aligned} N(r,a,f) &= \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f) \ln r \\ &= \int_0^{t_0} \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + \int_{t_0}^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt + n(0,a,f) \ln r \\ &= [(p - n(0,a,f))] \times (\ln r - \ln t_0) + n(0,a,f) \ln r + O(1) \\ &= p \ln r - p \ln t_0 + n(0,a,f) \ln t_0 + O(1) \\ &= p \ln r + O(1). \end{aligned}$$

Par suit pour $r \to \infty$

$$T(r,f) = p \ln r + O(1), \text{ si } a \neq \infty,$$

$$m(r,a,f) = o(1), \ N(r,a,f) = p \ln r + O(1).$$

Si $p < q$, alors pour $r \to \infty$

$$T(r,f) = q \ln r + O(1)$$

$$m(r,a,f) = o(1), \ N(r,a,f) = q \ln r + O(1). \qquad \text{si } a \neq 0$$

Si $p = q$, alors pour $r \to \infty$

$$T(r,f) = p \ln r + O(1)$$

$$m(r,a,f) = O(1)$$

$$N(r,a,f) = p \ln r + O(1),$$

1.4 L'ordre et l'hyper ordre d'une fonction entière

Définition 1.4.1 *([20], [22]) Soit f une fonction entière. Alors l'ordre de f est définie par*

$$\sigma(f) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln T(r,f)}{\ln r} = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln M(r,f)}{\ln r},$$

l'hyper ordre d'une fonction entière f est définit par

$$\begin{aligned}\sigma_2(f) &= \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r}\\ &= \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\ln M(r,f)}{\ln r}.\end{aligned}$$

où $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.
Cette notion est utilisée pour préciser plus la croissance des fonctions d'ordre infini.
Exemple Soit la fonction $f(z) = (\exp\{e^z\})$ donc

$$\sigma(\exp\{e^z\}) = \infty$$

et l'hyper ordre

$$\sigma_2(\exp\{e^z\}) = 1$$

Proposition 1.4.1 *Soit f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

1. $\sigma(f+g) \leqslant \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}, \sigma(f\cdot g) \leqslant \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}$
2. Si $\sigma(g) < \sigma(f)$ alors $\sigma(f+g) = \sigma(f\cdot g) = \sigma(f)$

Preuve
On pose $\sigma(f) = \sigma_1$, $\sigma(g) = \sigma_2$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et r assez grand

$$\sigma_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln r} \Leftrightarrow T(r,f) < r^{\sigma_1+\varepsilon}$$

on a

$$T(r,f) \leqslant r^{\sigma_1+\varepsilon};\ T(r,g) \leqslant r^{\sigma_2+\varepsilon}.$$

1. Soit

$$\begin{aligned}T(r,f+g) &\leqslant T(r,f)+T(r,g)+\ln 2\\ &\leqslant r^{\sigma_1+\varepsilon}+r^{\sigma_2+\varepsilon}+\ln 2\\ &\leqslant 2r^{\max(\sigma_1,\sigma_2)+\varepsilon}+\ln 2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}T(r,f\cdot g) &\leqslant T(r,f)+T(r,g)\\ &\leqslant 2r^{\max\{\sigma_1,\sigma_2\}+\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'où $\sigma(f+g) \leqslant \max\{\sigma_1,\sigma_2\}+\varepsilon$; $\sigma(f\cdot g) \leqslant \max\{\sigma_1,\sigma_2\}+\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire alors

$$\begin{aligned}\sigma(f+g) &\leqslant \max(\sigma(f), \sigma(g)) \qquad (1.4.1)\\ \sigma(f\cdot g) &\leqslant \max(\sigma(f), \sigma(g)).\end{aligned}$$

2. Supposons $\sigma(f) > \sigma(g)$. En écrivons

$$\begin{aligned} T\left(r,f\right) &= T(r,(f+g)-g) \\ &\leqslant T(r,f+g)+T(r,g)+O(1). \\ T(r,f) &= T\left(r,\frac{fg}{g}\right) \leqslant T\left(r,fg\right)+T(r,\frac{1}{g}) \\ &= T(r,fg)+T(r,g)+O(1). \end{aligned}$$

Donc $\sigma\left(f\right) \leqslant \sigma\left(f+g\right), \sigma\left(f\right) \leqslant \sigma\left(fg\right)$, on utilisons (1.4.1) on obtient,

$$\sigma\left(f+g\right) = \sigma\left(fg\right) = \sigma\left(f\right).$$

Exemple
Soit $f(z) = z^3 + z + 1 + \frac{e^z}{z+1}$, alors

$$\sigma\left(f\right) = \sigma\left(\frac{e^z}{z+1}\right) = \sigma\left(e^z\right) = 1.$$

1.5 La mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.5.1 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0,\infty)$ par*

$$m\left(E\right) = \int_0^\infty \chi_E\left(t\right)dt$$

ou χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E,

Définition 1.5.2 *la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1,\infty)$ est définit par*

$$\operatorname{Im}\left(F\right) = \int_1^\infty \frac{\chi_E\left(t\right)}{t}dt$$

Exemple
Soit $E = [1,2]$ alors

$$m(E) = 1,\ \operatorname{Im}(E) = \ln 2$$

1.6 Le terme maximal et l'indice central

Définition 1.6.1 *[19] Soient $f\left(z\right) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une fonction entière et $\mu\left(r\right)$ le terme maximal de cette série i.e*

$$\mu\left(r\right) = \max\left\{\left|a_n\right| r^n; n = 0, 1, ..\right\},$$

alors l'indice central de la fonction f est définit par

$$\upsilon_f\left(r\right) = \max\left\{m, \mu\left(r\right) = \left|a_m\right| r^m\right\}$$

Exemple 01
Pour le polynôme $p(z) = a_n z^n + ... + a_0$, $a_n \neq 0$,
on a

$$\mu(r) = |a_n| r^n;$$

et

$$v_p(r) = n,$$

pour r asser grand.

Théorème 1.6.1 *[6]Soit f une fonction méromorphe transcendante alors,*

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f);$$

et si f est d'ordre finie alors

$$m(r, \frac{f'}{f}) = O(\ln r)$$

Remarque 1.6.1 *Dans le théorème (1.6.1) on a*

$$S(r, f) = O(\ln T(r, f) + \ln r),$$

pour $|z| = r$,à l'extérieurs d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie

Corollaire 1.6.1 *[6] Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln T(r, f) + \ln r).$$

à l'extérieurs d'un ensemble exceptionnel E de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r; \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\ln r)$$

Preuve
Si pour $k = 1$, le corollaire est vrais d'après le théorème (1.6.1).
Supposons qu'on a
$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f)$.
On a

$$m(r, f^{(k)}) = m(r, \frac{f^{(k)}}{f}.f) \leqslant m(r, f) + m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) \leqslant m(r, f) + S(r, f).$$

Si z_0 est un pôle de degré λ pour f, alors z_0 est un pôle de degrée $(\lambda + k) \leqslant (k + 1)\lambda$. Pour la dérivée $f^{(k)}$, donc

$$N(r, f^{(k)}) \leqslant (k + 1) N(r, f)$$

donc

$$\begin{aligned} T(r, f^{(k)}) &= m(r, f^{(k)}) + N(r, f^{(k)}) \\ &\leqslant m(r, f) + S(r, f) + (k + 1) N(r, f) \\ &\leqslant (k + 1) T(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

D'où

$$m(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}})=m(r,\frac{\left(f^{(k)}\right)'}{f^{(k)}})=S(r,f^{(k)})=O(\ln T(r,f^{(k)})+\ln r)=S(r,f)$$

et par suite

$$\begin{aligned} m(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}) &= m(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}.\frac{f^{(k)}}{f}) \\ &\leqslant m(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}})+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &= S(r,f)+S(r,f)=S(r,f) \end{aligned}$$

1.7 Théorème de Phragmém-Lindelof

Théorème 1.7.1 *[11] Soit f une fonction analytique dans le secteur S_α (de mesure angulaire $\frac{\pi}{\alpha}$) et continue sur ∂S_α tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \partial S_\alpha$. Si l'ordre angulaire $\sigma(f) < \alpha$, alors $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in S_\alpha$.*

Chapitre 2

Sur la croissance des solutions de l'équation différentielles $w^{(n)} + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$ et quelques extensions liées

2.1 Introduction et résultat

Plusieurs auteurs ont étudié l'équation différentielle particulière

$$f'' + e^{-z}f' + B(z)f = 0, \tag{2.1.1}$$

où $B(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière. Cette équation peut avoir des solutions d'ordre fini. En effet, Frei [13] a démontré que si $B(z) \equiv c \neq 0$ est un nombre complexe, alors l'équation (2.1.1) admet une solution $f \not\equiv 0$ d'ordre fini si et seulement si $c = -k^2$ où k est un entier naturel non nul. D'autres démonstrations de ce résultat ont été données par Ozawa [27] et Wittich [30]. En complétant les résultats partiaux de Gundersen [17] , Amemia-Ozawa [1] et Ozawa [27], Langley a carrément démontré dans [25] que si $B(z)$ est un polynôme non constant, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini. Dans ce chapitre on va voir des extensions et des généralisations de cette équation qui ont été réalisés par Hamouda et Belaidi [18].

Théorème 2.1.1 *Si l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + e^{-z}w' + cw = 0, \tag{2.1.2}$$

où $c \neq 0$ est un nombre complexe, possède une solution $w \not\equiv 0$ d'ordre fini, alors $c = -k^n$ où k est un entier positif. Inversement, pour tout entier positif k, l'équation (2.1.2), avec $c = -k^n$, possède une solution w qui est sous la forme d'un polynôme en e^z de degré k

Théorème 2.1.2 *Si $Q(z)$ est un polynôme non constant, alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + e^{-z}w' + Q(z)w = 0, \tag{2.1.3}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini

Théorème 2.1.3 *Soit $B(z)$ une fonction entière transcendante avec $\sigma(B) \neq 1$. Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + e^{-z}w' + B(z)w = 0, \tag{2.1.4}$$

est d'ordre infini.

Théorème 2.1.4 *Soient Q un polynôme non constant, $P_1, ..., P_{n-1}$ des polynômes et $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ des nombres réels. Supposons qu'il existe $s \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $P_s(z) = z$ avec l'une des deux conditions suivante*

i) $\alpha_s > 0$ *et* $\alpha_k \leqslant 0$ *pour tout* $k = 1, ..., s-1, s+1, ..., n-1;$

ii) $\alpha_s < 0$ *et* $\alpha_k \geqslant 0$ *pour tout* $k = 1, ..., s-1, s+1, ..., n-1.$

Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle

$$w^{(n)} + P_{n-1}\left(e^{\alpha_{n-1}z}\right)w^{(n-1)} + ... + P_s\left(e^{\alpha_s z}\right)w^{(s)} + ...$$

$$+P_1\left(e^{\alpha_1 z}\right)w' + Q(z)w = 0, \tag{2.1.5}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini.

Théorème 2.1.5 *Soient $P_1(z) = a_m z^m + ... + a_0$, $P_0(z) = b_m z^m + ... + b_0$ deux polynômes non constants de degré m tels que $a_m = cb_m$ $(c > 1)$, et $A_j(z)$ $(\not\equiv 0)$ $(j = 0, 1)$ deux fonctions entières avec $\sigma(A_j) < m$ $(j = 0, 1)$.Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + A_1(z)e^{P_1(z)}w' + A_0(z)e^{P_0(z)}w = 0, \tag{2.1.6}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini.

Théorème 2.1.6 *Soient $P_1(z) = a_m z^m + ... + a_0$, $P_0(z) = b_m z^m + ... + b_0$ deux polynômes non constants de degré m tels que $\arg a_m \neq \arg b_m$ ou bien $a_m = cb_m$ $(0 < c < 1)$ et $A_k(z)$ $(k = 0, ..., n-1)$, $B_j(z)$ $(j = 0, 1)$ des fonctions entières telles que $A_k(z) \not\equiv 0$ $(k = 0, 1)$, $\sigma(A_k) < m$ $(k = 0, .., n-1)$, $\sigma(B_j) < m$ $(j = 0, 1)$. Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + A_{n-1}(z)w^{(n-1)} + ... + A_2(z)w''$$

$$+\left(A_1(z)e^{P_1(z)} + B_1(z)\right)w' + \left(A_0(z)e^{P_0(z)} + B_0(z)\right)w = 0, \tag{2.1.7}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini.

Remarque 2.6.1. En combinant le théorème 2.1.5 avec le théorème 2.1.6 on obtient le résultat suivant qui contribue le cas $\sigma(B) = 1$ de (2.1.4).

Corollaire 2.1.1 *Si $B(z)$ est une fonction entière avec $B(z) = h(z)e^{bz}$ où $b \neq -1$ est une constante complexe et $h(z)$ est une fonction entière avec $\sigma(h) < 1$, alors toute solution $w \not\equiv 0$ de* (2.1.4) *est d'ordre infini*

Théorème 2.1.7 *Soient a, b deux nombres complexes non nuls tel que $a \neq b$ et $Q(z)$ un polynôme non constant ou $Q(z) = h(z)e^{bz^m}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul. Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + e^{az^m}w' + Q(z)w = 0, \tag{2.1.8}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini et $\sigma_2(w) = m$.

2.2 Lemmes préliminaires

pour la démonstration des théorèmes on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *[5] On suppose que $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$ avec $A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que pour les constantes réels α, β, θ_1, θ_2, où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $\theta_1 < \theta_2$ on a*

$$|A_1(z)| \geqslant \exp\{\alpha |z|^n\} \tag{2.2.1}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant \exp\{\beta |z|^n\}; \quad (j = 0, 2, ..., n-1), \tag{2.2.2}$$

quand $z \longrightarrow \infty$ et $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$, avec $\alpha > \beta$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante assez petite et $S(\varepsilon)$ désigne le secteur $\theta_1 + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 - \varepsilon$. Si $w \not\equiv 0$ est une solution avec $\sigma(w) < +\infty$ de l'équation différentielle

$$w^{(n)} + A_{n-1}(z) w^{(n-1)} + ... + A_1(z) w' + A_0(z) w = 0, \tag{2.2.3}$$

alors les conditions suivantes sont vérifiées

1. *Il existe une constante $b \neq 0$ telle que $w \to b$ quand $z \to \infty$ dans $S(\varepsilon)$. De plus, quand $z \longrightarrow \infty$ dans $S(\varepsilon)$*
$$|w(z) - b| \leqslant \exp\{-(\alpha - \beta)|z|^n\} \tag{2.2.4}$$
2. *Pour chaque $m \geqslant 1$, quand $z \longrightarrow \infty$ dans $S(\varepsilon)$*
$$\left|w^{(m)}(z)\right| \leqslant \exp\{-(\alpha - \beta)|z|^n\}. \tag{2.2.5}$$

Lemme 2.2.2 *[15] Soient f une fonction entière transcendante*

d'ordre fini ρ, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ... (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geqslant 0$; $i = 1, ..., m$ et $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors, on a les deux propositions suivantes.

1. *il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E_1$, il existe $R_0 = R_0(\theta) > 0$ tel que, pour tout z vérifiant $\arg z = \psi_0$ et $|z| \geqslant R_0$, et pour tout $(k, j) \in \Gamma$, on ait*
$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho - 1 + \varepsilon).} \tag{2.2.6}$$
2. *il existe un ensemble $E_2 \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire fini, tel que pour tout z* vérifiant $|z| \notin E_2$ et pour tout
$$(k, j) \in \Gamma, \text{ on ait } \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leqslant |z|^{(k-j)(\rho + \varepsilon)}$$

Lemme 2.2.3 *([7], [24]) Soit f une fonction entière telle que $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non bornée dans un certain rayon* $\arg z = \theta$. *Alors il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ $(n = 1, 2, ...)$, où $r_n \to +\infty$ tel que $f^{(k)}(z) \to +\infty$ et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leqslant \frac{1}{(k-j)!}(1 + o(1))|z_n|^{k-j} \quad (j = 0, ..., k-1). \tag{2.2.7}$$

Lemme 2.2.4 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $K > 0$ et $0 < \eta < K$. Alors l'intégrale $I(r) = \int\limits_r^{+\infty} \exp\left(-K\alpha t^\beta\right) dt$ converge et il existe r_0 tel que si $r \geqslant r_0$, alors $I(r) \leqslant \exp\left(-(K-\eta)\alpha r^\beta\right)$.*

Preuve

C'est facile à démontrer que l'intégrale $\int\limits_r^{+\infty} \exp\left(-K\alpha t^\beta\right) dt$ est convergente. On a

$$\begin{aligned} I(r) &= \int\limits_r^{+\infty} \exp\left(-K\frac{\alpha}{2}t^\beta\right) \exp\left(-K\frac{\alpha}{2}t^\beta\right) dt \\ &= \int\limits_r^{+\infty} \frac{\exp\left(-K\frac{\alpha}{2}t^\beta\right)}{-\beta K\frac{\alpha}{2}t^{\beta-1}} \left(-\beta K\frac{\alpha}{2}t^{\beta-1}\right) \exp\left(-K\frac{\alpha}{2}t^\beta\right) dt. \end{aligned}$$

Il existe $r_1 > 0$ tel que si $r \geqslant r_1$ alors

$$\begin{aligned} I(r) &\leqslant \frac{\exp\left(-K\frac{\alpha}{2}r^\beta\right)}{-\beta K\frac{\alpha}{2}r^{\beta-1}} \int\limits_r^{+\infty} \left(-\beta K\frac{\alpha}{2}t^{\beta-1}\right) \exp\left(-K\frac{\alpha}{2}t^\beta\right) dt \\ &\leqslant \frac{\exp\left(-K\frac{\alpha}{2}r^\beta\right)}{\beta K\frac{\alpha}{2}r^{\beta-1}} \exp\left(-K\frac{\alpha}{2}r^\beta\right) \\ &\leqslant \frac{\exp\left(-K\alpha r^\beta\right)}{\beta K\frac{\alpha}{2}r^{\beta-1}} \\ &\leqslant \frac{\exp\left(-\eta\alpha r^\beta\right)}{\beta K\frac{\alpha}{2}r^{\beta-1}} \exp\left(-(K-\eta)\alpha r^\beta\right). \end{aligned}$$

tel que $0 < \eta < K$. Il existe $r_2 > 0$ tel que si $r \geqslant r_2$ on aura $\frac{\exp\left(-\eta\alpha r^\beta\right)}{\beta K\frac{\alpha}{2}r^{\beta-1}} \leqslant 1$. Donc si $r \geqslant r_0 = \max(r_1, r_2)$ on obtient

$$I(r) \leqslant \exp\left(-(K-\eta)\alpha r^\beta\right).$$

Lemme 2.2.5 *Supposons que $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$ avec $A_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières telles que pour les constantes réels α, β, θ_1, θ_2, C où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$ on a, pour un entier s, $1 \leqslant s \leqslant n-1$,*

$$|A_s(z)| \geqslant \exp\left\{\alpha |z|^\beta\right\} \tag{2.2.8}$$

et

$$|A_j(z)| \leqslant C \tag{2.2.9}$$

pour tout $j = 0, 1, ..., s-1, s+1, ..., n-1$ quand $z \longrightarrow \infty$ dans le secteur $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$. Soit $\varepsilon > 0$ une constante assez petite et $S(\varepsilon)$ désigne le secteur $\theta_1 + \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \theta_2 - \varepsilon$. Si $w \not\equiv 0$ est une solution transcendante avec $\sigma(w) < +\infty$ de l'équation (2.2.3), alors les conditions suivantes sont vérifiées

i) *Il existe* $j \in \{0, ..., s-1\}$ *et une constante complexe* $b_j \neq 0$ *tel que* $w^{(j)} \to b_j$ *quand* $z \to \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$. *De plus, quand* $z \longrightarrow \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$,

$$\left|w^{(j)}(z) - b_j\right| \leqslant \exp\left\{-(\alpha - \rho)|z|^{\beta}\right\} \tag{2.2.10}$$

où $0 < \rho < \alpha$

ii *Pour chaque* $m \geqslant j+1$, *quand* $z \longrightarrow \infty$ *dans* $S(\varepsilon)$,

$$\left|w^{(m)}(z)\right| \leqslant \exp\left\{-(\alpha - \rho)|z|^{\beta}\right\} \tag{2.2.11}$$

où $0 < \rho < \alpha$.

Lemme 2.2.6 *[3] Soient* $A_0(z), ..., A_{n-1}(z)$; $A_0(z) \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières telles que pour les constantes réels* $\alpha, \beta, \mu, \theta_1, \theta_2$ *avec* $0 \leqslant \beta < \alpha, \mu > 0$ *et* $\theta_1 < \theta_2$, *on a*

$$|A_0(z)| \geqslant e^{\alpha|z|^{\mu}} \tag{2.2.12}$$

$$|A_k(z)| \leqslant e^{\beta|z|^{\mu}}, \qquad (k = 1, ..., n-1), \tag{2.2.13}$$

quand $z \to \infty$ *avec* $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$. *Alors toute solution non nulle de* (2.2.3) *est d'ordre infini.*

Lemme 2.2.7 *[7] Soient* $P(z) = a_m z^m + ...$, $(a_m = \alpha + i\beta \neq 0)$ *un polynôme de degré* $m \geqslant 1$,*et* $A(z)$ $(\not\equiv 0)$ *une fonction entière avec* $\sigma(A) < m$. *Posons* $f(z) = A(z)e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(P,\theta) = \alpha\cos m\theta - \beta\sin m\theta$. *Alors pour une certaine constante donnée* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour un certain* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$, *où* $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P,\theta) = 0\}$ *est un ensemble fini, il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *on a*

1. *Si* $\delta(P,\theta) > 0$,*alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\} \leqslant |f(z)| \leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\} \tag{2.2.14}$$

2. *Si* $\delta(P,\theta) < 0$, *alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\} \leqslant |f(z)| \leqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^m\}. \tag{2.2.15}$$

Lemme 2.2.8 *[9] Soit* $g(z)$ *une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper-ordre* $\sigma_2(g) = \sigma$ *et soit* $\gamma(r)$ *l'indice central de* g. *Alors*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\gamma(r)}{\log r} = \sigma.$$

Lemme 2.2.9 *Soient* A *et* B *deux fonctions entières d'ordre fini. Si* $w \not\equiv 0$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + A(z)w' + B(z)w = 0, \tag{2.2.16}$$

alors $\sigma_2(w) \leqslant \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}$.

Preuve
Posons $\max \{\sigma (A),\ \sigma (B)\} = \alpha$. Pour $\varepsilon > 0$ et r suffisamment grand, on a

$$|A(z)| \leqslant \exp \left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\},\ \ |B(z)| \leqslant \exp \left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.17}$$

Du théorème de Wiman-Valiron [20], il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie telle que pour z satisfaisant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|w(z)| = M(r.w)$, on a

$$\frac{w^{(j)}(z)}{w(z)} = \left(\frac{\gamma_w(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)),\ \ (j = 1, ..., n), \tag{2.2.18}$$

où $\gamma_w(r)$ est l'indice central de $w(z)$. En utilisant (2.2.17) et (2.2.18) dans (2.2.19) , on aura

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma_w(r)}{|z|}\right)^n |(1 + o(1))| &\leqslant \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \frac{\gamma_w(r)}{|z|} |(1 + o(1))| + \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \\ &\leqslant 2\exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \frac{\gamma_w(r)}{|z|} |(1 + o(1))|, \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

où z satisfait $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|w(z)| = M(r,w)$. De (2.2.5) , on obtient

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log\log \gamma_w(r)}{\log r} \leqslant \alpha + \varepsilon. \tag{2.2.20}$$

Comme ε est arbitraire, de (2.2.6) et du lemme 2.2.8 , on obtient

$$\sigma_2(w) \leqslant \alpha$$

Lemme 2.2.10 *[15] Soit $w(z)$ une fonction entière non nulle et soient $\alpha > 1$ et $\epsilon > 0$ deux constantes. Alors il existe une constante $c > 0$ et un ensemble $E \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E$, on a*

$$\left|\frac{w^{(k)}(z)}{w(z)}\right| \leqslant c\left[T(\alpha r, w) r^{\varepsilon} \log T(\alpha r, w)\right]^k,\ \ k \in N.$$

Lemme 2.2.11 *Soient $P(z) = a_m z^m + ..., Q(z) = b_m z^m + ...$ $(m \geqslant 1)$ deux polynômes non constants de degré m tel que $\arg a_m \neq \arg b_m$ ou bien $a_m = cb_m$ $(0 < c < 1)$; $h_0(z)$ et $h_1(z)$ deux fonctions entières non nulles avec $\sigma(h_j) < m$ $(j = 0, 1)$. Alors toute solution $w \not\equiv 0$ de l'équation différentielle*

$$w^{(n)} + h_1(z) e^{P(z)} w' + h_0(z) e^{Q(z)} w = 0, \tag{2.2.21}$$

où $n \geqslant 2$, est d'ordre infini avec $\sigma_2(w) \geqslant m$.

Preuve
On a deux cas à traiter.
Le premier cas. $\arg a_m \neq \arg b_m$. Il existe un secteur $S : \theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$ tel que $\delta(Q, \theta) > 0$ et $\delta(P, \theta) < 0$ sur tout rayon $\arg z = \theta \in S$. En utilisant le lemme 2.2.7, on a pour $|z| = r$ suffisamment grand

$$\left|h_0(z) e^{Q(z)}\right| \geqslant \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(Q, \theta) r^m\} \tag{2.2.22}$$

et

$$\left|h_1(z)\, e^{P(z)}\right| \leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)\,\delta(P,\theta)\, r^m\right\}. \tag{2.2.23}$$

De $(2.2.21)$, on a

$$\left|h_0(z)\, e^{Q(z)}\right| \leqslant \left|\frac{w^{(n)}}{w}\right| + \left|h_1(z)\, e^{P(z)}\right| \left|\frac{w'}{w}\right|. \tag{2.2.24}$$

D'après le lemme 2.2.10, il existe un ensemble $E \subset [0,\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E$, on a

$$\left|\frac{w^{(k)}(z)}{w(z)}\right| \leq r\,[T(2r,w)]^{n+1},\ \ k = 1, 2, ..., n. \tag{2.2.25}$$

En utilisant $(2.2.22)$, $(2.2.23)$ et $(2.2.25)$ dans $(2.2.24)$, on obtient pour z tel que $|z| = r \notin E$

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\, r^m\right\} &\leqslant r\,[T(2r,w)]^{n+1}\left[1 + \left|h_1(z)\, e^{P(z)}\right|\right] \\
&\leqslant r\,[T(2r,w)]^{n+1}(1+o(1)) \\
&\leqslant 2r\,[T(2r,w)]^{n+1}
\end{aligned}$$

quand $r \to \infty$. Il s'ensuit que, pour $|z| = r \notin E$,

$$\exp\left\{(1+o(1))\,\lambda r^m\right\} \leqslant [T(2r,w)]^{n+1},$$

où $\lambda > 0$, quand $r \to \infty$. D'où $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log\log T(r,w)}{\log r} \geqslant m$.

Le deuxième cas. $a_m = c b_m$ $(0 < c < 1)$. Il existe un secteur $S' : \theta_1' \leqslant \arg z \leqslant \theta_2'$ tel que $\delta(P,\theta) = c\delta(Q,\theta) > 0$ sur tout rayon $\arg z = \theta \in S'$. D'après le lemme 2.2.7, on a pour $|z| = r$ suffisamment grand

$$\left|h_0(z)\, e^{Q(z)}\right| \geqslant \exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\, r^m\right\} \tag{2.2.26}$$

$$\left|h_1(z)\, e^{P(z)}\right| \leqslant \exp\left\{(1+\varepsilon)\, c\delta(Q,\theta)\, r^m\right\}. \tag{2.2.27}$$

En utilisant $(2.2.25)$, $(2.2.26)$ et $(2.2.27)$ dans $(2.2.24)$, on obtient pour $|z| = r \notin E$

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta(Q,\theta)\, r^m\right\} &\leqslant r\,[T(2r,w)]^{n+1}\left[1 + \exp\left\{(1+\varepsilon)\, c\delta(Q,\theta)\, r^m\right\}\right] \\
&\leqslant 2r\,[T(2r,w)]^{n+1}\exp\left\{(1+\varepsilon)\, c\delta(Q,\theta)\, r^m\right\},
\end{aligned}$$

$$\exp\left\{[(1-\varepsilon) - c(1+\varepsilon)]\,\delta(Q,\theta) r^m\right\} \leqslant 2r\,[T(2r,w)] \tag{2.2.28}$$

En prenant dans $(2.2.28)$ ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c}$, on obtient le résultat demandé.

Lemme 2.2.12 *Supposons que $P(z)$, $A(z)$, $f(z)$ et $\delta(P,\theta)$ vérifient les mêmes données du lemme 2.2.7. Alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie ($lmE < \infty$), tel que pour $\theta \in [0,2\pi) \setminus H_2$; ($H_2 = \{\theta \in [0,2\pi) ;\ \delta(P,\theta) = 0\}$) et pour $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, on aura les mêmes relations* $(2.2.14)$ *et* $(2.2.15)$.

Preuve
Posons $f(z) = h(z)\, e^{(\alpha+i\beta)z^m}$ où $h(z) = A(z)\, e^{P_{n-1}(z)}$, $P_{n-1}(z) = P(z) - (\alpha+i\beta)\, z^m$, alors $\sigma(h) = s < m$. En utilisant la même méthode de démonstration du lemme 2.2 de ref. [8], on obtient que pour $\varepsilon > 0$, il existe $E \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie ($lmE < \infty$), tel que pour $z = re^{i\theta}$, $r \notin [0,1] \cup E$, on a

$$\exp\left\{-r^{s+\varepsilon}\right\} \leqslant \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant \exp\left\{r^{s+\varepsilon}\right\}.$$

On continue de la même manière du lemme 2.2.7, on obtient les relations (2.2.14) et (2.2.15).

Remarque 2.2.1 *Soit $w(z)$ une fonction entière d'ordre infini avec $\sigma_2(w) = \alpha < +\infty$, soit $E \subset (1,\infty)$ un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors il existe une suite de points $\left\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\right\}$ telles que $|w(z_k)| = M(r_k, w)$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin E$, $r_k \to +\infty$ et pour $\varepsilon > 0$ et r_k suffisamment grand, on a*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \gamma(r_k)}{\log r_k} = \infty, \tag{2.2.29}$$

$$\exp\left\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\} < \gamma(r_k) < \exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}, \tag{2.2.30}$$

où $\gamma(r)$ est l'indice central de $w(z)$. En effet, d'après le lemme 2.2.8 et $\sigma_2(w) = \alpha$, on a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \gamma(r)}{\log r} = \sigma_2(w) < \infty.$$

Donc, il existe une suite $\{r'_k\}$ $(r'_k \to \infty)$ qui vérifie

$$\lim_{r'_k\to\infty} \frac{\log\log \gamma(r'_k)}{\log r'_k} = \alpha.$$

Posons la mesure logarithmique de E, $lmE = \delta < \infty$, alors il existe $r_k \in [r'_k, (\delta+1)\, r'_k] \backslash E$. Comme

$$\frac{\log\log \gamma(r_k)}{\log r_k} \geqslant \frac{\log\log \gamma(r'_k)}{\log\left[(\delta+1)\, r'_k\right]} = \frac{\log\log \gamma(r'_k)}{\log r'_k \left[1 + \frac{\log(\delta+1)}{\log r'_k}\right]},$$

alors on a

$$\lim_{r_k\to\infty} \frac{\log\log \gamma(r_k)}{\log r_k} = \alpha.$$

Donc, (2.2.30) est vérifiée et évidemment (2.2.29) aussi. Maintenant on prend $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$, telle que $|w(z_k)| = M(r_k, w)$. Il existe un sous-ensemble $\left\{\theta_{k_j}\right\}$ de $\{\theta_k\}$, telle que $\lim\limits_{j\to\infty} \theta_{k_j} = \theta_0 \in [0, 2\pi)$. Donc $\left\{z_{k_j} = r_{k_j} e^{i\theta_{k_j}}\right\}$ vérifie les conditions en question.

2.3 Preuve du théorème 2.1.1

Soient $w_1, ..., w_n$ n solutions indépendantes de l'équation $(2.1.2)$. D'après [12], il y a parmi ces n solutions, au plus une seule solution d'ordre fini. On peut supposer que $w_1(z)$ est cette fonction qui est d'ordre fini. Evidemment $w_1(z+2\pi i)$ est solution de l'équation $(2.1.2)$. Donc

$$w_1(z+2\pi i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j(z). \tag{2.3.1}$$

Comme $w_1(z+2\pi i)$ est d'ordre fini aussi, alors $\alpha_j = 0$ pour $j = 2, ..., n$; et d'après le lemme 2.2.1 on a $w_1(z) \to b \neq 0$, $w_1(z+2\pi i) \to b \neq 0$ quand $z \longrightarrow \infty$ dans le secteur $S_1(\varepsilon) : \frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, ce qui implique que $\alpha_1 = 1$ et $w_1(z+2\pi i) = w_1(z)$. On en déduit qu'il existe une fonction régulière $f(\zeta)$ dans $0 < |\zeta| < \infty$ telle que $w_1(z) = f(e^z)$. Si $f(\zeta)$ avait une singularité essentielle en $\zeta = 0$, alors $w_1(z) = f(e^z)$ n'aurait pas eu une limite quand $z \longrightarrow \infty$ dans le secteur $S_1(\varepsilon) : \frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Aussi, si $f(\zeta)$ avait un pôle en $\zeta = 0$, alors $w_1(z) \to \infty$ quand $z \longrightarrow \infty$ dans $S_1(\varepsilon)$. Donc $f(\zeta)$ est une fonction entière ($f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \zeta^k$ et $w_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{kz}$). En remplaçant $w_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{kz}$ dans $(2.1.2)$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^n a_k e^{kz} + e^{-z} \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k e^{kz} + c \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{kz} = 0; \tag{2.3.2}$$

ce qui donne

$$(k^n + c)\, a_k + (k+1)\, a_{k+1} = 0 \quad (k \geqslant 1) \tag{2.3.3}$$

et

$$a_1 + c a_0 = 0. \tag{2.3.4}$$

On a $a_0 = b \neq 0$. Si $c \neq -k^n$ pour tout $k \geqslant 1$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = 0, \tag{2.3.5}$$

ce qui montre que le rayon de convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \zeta^k$ est égal à zéro. C'est une contradiction. Donc il existe un entier $k_0 \geqslant 1$, telle que $c = -k_0^n$. Et de $(2.3.3)$, $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant k_0 + 1$ et $w_1(z) = \sum_{j=0}^{k_0} a_j e^{jz}$. Inversement, si $c = -k^n$, alors la fonction qui s'écrit sous la forme $w(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j e^{jz}$ vérifie l'équation différentielle (2.1.2). Ce qui achève la démonstration.

2.4 Preuve du théorème 2.1.2

On suppose qu'il existe une solution $w \not\equiv 0$ de l'équation (2.1.3) d'ordre fini. On peut appliquer le lemme 2.2.1 parce que ses conditions sont vérifiées dans le secteur $S_2(\varepsilon) : \pi - \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi + \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Donc, il existe une constante $b \neq 0$ telle que

$$|w(z) - b| \leqslant \exp\{-(1-\rho)\,|z| \cos\varepsilon\}, \tag{2.4.1}$$

et pour chaque entier $n \geqslant 1$

$$\left|w^{(n)}(z)\right| \leqslant \exp\left\{-(1-\rho)|z|\cos\varepsilon\right\}, \tag{2.4.2}$$

où $0 < \rho < 1$ quand $z \to \infty$ dans $S_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. De plus, on a

$$\left|e^{-z}\right| \leqslant e^{|z|} \tag{2.4.3}$$

et il existe une constante positive c et r_0 assez grand, telle que pour $|z| \geqslant r_0$, on a

$$|Q(z)| \leqslant c|z|^q, \tag{2.4.4}$$

où $q = \deg Q(z)$. De (2.1.3), on peut écrire

$$|Q(z)b| \leqslant \left|w^{(n)}(z)\right| + \left|e^{-z}\right|\left|w'(z)\right| + |Q(z)||w(z)-b|. \tag{2.4.5}$$

D'après (2.4.1) – (2.4.5), on obtient

$$|Q(z)b| \leqslant \exp\left\{-(1-\rho)|z|\cos\varepsilon\right\} + \exp\left\{|z|(1-(1-\rho)\cos\varepsilon)\right\}$$

$$+c|z|^q\exp\left\{-(1-\rho)|z|\cos\varepsilon\right\}. \tag{2.4.6}$$

Comme (2.4.6) est vérifiée pour les constantes arbitraires ε, ρ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2};\ 0 < \rho < 1\right)$, il s'ensuit qu'il existe une constante positive M tel que, quelque soit $|z|$ assez grand, on peut obtenir. En prenant ε et ρ assez petits, que $|Q(z)| < M$. Ceci contredit le fait que $Q(z)$ est un polynôme non constant. Ce qui achève la démonstration.

2.5 Preuve du théorème 2.1.3

On suppose que $w \not\equiv 0$ est une solution de (2.1.4) d'ordre fini σ. De (2.1.4) on peut écrire

$$B(z) = -\frac{w^{(n)}}{w} - e^{-z}\frac{w'}{w}; \tag{2.5.1}$$

et de l'estimation fondamentale de Nevanlinna des dérivées logarithmiques, on obtient

$$\begin{aligned} m(r,B) &\leqslant m\left(r,e^{-z}\right) + m\left(r,\frac{w^{(n)}}{w}\right) + m\left(r,\frac{w'}{w}\right) \\ &\leqslant m\left(r,e^{-z}\right) + O(\log r), \end{aligned}$$

quand $r \to \infty$. Ce qui implique que $B(z)$ doit être d'ordre $\sigma < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On considère les deux secteurs $S_1 : -\frac{\pi}{2} < \arg z < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ et $S_2 : \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Du lemme 2.2.2, si $\theta_1 \in S_1 - E_1$ (resp : $\theta_2 \in S_2 - E_2$), (E_1 et E_2 sont de mesure linéaire nulle), il existe $R_1 > 0$ (resp : $R_2 > 0$) tels que pour tout z vérifiant $|z| \geqslant R_1$ et $\arg z = \theta_1$ (resp : pour tout z vérifiant $|z| \geqslant R_2$ et $\arg z = \theta_2$),

$$\left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right| \leqslant |z|^{\sigma-1+\varepsilon} \tag{2.5.2}$$

$$\left|\frac{w^{(n)}(z)}{w(z)}\right| \leqslant |z|^{n(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.5.3}$$

Comme $|e^{-z}| \leqslant 1$ pour $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, il s'ensuit de $(2.5.2)$, $(2.5.3)$ et $(2.5.1)$ que

$$|B(z)| \leqslant 2\,|z|^{n(\sigma-1+\varepsilon)}, \tag{2.5.4}$$

pour $|z| \geqslant \max(R_1, R_2, 1)$. Et d'aprés la deuxième proposition du lemme 2.2.2, il existe un cercle $C_r : |z| = r > \max(R_1, R_2)$ tel que pour $z \in C_r$, on a

$$\left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right| \leqslant |z|^{\sigma+\varepsilon} \tag{2.5.5}$$

$$\left|\frac{w^{(n)}(z)}{w(z)}\right| \leqslant |z|^{n(\sigma+\varepsilon)}. \tag{2.5.6}$$

Alors, de $(2.5.5)$, $(2.5.6)$ et $(2.5.1)$, on obtient

$$|B(z)| \leqslant 2\,|z|^{n(\sigma+\varepsilon)}, \tag{2.5.7}$$

pour $z \in C_r \cap \left\{z : -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Maintenant, comme $B(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma < 1$, alors elle admet un nombre infini de zéros. Soit $q(z)$ un polynôme de degré supérieur à $n(\sigma+\varepsilon)$ tel que $\frac{B(z)}{q(z)}$ soit une fonction entière. Soient ξ_1 le point d'intersection du cercle $C_0 : |z| = \max(R_1, R_2)$ avec le rayon $\arg z = \theta_1$, ξ_2 le point d'intersection de C_0 avec le rayon $\arg z = \theta_2$, ξ_3 est l'intersection du cercle C_r avec le rayon $\arg z = \theta_2$ et ξ_4 est celui de C_r avec le rayon $\arg z = \theta_1$. Soit Γ_r le contour qui va de ξ_1 à ξ_2 sur C_0, de ξ_2 à ξ_3 sur le rayon $\arg z = \theta_2$, de ξ_3 à ξ_4 sur C_r puis de ξ_4 à ξ_1 sur le rayon $\arg z = \theta_1$. Donc, de (2.5.4) et (2.5.7) il s'ensuit qu'il existe une constante $M > 0$ qui est indépendante de r telle que

$$\left|\frac{B(z)}{q(z)}\right| \leqslant M \tag{2.5.8}$$

pour tout $z \in \Gamma_r$. Du principe de maximum cette estimation reste vraie à l'intérieure de Γ_r. En faisant tendre $r \to \infty$, on déduit que (2.5.8) est vraie dans le secteur $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}-\varepsilon$ et en particulier sur $\arg z = -\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et $\arg z = \frac{\pi}{2}-\varepsilon$, ε est arbitraire. Du théorème classique de Phragmén-Lindelöf [11], il s'ensuit que (2.5.8) reste vraie sur le plan entier $\mathbb{C}$. Et du théorème de Liouville, $\frac{B(z)}{q(z)}$ doit être constante, ce qui contredit que $\frac{B(z)}{q(z)}$ est transcendante. Donc, toute solution $w \not\equiv 0$ est d'ordre infini.

2.6 Preuve du théorème 2.1.4

Le cas $\alpha_s > 0$. Si $\arg z = \theta \in S_3(\varepsilon) = \left\{ z : -\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \varepsilon \ \left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)\right\}$, et $|z|$ suffisamment grand, alors on a

$$|e^{\alpha_s z}| \geqslant \exp\{\alpha_s r \cos\varepsilon\} \tag{2.6.1}$$

et

$$|P_j(e^{\alpha_j z})| \leqslant C \tag{2.6.2}$$

pour tout $j = 1, ..., s-1, s+1, ..., n-1$, où $C > 0$ est une constante réel. Donc les conditions du lemme 2.2.5 sont vérifiées. Alors, si on suppose que $w \not\equiv 0$ est une solution de (2.1.5) avec $\sigma(w) = \sigma < \infty$, on aura

i) Il existe $j \in \{0, ..., s-1\}$ et un nombre complexe constant $b_j \neq 0$ telle que $w^{(j)} \to b_j$ quand $z \to \infty$ dans $S_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ et en plus

$$\left|w^{(j)}(z) - b_j\right| \leq \exp\{-(\alpha_s \cos\varepsilon - \rho)|z|\} \tag{2.6.3}$$

où $0 < \rho < \alpha_s \cos\varepsilon$

ii) Pour chaque entier $m \geqslant j+1$, quand $z \longrightarrow \infty$ dans $S_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$,

$$\left|w^{(m)}(z)\right| \leqslant \exp\{-(\alpha_s \cos\varepsilon - \rho)|z|\}, \tag{2.6.4}$$

où $0 < \rho < \alpha_s \cos\varepsilon$. De la condition (i), par j intégrations successives sur le segment $[0, z]$, on obtient

$$\begin{aligned} w(z) &= w(0) + w^{'}(0)\frac{z}{1!} + w^{''}(0)\frac{z^2}{2!} + ... + w^{(j-1)}(0)\frac{z^{j-1}}{(j-1)!} \\ &\quad + \int_0^z ... \int_0^z \int_0^z w^{(j)}(t)\, dt d\xi ... du \\ &= w(0) + w^{'}(0)\frac{z}{1!} + w^{''}(0)\frac{z^2}{2!} + ... + w^{(j-1)}(0)\frac{z^{j-1}}{(j-1)!} \\ &\quad + \int_0^z ... \int_0^\zeta \int_0^\xi (b_j + \lambda(t))\, dt d\xi ... du \\ &= w(0) + w^{'}(0)\frac{z}{1!} + w^{''}(0)\frac{z^2}{2!} + ... + w^{(j-1)}(0)\frac{z^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{b_j}{j!}z^j \\ &\quad + \int_0^z ... \int_0^\zeta \int_0^\xi \lambda(t)\, dt d\xi ... du, \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

où $\lambda(z) \to 0$ et $|\lambda(z)| \leqslant \exp\{-(\alpha_s \cos\varepsilon - \rho)|z|\}$ $(0 < \rho < \alpha_s \cos\varepsilon)$ quand $z \to \infty$ dans $S_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Il s'ensuit de (2.6.5) que

$$\frac{w^{(l)}(z)}{z^j} \to 0 \quad \text{pour tout } l = 1, ..., j; \tag{2.6.6}$$

$$\frac{w(z)}{z^j} \to \frac{b_j}{j!} \neq 0 \tag{2.6.7}$$

et

$$\left|\frac{w(z)}{z^j} - \frac{b_j}{j!}\right| = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \tag{2.6.8}$$

quand $z \to \infty$ dans $S_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. D'autre part, pour $z \in S_3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, on a

$$|e^{\alpha_s z}| \leqslant \exp\{\alpha_s r\}. \tag{2.6.9}$$

On divise (2.1.5) sur z^j et on l'écrit sous la forme

$$|Q(z)|\frac{|b_j|}{j!} \leqslant \frac{\left|w^{(n)}(z)\right|}{|z|^j} + \frac{|P_{n-1}(e^{\alpha_{n-1}z})|\left|w^{(n-1)}(z)\right|}{|z|^j} + ...$$

$$+\frac{|P_s(e^{\alpha_s z})|\left|w^{(s)}(z)\right|}{|z|^j} + ... + \frac{|P_1(e^{\alpha_1 z})|\left|w'(z)\right|}{|z|^j} + |Q(z)|\left|\frac{w(z)}{z^j} - \frac{b_j}{j!}\right|. \tag{2.6.10}$$

En utilisant (2.6.4) et (2.6.6) $-$ 2.6.9, de (2.6.10) on obtient une contradiction quand $z \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ et $\rho \to 0$.

Le cas $\alpha_s < 0$. On utilise la même méthode du premier cas en prenant le secteur $S_2(\varepsilon) : \pi - \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi + \varepsilon \ \left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$.

2.7 Preuve du théorème 2.1.5

Supposons que $w(z)$ est une solution transcendante de (2.1.6) d'ordre fini. D'après le lemme 2.2.2, pour une constante $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \backslash E_1$, alors il existe une constante $R_0(\theta) = R_0 > 1$ tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geqslant R_0$, on a

$$\left|\frac{w^{(n)}(z)}{w'(z)}\right| \leqslant |z|^{(n-1)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.7.1}$$

Soient $a_m = \alpha + i\beta \neq 0$ et $\delta(P_1, \theta) = \alpha \cos m\theta - \beta \sin m\theta$. D'après le lemme 2.2.7, il existe, pour une constante donnée ε $(0 < \varepsilon < 1)$, un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que pour $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H_2)$, $(H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_1, \theta) = 0\})$, il existe $R_1 > 0$ tel que pour $|z| = r > R_1$, on a

i Si $\delta(P_1, \theta) < 0$, alors

$$\begin{aligned} \left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right| &\geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\} \text{ et} \\ \left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right| &\geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\} \text{ et} \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

ii Si $\delta(P_1, \theta) > 0$, alors

$$\begin{aligned} \left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right| &\geqslant \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P_1,\theta)r^m\} \text{ et} \\ \left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right| &\leqslant \exp\{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(P_1,\theta)r^m\}. \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Maintenant on prend $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$, telle que la mesure linéaire de $E_1 \cup H_1 \cup H_2$ est nulle, alors θ satisfait $\delta(P_1, \theta) < 0$ ou $\delta(P_1, \theta) > 0$. On traite les deux cas :

Le cas, $\delta(P_1, \theta) < 0$. De $a_m = cb_m$, on a $\delta(P_0, \theta) = \frac{1}{c}\delta(P_1, \theta) < 0$. De $(2.1.6)$, on peut écrire

$$1 \leqslant \left|A_1(z)e^{P_1(z)}\right|\left|\frac{w'(z)}{w^{(n)}(z)}\right| + \left|A_0(z)e^{P_0(z)}\right|\left|\frac{w(z)}{w^{(n)}(z)}\right|. \tag{2.7.4}$$

Si $\left|w^{(n)}(z)\right|$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, alors du lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_p=r_pe^{i\theta}\right\}$, où $r_p\to+\infty$ telle que $w^{(n)}(z_p)\to\infty$ et

$$\left|\frac{w'\left(r_pe^{i\theta}\right)}{w^{(n)}\left(r_pe^{i\theta}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\left(1+o\left(1\right)\right)r_p^{n-1},\ \left|\frac{w\left(r_pe^{i\theta}\right)}{w^{(n)}\left(r_pe^{i\theta}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{n!}\left(1+o\left(1\right)\right)r_p^{n}. \tag{2.7.5}$$

En utilisant les inégalités (2.7.2) et (2.7.5) dans (2.7.4) , on obtient, pour $\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup H_1\cup H_2)$ et $r_p>\max\left(R_0,R_1\right)$,

$$1\leqslant\frac{1}{(n-1)!}r_p^{n-1}\left(1+o\left(1\right)\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(P_1,\theta\right)r_p^m\right\}+$$

$$+\frac{1}{(n)!}r_p^{n}\left(1+o\left(1\right)\right)\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\frac{1}{c}\delta\left(P_1,\theta\right)r_p^m\right\}, \tag{2.7.6}$$

ce qui mène à une contradiction quand $r_p\to+\infty$. Donc $w^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)$ est bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, i.e.

$$\left|w^{(n)}\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant M_1, \tag{2.7.7}$$

où $M_1>0$ est une constante. De (2.7.7) et par n intégrations successives sur le segment $[0,z]$, on obtient

$$\left|w\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant\left|w\left(0\right)\right|+\left|w'\left(0\right)\right|\frac{|z|}{1!}+\left|w''\left(0\right)\right|\frac{|z|^2}{2!}+...+M_1\frac{|z|^n}{n!}, \tag{2.7.8}$$

sur le rayon $\arg z=\theta$.

Le cas $\delta\left(P_1,\theta\right)>0$. On a $\delta\left(P_0,\theta\right)=\frac{1}{c}\delta\left(P_1,\theta\right)>0$. De (2.1.6) on a

$$\left|A_1\left(z\right)e^{P_1(z)}\right|\leqslant\left|\frac{w^{(n)}\left(z\right)}{w'\left(z\right)}\right|+\left|A_0\left(z\right)e^{P_0(z)}\right|\left|\frac{w\left(z\right)}{w'\left(z\right)}\right|. \tag{2.7.9}$$

Si $\left|w'(z)\right|$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, alors du lemme 2.2.3, il existe une suite infinie de points $\left\{z_p=r_pe^{i\theta}\right\}$, où $r_p\to+\infty$ telle que $w'(z_p)\to\infty$ et

$$\left|\frac{w\left(r_pe^{i\theta}\right)}{w'\left(r_pe^{i\theta}\right)}\right|\leqslant\left(1+o\left(1\right)\right)r_p. \tag{2.7.10}$$

En utilisant les inégalités (2.7.1), (2.7.3) et (2.7.10) , on obtient

$$\exp\left\{(1-\varepsilon)\,\delta\left(P_1,\theta\right)r_p^m\right\}\leqslant r_p^{(n-1)(\sigma-1+\varepsilon)}+$$

$$+\left(1+o\left(1\right)\right)r_p\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\frac{1}{c}\delta\left(P_1,\theta\right)r_p^m\right\}$$

$$\leqslant\left(1+o\left(1\right)\right)2r_p^{\alpha}\exp\left\{(1+\varepsilon)\,\frac{1}{c}\delta\left(P_1,\theta\right)r_p^m\right\}, \tag{2.7.11}$$

où $\alpha=\max\left\{1,(n-1)\left(\sigma-1+\varepsilon\right)\right\}$.

Si on choisit ε tel que $0<\varepsilon<\frac{c-1}{c+1}$ dans (2.7.11), on trouve une contradiction. Donc $\left|w'\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z=\theta$, i.e. il existe une constante $M_2>0$, telle que

$$\left|w'\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant M_2.$$

D'où

$$\left|w\left(re^{i\theta}\right)\right|=\left|w\left(0\right)+\int_0^z w'\left(u\right)du\right|\leqslant\left|w\left(0\right)\right|+M_2\left|z\right|$$

sur le rayon $\arg z=\theta$. Dans les deux cas précédents, on a

$$\left|w\left(re^{i\theta}\right)\right|\leqslant\left|w\left(0\right)\right|+\left|w'\left(0\right)\right|\frac{|z|}{1!}+\left|w''\left(0\right)\right|\frac{|z|^2}{2!}+...+M\frac{|z|^n}{n!}\ \ (M>0)\tag{2.7.12}$$

sur le rayon $\arg z=\theta\in[0,2\pi)\setminus(E_1\cup H_1\cup H_2)$. Du théorème de Phragmén-Lindelöf [26], (2.7.12) est vérifiée sur le plan complexe entier. Donc, $w\left(z\right)$ est un polynôme. Mais $w\left(z\right)$ est une fonction transcendante, alors toute solution transcendante de (2.1.6) est d'ordre infini. Maintenant on prouve que (2.1.6) ne peut pas avoir un polynôme non nul comme solution. Supposons que $w\left(z\right)$ est un polynôme non nul de degré d. On peut choisir un rayon $\arg z=\theta$ tel que $\delta\left(P_1,\theta\right)>0$. De (2.1.6), on a

$$\left|A_1\left(z\right)e^{P_1(z)}\right|\left|w'\left(z\right)\right|\leqslant\ \left|w^{(n)}\left(z\right)\right|+\left|A_0\left(z\right)e^{P_0(z)}\right|\left|w\left(z\right)\right|,\tag{2.7.13}$$

et en utilisant le lemme 2.2.7, on obtient

$$\left(1+o\left(1\right)\right)r^{d-1}\exp\left\{\left(1-\varepsilon\right)\delta\left(P_1,\theta\right)r^m\right\}$$
$$\leqslant\left(1+o\left(1\right)\right)\lambda r^d\exp\left\{\left(1+\varepsilon\right)\frac{1}{c}\delta\left(P_1,\theta\right)r^m\right\},$$

où $\lambda>0$ et ceci donne une contradiction en prenant ε tel que $0<\varepsilon<\frac{c-1}{c+1}$. Donc, toute solution $w\not\equiv0$ de (**??**) est d'ordre infini.

2.8 Preuve du théorème 2.1.6

Supposons que $\arg a_m\neq\arg b_m$. D'après le lemme 2.2.7, il existe un rayon $\arg z=\theta$ tel que $\theta\in[0,2\pi)\setminus(H_1\cup H_2)$, où H_1 et H_2 sont définies comme dans le lemme 2.2.7, $H_1\cup H_2$ de mesure linéaire nulle, et $\delta\left(P_0,\theta\right)>0$, $\delta\left(P_1,\theta\right)<0$ et pour $|z|=r$ suffisamment grand, on a

$$\left|A_0\left(z\right)e^{P_0(z)}+B_0\left(z\right)\right|\geqslant\left(1+o\left(1\right)\right)\exp\left\{\left(1-\varepsilon\right)\delta\left(P_0,\theta\right)r^m\right\},\tag{2.8.1}$$

et

$$\left|A_1\left(z\right)e^{P_1(z)}+B_1\left(z\right)\right|\leqslant\exp\left\{\left(1-\varepsilon\right)\delta\left(P_1,\theta\right)r^m\right\}\exp\left\{r^{\sigma(B_1)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$

$$\leqslant\exp\left\{r^{\sigma(B_1)+\varepsilon}\right\}.\tag{2.8.2}$$

Si on prend ε dans (2.8.1) et (2.8.2) tel que $\sigma\left(B_1\right)+\varepsilon<m$, alors les conditions (2.2.12), (2.2.13) du lemme 2.2.6 sont vérifiées. Alors toute solution $w\not\equiv0$ de (2.1.7) est d'ordre

infini.Maintenant, supposons que $a_m = cb_m \; (0 < c < 1)$. Alors $\delta(P_1, \theta) = c\delta(P_0, \theta)$. En utilisant la même méthode précédente, il existe un rayon $\arg z = \theta$ satisfaisant $\delta(P_1, \theta) = c\delta(P_0, \theta) > 0$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, on a

$$\left|A_0(z) e^{P_0(z)} + B_0(z)\right| \geqslant (1 + o(1)) \exp\{(1 - \varepsilon) \delta(P_0, \theta) r^m\} \tag{2.8.3}$$

et

$$\left|A_1(z) e^{P_1(z)} + B_1(z)\right| \leqslant \exp\left\{(1 + \varepsilon) c' \delta(P_0, \theta) r^m\right\}, \tag{2.8.4}$$

où $0 < c < c' < 1$. En prenant ε dans $(2.8.3)$, $(2.8.4)$ tel que $0 < \varepsilon < \frac{1-c'}{1+c'}$, alors du lemme 2.2.6., on obtient le résultat.

2.9 Preuve du théorème 2.1.7

On démontre le cas $Q(z) = h(z) e^{bz^m}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul. Le cas où $Q(z)$ est un polynôme se démontre par la même méthode.Supposons que w est une solution non nulle de $(2.1.8)$. Alors, d'après le lemme 2.2.9, théorème 2.1.4 et théorème 2.2.5, on a $\sigma(w) = \infty$ et $\sigma_2(w) \leqslant m$. On va traiter deux cas :

Cas 1. $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb \;\; (0 < c < 1)$. D'après le lemme 2.2.11, on a $\sigma_2(w) \geqslant m$; ce qui achève la démonstration.

Cas 2. $a = cb \; (c > 1)$. On utilise la démonstration par l'absurde. Supposons que $\sigma_2(w) = \alpha$ tel que $0 \leqslant \alpha < m$. D'après le théorème de Wiman-Valiron, on a

$$\frac{w^{(j)}(z)}{w(z)} = \left(\frac{\gamma_w(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), \; (j = 1, ..., n), \tag{2.9.1}$$

où $|w(z)| = M(r.w)$, $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie et $\gamma_w(r)$ est l'indice central de $w(z)$. De la remarque 2.2.1, il existe une suite de points $\left\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\right\}$ telle que $|w(z)| = M(r.w)$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_2$, (E_2 est définie comme dans le lemme 2.2.12) $r_k \to +\infty$ et pour $\varepsilon > 0$ et r_k suffisamment grand, on a

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log \gamma(r_k)}{\log r_k} = \infty, \tag{2.9.2}$$

$$\exp\left\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\right\} < \gamma(r_k) < \exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.9.3}$$

Posons $a = r_a e^{i\varphi}$, $\delta(az^m, \theta_0) = \cos(\varphi + m\theta_0) = \delta$; il existe trois cas à étudier :

1. $\delta < 0$
2. $\delta > 0$
3. $\delta = 0$.

Cas 1) $\delta < 0$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0$, pour k suffisamment grand, on a
$\delta(bz^m, \theta_k) = \delta_k = \frac{1}{c}\delta(az^m, \theta_k) < 0$, $\delta(-bz^m, \theta_k) = -\delta_k > 0$, $\delta(az^m - bz^m, \theta_k) = \delta(b(c-1) z^m, \theta_k) = (c-1)\delta_k < 0$.

On peut écrire l'équation (2.1.8) sous la forme

$$-e^{-bz^m}\frac{w^{(n)}(z)}{w(z)} = e^{b(c-1)z^m}\frac{w'(z)}{w(z)} + h(z). \tag{2.9.4}$$

En remplaçant (2.9.1) et (2.9.3) dans (2.9.4) et d'après le lemme 2.2.12, on a pour ε $(0<\varepsilon<1-\alpha)$ et k suffisamment grand

$$\begin{aligned}
&\exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^m\}\exp\left\{nr_k^{\alpha-\varepsilon}\right\}r_k^{-n}(1+o(1)) \\
&\leqslant \left|-e^{-bz^m}\frac{w^{(n)}(z_k)}{w(z_k)}\right| \\
&\leqslant \exp\{(1-\varepsilon)(c-1)(\delta_k)r_k^m\}\exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_k^{-1}+r_k^{d+1} \\
&\leqslant \exp\{(1-\varepsilon)(c-1)(\delta_k)r_k^m\}\exp\left\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_k^{d+1},
\end{aligned} \tag{2.9.5}$$

où $d=\deg h$. Comme $\delta_k<0$ et $0\leqslant\alpha<1$, alors (2.9.5) donne une contradiction.
Cas 2) $\delta>0$. Aussi comme $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta_0$, pour k assez grand, on a
$\delta(az^m,\theta_k)=\delta_k>0$, $\delta(-az^m,\theta_k)=-\delta_k<0$, $\delta((b-a)z^m,\theta_k)=\left(\frac{1-c}{c}\right)\delta_k<0$.
On peut écrire (2.1.8) sous la forme :

$$-\frac{w'(z)}{w(z)} = e^{-az^m}\frac{w^{(n)}(z)}{w(z)} + h(z)e^{(b-a)z^m}. \tag{2.9.6}$$

En remplaçant (2.9.1) et (2.9.3) dans (2.9.6) et en utilisant le lemme 2.2.12, on obtient, pour ε $(0<\varepsilon<1-\alpha)$ et k suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma(r_k)}{r_k}(1+o(1)) &\leqslant \exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^m\}\frac{\gamma^n(r_k)}{r_k^n}+ \\
&\quad +r_k^{d+1}\exp\left\{(1-\varepsilon)\left(\frac{1-c}{c}\right)(\delta_k)r_k^m\right\} \\
&\leqslant \exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k^m\}\exp\left\{nr_k^{\alpha+\varepsilon}\right\}r_k^{-n}(1+o(1)) \\
&\quad +r_k^{d+1}\exp\left\{(1-\varepsilon)\left(\frac{1-c}{c}\right)(\delta_k)r_k^m\right\},
\end{aligned} \tag{2.9.7}$$

où $d=\deg h$. De (2.9.7) on déduit que $\gamma(r_k)\to 0$ quand $k\to\infty$; et ceci contredit (2.9.2).
Cas 3) $\delta=0$. Comme pour tout k, $\operatorname{Re}\left\{ar_ke^{i\theta_k}\right\}=0$ et la demi-droite $\arg z=\theta_0$ est asymptote aux points $\left\{ar_ke^{i\theta_k}\right\}$, il existe $K>0$ telle que quand $k>K$, on a

$$\begin{aligned}
-1 &< \operatorname{Re}\left\{ar_ke^{i\theta k}\right\}<1 \\
-\frac{1}{c} &< \operatorname{Re}\left\{br_ke^{i\theta k}\right\}<\frac{1}{c}.
\end{aligned} \tag{2.9.8}$$

De (2.1.8) et (2.9.1), on obtient

$$-\left(\frac{\gamma(r_k)}{z_k}\right)^n(1+o(1)) = e^{az_k^m}\frac{\gamma(r_k)}{z_k}(1+o(1))+h(z_k)e^{bz_k^m}. \tag{2.9.9}$$

De (2.9.9), (2.9.8) et en tenant compte du fait que $c > 1$, on obtient, quand r_k est suffisamment grand :

$$\begin{aligned}\gamma^{n}\left(r_k\right)\left(1+o\left(1\right)\right) &\leqslant er_k^{n-1}\gamma\left(r_k\right)\left(1+o\left(1\right)\right)+er_k^{d+1}\\ &\leqslant 2er_k^{d+n}\gamma\left(r_k\right)\left(1+o\left(1\right)\right),\end{aligned}$$

$$\gamma^{n-1}\left(r_k\right)\left(1+o\left(1\right)\right)\leqslant 6r_k^{d+n}\left(1+o\left(1\right)\right). \tag{2.9.10}$$

C'est facile à voir que (2.9.10) contredit (2.9.2), ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] **I. Amemiya and M. Ozawa**, *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J. 10 (1981) Special Issue, 1-17.

[2] **B. Belaïdi,** Cours analyse complexe 3, master 2 ; 2011/2012.

[3] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Orders of solutions of an n-th order linear differential équations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[4] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Growth of solutions of an n-th order linear differential équations with entire coefficients*, Kodai Math. J. Vol. 25 (2002), N° 3, 240-245.

[5] **B. Belaïdi and K. Hamani**, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential équations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 17, Vol. 2003 (2003), 1-12.

[6] **B. Belaïdi,** *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential équations whose coefficients are entire functions,* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., N° 5, (2002), 1-8.

[7] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ *where the order* $(Q) = 1$, Science in China, Vol. 45, N°3 (2002), 290-300.

[8] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of a class of second order linear differential équations with entire coefficients,* Chin. Ann. of Math. 1999, 20A(1) 7-14.

[9] **Z. X. Chen, C. C. Yang,** *some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential équations,* Kodai. Math. J., 1999, 22, 273-285.

[10] **Z.-X. Chen and S.-A. Gao,** *The complexe oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential équations with transcendental entire coefficients,* J. Math. Anal. Appl, 179 (1993), 403-416.

[11] **J. B. Conway,** *Functions of one complex variable,* Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin 1978.

[12] **M. Frei**, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[13] **M. Frei**, *Über die Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung* $w'' + e^{-z}w' + (Konst.)\, w = 0$, Comment. Math. Helv. 36 (1962), 1-8.

[14] **G. G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential équations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), 415-429.

[15] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc., (2) **37** (1988), 88-104.

[16] **G. G. Gundersen**, **M. Steinbart and S. Wang,** *The possible orders of solutions of linear differential équations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[17] **G. G. Gundersen**, *On the question of whether* $f'' + e^{-z} f' + B(z) f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 102A (1986), 9-17.

[18] **S. Hamouda and B. Belaïdi,** *On the growth of solutions of* $w^{(n)} + e^{-z} w' + Q(z) w = 0$ *and some related extensions,* Hokkaido. Math. J. Vol 35 (2006) N° 3, 573-586.

[19] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[20] **W. K. Hayman**, The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method, Canad. Math. Bull ; 17 (1974), 317-358.

[21] **R. Nevanlinna,** *Analytic Functions,* Springer-Verlag New York. Heidelberg. Berlin 1970.

[22] **R. Nevanlinna,** Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[23] **Laine I.**,Nevalina Theory and C omplex Differential équations, W.de Gruyter,New York,1993

[24] **I. Laine and R. Yang,** *Finite order solutions of complexe linear differential équations,* Electron. J. Diff. Eqns, N°65, Vol. 2004 (2004), 1-8.

[25] **J. K. Langley**, *On complexe oscillation and a problem of Ozawa*, Kodai Math. J. 9 (1986), 430-439.

[26] **A. I. Markushevich**, *Theory of functions of a complexe variable,* Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[27] **M. Ozawa**, *On a solution of* $w'' + e^{-z} w' + (az + b) w = 0$, Kodai Math. J. 3 (1980), 295-309.

[28] **Ting-Bin Cao,** *Complex oscillation of entire solutions of higher-order differential équations*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 81, Vol. 2006 (2006), 1-8.

[29] **J. Tu, Z. X. Chen and X. Zheng**, *Growth of solutions of complex differential équations with coefficients of finite iterated order,* Electron. J. Diff. Eqns, N° 54, Vol. 2006 (2006), 1-8.

[30] **H. Wittich**, *Subnormalen Lösungen der Differentialgleichung* $w'' + p(e^z) w' + q(e^z) w = 0$, Nagoya Math. J. 30 (1967), 29-37.

[31] **H. Wittich**, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.